МІНІСТЕРСТВА ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

С. М. Гребенюк,
Н. М. Д'яченко

МЕТОДИ ОБЧИСЛЕНЬ

Навчальний посібник
для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра
спеціальності «Математика» освітньо-професійної програми
«Математика»

Затверджено вченою
радою ЗНУ
Протокол №

Запоріжжя
2025

УДК: 519.6(075.8)
Г79

Гребенюк С.М., Д’яченко Н.М. Методи обчислень : навчальний посібник для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра спеціальності «Математика» освітньо-професійної програми «Математика». Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2025. 83 с.

У навчальному посібнику у систематизованому вигляді подано програмний матеріал дисципліни «Методи обчислень». Структура посібника спрямована на розвиток і активізацію самостійної роботи студентів.

Викладено основи класичної теорії методів обчислень, наведено теоретичні відомості, приклади та пояснення щодо практичного застосування чисельних методів. Матеріал охоплює такі розділи: чисельне розв’язання алгебраїчних рівнянь і систем, проблема власних значень, апроксимація функцій, чисельне диференціювання та інтегрування, наближене розв’язання задачі Коші та крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь, чисельні методи розв’язання крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними, а також інтегральних рівнянь Фредгольма II роду.

Кожен розділ містить питання й завдання для самоконтролю, що сприяють засвоєнню навчального матеріалу та якісній підготовці студентів до екзамену.

Посібник призначений для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра спеціальності «Математика» освітньо-професійної програми «Математика», однак може бути корисним також студентам інших спеціальностей і здобувачам ступеня вищої освіти магістра.

Рецензент
С. І. Гоменюк, доктор технічних наук, професор, декан математичного факультету

Відповідальний за випуск
С. М. Гребенюк, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри фундаментальної та прикладної математики

ЗМІСТ

Вступ 5
Розділ 1 Класифікація похибок та причини їх виникнення. Прямі (точні) методи розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь 7
1.1. Класифікація похибок та причини їх виникнення 7
1.2. Метод Гауса розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь 7
Питання для самоперевірки до тем 1.1 і 1.2 9
1.3. Метод Халецького розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь. 9
Питання для самоперевірки до теми 1.3 13
Розділ 2 Наближені (ітераційні) методи розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь 22
2.1. Метод простих ітерацій 22
Питання для самоконтролю до розділу 2 25
Розділ 3 Локалізація коренів нелінійних алгебраїчних та трансцендентних рівнянь. Наближені методи розв'язання нелінійних алгебраїчних та трансцендентних рівнянь 31
3.1. Загальні положення 31
3.2. Методи дихотомії 33
3.3. Метод поділу навпіл 33
3.4. Метод пропорційних частин (метод хорд) 34
3.5. Метод Ньютона (дотичних) 34
Питання для самоконтролю до розділу 3 36
Розділ 4 Наближені методи розв'язання систем нелінійних алгебраїчних рівнянь 37
4.1. Методи спуску 37
4.2. Метод градієнтного спуску 38
Питання для самоконтролю до розділу 4 41
Розділ 5 Чисельні методи визначення власних значень та власних векторів матриць 45
5.1. Проблема власних значень 45
5.2. Пошук власних значень і власних векторів матриць методом простих ітерацій 45
Питання для самоконтролю до розділу 5 47
Розділ 6 Апроксимація функцій 50
6.1. Постановка задачі інтерполяції 50
6.2. Наближене відновлення функції за допомогою інтерполяційного многочлена Лагранжа 51
Питання для самоконтролю до тем 6.1 і 6.2 52
6.3. Чисельне диференціювання функцій за допомогою інтерполяції кубічним сплайном 53
Питання для самоконтролю до теми 6.3 54
Розділ 7 Методи чисельного інтегрування 55

7.1. Загальні положення 55
7.2. Квадратурна формула Гауса 55
Питання для самоконтролю до розділу 7 58
Розділ 8 Наближене розв’язання задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь 60
8.1. Метод Ейлера розв'язання задачі Коші 60
Питання для самоконтролю до теми 8.1 61
8.2. Метод Рунге-Кутта четвертого порядку точності 61
Питання для самоконтролю до теми 8.2 62
8.3. Метод Адамса 62
Питання для самоконтролю до теми 8.3 64
Розділ 9 Наближене розв’язання крайової задачі для звичайних диференціальних рівнянь 65
9.1. Метод Гальоркіна розв'язання крайової задачі 65
Питання для самоконтролю до теми 9.1 66
9.2. Метод скінченних різниць 66
Питання для самоконтролю до теми 9.2 68
Розділ 10 Чисельне розв’язання крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними 70
10.1. Різницевий метод розв’язання задачі Діріхле для рівняння Пуассона 70
Питання для самоконтролю до розділу 10 73
Розділ 11 Чисельні методи розв’язання інтегральних рівнянь Фредгольма II роду 76
11.1. Квадратурний метод розв’язання інтегрального рівняння Фредгольма II роду 76
Питання для самоконтролю до теми 11.1 77
11.2. Розв’язання інтегрального рівняння Фредгольма II роду методом послідовних наближень 77
Питання для самоконтролю до теми 11.2 79
Використана література 81
Рекомендована література 81

ВСТУП

Обчислювальна техніка й математичні методи розв'язання задач дозволяють замінити дорогі й трудомісткі натурні експерименти більш точними, швидкими й дешевими обчислювальними експериментами на математичних моделях із застосуванням комп'ютерної техніки. В основі обчислювального експерименту лежать розв'язки рівнянь математичної моделі чисельними методами. Методи обчислень (чисельні методи) – методи наближеного чи точного розв'язання задачі, що базуються на побудові скінченої послідовності дій над скінченою множиною чисел, результатами яких є числові значення. Для розв'язання конкретних практичних задач необхідно виконати мільйони, і навіть мільярди математичних операцій, що під силу тільки комп'ютеру.

Серед чисельних методів розрізняють прямі й ітераційні. Прямі, чи точні, методи дають розв'язок за скінчене число дій, прості й найбільш універсальні, вони забезпечують обчислення за точними формулами. Проте отриманий розв'язок в результаті округлень втрачає точність і стає наближеним, причому похибка в результаті дій над округленими, тобто наближеними, числами, накопичується, стає неусувною.

Ітераційні (наближені) методи задаються у вигляді багатокрокових повторень певної послідовності дій, вихідними даними для яких є результати попереднього циклу обчислень, який називається ітерацією. Сама природа такого методу обумовлює наближеність одержуваного розв'язку, похибка якого регулюється кількістю виконаних ітерацій: чим більше ітерацій, тим менше похибка.

Не можна забувати, що отримані результати тільки тоді будуть досить достовірні, тобто будуть мати похибку в припустимих межах, якщо чисельний метод є стійким і збігається. Точність і збіжність застосовуваного чисельного методу треба досліджувати на рішеннях задач, що мають аналітичний розв'язок чи експериментальні результати.

Для складних задач розробляються чисельні методи і складаються обчислювальні програми, що утворюють бібліотеки стандартних і пакети прикладних програм, а також програмні комплекси.

Метою викладання навчальної дисципліни «Методи обчислень» є надання студентам систематичних знань про основні чисельні методи розв'язання алгебраїчних рівнянь і систем, інтерполяцію і наближення функцій, чисельне інтегрування; чисельні методи розв'язання задачі Коші та крайової задачі для звичайних диференціальних рівнянь та рівнянь з частинними похідними та чисельні методи розв'язку інтегральних рівнянь.

Основними завданнями вивчення дисципліни «Методи обчислень» *є:*

- ознайомлення з принципами побудови та програмної реалізації методів обчислень для розв'язання алгебраїчних рівнянь і систем;
- засвоєння підходів до побудови та програмної реалізації методів обчислень для інтерполяції і наближення функцій;

- ознайомлення з принципами побудови та програмної реалізації методів обчислень для чисельного інтегрування;
- засвоєння підходів до побудови та програмної реалізації методів обчислень для розв'язання задачі Коші та крайової задачі для звичайних диференціальних рівнянь та рівнянь з частинними похідними;
- ознайомлення з принципами побудови та програмної реалізації методів обчислень для розв'язання інтегральних рівнянь;
- вироблення навичок застосування цих методів до розв'язання конкретних задач.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен набути таких результатів навчання (знання, уміння тощо) та компетентностей:

результати навчання:

- мати навички використання спеціалізованих програмних засобів комп'ютерної та прикладної математики і використовувати інтернет-ресурси;
- розв'язувати задачі придатними математичними методами, перевіряти умови виконання математичних тверджень, коректно переносити умови та твердження на нові класи об'єктів, знаходити й аналізувати відповідності між поставленою задачею й відомими моделями;
- розв'язувати типові задачі математичного аналізу, алгебри, диференціальних та інтегральних рівнянь, оптимізації за допомогою чисельних методів;

компетентності:

- здатність розв'язувати складні задачі та практичні проблеми у математиці або у процесі навчання, що передбачає застосування теорій та методів математики, статистики й комп'ютерних технологій і характеризується комплексністю та невизначеністю умов;
- здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу;
- здатність працювати автономно;
- здатність застосовувати чисельні методи для дослідження математичних моделей;
- здатність застосовувати спеціалізовані мови програмування та пакети прикладних програм;
- здатність використовувати обчислювальні інструменти для чисельних і символьних розрахунків.

