МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра фундаментальної та прикладної математики

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА

на тему: **«НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН КОНСТРУКЦІЙ ІЗ КОМПОЗИЦІЙНОГО МАТЕРІАЛУ З ПОРОЖНИСТИМИ ВОЛОКНАМИ»**

Виконав: студент 2 курсу, групи 8.1134

спеціальності 113 Прикладна математика
(шифр і назва спеціальності)

освітньої програми Прикладна математика
(назва освітньої програми)

Д.А. Нежевець
(ініціали та прізвище)

Керівник доцент кафедри загальної математики, доцент, к.ф.-м.н. Спиця О.Г.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Рецензент декан математичного факультету, професор, д.т.н. Гоменюк С.І.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Запоріжжя – 2025

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет математичний

Кафедра фундаментальної та прикладної математики

Рівень вищої освіти магістр

Спеціальність 113 Прикладна математика
(шифр і назва)

Освітня програма Прикладна математика

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри
фундаментальної та прикладної
математики, професор, д.т.н.

_____ Гребенюк С.М.
(підпис)

« ____ » _____ 2025 р.

ЗАВДАННЯ
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТУ

Нежевцю Давиду Андрійовичу
(прізвище, ім'я та по-батькові)

1. Тема роботи (проекту) Напружено-деформований стан конструкцій із композиційного матеріалу з порожнистими волокнами

керівник роботи (проекту) Спиця Оксана Геннадіївна, к.ф.-м.н., доцент
(прізвище, ім'я та по-батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом ЗНУ від « 28 » лютого 2025 року № 326-с

2. Строк подання студентом роботи 21.11.2025

3. Вихідні дані до роботи 1. Постановка задачі.
2. Перелік літератури.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень)
презентація

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання 02.04.2025

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів кваліфікаційної роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	Розробка плану роботи.	23.04.2025	
2.	Збір вихідних даних.	28.05.2025	
3.	Розробка першого розділу.	27.05.2025	
4.	Розробка другого розділу.	30.09.2025	
5.	Розробка третього розділу.	29.10.2025	
6.	Оформлення та нормоконтроль	17.11.2025	
	кваліфікаційної роботи.		
7.	Захист кваліфікаційної роботи.	16.12.2025	

Студент _____ Д. А. Нежевець
(підпис) (ініціали та прізвище)

Керівник роботи _____ О. Г. Спиця
(підпис) (ініціали та прізвище)

Нормоконтроль пройдено

Нормоконтролер _____ О. Г. Спиця

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота магістра «Напружено-деформований стан конструкцій із композиційного матеріалу з порожнистими волокнами»: 45 с., 12 рис., 25 джерел.

КОМПОЗИЦІЙНИЙ МАТЕРІАЛ, МАТРИЦЯ ЖОРСТКОСТІ, МЕТОД СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ, НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН, ПОРОЖНИСТЕ ВОЛОКНО

Об’єкт дослідження – процес деформування композиційного матеріалу з порожнистими волокнами та його чисельне моделювання за допомогою методу скінченних елементів.

Мета роботи: побудувати чисельну модель розв’язання двовимірної задачі пружності на основі методу скінченних елементів й та дослідити її поведінку при різних вихідних умовах.

Метод дослідження – аналітичний, чисельний, порівняльний.

У даній кваліфікаційній роботі описуються основні математичні співвідношення двовимірної задачі пружності для транстропного матеріалу, наводяться основні аналітичні формули для визначення ефективних пружних сталих композиційного матеріалу із порожнистими волокнами. Розглядається основна ідея методу скінченних елементів для розв’язання таких задач та особливості його застосування до анізотропних матеріалів.

Побудовано матрицю жорсткості скінченного елементу для розв’язання двовимірних задач механіки композиційних матеріалів із порожнистими волокнами, яку реалізовано у вигляді пакету прикладних програм.

Визначено напружено-деформований стан конструкції із композиційного матеріалу із порожнистими волокнами. Досліджено збіжність результатів розрахунків та залежність напружень та деформацій від схеми армування, об’ємного вмісту волокна у композиті та об’ємного вмісту порожнини у волокні.

SUMMARY

Master's Qualifying Theses "Stress-Strain State of Structures Made of Composite Material with Hollow Fibers": 45 p., 12 figures, 25 references.

COMPOSITE MATERIAL, STIFFNESS MATRIX, FINITE ELEMENT METHOD, STRESS-STRAIN STATE, HOLLOW FIBER

The object of research is the process of deformation of a composite material with hollow fibers and its numerical modeling using the finite element method.

The purpose of the work: construction a numerical model for solving a two-dimensional elasticity problem based on the finite element method and to investigate its behavior under different initial conditions.

The research method is analytical, numerical, comparative.

This qualification work describes the main mathematical relations of the two-dimensional elasticity problem for a transtropic material, and provides the main analytical formulas for determining the effective elastic constants of a composite material with hollow fibers. The main idea of the finite element method for solving such problems and the features of its application to anisotropic materials are considered.

A finite element stiffness matrix is constructed for solving two-dimensional problems of the mechanics of composite materials with hollow fibers, which is implemented as a package of applied programs.

The stress-strain state of a structure made of a composite material with hollow fibers is determined. The convergence of the calculation results and the dependence of stresses and strains on the reinforcement scheme, the volume content of fibers in the composite and the volume content of voids in the fibers are investigated.

ЗМІСТ

Завдання на кваліфікаційну роботу 2
Реферат 4
Summary 5
Вступ 7
1 Особливості моделювання напружено-деформованого стану конструкцій із композитів методом скінченних елементів 10
1.1 Поняття про метод скінченних елементів 10
1.2 Застосування методу скінченних елементів у механіці композитів 12
1.3 Моделювання неоднорідності матеріалу 14
1.4 Висновки до розділу 1 20
2 Основні співвідношення двовимірного методу скінченних елементів для конструкцій із композиційних матеріалів 21
2.1 Постановка задачі 21
2.2 Основні співвідношення двовимірної теорії пружності 21
2.3 Дискретизація області та визначення функцій форми 24
2.4 Основні співвідношення матриці жорсткості прямокутного скінченного елементу для волокнистого композиційного матеріалу 28
2.5 Висновки до розділу 2 34
3 Визначення напружено-деформованого стану пластинчатих конструкцій методом скінченних елементів 35
3.1 Постановка задачі 35
3.2 Чисельні результати розрахунку пластинчатої конструкції із волокнистого композиту 36
3.3 Висновки до розділу 3 40
Висновки 42
Перелік посилань 43

ВСТУП

Композиційні матеріали знаходять застосування у машинобудуванні, транспорті, аерокосмічній галузі, суднобудуванні, будівництві та інших галузях. Таке широке коло застосування цих матеріалів обумовлене наявністю у них унікальних властивостей, таких як високі міцність, витривалість, жорсткість, жароміцність та інші, які можна запрограмувати ще на стадії створення композиційного матеріалу шляхом варіювання властивостями компонентів, їх розташуванням, часткою тощо.

Із усього різновиду конструкційних матеріалів виокремимо ті, які можна віднести до композиційних матеріалів. Композиційний матеріал можна ідентифікувати за наступними ознаками:

- не зустрічаються у природі, створені людиною;
- складаються із двох та більше компонентів, які розрізняються за своїм хімічним складом і розділені чітко вираженою межею;
- мають нові властивості, відмінні від їх компонентів;
- неоднорідні в мікромасштабі й однорідні в макромасштабі;
- склад, форма й розподіл компонентів «спроєктовані» заздалегідь;
- властивості визначаються кожним із компонентів, які у зв’язку з цим мають бути у матеріалі у достатньо великій кількості.

В композиційному матеріалі зазвичай можна виділити, як складову, неперервний матеріал, який називається матрицею, й переривчастий матеріал (або декілька) – армуючий. Як армуючі компоненти можуть використовуватись дискретні включення різної форми – сферичні, еліпсоїдні, конічні, голко- та дископодібні, неперервні та дискретні волокна, плівки, порошкові компоненти тощо.

Одним із найбільш вживаних видів армуючих компонентів є неперервні волокна, які можуть бути як суцільними, так і порожнистими.

Наявність неоднорідності, тобто армуючих складових у матеріалі,

приводить до суттєвої зміни механічних властивостей композиційного матеріалу. Так, якщо розглядати композиційний матеріал, армований односпрямованими неперервними суцільними або порожнистими волокнами, то він буде мати у макромасштабі транстропні (трансверсально-ізотропні властивості). Тобто у напрямку осі волокна будуть одні механічні властивості, а у площині (площина ізотропії), перпендикулярній осі волокна, матеріал буде мати інші властивості.

При проєктуванні конструкцій із композиційних матеріалів одним із основних видів розрахунку є розрахунок на міцність. В цьому випадку визначають напруження та деформації, що виникають при роботі конструкції у реальних умовах експлуатації, й оцінюють їх рівень, орієнтуючись на висунуті технічні вимоги.

З математичної точки зору цей розрахунок може бути зведений до розв’язання крайової задачі. Спочатку створюється геометрична модель конструкції у вигляді сукупності аналітичних виразів, що описуються її межі; процеси, що відбуваються при функціонуванні конструкції – деформування – можна описати диференціальними рівняннями (системами диференціальних рівнянь). Зовнішній вплив на конструкцію моделюється за допомогою крайових умов – це обмеження на переміщення певних частин конструкції та прикладені навантаження.

Розв’язання такої задачі аналітичними (точними) методами можливе лише для дуже обмеженої кількості реальних задач. До складнощів які виникають при розв’язанні цих крайових задач можна віднести наступне. Конструкції мають складну геометричну конфігурацію. Диференціальні співвідношення, що описують процеси в середині конструкції, складні до розв’язання аналітичними методами. Наявність неоднорідності й, як наслідок, анізотропії властивостей додатково ускладнюють диференціальні рівняння. Крайові умови не мають симетрії, періодичності тощо.

Враховуючи описані вище математичні складнощі до розв’язання крайових задач теорії пружності композиційних матеріалів, на передній план

виходять чисельні методи. До найбільш поширених можна віднести метод скінченних елементів (МСЕ), метод скінченних різниць (МСР), метод граничних елементів (МГЕ) тощо. Основна ідея усіх цих методів полягає у тому, що неперервна геометрична й механічна модель конструкції замінюється дискретною.

1 ОСОБЛИВОСТІ МОДЕЛЮВАННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ КОНСТРУКЦІЙ ІЗ КОМПОЗИТІВ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

1.1 Поняття про метод скінченних елементів

Одним із основних видів розрахунку при створенні нових конструкцій та аналізі функціонування існуючих конструкцій є розрахунок на міцність. В процесі проведення таких розрахунків моделюються умови експлуатації конструкції й визначається напружено-деформований стан, який дозволяє робити висновки про роботоспроможність конструкції. В результаті такого моделювання приходимо до формулювання крайової задачі для диференціальних рівнянь.

Проблема розв’язання таких задач значною мірою пов’язана із геометрією області, для якої ця задача сформульована. Так, якщо маємо одновимірну область або двовимірну область (з певною осьовою або циклічною симетрією), то для розв’язання такої задачі, можливо, можна застосувати аналітичні (точні) методи. Але на практиці такі задачі складають невелику частину і більшість задач, пов’язана із складною геометрією області, що носить двовимірний та тривимірний характер. Тому розв’язання таких задач неможливе за допомогою аналітичних методів, а можливим інструментом для вирішення цієї проблеми є застосування чисельних методів.

Найпоширенішим чисельним методом є метод скінченних елементів. Основною ідеєю цього методу є те, що досліджувана область представляється у виді сукупності підобластей малих, але скінченних розмірів – скінченних елементів. Кожен елемент має набір характерних точок – вузлів скінченного елементу, які, як правило, лежать на межі скінченного елементу, й визначаються так, щоб кожен вузол одного скінченного елементу співпадав із вузлом

суміжного скінченного елементу. Тобто скінченні елементи пов’язані один із одним вузловими точками.

В середині кожного скінченного елементу задаються апроксимуючі функції, як правило, у вигляді многочленів. Апроксимуючі функції описують поведінку шуканої функції через її вузлові значення. Визначивши поведінку шуканої функції в середині кожного скінченного елементу, в сукупності будемо мати опис поведінки функції у всій досліджуваній області.

В залежності від розмірності задачі можна використовувати й скінченні елементи різної розмірності.

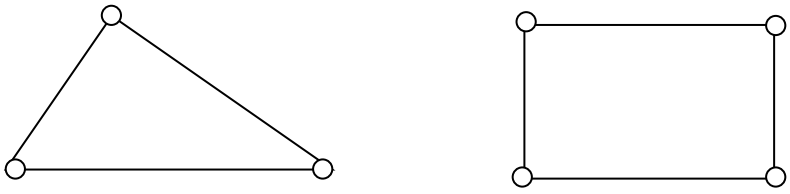
Так, якщо область є одномірною, або може бути представлена такою, доцільно застосовувати стержневі (одновимірні) скінченні елементи (рис. 1.1).



а) б)

Рисунок 1.1 – Стержневі скінченні елементи:
а) – лінійний; б) – квадратичний

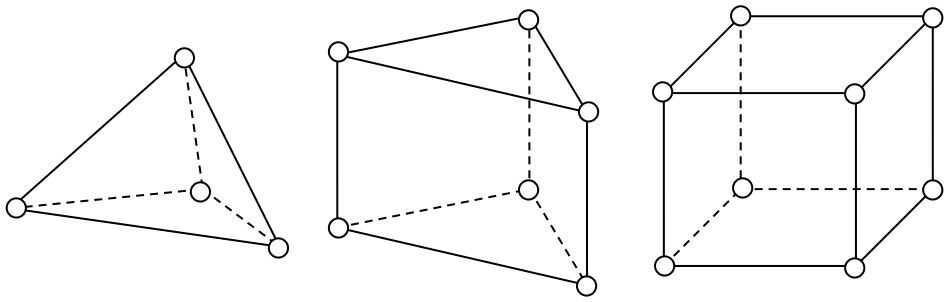
При збільшенні розмірності задачі збільшується і розмірність скінченних елементів – для двовимірних випадків використовуються плоскі (двовимірні) скінченні елементи (рис. 1.2).



а) б)

Рисунок 1.2 – Двовимірні скінченні елементи:
а) – трикутний; б) – чотирикутний

І, нарешті, у найбільш загальному випадку використовуються просторові чотири-, п’яти- та шестигранні скінченні елементи (рис. 1.3).



а) б) в)

Рисунок 1.3 – Тривимірні скінченні елементи:
а) – тетраедр; б) – трикутна призма; в) – паралелепіпед

При розв’язанні задач механіки залежно від шуканих функцій МСЕ може застосовуватись у трьох модифікаціях: у формі методу переміщень (невідомі функції – компоненти вектору переміщень); у формі методу сил (невідомі функції – компоненти тензору напружень); у змішаній формі (на одній частині СЕ невідомі функції – компоненти вектору переміщень, на іншій – компоненти тензору напружень). При інженерних розрахунках більше поширення набув МСЕ у формі методу переміщень, завдяки чому понижується розмірність задачі (для тривимірного випадку маємо три невідомі компоненти вектору переміщень, у той час як для напружень таких невідомих шість, для двовимірного, відповідно, для переміщень – дві, для напружень – три) та зменшуються складнощі, пов'язані з виконанням граничних умов.

1.2 Застосування методу скінченних елементів у механіці композитів

Широке використання композиційних матеріалів у різних галузях обумовлює розробку нових САПР або модулів САПР для моделювання механічної поведінки виробів із композитів. Для розрахунку реальних конструкцій, як правило, використовуються чисельні методи, в тому числі і методу скінченних елементів. Розглянемо приклади використання методу скінченних елементів для розрахунку таких конструкцій.

Використання широко відомої програмної системи аналізу ANSYS для визначення фізико-механічних властивостей полімерного композиту представлено у роботі [9]. Моделювання базувалось на застосуванні просторового методу скінченних елементів до композиційного матеріалу, армованого сферичними та циліндричними включеннями.

Іншим прикладом застосування методу скінченних елементів на базі програмного забезпечення ANSYS є визначення напружено-деформованого стану листової ресори з композиційного матеріалу із подальшим раціональним вибором матеріалу волокон із можливих варіантів (Е-скло, вуглець, бор та графіт) [3].

У роботі [15] для композиційного матеріалу із застосуванням алгоритму випадкової послідовної адсорбції змодельовано випадкове розташування циліндричних та сферично-циліндричних включень. А в подальшому представницький об’єм такого матеріалу досліджено методом скінченних елементів.

Із використанням статистичних досліджень зображень мікроструктури композиційного матеріалу розроблено два типи представницьких об’ємних елементів з урахуванням конфігурації та розподілу армуючих елементів та порожнин [4]. Зазначені представницькі об’ємні елементи досліджені просторовим методом скінченних елементів з метою прогнозування пружних та пластичних характеристик композиційного матеріалу (політетрафторетилен-алюміній).

Для підвищення точності розрахунків методом скінченних елементів запропоновано ряд модифікацій. Так у роботі [6] представлено моментну схему скінченного елементу, яка полягає у подвійній апроксимації компонент вектору переміщень та компонент тензору деформацій, та її застосування для дослідження конструкцій із композиційних матеріалів із просторовим армуванням волокнами.

Враховуючи складну структуру композиційних матеріалів їх дослідження часто має ієрархічний характер на багатьох рівнях, які можна виокремити, –

мікро- та макрорівня (а можливо і більшій їх кількості). Одним із таких підходів є використання модифікації методу скінченних елементів FE^2, коли цей метод послідовно використовується на декількох рівнях. Так, цей підхід використано у роботі [10] для аналізу поведінки композиту в умовах пластичного деформування (теорія малих деформацій). Іншим прикладом застосування методу скінченних елементів FE^2 для проєктування конструкцій із застосуванням одночасної дворівневої оптимізації для зменшення концентрації напружень є робота [12], у якій досліджено жорсткісні властивості композиційного матеріалу із еліптичними включеннями.

Незалежне дослідження напружено-деформованого стану композиційного матеріалу на різних рівнях – мікро-, мезо- та макрорівні – із застосуванням методу скінченних елементі наведено у роботі [11], де за допомогою різних типів скінченних елементів були розв’язані задачі для різних законів стану, типу анізотропії матеріалу тощо.

1.3 Моделювання неоднорідності матеріалу

Іншою проблемою при математичному моделюванні композиційних матеріалів є труднощі при описанні неоднорідності, пов’язаної із наявністю великої кількості армуючих включень. Описання кожного із них призведе до громіздких моделей, використання яких практично не можливе. Тому для моделювання особливостей механічної поведінки композиту, обумовленої наявністю неоднорідностей, такий матеріал представляється «уявним» матеріалом із механічними характеристиками – ефективними механічними характеристиками – які найкращим чином описують поведінку вихідного матеріалу. Визначення ефективних пружних характеристик композиційних матеріалів з порожнистими волокнами вимагає врахування трьох фаз – матеріалу матриці, матеріалу волокна і порожнини. Такі дослідження наведені у роботах [3, 5, 7, 17-19, 21, 22]. Як правило, при армуванні волокнами «уявний» матеріал

є транстропним і для його ідентифікації необхідно знати п’ять пружних характеристик: E_x – повздовжній модуль пружності, E_y – поперечний модуль пружності, μ_{xy}, μ_{zy} – коефіцієнти Пуассона, G_{xy} – модуль зсуву (x – напрям армування волокнами).