Основою для курсу «Методи обчислень» є знання, що отримуються на таких курсах як «Математичний аналіз», «Диференціальні рівняння», «Лінійна алгебра», «Основи програмування» та інші. В свою чергу матеріали, що надаються у курсі «Методи обчислень» використовуватися при вивченні багатьох курсів та спецкурсів «Варіаційне числення та методи оптимізації», «Математичне моделювання» та інші, виконанні курсових робіт з фаху.

РОЗДІЛ 1 КЛАСИФІКАЦІЯ ПОХИБОК ТА ПРИЧИНИ ЇХ ВИНИКНЕННЯ. ПРЯМІ (ТОЧНІ) МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

1.1. Класифікація похибок та причини їх виникнення

При чисельному розв'язання математичних та прикладних задач майже неминуча поява на тому чи іншому етапі їх розв'язання похибок таких трьох типів:

1) *Похибка задачі.* Пов'язана з наближеним характером вихідної змістовної моделі, а також її математичного опису, параметрами якого є, зазвичай, наближені числа. Для розраховувача похибка задачі можна вважати неусувною, хоча постачальник задачі інколи може її змінити.

2) *Похибка методу*. Ця похибка, пов'язана із способом розв'язання заданої математичної задачі, й з'являється в результаті підміни вихідної математичної моделі іншою або скінченною послідовністю інших моделей. При конструюванні чисельних методів закладається можливість відслідковування таких похибок й доведення їх до скільки завгодно малого рівня. Звідси похибка методу вважається усувною.

3) *Похибка округлень*. Цей тип похибок обумовлений необхідністю виконувати арифметичні операції над числами, усіченими до кількості розрядів, що залежить від обчислювальної техніки, яка застосовується, та типу даних, що використовується.

Усі три описаних типи похибок в сумі дають повну похибку результату розв'язання задачі.

Нехай A та a – два «близьких» числа; припустимо, що A є точним, а a – наближеним.

Величина $\Delta a = |A - a|$ називається абсолютною похибкою наближеного числа a, а $\delta a = \Delta a/|a|$ – його відносною похибкою (або $\delta a = \Delta a/|A|$).

Значущими цифрами числа називають всі його цифри, починаючи з першої ненульової цифри.

Значущу цифру наближеного числа називають правильною, якщо абсолютна похибка числа не перевищує одиниці розряду, в якому стоїть ця цифра.

1.2. Метод Гауса розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Цей метод є точним. Він заснований на зведенні матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) до трикутного вигляду.

Нехай потрібно розв'язати систему $A\bar{x} = \bar{b}$; тут $A = [a_{ij}]$ – матриця коефіцієнтів системи розмірності $n \times n$, $det\, A \neq 0$, $\bar{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$ і $\bar{b} = [b_1, b_2, \ldots, b_n]^T$ – вектори.

Віднімемо від другого рівняння системи

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = b_i, \qquad (1)$$
$$1 \le i \le n$$

перше, помножене на таке число, щоб обернувся на нуль коефіцієнт при x_1. Потім, у такий же спосіб, віднімемо перше рівняння з третього, четвертого і інших Тоді виключаються всі коефіцієнти першого стовпця, що лежать нижче головної діагоналі.

Потім, за допомогою другого рівняння виключимо з третього, четвертого і інших рівнянь коефіцієнти другого стовпця. Послідовно продовжуючи цей процес, виключимо з матриці A всі коефіцієнти, що лежать нижче головної діагоналі.

Запишемо загальні формули процесу. Нехай проведено виключення коефіцієнтів з $(k-1)$-го стовпця. Тоді залишилися такі рівняння з ненульовими елементами нижче головної діагоналі:

$$\sum_{j=k}^{n} a_{ij}^{(k)} x_j = b_i^{(k)}, \qquad (2)$$
$$k \le i \le n.$$

Помножимо k-й рядок на число

$$c_{mk} = \frac{a_{ij}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}, \qquad (3)$$
$$m > k$$

і віднімемо його від m-го рядка. Перший ненульовий елемент цього рядка обернеться на нуль, а інші зміняться за формулами

$$a_{ml}^{(k+1)} = a_{ml}^{(k)} - c_{mk} a_{kl}^{(k)},$$
$$b_m^{(k+1)} = b_m^{(k)} - c_{mk} b_k^{(k)}, \qquad (4)$$
$$k < m,\ l \le n.$$

Виконуючи обчислення за цими формулами при всіх зазначених індексах, виключимо елементи k-го стовпця. Назвемо таке виключення циклом процесу. Виконання всіх циклів називається прямим ходом виключення.

У результаті виконання прямого ходу одержимо систему з матрицею трикутного вигляду

$$\sum_{j=i}^{n} a_{ij}^{(i)} x_j = b_i^{(i)}, \qquad (5)$$
$$1 \le i \le n.$$

Така система легко розв’язується за допомогою так званого зворотного ходу, суть якого така. З останнього рівняння визначаємо x_n. Підставляючи його в передостаннє рівняння, знаходимо x_{n-1} і т.д. Загальні формули зворотного ходу мають вигляд

$$x_i = \frac{1}{a_{ij}^{(i)}}\left[b_i^{(i)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i)} x_j\right], \quad (6)$$
$$i = n, n-1, \ldots, 1.$$

Виключення за формулами прямого ходу (3) – (4) не можна проводити, якщо в ході розрахунку на головній діагоналі виявиться нульовий елемент $a_{kk}^{(k)} = 0$. Але в першому стовпці проміжної системи (2) всі елементи не можуть бути нулями: це означало б, що $det\ A = 0$. Перестановкою рядків можна перемістити ненульовий елемент на головну діагональ і продовжити розрахунок.

Якщо елемент на головній діагоналі $a_{kk}^{(k)}$ малий, то цей рядок домножується на великі числа c_{mk}, що призводить до значних помилок округлення при обчисленнях. Щоб уникнути цього, кожен цикл завжди починають з перестановки рядків. Серед елементів стовпця $a_{mk}^{(k)}$, $m \geq k$ знаходять головний, тобто найбільший за модулем у k-ому стовпці, і перестановкою рядків переводять його на головну діагональ, після чого роблять виключення. У цьому суть методу Гауса з вибором головного елемента.

Блок-схему розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса наведено на рис.1, а її модифікацію – на рис.2. У блок-схемі: n – кількість рівнянь; b_i – елементи вектора вільних членів; a_{ij} – елементи матриці коефіцієнтів при невідомих; x_i – елементи вектора невідомих; c_{ij} – допоміжні коефіцієнти; s – допоміжна величина.

Питання для самоперевірки до тем 1.1 і 1.2

1. Сформулюйте постановку задачі.
2. Опишіть метод розв'язання, оцініть похибку методу.
3. У чому суть і переваги методу Гауса з вибором головного елемента?

1.3. Метод Халецького розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$A\bar{x} = \bar{b}, \quad (7)$$

де $A = [a_{ij}]$ – квадратна матриця порядку n і

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \bar{b} = \begin{bmatrix} a_{1,n+1} \\ \vdots \\ a_{n,n+1} \end{bmatrix}$$

– вектори-стовпці невідомих і вільних членів відповідно.

Представимо матрицю A у вигляді добутку нижньої трикутної матриці $B = [b_{ij}]$ і верхньої трикутної матриці $C = [c_{ij}]$ з одиничною діагоналлю, тобто

$$A = BC, \quad (8)$$

де $B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$ і $C = \begin{bmatrix} 1 & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$.

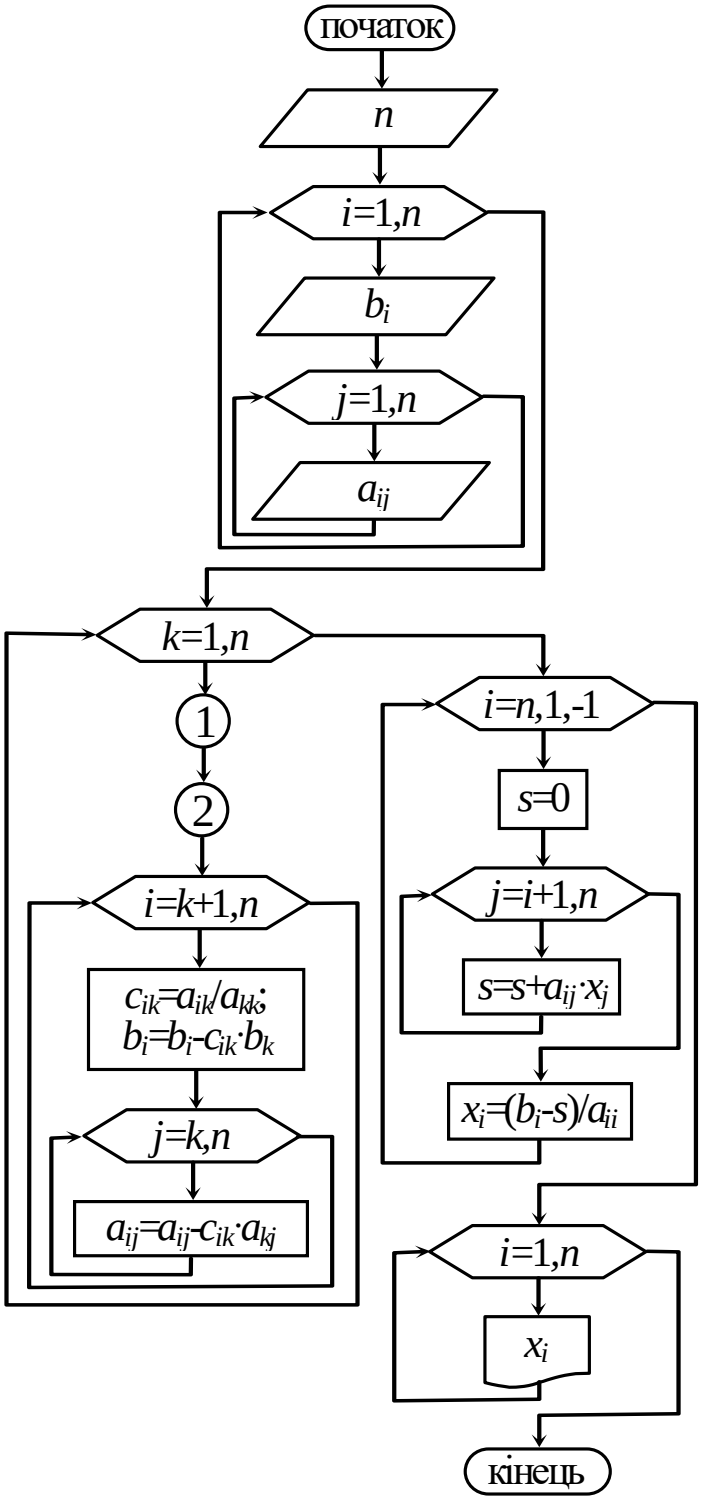


Рисунок 1 – Блок-схема розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь методо Гауса

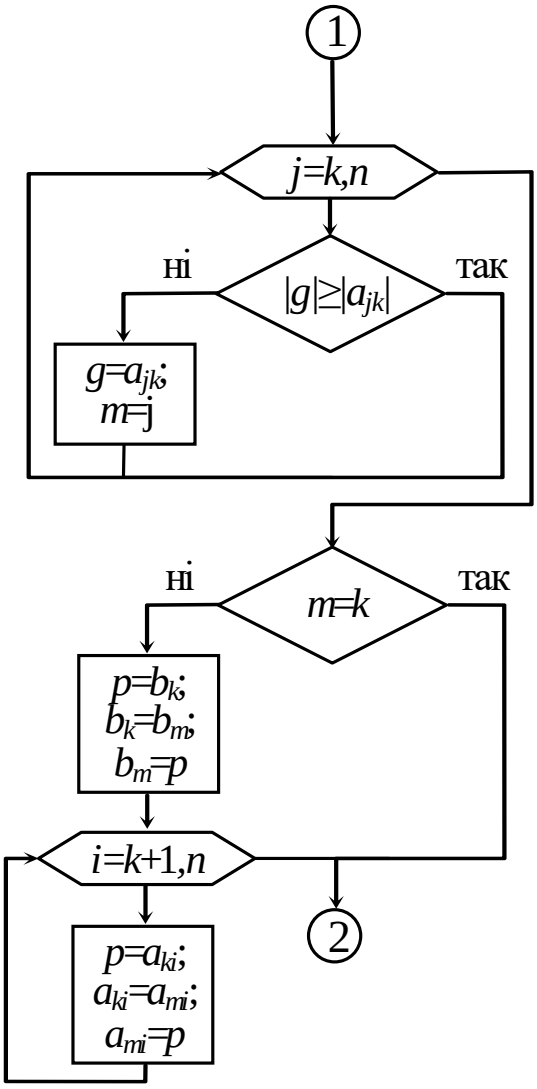


Рисунок 2 – Вибір головного елемента у методі Гауса

Тоді елементи b_{ij} і c_{ij} визначаються за формулами:

$$\left.\begin{aligned} b_{i1} &= a_{i1}; \\ b_{ij} &= a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{ik}c_{kj} (i \geq j > 1). \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

і

$$\left.\begin{aligned} c_{1j} &= \frac{a_{1j}}{b_{11}}; \\ c_{ij} &= \frac{1}{b_{ii}}\left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik}c_{kj}\right)(1 < i < j). \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Звідси шуканий вектор $\bar{x}$ може бути знайдений з ланцюга рівнянь

$$B\bar{y} = \bar{b}, C\bar{x} = \bar{y}. \quad (11)$$

Оскільки матриці B і C – трикутні, то системи (11) легко розв'язуються, а саме:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \frac{a_{1,n+1}}{b_{11}}; \\ y_i &= \frac{1}{b_{ii}}\left(a_{i,n+1} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik}y_k\right)(i > 1). \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

і

$$\left.\begin{aligned} x_n &= y_n; \\ x_i &= y_i - \sum_{k=i+1}^{n} c_{ik}x_k (i < n). \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

З формули (12) бачимо, що числа y_i зручно обчислювати разом з коефіцієнтами c_{ij}.

Схема Халецького зручна для роботи на комп'ютері, тому що в цьому випадку операції «нагромадження» (9) і (10) можна проводити без запису проміжних результатів. Метод є точним.

На рис. 3 наведена блок-схема програми розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Халецького.

В даній блок-схемі: n – кількість рівнянь; b_i – елементи вектору вільних членів; a_{ij} – елементи матриці сталих коефіцієнтів; x_i – елементи вектору невідомих; c_{ij} – елементи верхньої трикутної матриці; d_{ij} – елементи нижньої трикутної матриці; y_i – допоміжні числа.

Приклад.

Розв'язати методом Халецького систему рівнянь

$$\begin{cases} 1{,}35x_1 - 1{,}72x_2 - 0{,}62x_3 + 0{,}48x_4 = 0{,}93; \\ 1{,}08x_1 + 0{,}64x_2 - 0{,}95x_3 + 1{,}54x_4 = 1{,}64; \\ 0{,}88x_1 - 0{,}72x_2 + 1{,}36x_3 - 0{,}68x_4 = -0{,}85; \\ 0{,}64x_1 + 1{,}48x_2 + 0{,}82x_3 - 1{,}58x_4 = -1{,}32. \end{cases}$$

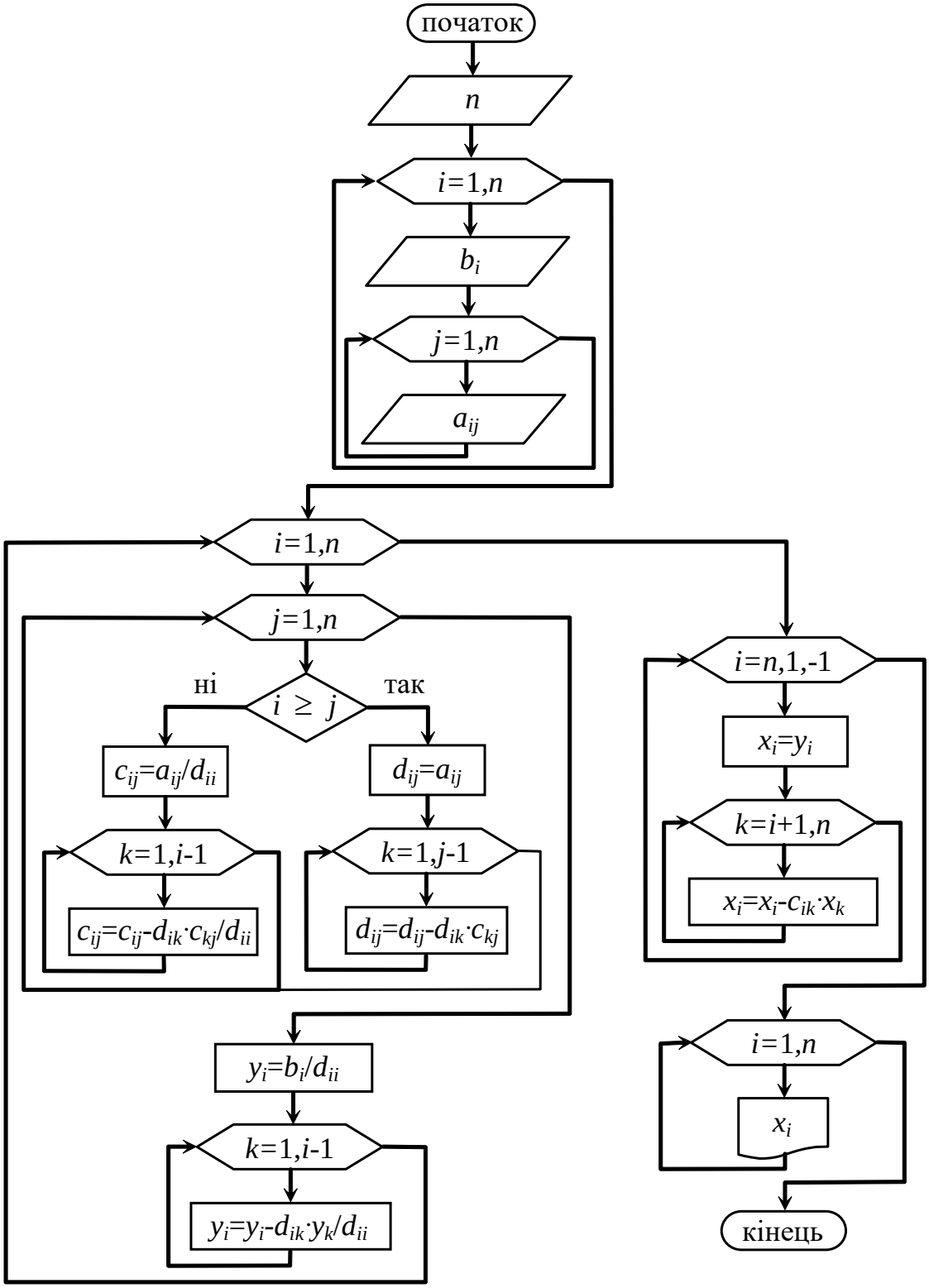


Рисунок 3 – Блок-схема розв’язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Халецького

Розв’язання.