Для побудови подальших математичних моделей скористаємося аналітичними співвідношеннями для поліармованих композиційних матеріалів, що армовані n сортами порожнистих волокон (різні пружні характеристики для кожного сорту) [2]:

$$E_x = \sum_{i=1}^{n} E_i V_i \left(1 - q_i^2\right) + E_m V_m, \tag{1.1}$$

$$\mu_{xy} = \mu_m - \frac{\sum_{i=1}^{n} \dfrac{V_i \left(1 - q_i^2\right)(\mu_m - \mu_i)(\chi_m + 1)}{2(1 - q_i^2) + (\chi_i - 1 + 2q_i^2)\, G_m / G_i}}{V_m + \sum_{i=1}^{n} \dfrac{V_i (1 - q_i^2)(\chi_m + 1)}{2(1 - q_i^2) + (\chi_i - 1 + 2q_i^2)\, G_m / G_i}}, \tag{1.2}$$

$$E_y = \left(\frac{\mu_{xy}^2}{E_x} + \frac{\chi_m + 1}{8 G_m} \left(\frac{1}{N} - \frac{2Q}{1 + Q} \right) \right)^{-1}, \tag{1.3}$$

$$\frac{\mu_{zy}}{E_y} = -\frac{\mu_{xy}^2}{E_x} + \frac{\mu_m}{2 G_m} + \frac{\chi_m + 1}{8 G_m} \left(\frac{N - 1}{N} - \frac{2Q}{1 + Q} \right), \tag{1.4}$$

$$G_{xy} = G_m \frac{V_m + 2 \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\left(1 - q_i^2\right) V_i}{1 - q_i^2 + (1 + q_i^2)\, G_m / G_i}}{1 - \sum_{i=1}^{n} V_i \dfrac{1 - q_i^2 - (1 + q_i^2)\, G_m / G_i}{1 - q_i^2 + (1 + q_i^2)\, G_m / G_i}}, \tag{1.5}$$

де E_i, E_m – поздовжній модуль пружності волокна та матриці відповідно;

μ_i, μ_m – коефіцієнт Пуассона волокна та матриці відповідно;

V_i, V_m – об’ємна частка волокна та матриці відповідно;

G_i, G_m – модуль зсуву волокна та матриці відповідно;

q_i – відношення діаметру порожнини до зовнішнього діаметру волокна;

величини V_m, χ_i, χ_m, Q, N визначаються за співвідношеннями:

$$V_m = 1 - \sum_{i=1}^{n} V_i,$$

$$\chi_i = 3 - 4\mu_i,\ \chi_m = 3 - 4\mu_m,$$

$$Q = \sum_{i=1}^{n} V_i \frac{1 - q_i^2 - \left(1 + \chi_i q_i^2\right) G_m/G_i}{(1 - q_i^2)\chi_m + (1 + \chi_i q_i^2)\, G_m/G_i},$$

$$N = V_m + \sum_{i=1}^{n} \frac{V_i(\chi_m + 1)\left(1 - q_i^2\right)}{2(1 - q_i^2) + (\chi_i - 1 + 2q_i^2)\, G_m/G_i}. \qquad (1.6)$$

Наведені аналітичні співвідношення можна застосовувати для волокнистих композитів із ізотропними компонентами, для моделювання механічної поведінки волокнистого композиційного матеріалу із транстропними компонентами скористаємося формулами, отриманими для двокомпонентного односпрямованого композиту з транстропною матрицею та транстропним порожнистим волокном.

Для поздовжнього модулю пружності маємо [14]:

$$E_1 = E_1^* \frac{\alpha}{d^\circ \alpha - \gamma}\Big(d^* f + d^\circ (1 - f - g)\Big), \qquad (1.7)$$

де f та g – об'ємна частка матеріалу волокна та порожнини в композиті відповідно;

$E_1^*, E_2^*, \nu_{12}^*, \nu_{21}^*, \nu_{23}^*$ – пружності характеристики матеріалу матриці;

$E_1^\circ, E_2^\circ, \nu_{12}^\circ, \nu_{21}^\circ, \nu_{23}^\circ$ – пружні характеристики матеріалу волокна;

величини $d^\circ, d^*, \alpha, \beta, \gamma$ визначаються за співвідношеннями:

$$d^\circ = \frac{\alpha + \beta \nu_{12}^\circ}{\alpha E_1^\circ},$$

$$d^* = \frac{\alpha + \beta \nu_{12}^*}{\alpha E_1^*},$$

$$\alpha = (1-f-g)\left(\left(E_2^*\nu_{23}^\circ - E_2^\circ\nu_{23}^*\right)f - E_2^*(f+2g)\right) - E_2^\circ f(1+f+g),$$

$$\beta = 2(f+g)\left(\nu_{21}^\circ E_2^*(1-f-g) + \nu_{21}^* E_2^\circ f\right),$$

$$\gamma = 2f(f+g)\left(\nu_{21}^\circ E_2^*\frac{\nu_{12}^*}{E_1^*} - \nu_{21}^* E_2^\circ\frac{\nu_{12}^*}{E_1^\circ}\right). \qquad (1.8)$$

Коефіцієнт Пуассона буде визначатися формулою [14]:

$$\nu_{12} = \frac{\nu_{21}^*\nu_{12}^* d^\circ\alpha - \gamma}{\nu_{21}^*(d^\circ\alpha - \gamma)}. \qquad (1.9)$$

Для поздовжнього модуля зсуву будемо мати співвідношення [13]:

$$G_{12} = \frac{G_{12}^*\left(G_{12}^\circ f(1+f+g)^2 + G_{12}^*(f+2g)(1-(f+g)^2)\right)}{G_{12}^*(f+2g)(1+f+g)^2 + G_{12}^\circ f(1-(f+g)^2)}. \qquad (1.10)$$

Із використанням умови узгодженості – рівності радіальних переміщень – для поперечного модуля пружності будемо мати [2]:

$$E_2 = 2\eta E_2^*/(\eta(4\gamma_3(1-\nu_{21}^*\nu_{12}^*) + (1+\nu_{23}^*) + \gamma_1) +$$

$$+2(f+g)\left(f\gamma_1 E_2^\circ - E_2^*\left((f+2g)\gamma_2 + 2g\nu_{23}^\circ\right)\right)\Big), \qquad (1.11)$$

де $\gamma_1 = (1-\nu_{23}^*) - \frac{d_0 f\nu_{21}^*}{d^* f + d^\circ(1-f-g)}$,

$\gamma_2 = \left(1-\nu_{23}^\circ\right) - \frac{d^\circ(f+g-1)\nu_{21}^\circ}{d^* f + d^\circ(1-f-g)}$,

$$\gamma_3 = \frac{1}{3\chi_3(g-1)(f+2g+1)(f+g-1)} \times$$

$$\times\left(\left((f+g)\left(3g(f+2g) - 2(f+3)\right) - fg\right)\chi_1 + f^2\chi_2 +\right.$$

$$\left.+\left((f+g)^2 + g(f+2g)\right)\chi_3\right),$$

$$\gamma_4 = \frac{1}{3\chi_3(g-1)(f+2g+1)(f+g-1)} \times$$

$$\times \left(\left((g-1)\left(4(f+g)^2 + g(f+2g)\right) - f^2 g \right) \chi_1 - \right.$$

$$\left. - f^2 \chi_2 - \left((f+g)^2 + g(f+2g)\right)\chi_3 \right),$$

$$d^\circ = \frac{\nu_{21}^\circ}{E_2^\circ}\left(\nu_{21}^\circ\left(\frac{\tau}{\eta}f+1\right) - \frac{2\nu_{21}^\circ}{1-\nu_{23}^\circ} - 2\nu_{21}^* E_2^\circ f\frac{f+g}{\eta}\right) - \frac{1-\nu_{23}^\circ-2\nu_{21}^\circ\nu_{12}^\circ}{E_1^\circ(1-\nu_{23}^\circ)},$$

$$d^* = \frac{\nu_{21}^*}{E_2^*}\left(\nu_{21}^\circ\left(\frac{\tau}{\eta}f+1\right) - \frac{2\nu_{21}^*}{1-\nu_{23}^*} - 2\nu_{21}^* E_2^\circ f\frac{f+g}{\eta}\right) - \frac{1-\nu_{23}^*-2\nu_{21}^*\nu_{12}^*}{E_1^*(1-\nu_{23}^*)},$$

$$d_0 = \left(\frac{\nu_{21}^\circ}{E_2^\circ}\frac{\tau}{\eta} - 2\nu_{21}^*\frac{f+g}{\eta}\right)\left(\frac{E_2^\circ}{E_2^*}f(1-\nu_{23}^*) - \right.$$

$$\left. - f\left(1-\nu_{23}^\circ\right) - 2g\right) - \frac{2\nu_{21}^*}{E_2^*} + \frac{\nu_{21}^\circ}{E_2^\circ}\left(1+\nu_{23}^\circ\right) + \frac{\nu_{21}^\circ}{E_2^*}(1-\nu_{23}^*),$$

$$\eta = E_2^*\left(2g + f\left(1-\nu_{23}^\circ\right)\right)(f+g-1) -$$

$$- f E_2^\circ\left((f+g)(1-\nu_{23}^*) + (1+\nu_{23}^*)\right),$$

$$\tau = E_2^*\left(1+\nu_{23}^\circ\right)(f+g-1) + E_2^\circ\left((f+g)(1-\nu_{23}^*) + (1+\nu_{23}^*)\right),$$

$$\chi_1 = d_{13}t_4 - d_{23}t_3,$$

$$\chi_2 = d_{23}t_2 - d_{13}t_1,$$

$$\chi_3 = t_1 t_3 - t_2 t_4,$$

$$d_{11} = k_{11}\left(f^2 + 3(f+g)(g-1)\right) - 3k_{12}(f+g)(g-1)(f+2g+1),$$

$$d_{12} = k_{13}((f+g)^2 + (f+g)(1-3g) + 1) -$$

$$- 3k_{14}(f+g)(g-1)(f+2g+1),$$

$$d_{13} = k_{13}E_2^*(f+g-1)((f+g)^2 + f + g + 1) +$$

$$+ E_2^\circ f\left(k_{11}\left(f^2 + 3g(f+g)\right) - \right.$$

$$\left. - 3(1+\nu_{23}^*)(f+g)^2(f+g-1)(g-1)(f+2g+1)\right),$$

$$d_{21} = k_{21}\left(f^2 + 3(f+g)(g-1)\right) +$$

$$+ 3k_{22}(f+g)(g-1)(f+2g+1),$$

$$d_{22} = k_{23}((f+g)^2 + (f+g)(1-3g) + 1) -$$

$$- 3k_{24}(f+g)(g-1)(f+2g+1),$$

$$d_{23} = k_{23}E_2^*(f+g-1)((f+g)^2 + f + g + 1) +$$

$$+ E_2^\circ f\left(k_{21}\left(f^2 + 3g(f+g)\right) - \right.$$

$$-3(1+\nu_{23}^{*})(f+g)^2(f+g-1)(g-1)(f+2g+1)\big),$$

$$k_{11}=4(f+g)^3(\nu_{23}^{*}+\nu_{21}^{*}\nu_{12}^{*})-(1+\nu_{23}^{*})(1+3(f+g)^2),$$