Обчислення виконуємо за схемою, наведено в табл. 1

Таблиця 1 – Схема розв’язання задачі методом Халецького

x_1	x_2	x_3	x_4	Вільний член
1,35	-1,72	-0,62	0,48	0,93
1,08	0,64	-0,95	1,54	1,64
0,88	-0,72	1,36	-0,68	-0,85
0,64	1,48	0,82	-1,58	-1,32
1,35	-1,27410	-0,45926	0,35555	0,68888
1,08	2,01603	-0,22520	0,57341	0,44444
0,88	0,40121	1,85450	-0,65945	-0,88138
0,64	2,29542	1,63086	-2,04830	0,65598
			1	0,65598
		1		-0,44879
	1			-0,03277
1				0,20778

Відповідь: $x_1 = 0{,}2078;\ x_2 = -0{,}0328;\ x_3 = -0{,}4488;\ x_4 = 0{,}6560.$

Питання для самоперевірки до теми 1.3

1. Сформулюйте постановку задачі.
2. Опишіть метод розв’язання.
3. Оцініть похибку методу.
4. В чому полягають переваги схеми Халецького?

Завдання 1 до розділу 1. Похибки обчислень. Розв'язання СЛАР методом Гауса із постовпцевим вибором головного елементу

Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{j=1}^{6} a_{ij}\, x_j = b_i, i = 1{,}2, \ldots, 6$$

методом Гауса з вибором головного елемента відповідно зо індивідуального варіанту (див. табл. 2).

Таблиця 2 – Варіанти завдання 1 до розділу 1

№ варі-анта	Матриця коефіцієнтів системи A						Стовпець вільних членів $\bar{b}$
1	2,1	1,3	-5,2	1,4	3,3	4,6	14,35
	6,3	-0,4	-14,4	7,8	14,0	21,0	90,95
	2,1	-3,0	-1,7	9,2	7,8	24,6	129,28
	4,2	-1,7	-6,9	10,6	11,1	29,2	143,63
	-2,1	3,0	-0,6	-13,4	-0,5	0,0	-65,30
	4,2	2,6	-15,0	-5,6	13,5	0,6	-43,71

Продовження таблиці 2

	1,7	-3,1	2,2	0,6	1,8	-0,1	-7,31
	3,3	4,2	0,7	5,4	2,1	1,6	40,53
2	-0,4	5,7	4,1	3,6	-0,5	2,7	26,42
	4,7	-0,6	3,3	7,1	1,9	-4,6	23,24
	-0,1	7,2	4,8	2,3	5,1	3,3	52,40
	2,6	3,1	7,4	-4,1	8,2	-0,1	31,99
	-3,7	0,2	5,3	-1,4	2,2	3,4	-3,25
	0,6	2,4	-1,7	3,0	-7,1	0,7	-30,32
3	4,8	-5,2	-2,3	1,6	0,8	3,5	19,01
	1,1	4,4	0,8	3,1	-2,8	-5,1	6,19
	-0,3	1,5	-1,4	6,2	1,7	0,4	7,04
	2,2	-0,1	4,5	-3,3	2,6	6,6	20,35
	1,7	-0,1	8,2	-1,4	2,3	0,0	41,48
	-1,3	-0,9	2,1	6,7	0,0	1,1	6,27
4	-0,1	-1,3	0,5	2,4	5,6	0,6	16,44
	6,1	-0,1	3,2	1,2	0,7	-0,4	40,62
	2,2	0,1	-0,2	0,4	-1,8	5,1	5,08
	0,4	7,6	2,0	-0,3	1,8	2,1	3,65
	0,9	-1,7	0,3	6,9	1,2	-0,1	0,78
	-0,3	1,9	7,4	-1,1	0,9	0,2	-13,80
5	7,2	0,2	-0,9	1,3	-2,0	1,9	12,35
	0,4	0,6	2,2	-1,2	-0,1	5,2	12,69
	1,6	8,8	-0,4	0,7	2,3	-1,1	10,57
	-1,3	-0,8	0,1	0,6	5,7	2,0	1,91
	2,4	-1,0	0,2	0,0	1,4	6,8	13,12
	0,0	0,4	5,4	-1,0	-1,9	0,1	11,74
6	-1,9	1,5	-0,7	0,3	7,4	0,0	18,81
	8,3	-1,4	0,0	1,0	2,1	-1,7	-6,40
	2,2	0,6	0,0	6,6	-0,1	0,4	4,64
	-0,5	7,8	1,1	0,1	0,0	2,4	13,78
	-2,5	0,0	-0,4	0,0	6,7	1,2	4,13
	1,6	0,3	0,0	8,0	-1,1	-0,7	24,59
7	1,2	-1,0	0,7	-0,9	0,0	5,9	-5,39
	-1,0	8,4	0,2	-1,3	0,0	2,1	15,64
	9,0	0,7	-1,4	2,1	-0,2	-0,8	12,98
	0,2	-1,4	7,7	0,1	1,9	0,0	-10,12
	-0,9	0,3	-0,5	0,0	5,4	-1,2	-3,19
	0,7	-0,4	6,4	-2,0	1,4	0,0	-9,30
8	5,9	0,0	-0,8	1,1	0,3	0,7	3,83
	0,0	1,6	1,7	-2,1	0,0	6,6	19,43
	1,2	-1,0	0,0	7,9	-0,2	0,4	8,16
	-0,1	6,5	1,2	0,0	-0,9	-2,3	19,45

Продовження таблиці 2

9	-1,4	1,7	-0,1	8,2	2,3	0,0	-22,23
	0,4	-1,8	5,1	2,2	0,1	-0,2	1,65
	0,7	-0,4	-2,0	0,0	1,4	6,4	19,00
	0,0	-0,8	1,1	0,3	5,9	0,7	3,17
	6,7	0,0	1,1	-1,3	2,1	-0,9	12,13
	1,2	7,9	0,0	-1,0	-0,2	0,4	0,72
10	-0,4	0,7	1,2	3,2	6,1	-0,1	-22,40
	0,3	0,0	8,0	1,6	-1,1	-0,7	-9,39
	-0,8	-0,2	2,1	-1,4	0,7	9,0	-3,09
	0,0	6,7	1,1	2,1	-0,9	-1,3	3,94
	5,6	2,4	0,5	-1,3	-0,1	0,6	-1,69
	1,8	-0,3	2,0	7,6	0,4	2,1	21,40
11	2,1	1,8	-0,3	2,0	0,4	7,6	-1,52
	0,0	1,6	6,8	0,2	-1,0	2,4	10,34
	1,9	2,0	1,3	-0,9	7,2	0,2	10,61
	0,6	5,6	2,4	-0,1	-1,3	0,5	-1,98
	6,9	1,2	-1,0	0,3	-1,7	0,7	22,74
	2,0	0,6	0,1	5,7	-0,8	-1,3	28,30
12	-1,0	1,2	0,3	-1,7	6,9	0,9	-0,65
	-0,1	-1,2	5,2	2,2	0,6	0,4	-4,52
	5,9	0,7	0,3	1,1	-0,8	0,0	6,23
	0,2	0,9	-1,1	1,9	-0,3	7,4	25,28
	1,9	-2,0	1,3	7,2	0,2	-0,9	1,74
	1,4	6,8	0,0	0,2	-1,0	2,4	-4,26
13	0,2	0,9	-1,1	1,9	7,4	-0,3	-5,94
	-0,9	0,2	7,2	1,9	-2,0	1,3	7,40
	-1,1	2,3	0,7	-0,4	1,6	8,8	-6,04
	2,0	5,7	0,6	0,1	-0,8	-1,3	-7,38
	6,6	0,0	-2,1	1,7	1,6	0,0	15,74
	-1,0	1,2	0,3	6,9	0,9	-1,7	15,55
14	2,4	0,0	0,1	1,1	7,8	-0,5	-11,76
	0,1	-1,9	5,4	-1,0	0,4	0,0	4,66
	0,0	0,3	-0,7	1,5	-1,9	7,4	28,60
	5,7	2,0	0,6	0,1	-0,8	-1,3	-16,18
	0,4	-0,1	0,0	6,6	0,6	2,2	20,94
	1,4	6,8	0,0	0,2	-1,0	2,4	5,92
15	1,2	0,0	-0,4	6,6	0,1	-2,5	-8,86
	0,0	-0,9	6,1	0,7	-1,0	1,2	7,98
	0,0	1,9	0,1	-1,3	0,2	7,8	4,70
	-0,7	-1,1	0,0	0,3	8,1	1,3	29,47
	-0,1	5,2	-1,2	2,2	0,6	0,4	6,09
	7,9	0,4	-0,2	0,0	-1,0	1,2	-27,93

Продовження таблиці 2

	1,9	-1,7	0,3	2,1	7,9	-0,4	11,78
	0,9	0,0	6,8	-2,1	-0,9	1,3	10,44
16	-0,5	0,3	1,3	2,9	0,1	6,2	13,82
	1,8	5,2	0,2	-0,4	0,0	2,2	-1,72
	5,8	0,5	-2,4	0,3	1,4	-0,1	1,76
	0,0	2,2	-1,2	8,0	-0,1	1,7	25,45
	-0,1	0,2	-1,0	5,2	-1,8	0,4	3,42
	0,0	2,3	8,4	-0,2	1,6	-1,3	-11,56
17	0,4	-0,1	-1,1	0,0	8,0	1,2	27,17
	-1,2	5,7	-0,5	0,0	0,3	-0,9	3,69
	-0,8	1,9	-1,4	1,1	0,0	6,6	0,90
	6,7	0,1	-2,1	1,7	1,5	0,0	11,57
	-0,2	0,3	2,4	5,3	1,6	-0,3	-10,57
	0,0	2,1	8,4	0,2	-1,8	1,3	17,30
18	0,4	-0,1	1,2	0,0	8,1	-1,0	7,62
	0,6	6,0	-0,4	-1,1	0,9	0,0	3,85
	-0,8	2,0	-1,4	-1,1	0,1	6,8	32,76
	6,3	-1,4	0,0	2,0	0,4	-0,7	1,95
	2,1	0,4	7,7	-1,9	0,4	-1,7	-8,87
	1,3	-0,8	-2,0	1,2	6,8	0,1	12,52
19	-0,7	-1,0	1,5	8,1	0,0	0,3	33,09
	0,0	6,2	-3,1	1,1	-0,8	-0,4	0,19
	0,6	0,0	1,2	-0,4	-2,5	5,7	17,56
	8,9	-0,6	1,3	-2,0	0,2	0,7	14,12
	-0,7	-1,1	1,6	8,0	0,0	0,3	-11,48
	2,0	0,2	7,8	-2,1	0,2	-1,6	9,85
20	-1,2	-0,8	2,0	0,9	6,6	0,1	19,77
	0,2	7,0	-3,3	1,4	-0,1	0,5	-19,81
	0,4	-0,2	1,1	-0,6	2,3	5,7	-4,61
	9,1	-0,5	1,2	-2,4	0,0	-0,6	19,36
	-0,5	-1,3	-0,2	2,2	5,6	0,4	13,76
	-2,4	1,0	0,1	6,9	1,6	0,0	5,09
21	0,9	1,5	0,6	-1,2	1,0	6,8	8,94
	0,1	7,0	0,7	-1,1	-1,9	1,6	-1,50
	7,8	-0,3	-1,9	0,4	1,7	2,2	-15,59
	1,4	0,6	5,8	0,1	-0,6	-1,8	2,55
	0,4	0,6	2,2	5,4	-1,2	-0,1	-1,82
	0,7	-0,2	7,1	-1,2	1,9	2,1	2,64
22	-2,2	-1,1	0,0	0,2	6,8	1,2	4,54
	0,1	-1,4	-1,8	2,0	0,0	6,6	-9,40
	-0,9	6,8	1,6	-0,2	1,2	-1,0	16,54
	7,5	0,4	-2,0	0,9	-1,1	0,1	22,19

Продовження таблиці 2

	-1,1	-0,8	0,1	0,6	5,7	2,0	0,39
	-1,7	0,9	6,9	0,3	-1,2	-1,0	-15,29
23	8,8	-1,5	0,3	-0,7	2,2	-1,1	13,95
	0,1	1,6	-1,5	-2,1	0,0	6,6	-17,54
	0,3	7,4	-1,9	1,1	0,9	0,2	5,60
	1,3	-2,0	1,9	7,2	0,2	-0,9	3,68
	2,4	-1,0	0,2	0,0	6,8	1,4	11,18
	2,2	0,6	6,6	0,0	-0,1	-0,4	15,68
24	7,4	-1,9	1,5	-0,7	0,3	0,0	21,01
	-1,3	-0,8	0,1	0,6	2,0	5,7	2,79
	-0,5	7,8	1,1	0,1	0,0	2,4	0,69
	0,1	0,3	-1,0	5,4	-1,9	0,1	-18,92
	2,2	-0,4	0,6	5,2	-1,2	0,1	-1,82
	0,1	0,6	5,7	-1,3	-0,8	2,0	299,61
25	0,0	0,2	-1,0	0,0	6,8	1,4	2,34
	6,9	-0,9	-1,7	1,2	0,3	-1,0	15,43
	-0,4	2,1	2,0	-0,3	1,8	7,6	36,80
	-1,9	7,0	0,1	-1,6	0,7	-1,1	6,21
	0,4	0,6	2,2	-1,2	5,2	-0,1	-0,40
	-2,3	0,1	6,6	-0,4	0,0	1,2	-13,07
26	7,9	-0,3	1,3	-0,1	1,8	0,1	14,32
	1,2	-1,0	0,0	-0,2	0,4	7,8	1,54
	1,4	8,2	-0,1	0,0	-1,1	-0,7	6,93
	1,2	-1,0	0,7	6,1	-0,9	0,0	13,02
	2,2	-0,1	-0,3	0,2	5,3	-1,7	-3,84
	1,6	0,0	8,1	-1,2	2,1	-0,1	30,16
27	6,2	0,1	-2,7	1,2	-0,3	-0,5	-25,78
	-0,1	1,4	0,4	2,1	0,5	5,7	17,58
	-0,4	7,9	2,0	-0,2	-1,7	1,9	11,30
	1,3	-0,9	-2,1	6,8	0,0	0,7	-4,95
	-0,9	0,3	0,0	-0,5	5,8	-1,1	-6,18
	0,4	-1,6	5,3	1,0	-0,2	-0,1	7,53
28	6,6	0,0	1,1	-1,4	1,7	-0,6	24,20
	0,1	1,3	1,6	-2,1	0,2	6,7	15,66
	1,2	8,2	0,0	-1,1	0,1	0,2	-6,36
	-1,3	1,8	-0,2	8,6	-2,2	0,0	-9,21
	0,1	0,0	0,9	-1,1	6,0	0,6	-13,70
	-0,3	1,6	5,3	2,4	0,3	-0,2	20,17
29	6,8	0,1	-1,1	-1,4	2,0	-0,8	12,52
	-0,7	0,4	2,0	0,0	-1,4	6,3	17,02
	-1,0	8,1	0,0	1,2	-0,1	0,4	-18,95
	1,3	-1,8	0,2	8,4	2,1	0,0	30,19

Кінець таблиці 2

30	0,4	-0,8	0,0	1,1	6,2	-3,1	15,05
	0,3	0,0	8,1	1,5	-1,0	-0,7	-21,52
	5,7	-1,5	-0,4	1,2	0,0	0,6	0,99
	0,7	0,2	-2,0	1,3	-0,6	8,9	18,45
	0,1	6,8	1,2	-2,0	-0,8	1,2	1,48
	-1,7	0,4	-1,9	7,7	0,4	2,1	10,18

Завдання 2 до розділу 1. Розв'язання СЛАР методом Холецького

Розв’язати систему рівнянь за схемою Халецького з точністю до 0,0001.

№ 1. $\begin{cases} 0{,}63x_1 + 1{,}00x_2 + 0{,}71x_3 + 0{,}34x_4 = 2{,}08; \\ 1{,}17x_1 + 0{,}18x_2 - 0{,}65x_3 + 0{,}71x_4 = 0{,}17; \\ 2{,}71x_1 - 0{,}75x_2 + 1{,}17x_3 - 2{,}35x_4 = 1{,}28; \\ 3{,}58x_1 + 0{,}21x_2 - 3{,}45x_3 - 1{,}18x_4 = 0{,}05. \end{cases}$

№ 2. $\begin{cases} 3{,}51x_1 + 0{,}17x_2 + 3{,}75x_3 - 0{,}28x_4 = 0{,}75; \\ 4{,}52x_1 + 2{,}11x_2 - 0{,}11x_3 - 0{,}12x_4 = 1{,}11; \\ -2{,}11x_1 + 3{,}17x_2 + 0{,}12x_3 - 0{,}15x_4 = 0{,}21; \\ 3{,}17x_1 + 1{,}18x_2 - 3{,}17x_3 + 0{,}22x_4 = 0{,}05. \end{cases}$

№ 3. $\begin{cases} 0{,}17x_1 + 0{,}75x_2 - 0{,}18x_3 + 0{,}21x_4 = 0{,}1; \\ 0{,}75x_1 + 0{,}13x_2 + 0{,}11x_3 + 1{,}00x_4 = 2{,}00; \\ -0{,}33x_1 + 0{,}11x_2 + 3{,}01x_3 - 2{,}01x_4 = 0{,}11; \\ 0{,}1x_1 + 1{,}12x_2 + 1{,}11x_3 - 1{,}31x_4 = 0{,}13. \end{cases}$

№ 4. $\begin{cases} -1{,}00x_1 + 0{,}13x_2 - 2{,}00x_3 - 0{,}14x_4 = 0{,}15; \\ 0{,}75x_1 + 0{,}18x_2 - 0{,}21x_3 - 0{,}77x_4 = 0{,}11; \\ 0{,}28x_1 - 0{,}17x_2 + 0{,}39x_3 + 0{,}48x_4 = 0{,}12; \\ 1{,}00x_1 + 3{,}14x_2 - 0{,}21x_3 - 1{,}00x_4 = -0{,}11. \end{cases}$

№ 5. $\begin{cases} 3{,}01x_1 - 0{,}14x_2 + 1{,}00x_3 - 0{,}15x_4 = 1{,}00; \\ -1{,}75x_1 + 1{,}11x_2 + 0{,}13x_3 - 0{,}75x_4 = 0{,}13; \\ 0{,}17x_1 - 2{,}11x_2 + 0{,}71x_3 - 1{,}71x_4 = 1{,}00; \\ 0{,}21x_1 + 0{,}21x_2 + 0{,}35x_3 + 0{,}33x_4 = 0{,}17. \end{cases}$

№ 6. $\begin{cases} 1{,}15x_1 + 0{,}62x_2 - 0{,}83x_3 + 0{,}92x_4 = 2{,}15; \\ 0{,}82x_1 - 0{,}54x_2 + 0{,}43x_3 - 0{,}25x_4 = 0{,}62; \\ 0{,}24x_1 + 1{,}15x_2 - 0{,}33x_3 + 1{,}42x_4 = -0{,}62; \\ 0{,}73x_1 - 0{,}81x_2 + 1{,}27x_3 - 0{,}67x_4 = 0{,}88. \end{cases}$