$$k_{12}=4(f+g)(1-\nu_{21}^{*}\nu_{12}^{*})+(1+\nu_{23}^{*})((f+g)^2-1),$$

$$k_{13}=(3g(f+g)^2+g^3)\big(1+\nu_{23}^{\circ}\big)-4(f+g)^3\big(\nu_{23}^{\circ}+\nu_{21}^{\circ}\nu_{12}^{\circ}\big),$$

$$k_{14}=((f+g)^2-g^2)\big(1+\nu_{23}^{\circ}\big)+4g(f+g)\big(1-\nu_{21}^{\circ}\nu_{12}^{\circ}\big),$$

$$k_{21}=2(f+g)^3(3+\nu_{23}^{*}-2\nu_{21}^{*}\nu_{12}^{*})+(1+\nu_{23}^{*})(1-3(f+g)^2),$$

$$k_{22}=2(f+g)(\nu_{23}^{*}+2\nu_{21}^{*}\nu_{12}^{*}-1)-(1+\nu_{23}^{*})((f+g)^2+1),$$

$$k_{23}=(3g(f+g)^2-g^3)\big(1+\nu_{23}^{\circ}\big)-2(f+g)^3\big(3+\nu_{23}^{\circ}-2\nu_{21}^{\circ}\nu_{12}^{\circ}\big),$$

$$k_{24}=((f+g)^2+g^2)\big(1+\nu_{23}^{\circ}\big)-2g(f+g)\big(\nu_{23}^{\circ}+2\nu_{21}^{\circ}\nu_{12}^{\circ}-1\big),$$

$$t_1=d_{21}E_2^{\circ}f+k_{23}E_2^{*}(f+g-1)^3,$$

$$t_2=d_{11}E_2^{\circ}f+k_{13}E_2^{*}(f+g-1)^3,$$

$$t_3=k_{11}E_2^{\circ}f^3+d_{12}E_2^{*}(f+g-1),$$

$$t_4=k_{21}E_2^{\circ}f^3+d_{22}E_2^{*}(f+g-1),$$

Із використанням умови рівності радіальних переміщень для поперечного модуля пружності будемо мати:

$$E_2=2\eta E_2^{*}/(\eta(4\gamma_4(1-\nu_{21}^{*}\nu_{12}^{*})+(1+\nu_{23}^{*})+\gamma_1)+$$
$$+2(f+g)\left(f\gamma_1E_2^{\circ}-E_2^{*}\left((f+2g)\gamma_2+2g\nu_{23}^{\circ}\right)\right)\Big). \qquad (1.12)$$

Аналогічно, для коефіцієнта Пуассона на основі рівності радіальних переміщень будемо мати [2]:

$$\nu_{23}=(\eta(4\gamma_3(1-\nu_{21}^{*}\nu_{12}^{*})+(1+\nu_{23}^{*})-\gamma_1)-$$
$$-2(f+g)\left(f\gamma_1E_2^{\circ}-E_2^{*}\left((f+2g)\gamma_2+2g\nu_{23}^{\circ}\right)\right)\Big/$$
$$(\eta(4\gamma_3(1-\nu_{21}^{*}\nu_{12}^{*})+(1+\nu_{23}^{*})+\gamma_1)+$$

$$+2(f+g)\left(f\gamma_1 E_2^{\circ} - E_2^{*}\left((f+2g)\gamma_2 + 2g\nu_{23}^{\circ}\right)\right)\Big), \qquad (1.13)$$

Для коефіцієнта Пуассона на основі рівності окружних переміщень будемо мати [2]:

$$\nu_{23} = (\eta(4\gamma_4(1-\nu_{21}^{*}\nu_{12}^{*}) + (1+\nu_{23}^{*}) - \gamma_1) -$$
$$-2(f+g)\left(f\gamma_1 E_2^{\circ} - E_2^{*}\left((f+2g)\gamma_2 + 2g\nu_{23}^{\circ}\right)\right)\Big)/$$
$$(\eta(4\gamma_4(1-\nu_{21}^{*}\nu_{12}^{*}) + (1+\nu_{23}^{*}) + \gamma_1) +$$
$$+2(f+g)\left(f\gamma_1 E_2^{\circ} - E_2^{*}\left((f+2g)\gamma_2 + 2g\nu_{23}^{\circ}\right)\right)\Big). \qquad (1.14)$$

1.4 Висновки до розділу 1

У розділі розглянуто ідею методу скінченних елементів, основні типи скінченних елементів, в тому числі в залежності від розмірності задачі, модифікації цього методу.

Наведено приклади застосування методу скінченних елементів до розв’язання задач механіки для різних типів композиційних матеріалів, в тому числі із застосування відомих САПР; особливості застосування МСЕ до неоднорідних матеріалів.

Описано основні моделі переходу від неоднорідного матеріалу до однорідного в результаті процедури гомогенізації. Згідно цим моделям неоднорідний волокнистий композиційний матеріал представляється «уявним» транстропним однорідним матеріалом, властивості якого залежать від властивостей матеріалу матриці та матеріалу волокна, об’ємної частки волокна у композиті та об’ємної частки порожнини у волокні. Площина ізотропії такого матеріалу є перпендикулярною осі волокна.

2 ОСНОВНІ СПІВВІДНОШЕННЯ ДВОВИМІРНОГО МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ КОНСТРУКЦІЙ ІЗ КОМПОЗИЦІЙНИХ МАТЕРІАЛІВ

2.1 Постановка задачі

Метод скінченних елементів – один із найпоширеніших чисельних методів, що використовується при моделюванні явищ та процесів. Як правило, досліджувані математичні моделі трансформуються у крайові задачі для диференціальних рівнянь. Розглянемо основні співвідношення методу скінченних елементів для двовимірних задач, а саме для моделювання напружено-деформованого стану конструкцій із композиційних матеріалів, армованих порожнистими волокнами.

2.2 Основні співвідношення двовимірної теорії пружності

У двовимірних задачах механіки розглядається двовимірна область, кожна точка якої характеризується трьома величинами – напруженнями, деформаціями та переміщеннями. Для двовимірної задачі механіки незалежними компонентами тензора напружень будуть три складові тензора напружень, такі як σ_{11}, σ_{22} (нормальні) та σ_{12} (дотичні). Іншою величиною є тензор деформацій, який також складається із трьох компонентів – $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}$ (лінійні деформації) та γ_{12} (кут зсуву). Ці величини можна записати у векторній формі:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}; \ \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}. \tag{2.1}$$

Також у кожній точці двовимірної області мають бути виконані рівняння

рівноваги в виді

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + G_1 = 0; \\ \dfrac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + G_2 = 0, \end{cases}$$

які теж можуть бути записані у матричній формі:

$$[\partial]\{\sigma\} + \{G\} = \{0\},$$

тут матриця $[\partial]$ називається матрицею диференціювання й має вид:

$$[\partial] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix}, \tag{2.2}$$

а вектор $\{G\}$ називається вектором зовнішнього навантаження, який, як правило, діє на межі досліджуваної області:

$$\{G\} = \begin{Bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{Bmatrix}.$$

Третю величину, що характеризую напружено-деформований стан двовимірної області, – вектор переміщень можна також представити у векторному виді:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}. \tag{2.3}$$

Усі три величини пов’язані між собою певними механічними співвідношеннями. Розглянемо їх.

Зв’язок між складовими тензору деформацій та вектору переміщень описується геометричними співвідношеннями або співвідношеннями Коші:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2},$$
$$\gamma_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1},$$

або у матричній формі:

$$\{\varepsilon\} = [\partial]\{u\}. \quad (2.4)$$

Механічний закон, що відображає зв’язок між компонентами тензору напружень та компонентами тензору деформацій, називається законом стану і у загальному вигляді може бути представлений у наступній векторно-матричній формі:

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\}, \quad (2.5)$$

тут $[C]$ – матриця пружних сталих, яка у загальному виді для двовимірної області може бути записана так:

$$[C] = \begin{bmatrix} C^{1111} & C^{1122} & 0 \\ C^{2211} & C^{2222} & 0 \\ 0 & 0 & 2C^{1212} \end{bmatrix},$$

де C^{ijkl} – компоненти тензора пружних сталих.

Окрім рівнянь рівноваги, іншим альтернативним способом описання деформування двовимірних об’єктів є використання варіаційних принципів. Для

цього розглядається величина потенціальної енергії двовимірного об’єкта:

$$\Pi = W - A,$$

де W – енергія пружної деформації двовимірного об’єкту;

A – робота зовнішніх сил, що діють на двовимірний об’єкт.

Скористаємося формулюванням варіаційного принципу Лагранжа [1]: із всіх переміщень, що задовольняють кінематичним граничним умовам, стаціонарне значення потенціальної енергії надають ті переміщення, які задовольняють рівнянням рівноваги. Тобто варіація потенціальної енергії об’єкту повинна дорівнювати нулю:

$$\delta\Pi = 0,$$

або

$$\delta W - \delta A = 0. \tag{2.6}$$

2.3 Дискретизація області та визначення функцій форми

Будемо вважати, що досліджувані у роботі двовимірні об’єкти мають таку геометричну форму, що її можна апроксимувати скінченною кількістю прямокутних скінченних елементів. Тоді уся площа об’єкта може бути представлена сукупністю площ усіх прямокутних скінченних елементів:

$$S = \sum_{e=1}^{N} S^{(e)}, \tag{2.7}$$

тут $S^{(e)}$ – площа e-го скінченного елемента, N – загальна кількість скінченних елементів.

Тоді, у співвідношенні (2.6), і варіація енергії пружної деформації двовимірного об’єкту, і варіація роботи зовнішніх сил, що діють на двовимірний об’єкт, будуть складатися із варіацій енергій пружної деформації та варіацій робіт зовнішніх сил, відповідно, усіх N скінченних елементів:

$$\delta\left(\sum_{e=1}^{N} W^{(e)}\right) - \delta\left(\sum_{e=1}^{N} A^{(e)}\right) = 0. \qquad (2.8)$$

Розглянемо основні співвідношення методу скінченних елементів для одного прямокутного скінченного елементу із чотирма вузлами (рис. 2.1).

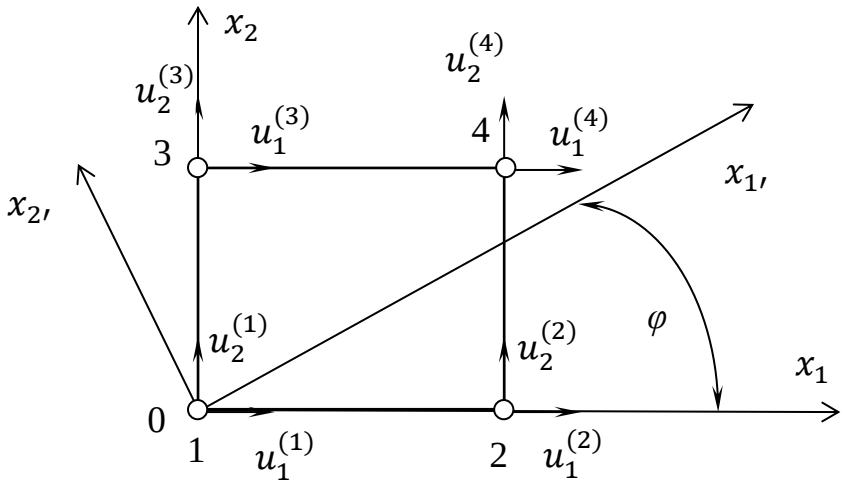


Рисунок 2.1 – Прямокутний скінченний елемент

Кожен вузол визначається двома координатами поставимо у відповідність координати $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}$ ($i = 1,2,3,4$ – номера вузлів). Кожен вузол скінченного елементу має два ступеня свободи $u_1^{(i)}, u_2^{(i)}$ ($i = 1,2,3,4$ – номера вузлів) – переміщення в напрямку координатних осей x_1, x_2.

Вузлові переміщення e-го скінченного елементу можна представити у виді вектору:

$$\{u\}^e = \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \\ u_1^{(3)} \\ u_2^{(3)} \\ u_1^{(4)} \\ u_2^{(4)} \end{Bmatrix}. \tag{2.9}$$

Як апроксимуючі функції для переміщень візьмемо такі:

$$u_1(x_1, x_2) = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_2 + \alpha_4 x_1 x_2, \tag{2.10}$$

$$u_2(x_1, x_2) = \alpha_5 + \alpha_6 x_1 + \alpha_7 x_2 + \alpha_8 x_1 x_2. \tag{2.11}$$

Враховуючи обрану систему координат (рис. 2.1) і форму скінченного елементу – прямокутний – знайдемо вісім невідомих сталих α_i через вузлові значення переміщень $u_1(x_1, x_2)$, $u_2(x_1, x_2)$, прийнявши за розміри прямокутника $a \times b$:

$$\begin{cases} \alpha_1 = u_1^{(1)}, \\ \alpha_1 + \alpha_2 a = u_1^{(2)}, \\ \alpha_1 + \alpha_3 b = u_1^{(3)}, \\ \alpha_1 + \alpha_2 a + \alpha_3 b + \alpha_4 ab = u_1^{(4)}; \end{cases} \tag{2.12}$$

$$\begin{cases} \alpha_5 = u_2^{(1)}, \\ \alpha_5 + \alpha_6 a = u_2^{(2)}, \\ \alpha_5 + \alpha_7 b = u_2^{(3)}, \\ \alpha_5 + \alpha_6 a + \alpha_7 b + \alpha_8 ab = u_2^{(4)}; \end{cases} \tag{2.13}$$

Розв’язавши ці дві системи, матимемо:

$$\begin{cases} \alpha_1 = u_1^{(1)}, \\ \alpha_2 = \dfrac{u_1^{(2)} - u_1^{(1)}}{a}, \\ \alpha_3 = \dfrac{u_1^{(3)} - u_1^{(1)}}{b}, \\ \alpha_4 = \dfrac{u_1^{(4)} - u_1^{(2)} - u_1^{(3)} + u_1^{(1)}}{ab}; \end{cases} \tag{2.14}$$

$$\begin{cases} \alpha_5 = u_2^{(1)}, \\ \alpha_6 = \dfrac{u_2^{(2)} - u_2^{(1)}}{a}, \\ \alpha_7 = \dfrac{u_2^{(3)} - u_2^{(1)}}{b}, \\ \alpha_8 = \dfrac{u_2^{(4)} - u_2^{(2)} - u_2^{(3)} + u_2^{(1)}}{ab}. \end{cases} \tag{2.15}$$

Підставимо співвідношення для α_i у апроксимацію переміщень (2.10), матимемо:

$$u_1(x_1, x_2) = u_1^{(1)} + \frac{u_1^{(2)} - u_1^{(1)}}{a} x_1 + \frac{u_1^{(3)} - u_1^{(1)}}{b} x_2 +$$

$$+ \frac{u_1^{(4)} - u_1^{(2)} - u_1^{(3)} + u_1^{(1)}}{ab} x_1 x_2 =$$

$$= \frac{1}{ab}\Big(u_1^{(1)}(ab - bx_1 - ax_2 + x_1 x_2) + u_1^{(2)}(bx_1 - x_1 x_2) +$$

$$+ u_1^{(3)}(ax_2 - x_1 x_2) + u_1^{(4)} x_1 x_2\Big) =$$

$$= u_1^{(1)} N_1 + u_1^{(2)} N_2 + u_1^{(3)} N_3 + u_1^{(4)} N_4, \tag{2.16}$$

де функції форми прямокутного скінченного елемента визначаються співвідношеннями:

$$N_1 = \frac{(b - x_2)(a - x_1)}{ab};\ N_2 = \frac{x_1(b - x_2)}{ab};$$

$$N_3 = \frac{x_2(a - x_1)}{ab};\ N_4 = \frac{x_1 x_2}{ab}\,. \tag{2.17}$$

Аналогічно підставивши вирази (2.15) для α_i до представлення (2.11), отримуємо:

$$u_2(x_1, x_2) = u_2^{(1)} N_1 + u_2^{(2)} N_2 + u_2^{(3)} N_3 + u_2^{(4)} N_4. \tag{2.18}$$

Ці співвідношення можна записати у векторно-матричній формі:

$$\{u\} = [N]\,\{u\}^e, \tag{2.19}$$

де $\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1(x_1, x_2) \\ u_2(x_1, x_2) \end{Bmatrix}$ – вектор переміщень будь-якої точки скінченного елементу;

$\{u\}^e$ – вектор вузлових переміщень виду (2.9);

$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}$ – матриця функцій форми.

2.4 Основні співвідношення матриці жорсткості прямокутного скінченного елементу для волокнистого композиційного матеріалу

Повернемось до співвідношення (2.8) і знайдемо енергію пружної деформації для довільного прямокутного скінченного елементу:

$$W^{(e)} = \int_V \frac{\{\varepsilon\}^T\{\sigma\}}{2} dV = t \int_S \frac{\{\varepsilon\}^T\{\sigma\}}{2} dS, \tag{2.20}$$

де t – товщина прямокутного скінченного елементу;

S – площа прямокутного скінченного елементу.

Беручи до уваги співвідношення Коші (2.4), будемо мати:

$$\{\varepsilon\} = [\partial]\{u\} = [\partial][N]\{u\}^e = [B]\{u\}^e, \qquad (2.21)$$

де $[B] = [\partial][N]$, з урахуванням прийнятої апроксимації для переміщень прийме вид:

$$[B] = \begin{bmatrix} -\frac{b-x_2}{ab} & 0 & \frac{b-x_2}{ab} & 0 & -\frac{x_2}{ab} & 0 & \frac{x_2}{ab} & 0 \\ 0 & -\frac{a-x_1}{ab} & 0 & -\frac{x_1}{ab} & 0 & \frac{a-x_1}{ab} & 0 & \frac{x_1}{ab} \\ -\frac{a-x_1}{ab} & -\frac{b-x_2}{ab} & -\frac{x_1}{ab} & \frac{b-x_2}{ab} & \frac{a-x_1}{ab} & -\frac{x_2}{ab} & \frac{x_1}{ab} & \frac{x_2}{ab} \end{bmatrix}. \qquad (2.22)$$

А враховуючи закон стану (2.5), отримуємо

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} = [C][B]\{u\}^e. \qquad (2.22)$$

Тепер необхідно визначитися із матрицею пружних сталих $[C]$. Для композиційного матеріалу, що розглядається цим властивостям притаманна анізотропія, а точніше частинний випадок анізотропії – транстропія. Така особливість пояснюється наявністю у матеріалі армуючих волокон. Осі транстропії будуть співпадати із напрямком армування волокнами та перпендикулярному до нього напрямку. На рис. 2.1 вісь Ox_1, відповідає напрямку армуючого волокна, а вісь Ox_2, – перпендикулярному до волокна напрямку. Таким чином, при побудові матриці жорсткості скінченного елементу для матеріалу із транстропними властивостями використовуються дві локальні системи координат – система координат скінченного елементу Ox_1x_2, пов'язана із геометрією скінченного елементу, та система координат транстропії $Ox_1,x_2,$, пов'язана із напрямком армування волокнами. Напрями осей цих двох систем

знаходяться під кутом φ один до одного.

Для транстропного матеріалу матриця пружних сталих у системі координат транстропії в умовах плосконапруженого стану прийме наступний вид:

$$[C'] = \begin{bmatrix} \dfrac{E_{1'}}{1-\nu_{1'2'}\nu_{2'1'}} & \dfrac{E_{1'}\nu_{2'1'}}{1-\nu_{1'2'}\nu_{2'1'}} & 0 \\ \dfrac{E_{1'}\nu_{2'1'}}{1-\nu_{1'2'}\nu_{2'1'}} & \dfrac{E_{2'}}{1-\nu_{1'2'}\nu_{2'1'}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{1'2'} \end{bmatrix}, \quad (2.23)$$

де $E_{1'}, E_{2'}$ – повздовжній та поперечний модулі пружності транстропного матеріалу;

$\nu_{1'2'}, \nu_{2'1'}$ – коефіцієнти Пуассона;

$G_{1'2'}$ – повздовжній модуль зсуву.