№ 7. $\begin{cases} 2{,}2x_1 - 3{,}17x_2 + 1{,}24x_3 - 0{,}87x_4 = 0{,}46; \\ 1{,}5x_1 + 2{,}11x_2 - 0{,}45x_3 + 1{,}44x_4 = 1{,}5; \\ 0{,}86x_1 - 1{,}44x_2 + 0{,}62x_3 + 0{,}28x_4 = -0{,}12; \\ 0{,}48x_1 + 1{,}25x_2 - 0{,}63x_3 - 0{,}97x_4 = 0{,}35. \end{cases}$

№ 8. $\begin{cases} 0{,}64x_1 + 0{,}72x_2 - 0{,}83x_3 + 4{,}2x_4 = 2{,}23; \\ 0{,}58x_1 - 0{,}83x_2 + 1{,}43x_3 - 0{,}62x_4 = 1{,}71; \\ 0{,}86x_1 + 0{,}77x_2 - 1{,}83x_3 + 0{,}88x_4 = -0{,}54; \\ 1{,}32x_1 - 0{,}52x_2 - 0{,}65x_3 + 1{,}22x_4 = 0{,}65. \end{cases}$

№ 9. $\begin{cases} 1{,}42x_1 + 0{,}32x_2 - 0{,}42x_3 + 0{,}85x_4 = 1{,}32; \\ 0{,}63x_1 - 0{,}43x_2 + 1{,}27x_3 - 0{,}58x_4 = -0{,}44; \\ 0{,}84x_1 - 2{,}23x_2 - 0{,}52x_3 + 0{,}47x_4 = 0{,}64; \\ 0{,}27x_1 + 1{,}37x_2 + 0{,}64x_3 - 1{,}27x_4 = 0{,}85. \end{cases}$

№10. $\begin{cases} 0{,}73x_1 + 1{,}24x_2 - 0{,}38x_3 - 1{,}43x_4 = 0{,}58; \\ 1{,}07x_1 - 0{,}77x_2 + 1{,}25x_3 + 0{,}66x_4 = -0{,}66; \\ 1{,}56x_1 + 0{,}66x_2 + 1{,}44x_3 - 0{,}87x_4 = 1{,}24; \\ 0{,}75x_1 + 1{,}22x_2 - 0{,}83x_3 + 0{,}37x_4 = 0{,}92. \end{cases}$

№ 11. $\begin{cases} 1{,}32x_1 - 0{,}83x_2 - 0{,}44x_3 + 0{,}62x_4 = 0{,}68; \\ 0{,}83x_1 + 0{,}42x_2 - 0{,}56x_3 + 0{,}77x_4 = 1{,}24; \\ 0{,}58x_1 - 0{,}37x_2 + 1{,}24x_3 - 0{,}62x_4 = 0{,}87; \\ 0{,}35x_1 + 0{,}66x_2 - 1{,}38x_3 - 0{,}93x_4 = -1{,}08. \end{cases}$

№ 12. $\begin{cases} 0{,}11x_1 - 0{,}17x_2 + 0{,}72x_3 - 0{,}34x_4 = 0{,}17; \\ 0{,}81x_1 + 0{,}12x_2 - 0{,}91x_3 + 0{,}17x_4 = 1{,}00; \\ 0{,}17x_1 - 0{,}18x_2 + 1{,}00x_3 + 0{,}23x_4 = 0{,}21; \\ 0{,}13x_1 + 0{,}17x_2 - 0{,}99x_3 + 0{,}35x_4 = 2{,}71. \end{cases}$

№ 13. $\begin{cases} 0{,}18x_1 + 2{,}11x_2 + 0{,}13x_3 - 0{,}22x_4 = 0{,}22; \\ 0{,}33x_1 - 0{,}22x_2 - 1{,}00x_3 + 0{,}17x_4 = 0{,}11; \\ -1{,}00x_1 + 0{,}11x_2 + 2{,}00x_3 - 0{,}45x_4 = 1{,}00; \\ 7{,}00x_1 - 0{,}17x_2 - 0{,}22x_3 + 0{,}33x_4 = 0{,}21. \end{cases}$

№ 14. $\begin{cases} 2{,}00x_1 + 0{,}05x_2 - 3{,}01x_3 - 0{,}11x_4 = 0{,}21; \\ 1{,}00x_1 - 2{,}00x_2 + 3{,}02x_3 + 0{,}05x_4 = 0{,}18; \\ 0{,}17x_1 + 0{,}99x_2 - 2{,}00x_3 - 0{,}17x_4 = 0{,}17; \\ 0{,}33x_1 - 0{,}07x_2 + 0{,}33x_3 + 2{,}00x_4 = 0{,}17. \end{cases}$

№ 15. $\begin{cases} 0{,}17x_1 - 0{,}13x_2 - 0{,}11x_3 - 0{,}12x_4 = 0{,}22; \\ 1{,}00x_1 - 1{,}00x_2 - 0{,}13x_3 + 0{,}13x_4 = 0{,}11; \\ 0{,}35x_1 + 0{,}33x_2 + 0{,}12x_3 + 0{,}13x_4 = 0{,}12; \\ 0{,}13x_1 + 0{,}11x_2 - 0{,}13x_3 - 0{,}11x_4 = 1{,}00. \end{cases}$

№ 16. $\begin{cases} 0{,}11x_1 + 1{,}13x_2 - 0{,}17x_3 + 0{,}18x_4 = 1{,}00; \\ 0{,}13x_1 - 1{,}17x_2 + 0{,}18x_3 + 0{,}14x_4 = 0{,}13; \\ 0{,}11x_1 - 1{,}05x_2 - 0{,}17x_3 - 0{,}15x_4 = 0{,}11; \\ 0{,}15x_1 - 0{,}05x_2 + 0{,}18x_3 - 0{,}11x_4 = 1{,}00. \end{cases}$

№ 17. $\begin{cases} 1{,}00x_1 - 0{,}17x_2 + 0{,}11x_3 - 0{,}15x_4 = 0{,}17; \\ 0{,}14x_1 + 0{,}21x_2 - 0{,}33x_3 + 0{,}11x_4 = 1{,}00; \\ 0{,}22x_1 + 3{,}44x_2 - 0{,}11x_3 + 0{,}12x_4 = 2{,}00; \\ 0{,}11x_1 + 0{,}13x_2 + 0{,}12x_3 + 0{,}14x_4 = 0{,}13. \end{cases}$

№ 18. $\begin{cases} 1{,}00x_1 + 0{,}55x_2 - 0{,}13x_3 + 0{,}34x_4 = 0{,}13; \\ 0{,}13x_1 - 0{,}17x_2 + 0{,}33x_3 + 0{,}17x_4 = 0{,}11; \\ 0{,}11x_1 + 0{,}18x_2 - 0{,}22x_3 - 0{,}11x_4 = 1{,}00; \\ 0{,}13x_1 - 0{,}12x_2 + 0{,}21x_3 + 0{,}22x_4 = 0{,}18. \end{cases}$

№ 19. $\begin{cases} 1{,}00x_1 - 0{,}51x_2 + 0{,}12x_3 + 0{,}55x_4 = 0{,}12; \\ 0{,}12x_1 + 0{,}18x_2 - 0{,}22x_3 - 0{,}41x_4 = 0{,}13; \\ 0{,}22x_1 - 3{,}01x_2 + 0{,}31x_3 + 0{,}58x_4 = 1{,}00; \\ 1{,}00x_1 + 0{,}24x_2 - 3{,}05x_3 - 0{,}22x_4 = 3{,}41. \end{cases}$

№ 20. $\begin{cases} 0{,}13x_1 + 0{,}22x_2 - 0{,}14x_3 + 0{,}15x_4 = 1{,}00; \\ 0{,}22x_1 - 0{,}31x_2 + 0{,}42x_3 - 5{,}10x_4 = 6{,}01; \\ 0{,}62x_1 - 0{,}74x_2 + 0{,}85x_3 - 0{,}96x_4 = 0{,}11; \\ 0{,}12x_1 + 0{,}13x_2 + 0{,}14x_3 + 0{,}45x_4 = 0{,}16. \end{cases}$

№ 21. $\begin{cases} 0{,}18x_1 + 0{,}19x_2 + 0{,}20x_3 - 0{,}21x_4 = 0{,}22; \\ 0{,}51x_1 - 0{,}50x_2 + 0{,}49x_3 - 0{,}48x_4 = 0{,}47; \\ 0{,}61x_1 + 0{,}62x_2 - 0{,}63x_3 + 0{,}64x_4 = 0{,}65; \\ 0{,}11x_1 - 0{,}15x_2 + 0{,}22x_3 - 0{,}38x_4 = 0{,}42. \end{cases}$

№ 22. $\begin{cases} 0{,}17x_1 - 0{,}18x_2 + 0{,}19x_3 - 5{,}74x_4 = 1{,}00; \\ 0{,}11x_1 - 0{,}43x_2 + 0{,}15x_3 - 0{,}17x_4 = 1{,}9; \\ 0{,}12x_1 + 0{,}14x_2 + 0{,}16x_3 + 0{,}18x_4 = 2{,}00; \\ 0{,}71x_1 - 0{,}13x_2 - 0{,}41x_3 + 0{,}52x_4 = 1{,}00. \end{cases}$