Для композиційного матеріалу пружні сталі, що задаються у матриці (2.23), а саме $E_{1'}, E_{2'}$, $\nu_{1'2'}, \nu_{2'1'}$, $G_{1'2'}$ знаходять в процесі гомогенізації за обраною групою формул ((1.1)-(1.14)) із наведених у першому розділі.

Враховуючи, що основні співвідношення матриці жорсткості скінченного елементу зручно використовувати у системі координат Ox_1x_2, пов'язаній із геометрією скінченного елементу, а пружні сталі задавати у системі координат $Ox_{1'}x_{2'}$, пов'язаній із схемою армування волокнами, необхідно визначити зв'язок при перетворенні величин із однієї системи у іншу.

Матриці перетворень при переході від однієї системи координат $Ox_{1'}x_{2'}$ до іншої системи Ox_1x_2 використаємо наступні співвідношення:

$$[T_1] = \begin{bmatrix} \cos^2\varphi & \sin^2\varphi & -2\sin\varphi\cos\varphi \\ \sin^2\varphi & \cos^2\varphi & 2\sin\varphi\cos\varphi \\ \sin\varphi\cos\varphi & -\sin\varphi\cos\varphi & \cos^2\varphi - \sin^2\varphi \end{bmatrix}, \quad (2.24)$$

$$[T_2] = \begin{bmatrix} \cos^2\varphi & \sin^2\varphi & -\sin\varphi\cos\varphi \\ \sin^2\varphi & \cos^2\varphi & \sin\varphi\cos\varphi \\ 2\sin\varphi\cos\varphi & -2\sin\varphi\cos\varphi & \cos^2\varphi - \sin^2\varphi \end{bmatrix}, \quad (2.25)$$

$$[T_2]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos^2\varphi & \sin^2\varphi & \sin\varphi\cos\varphi \\ \sin^2\varphi & \cos^2\varphi & -\sin\varphi\cos\varphi \\ -2\sin\varphi\cos\varphi & 2\sin\varphi\cos\varphi & \cos^2\varphi - \sin^2\varphi \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

Тоді для транстропного матеріалу в умовах плосконапруженого стану матриця пружних сталих у системі координат скінченного елементу Ox_1x_2 прийме вид:

$$[C] = [T_1][C'][T_2]^{-1}. \quad (2.27)$$

А для співвідношення (2.22) із урахуванням (2.27) матимемо:

$$\{\sigma\} = [T_1][C'][T_2]^{-1}[B]\{u\}^e. \quad (2.28)$$

Тепер повернемось до співвідношення для енергії пружної деформації прямокутного скінченного елементу, яке із врахуванням (2.28) прийме такий вид:

$$W^{(e)} = \frac{1}{2}t\int_S ([B]\{u\}^e)^T[T_1][C'][T_2]^{-1}[B]\{u\}^e\, dS. \quad (2.29)$$

Застосовуючи правила матричних перетворень, а саме те, що $([B]\{u\}^e)^T = (\{u\}^e)^T[B]^T$, матимемо

$$W^{(e)} = \frac{1}{2}t(\{u\}^e)^T\int_S [B]^T[T_1][C'][T_2]^{-1}[B]\, dS \cdot \{u\}^e. \quad (2.30)$$

Аналізуючи останній вираз, знаходимо співвідношення для матриці жорсткості прямокутного скінченного елемента волокнистого композиційного

матеріалу:

$$\left[K^{(e)}\right] = t\int_S [B]^T[T_1][C'][T_2]^{-1}[B]\,dS. \qquad (2.31)$$

Розмірність матриці жорсткості прямокутного чотирьохвузлового скінченного елементу буде дорівнювати 8×8.

Робота зовнішніх сил $A^{(e)}$ для більшості скінченних елементів буде дорівнювати нулю, враховуючи, що зовнішні сили можуть бути прикладені лише до зовнішньої поверхні конструкції. Але, якщо скінченний елемент знаходиться на межі і до його сторони (сторін) прикладене зовнішнє навантаження то робота зовнішніх сил може бути представлена у такому виді:

$$A^{(e)} = \int_S \{u\}^T\{Q\}dS = t\int_l ([N]\{u\}^e)^T\{Q\}\,dl, \qquad (2.32)$$

де $\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1(x_1, x_2) \\ u_2(x_1, x_2) \end{Bmatrix}$ – вектор переміщень будь-якої точки скінченного елементу;

$\{Q\} = \begin{Bmatrix} Q_1(x_1, x_2) \\ Q_2(x_1, x_2) \end{Bmatrix}$ – вектор зовнішніх навантажень;

$\{u\}^e$ – вектор вузлових переміщень виду (2.9);

$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}$ – матриця функцій форми;

l – довжина сторони скінченного елементу, де діє зовнішнє навантаження.

Вираз (2.32) можна представити так:

$$A^{(e)} = (\{u\}^e)^T\{P\}^e, \qquad (2.33)$$

тут вектор вузлових навантажень має вид:

$$\{P\}^e = t \int_l [N]^T \{Q\}\, dl, \tag{2.34}$$

Підставимо у вираз (2.8), що описує варіаційний принцип Лагранжа, отримані співвідношення для енергії пружної деформації та роботи зовнішніх сил окремих скінченних елементів:

$$\delta\left(\sum_{e=1}^{N} \frac{1}{2} (\{u\}^e)^T \left[K^{(e)}\right] \{u\}^e\right) - \delta\left(\sum_{e=1}^{N} (\{u\}^e)^T \{P\}^e\right) = 0. \tag{2.35}$$

Після математичних перетворень будемо мати наступне розв'язувальне рівняння:

$$\delta\{u\}[K]\{u\} - \delta\{u\}\{P\} = 0, \tag{2.36}$$

або

$$\delta\{u\}([K]\{u\} - \{P\}) = 0, \tag{2.37}$$

де $[K]$ – глобальна матриця жорсткості конструкції, що формується з матриць жорсткості окремих скінченних елементів, розмірність цієї квадратної матриці дорівнює $2M \times 2M$, де M – кількість вузлів конструкції;

$\{u\}$ – вектор вузлових переміщень, що формується з векторів вузлових переміщень окремих скінченних елементів, його розмірність дорівнює $2M$;

$\{P\}$ – вектор вузлових навантажень, що формується з векторів вузлових навантажень окремих скінченних елементів, його розмірність дорівнює $2M$.

Аналізуючи розв'язувальне рівняння (2.37), можемо зазначити, що варіація переміщень не може дорівнювати нулю, тому має дорівнювати нулю вираз у

дужках, отже

$$[K]\{u\} - \{P\} = 0, \tag{2.38}$$

або

$$[K]\{u\} = \{P\}. \tag{2.39}$$

Це матричне рівняння і є основним при розв’язанні задач лінійної теорії пружності для композиційного матеріалу.

2.5 Висновки до розділу 2

Таким чином, у цьому розділі для прямокутного скінченного елементу з чотирма вузлами представлено вирази для апроксимуючих функцій – функцій форми. Описано методику визначення пружних сталих композиційного матеріалу та наведено процедуру перетворення величин із системи координат транстропії до системи координат скінченного елементу. Отримано основні співвідношення матриці жорсткості прямокутного скінченного елементу для волокнистого композиційного матеріалу. Побудовано систему розв’язувальних рівнянь для визначення напружено-деформованого стану конструкцій із композиційних матеріалів.

3 ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ПЛАСТИНЧАТИХ КОНСТРУКЦІЙ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

3.1 Постановка задачі

Отримані у другому розділі співвідношення матриці жорсткості прямокутного скінченного елементу для композиційного матеріалу із порожнистими волокнами, система розв'язувальних рівнянь та процедура її розв'язання реалізовані у вигляді пакету програм із відповідним інтерфейсом для завдання вихідних даних та візуального представлення отриманих результатів розрахунку.

За допомогою створеного пакету програм розв'язано задачу лінійної пружності для двовимірної пластинчатої конструкції із волокнистого композиційного матеріалу.

Розглянемо пластинчату конструкцію прямокутної форми, жорстко защемлену з одного краю та під дією розподіленого навантаження на іншому краю (див. рис. 3.1). Товщину пластини приймемо рівною 0,1 м, довжина – L=1,5 м, ширина H=0,5 м.

Механічні характеристики складових композиційного матеріалу такі. Матеріал матриці має модуль пружності $E^* = 3{,}24$ МПа та коефіцієнт Пуассона $\nu^* = 0{,}385$. Матеріал порожнистих волокон описується модулем пружності $E^\circ = 73$ МПа, $\nu^\circ = 0{,}22$. Прикладене зовнішнє розподілене навантаження дорівнює Q=0,2 МПа.

Ефективні пружні характеристики гомогенізованого матеріалу $E_{1'}$, $E_{2'}$, $\nu_{1'2'}$, $G_{1'2'}$, ($\nu_{2'1'} = \nu_{1'2'}E_{2'}/E_{1'}$) у системі координат армування, що визначається кутом нахилу волокон до характерних поверхонь пластини φ, визначаються за формулами (1.7)-(1.10), (1.12), (1.14), наведеними у розділі 1.

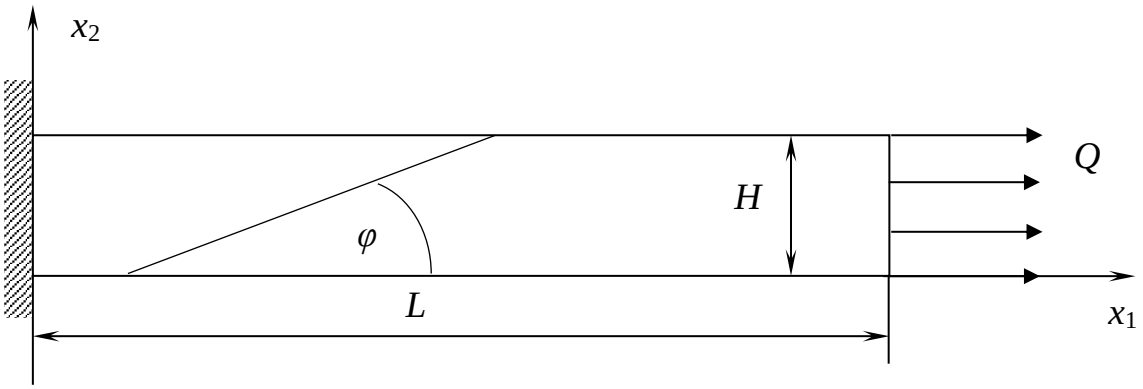


Рисунок 3.1 – Розрахункова схема пластини

Задача визначення напружено-деформованого стану розв’язувалась для плосконапружених умов.

3.2 Чисельні результати розрахунку пластинчатої конструкції із волокнистого композиту

Плоска задача теорії пружності для композиційного матеріалу, армованого порожнистими волокнами, що описана вище, розв’язувалась методом скінченних елементів на основі співвідношень, описаних у розділі 2.

Для перевірки збіжності результатів розрахунків обчислення проводились при різних сітках розбиття конструкції на скінченні елементи. Крім того, частина вихідних даних варіювалась. Так, кут нахилу армуючих односпрямованих порожнистих волокон брався рівним φ=0°; 30°; 45°; 60°; 90°. Об’ємна частка порожнистих волокон у композиційному матеріалі приймалась рівною f=0; 0,1; 0,2; 0,3. Так само, об’ємна частка порожнини у волокні варіювалась у такому діапазоні g=0; 0,1; 0,2; 0,3.

Результати дослідження залежності переміщень від кута армування φ для об’ємної частки волокон f= 0,3 та об’ємної частки порожнини у волокні g=0,2 представлені на рис.3.2.

На рис 3.3 для кута нахилу волокон φ=0° представлено залежність

переміщення u_1 від об'ємної частки волокон f та об'ємної частки порожнини у волокні g.

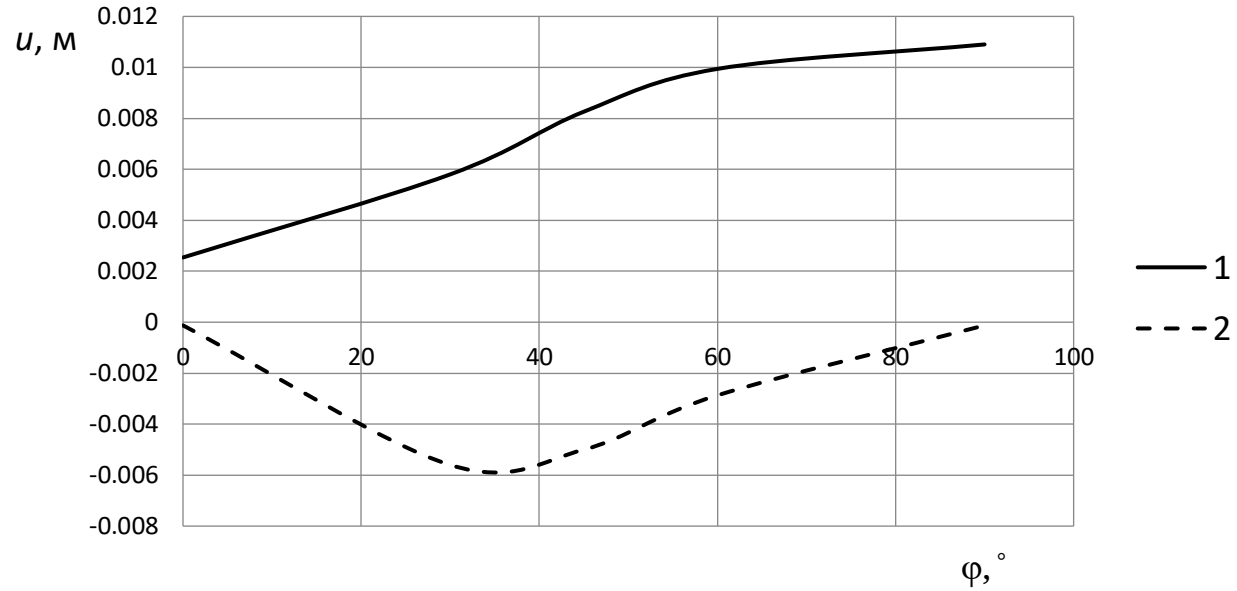


Рисунок 3.2 – Максимальні переміщення точок пластини:

1 – u_1, 2 – u_2

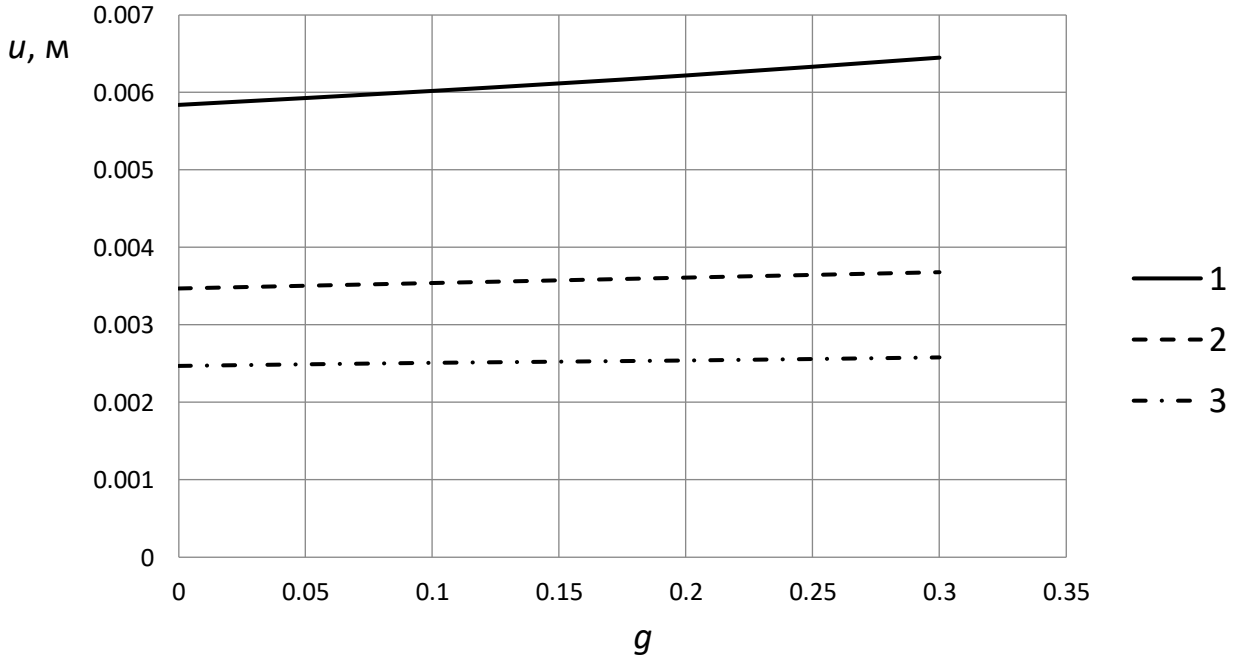


Рисунок 3.3 – Максимальна величина переміщень u_1 точок пластини:

1 – *f*= 0,1; 2 – *f*= 0,2; 3 – *f*= 0,3

На рис. 3.4-3.8 представлено візуалізацію розподілу компонентів напружено-деформованого стану у пластині із композиційного матеріалу для випадку кута армування φ=60̊, об’ємної частки волокон f= 0,3 та об’ємної частки порожнини у волокні g=0,2.



Рисунок 3.4 – Розподіл переміщень u_2

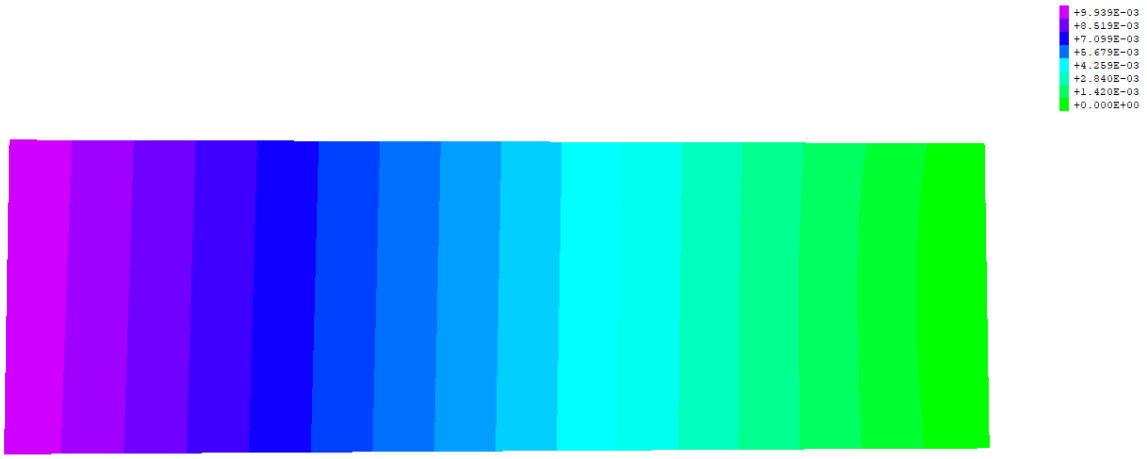


Рисунок 3.5 – Розподіл переміщень u_1



Рисунок 3.6 – Розподіл напружень σ_{21}



Рисунок 3.7 – Розподіл напружень σ_{11}

Як можна, побачити на рис. 3.2 максимальні переміщення у напрямку прикладання навантаження із зростанням кута армування теж зростають, це пояснюється тим, що при φ=0˚ основне навантаження припадає на більш жорсткі волокна.

При збільшенні кута армування поступово прикладене навантаження починає перерозподілятися між матеріалом матриці та матеріалом волокна і при φ=90˚ в основному «працює» менш жорсткий матеріал матриці. Окрім крайніх

випадків армування волокном при φ=0° та φ=90°, спостерігається асиметрія при деформуванні.