№ 23. $\begin{cases} 1{,}00x_1 - 2{,}01x_2 + 2{,}04x_3 + 0{,}17x_4 = 0{,}18; \\ 0{,}33x_1 - 0{,}77x_2 + 0{,}44x_3 - 0{,}51x_4 = 0{,}19; \\ 0{,}31x_1 + 0{,}17x_2 - 0{,}21x_3 + 0{,}54x_4 = 0{,}21; \\ 0{,}17x_1 + 1{,}00x_2 - 0{,}13x_3 + 0{,}21x_4 = 0{,}31. \end{cases}$

№ 24. $\begin{cases} 2{,}34x_1 - 1{,}42x_2 - 0{,}54x_3 + 0{,}21x_4 = 0{,}66; \\ 1{,}44x_1 - 0{,}53x_2 + 1{,}43x_3 - 1{,}27x_4 = -1{,}44; \\ 0{,}63x_1 - 1{,}32x_2 - 0{,}65x_3 + 1{,}43x_4 = 0{,}94; \\ 0{,}56x_1 + 0{,}88x_2 - 0{,}67x_3 - 2{,}38x_4 = 0{,}73. \end{cases}$

№ 25. $\begin{cases} 0{,}63x_1 - 0{,}76x_2 + 1{,}34x_3 + 0{,}37x_4 = 1{,}21; \\ 0{,}54x_1 + 0{,}83x_2 - 0{,}74x_3 - 1{,}27x_4 = 0{,}86; \\ 0{,}24x_1 - 0{,}44x_2 + 0{,}35x_3 + 0{,}55x_4 = 0{,}25; \\ 0{,}43x_1 - 1{,}21x_2 + 2{,}32x_3 - 1{,}41x_4 = 1{,}55. \end{cases}$

№ 26. $\begin{cases} 1{,}43x_1 + 0{,}87x_2 - 1{,}57x_3 - 0{,}58x_4 = 2{,}34; \\ 0{,}63x_1 - 0{,}57x_2 - 2{,}34x_3 + 0{,}66x_4 = 0{,}77; \\ 1{,}57x_1 + 0{,}66x_2 - 0{,}57x_3 + 1{,}15x_4 = -0{,}24; \\ 0{,}88x_1 - 0{,}67x_2 + 0{,}55x_3 - 0{,}45x_4 = 0{,}56. \end{cases}$

№ 27. $\begin{cases} 1{,}71x_1 - 0{,}83x_2 + 1{,}44x_3 - 0{,}72x_4 = 1{,}35; \\ 0{,}64x_1 - 0{,}85x_2 - 0{,}43x_3 + 0{,}88x_4 = 0{,}77; \\ 0{,}38x_1 + 1{,}42x_2 + 0{,}63x_3 - 1{,}55x_4 = 0{,}28; \\ 0{,}83x_1 - 0{,}66x_2 + 0{,}58x_3 + 1{,}22x_4 = -0{,}47. \end{cases}$

№ 28. $\begin{cases} 0{,}85x_1 + 1{,}27x_2 - 2{,}37x_3 + 0{,}57x_4 = 1{,}47; \\ 1{,}47x_1 - 0{,}28x_2 + 0{,}56x_3 - 1{,}21x_4 = 0{,}86; \\ 0{,}66x_1 + 1{,}31x_2 - 0{,}63x_3 - 0{,}43x_4 = -0{,}55; \\ 0{,}57x_1 - 0{,}78x_2 - 0{,}56x_3 - 0{,}83x_4 = 0{,}27. \end{cases}$

№ 29. $\begin{cases} 0{,}68x_1 + 1{,}32x_2 - 0{,}63x_3 - 0{,}87x_4 = 1{,}43; \\ 0{,}57x_1 + 0{,}36x_2 - 1{,}24x_3 - 0{,}235x_4 = 0{,}33; \\ 0{,}82x_1 - 0{,}32x_2 + 1{,}42x_3 + 1{,}48x_4 = -0{,}84; \\ 0{,}56x_1 - 1{,}20x_2 + 1{,}50x_3 - 0{,}64x_4 = 0{,}45. \end{cases}$

№ 30. $\begin{cases} 1{,}42x_1 + 2{,}34x_2 - 0{,}88x_3 + 0{,}53x_4 = 0{,}72; \\ 0{,}71x_1 - 1{,}15x_2 + 0{,}53x_3 - 0{,}67x_4 = -0{,}18; \\ 0{,}55x_1 - 0{,}93x_2 - 1{,}42x_3 + 1{,}32x_4 = 0{,}68; \\ 0{,}44x_1 - 0{,}25x_2 + 1{,}92x_3 - 1{,}08x_4 = 0{,}43. \end{cases}$

РОЗДІЛ 2 НАБЛИЖЕНІ (ІТЕРАЦІЙНІ) МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

2.1. Метод простих ітерацій

Цей найпростіший ітераційний метод розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь полягає в тому, що система рівнянь $A\bar{x} = \bar{b}$ перетворюється до вигляду

$$\bar{x} = B\bar{x} + \bar{c} \tag{14}$$

і її розв'язок знаходиться як границя послідовності

$$\bar{x}^{(k+1)} = B\bar{x}^{(k)} + \bar{c}, \qquad k = 0,1,\dots \tag{15}$$

Ітераційний процес (15) збігається до розв'язку системи зі швидкістю геометричної прогресії, якщо норма матриці $\|B\| < 1$. При цьому, початкове наближення $\bar{x}^{(0)}$ можна вибирати довільно. На практиці за початкове наближення $\bar{x}^{(0)}$ беруть стовпець вільних членів $\bar{c}$.

Нагадаємо визначення основних норм у просторах векторів і матриць. Якщо в просторі векторів $\bar{x} = (x_1, \dots, x_m)^T$ введена норма $\|\bar{x}\|$, то погодженою з нею нормою в просторі матриць A називають норму

$$\|A\| = \sup_{X \neq 0} \|A\bar{x}\| / \|\bar{x}\| .$$

Найбільш вживані в просторі векторів наступні норми

$$\|\bar{x}\|_\infty = \max_{1 \le j \le m} |x_j|,$$

$$\|\bar{x}\|_1 = \sum_{j=1}^{m} |x_j|,$$

$$\|\bar{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} |x_j|^2} = \sqrt{(\bar{x}, \bar{x})},$$

а погодженими з ними нормами в просторі матриць є відповідно норми

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le m} \left(\sum_{j=1}^{m} |a_{ij}| \right);$$

$$\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le m} \left(\sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \right);$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\max_{1 \le i \le m} \lambda^i_{A^*A}},$$

тут λ^i_D – власне значення матриці D, A^* – матриця, сполучена до матриці A.

Для приведення вихідної системи до вигляду (14) практично роблять наступне. Із заданої системи виділяють рівняння з коефіцієнтами при невідомих, модулі яких більші від суми модулів інших коефіцієнтів при невідомих у рівнянні. Кожне виділене рівняння вписують у такий рядок нової системи, щоб найбільший за модулем коефіцієнт виявився діагональним.

З останніх невикористаних і виділених рівнянь системи складають лінійні комбінації з таким розрахунком, щоб був дотриманий зазначений вище принцип комплектування нової системи, й усі вільні рядки виявилися заповненими. При цьому треба подбати, щоб кожне невикористане раніше рівняння потрапило хоча б в одну лінійну комбінацію, що є рівнянням нової системи.

Якщо коефіцієнти й вільні члени даної системи є наближеними числами, написаними з p знаками, то для одержання розв'язку з m числом десяткових знаків $(m \le p)$ слід в значеннях послідовних наближень утримувати $m+1$ десяткових знаків і послідовні наближення обчислювати до їхнього збігу, після чого треба округлити результат на один знак.

Блок-схема методу наведена на рис. 4. У блок-схемі: n – кількість рівнянь; b_i – елементи вектору вільних членів; a_{ij} – елементи матриці коефіцієнтів при невідомих; ε – точність обчислень; x_{0i} – елементи вектору невідомих на попередній ітерації; x_i – елементи вектору невідомих на теперішній ітерації; *iter* – номер ітерації.

Приклад.

Методом простої ітерації з точністю до двох вірних десяткових знаків після коми розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 & +3x_2 & -4x_3 & +x_4 & -3 & = 0, & (A) \\ x_1 & -2x_2 & -5x_3 & +x_4 & -2 & = 0, & (Б) \\ 5x_1 & -3x_2 & +x_3 & -4x_4 & -1 & = 0, & (B) \\ 10x_1 & +2x_2 & -x_3 & +2x_4 & +4 & = 0, & (Г) \end{cases}$$

Розв'язання. У рівнянні (Б) коефіцієнт при x_3 за модулем більше від суми модулів інших коефіцієнтів при невідомих, тому його можна прийняти за третє рівняння нової системи. Коефіцієнт при x_1 в рівнянні (Г) також більше від суми модулів інших коефіцієнтів рівняння $(Г)$, тому можна прийняти це рівняння за перше рівняння нової системи. Таким чином, нова система має такий вигляд:

$$\begin{cases} 10x_1 & +2x_2 & -x_3 & +2x_4 & +4 & = 0, & (I) \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots, & (II) \\ x_1 & -2x_2 & -5x_3 & +x_4 & -2 & = 0, & (III) \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & (IV) \end{cases}$$

Аналізуючи дану систему, легко помітити, що для одержання рівняння (II) з максимальним за модулем коефіцієнтом при x_2 досить скласти різницю $(A) - (Б)$:

$$x_1 + 5x_2 + x_3 + 0 \cdot x_4 - 1 = 0 \ (II).$$

Тепер у нову систему ввійшли рівняння (A), (Б) і (Г), тому в рівняння(IV) обов'язково повинне ввійти рівняння (В) даної системи. Підбором переконуємося, що за рівняння (IV) можна взяти лінійну комбінацію $2(A) - (Б) + 2(B) - (Г)$, тобто

$$3x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 - 9x_4 - 10 = 0 \quad (IV).$$

У підсумку одержали перетворену систему рівнянь (I) – (IV) еквівалентну даній. Розв'язавши цю систему щодо діагональних невідомих, будемо мати систему:

$$\begin{cases} x_1 = & 0 \cdot x_1 & -0{,}2x_2 & +0{,}1x_3 & -0{,}2x_4 & -0{,}4, \\ x_2 = & -0{,}2x_1 & +0 \cdot x_2 & -0{,}2x_3 & +0 \cdot x_4 & +0{,}2, \\ x_3 = & 0{,}2x_1 & -0{,}4x_2 & +0 \cdot x_3 & +0{,}2x_4 & -0{,}4, \\ x_4 = & 0{,}333x_1 & +0 \cdot x_2 & -0 \cdot x_3 & +0 \cdot x_4 & -1{,}111, \end{cases}$$

для знаходження розв’язку якої можна застосувати метод простої ітерації, тому що для неї виконується достатня умова збіжності.