На рис. 3.3 показаний вплив об'ємної частки волокон f та об'ємної частки порожнини у волокні g на максимальні переміщення у напрямку дії навантаження: при збільшенні об'ємної частки порожнини у волокні максимальні переміщення зростають, збільшення ж об'ємної частки більш жорсткого волокна у композиті приводить до зменшення величини максимальних переміщень.

Аналізуючи напружено-деформований стан пластинчатої конструкції на рис. 3.4-3.8 при φ=60° можемо побачити асиметрію у розподілі представлених величин, для деяких асиметрія чітко виражена, а для деяких – має незначний характер.

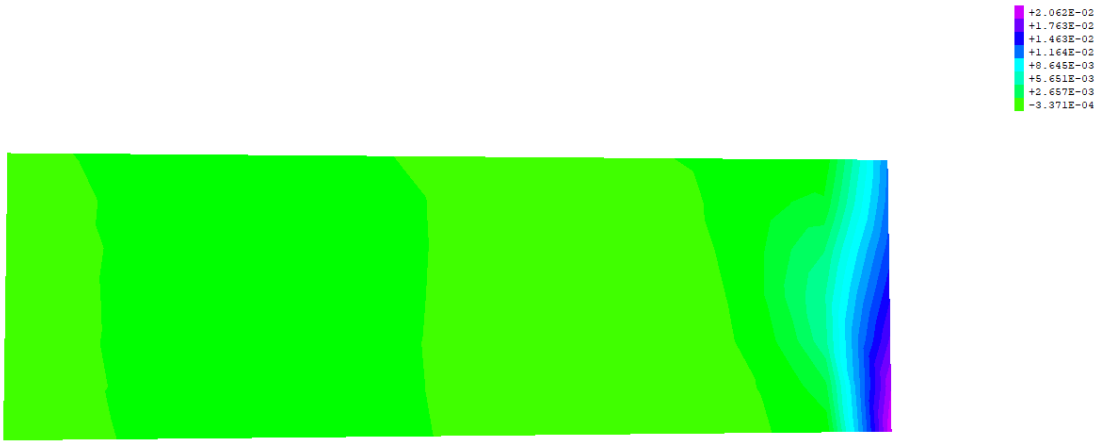


Рисунок 3.8 – Розподіл напружень σ_{22}

3.3 Висновки до розділу 3

У розділі методом скінченних елементів розв'язано задачу лінійної пружності для двовимірної пластинчатої конструкції із композиційного

матеріалу, армованого односпрямованими порожнистими волокнами.

Проаналізовано вплив схеми армування, об’ємної частки волокна у композиті та об’ємної частки порожнини у волокні на величини компонентів напружено-деформований стану конструкції.

ВИСНОВКИ

В процесі виконання кваліфікаційної роботи було досліджено особливості застосування методу скінченних елементів до конструкцій із композиційних матеріалів, наведено основні математичні моделі представлення неоднорідного композиційного матеріалу з порожнистими волокнами гомогенізованим матеріалом, що значно спрощує подальше розв’язання задач механіки.

Результатом роботи є наступне.

- для двовимірного випадку отримано матрицю жорсткості прямокутного чотирьохвузлового скінченного елементу для розв’язання задач механіки композиційних матеріалів. А саме на основі варіаційного принципу Лагранжа та запропонованих апроксимуючих функції форми отримано матрицю жорсткості скінченного елементу. Математичне моделювання властивостей композиційного матеріалу із порожнистими волокнами на основі гомогенізації представляє цей матеріал «уявним» транстропним з площиною ізотропії, перпендикулярній осі волокон. Властивості такого матеріалу є функцією властивостей матеріалу матриці та матеріалу волокна, об’ємної частки волокна у композиті та об’ємної долі порожнини у волокні. Для врахування транстропії властивостей матеріалу при виводі матриці жорсткості скінченного елементу було введено додаткову локальну систему координат;
- основні співвідношення матриці жорсткості скінченного елементу для композиційного матеріалу були реалізовані у виді пакету програм, за допомогою якого було розв’язано задачу про деформування пластинчатої конструкції, закріпленої на одному краю, під дією розподіленого навантаження на іншому. Визначено напружено-деформований стан конструкції залежно від кута армування волокнами, об’ємної частки волокна у композиті та об’ємної частки порожнини у волокні.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Гребенюк С. М., Гоменюк С. І., Клименко М. І. Напружено-деформований стан просторових конструкцій на основі гомогенізації волокнистих композитів. Херсон : Гельветика. 2019. 350 с.

2. Столярова А. В. Ефективні механічні характеристики композиційних матеріалів із транстропними порожнистими волокнами : монографія. Херсон : Видавничий дім «Гельветика». 2021. 104 с.

3. Aimmanee S., Asanuma H. Micromechanics-based predictions of effective properties of a 1-3 piezocomposite reinforced with hollow piezoelectric fibers. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2020. 27(22). P. 1873–1887. Doi : https://doi.org/10.1080/15376494.2018.1529842

4. Berladir K., Zhyhylii D., Gaponova O., Krmela J., Krmelová V., Artyukhov A. Modeling of Polymer Composite Materials Chaotically Reinforced with Spherical and Cylindrical Inclusions. *Polymers*. 2022. 14(10): 2087. Doi : https://doi.org/10.3390/polym14102087

5. Balaji R., Sasikumar M., Jeyanthi S. Characterisation of hollow glass fibre reinforced vinyl-ester composites. *Indian Journal of Science and Technology*. 2016. 9(48). P. 1–5. Doi : https://doi.org/10.17485/ijst/2016/v9i48/107921

6. Barbero E.J. Finite Element Analysis of Composite Materials using Abaqus (2nd ed.). Boca Raton: CRC Press. 2023. 571 p. Doi : https://doi.org/10.1201/9781003108153

7. Bayat M., Aghdam M.M. A micromechanics based analysis of hollow fiber composites using DQEM. *Composites Part B: Engineering*. 2012. 43(8). P. 2921–2929. Doi : https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2012.06.021

8. Christensen R. M. Mechanics of Composite Materials. Mineola, New York : Dover Publications. 2005. 384 p.

9. Islam M., Tudryn G.J., Picu C.R. Microstructure modeling of random composites with cylindrical inclusions having high volume fraction and broad aspect

ratio distribution. *Computational Materials Science*. 2016. Vol. 125. P. 309–318. Doi : https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2016.08.051

10. Ge C., Dong Y., Maimaitituersun W. Microscale Simulation on Mechanical Properties of Al/PTFE Composite Based on Real Microstructures. *Materials*. 2016. 9(7): 590. Doi : https://doi.org/10.3390/ma9070590

11. Geetha Satya Sai S., Sailesh V., Mobin S.K., Subash Chandra Bose T., Sai Krishna Y., Prasanthi P.P. Analysis of Composite Leaf Springs Using Finite Element Method. In: Narasimham G.S.V.L., Babu A.V., Reddy S.S., Dhanasekaran R. (eds). Recent Trends in Mechanical Engineering. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Singapore : Springer. 2021. P. 479–488. Doi : https://doi.org/10.1007/97

12. Giuntoli G., Aguilar J., Vázquez M., Oller S., Houzeaux G. A FE^2 multi-scale implementation for modeling composite materials on distributed architectures. *Coupled Systems Mechanics*. 2019. Vol. 8, N 2. P. 99–109. Doi : https://doi.org/10.12989/csm.2019.8.2.099

13. Grebenyuk S., Klymenko M., Stoliarova A., Titova O. Longitudinal shear modulus of the composite material with hollow fibers. *Mechanika 2019*: Proceedings of the 24th International Scientific Conference (May 17, 2019, Kaunas, Lithuania). 2019. P. 45–48.

14. Homeniuk S., Grebenyuk S., Klimenko M., Stoliarova A. Determining the effective characteristics of a composite with hollow fiber at longitudinal elongation. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2018. 6(7(96)). P. 6–12. Doi : https://doi.org/10.15587/1729-4061.2018.143406

15. Li S., Hou S. Two-scale concurrent optimization of composites with elliptical inclusions under microstress constraints within the FE^2 framework. *Computers & Structures*. 2023. Vol. 276: 106942. Doi : https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2022.106942

16. Müzel S.D., Bonhin E.P., Guimarães N.M., Guidi E.S. Application of the Finite Element Method in the Analysis of Composite Materials: A Review. *Polymers*. 2020. 12(4): 818. Doi : https://doi.org/10.3390/polym12040818

17. Naeimirad M., Abuzade R., Babaahmadi V., Neisiany R.E., Brüll R., Pursche F. 16 - Hollow fiber reinforced polymer composites. *In Woodhead Publishing Series in Composites Science and Engineering, Fiber Reinforced Composites, Woodhead Publishing*. 2021. P. 461–477. Doi : https://doi.org/10.1016/B978-0-12-821090-1.00001-6

18. Nasr-Isfahani M., Amani-Tehran M., Latifi M., Halvaei M., Warnet L. Experimental and theoretical investigation of hollow polyester fibers effect on impact behavior of composites. *Journal of Industrial Textiles*. 2017. 47(7). P. 1528–1542. Doi : https://doi.org/10.1177/1528083717699367

19. Nasr-Isfahani M., Latifi M., Amani-Tehran M. Improvement of impact damage resistance of epoxy-matrix composites using ductile hollow fibers. *Journal of engineered fibers and fabrics*. 2013. 8(1). P. 69–74. Doi : https://doi.org/10.1177/155892501300800108

20. Shtanko H. I., Grebenyuk S. M. Features of the Construction of the Stiffness Matrix of the Spatial Hexagonal Finite Element for Composite Material with Discrete Inclusions Based on the Moment Scheme. *Computer Science and Applied Mathematics*. 2023. N 2. P. 75–85. Doi : https://doi.org/10.26661/2786-6254-2023-2-10

21. Stoliarova A. V., Koval R. A., Hatsenko A. V., Dioba N. O. The determination of the elastic constants of the composite material with solid and hollow equivalently directed fibers. *Bulletin of Zaporizhzhia National University. Physical and Mathematical Sciences*. 2021. 1. P. 57–64. Doi : https://doi.org/10.26661/2413-6549-2021-1-07

22. Wang G., Tu W., Pindera M.-J. Tailoring the moduli of composites using hollow reinforcement. *Composite Structures*. 2017. 160. P. 838–853. Doi : https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.10.060