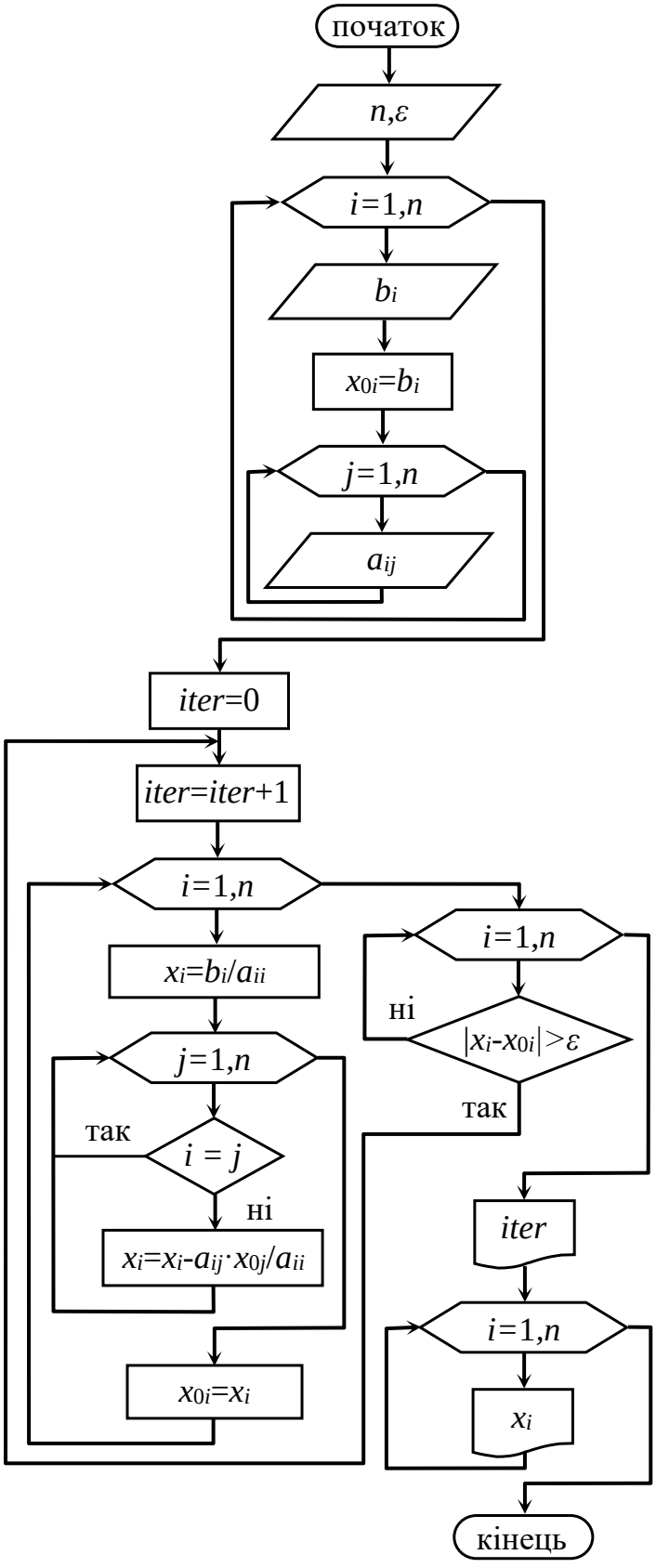


Рисунок 4 – Блок-схема розв’язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом простої ітерації

За нульове наближення коренів системи приймемо стовпець вільних членів, тобто $x_1^{(0)} = -0{,}4;\ x_2^{(0)} = 0{,}2;\ x_3^{(0)} = -0{,}4;\ x_4^{(0)} = -1{,}111$. Підставляючи ці значення в праві частини рівнянь останньої системи, одержимо перші наближення коренів:

$$x_1^{(1)} = -0{,}2 \cdot 0{,}2 + 0{,}1(-0{,}4) - 0{,}2(-1{,}111) - 0{,}4 \approx -0{,}258;$$
$$x_2^{(1)} = -0{,}2(-0{,}4) - 0{,}2(-0{,}4) + 0{,}2 \approx 0{,}360;$$
$$x_3^{(1)} = 0{,}2(-0{,}4) - 0{,}4 \cdot 0{,}2 + 0{,}2(-1{,}111) - 0{,}4 \approx -0{,}782;$$
$$x_4^{(1)} = 0{,}333(-0{,}4) - 1{,}111 \approx -1{,}244\ .$$

Далі, підставляючи ці знайдені наближення знову в праві частини системи, одержимо другі наближення коренів:

$$x_1^{(2)} = -0{,}301\ ;\ x_2^{(2)} = 0{,}408;\ x_3^{(2)} = -0{,}844;\ x_4^{(2)} = -1{,}197.$$

Після нової підстановки будемо мати треті наближення коренів і т.д.

Для одержання коренів з необхідною точністю в одержуваних наближеннях утримуємо три знаки після коми й ітерації виконуємо доти, поки утримувані знаки в результатах перестануть змінюватися. Зведемо результати обчислень у таблицю 3.

Таблиця 3 – Реалізація методу простої ітерації

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$x_4^{(k)}$
0	-0,4	0,2	-0,4	-1,111
1	-0,258	0,360	-0,782	-1,244
2	-0,301	0,408	-0,844	-1,197
3	-0,327	0,429	-0,863	-1,212
4	-0,330	0,438	-0,879	-1,220
5	-0,332	0,442	-0,885	-1,221
6	-0,333	0,443	-0,887	-1,222
7	-0,333	0,444	-0,888	-1,222
8	-0,333	0,444	-0,889	-1,222
9	-0,333	0,444	-0,889	-1,222

Як видно з таблиці 3, на дев’ятому кроці ітерацій утримувані десяткові знаки в результатах перестали змінюватися. Округляючи отримані значення коренів на один знак, одержуємо $x_1 \approx -0{,}33;\ \ x_2 \approx 0{,}44;\ \ x_3 \approx -0{,}89;\ x_4 \approx -1{,}22$.

Питання для самоконтролю до розділу 2

1. Сформулюйте постановку задачі.
2. Опишіть метод розв’язання.
3. Оцініть похибку методу.
4. Які умови збіжності ітерацій до точного розв’язку є достатніми?
5. В чому полягає умова закінчення ітераційного процесу?

Завдання до розділу 2. Розв'язання СЛАР методом простих ітерацій

Методом простої ітерації з точністю до двох знаків після коми розв’яжіть систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{j=1}^{6} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1,2,..,6.$$

Відповідно до індивідуального варіанту (табл. 4).

Таблиця 4 – Варіанти завдань до розділу 2

№ варі-анта	Матриця коефіцієнтів системи A						Стовпець вільних членів $\bar{b}$
1	2,1	0,3	4,4	-0,1	1,4	0,0	-2,25
	0,0	2,2	-3,4	0,3	-0,8	1,4	4,07
	5,2	-1,0	0,4	0,7	1,1	-0,1	3,69
	-0,6	1,5	3,2	-2,1	1,6	0,6	-8,02
	1,3	0,2	0,0	0,8	6,1	-1,4	-16,33
	0,4	0,0	-2,7	1,4	-1,8	3,1	18,06
2	3,3	4,2	0,7	5,4	2,1	1,6	24,87
	-0,1	7,2	1,8	-2,3	1,1	0,3	7,81
	-2,1	3,0	-0,6	-3,4	-0,5	0,0	0,20
	0,4	0,0	1,9	6,1	-0,8	-2,1	11,00
	4,7	-0,6	3,3	7,1	1,9	-4,6	0,12
	0,0	0,2	-1,6	2,4	0,7	5,7	22,04
3	0,4	7,6	2,0	-0,3	1,8	2,1	29,95
	4,8	-5,2	-2,3	1,6	0,8	-3,5	-20,33
	-2,1	3,3	-0,4	3,4	-0,5	0,0	2,11
	0,6	2,4	-1,7	3,0	-8,0	1,1	-1,91
	6,3	-0,4	1,4	0,8	0,0	1,0	7,01
	4,2	-1,7	6,9	0,0	1,1	9,2	17,25
4	1,7	-3,1	2,2	0,6	1,8	-0,1	2,68
	1,2	-1,0	0,7	-0,9	0,0	5,9	-6,17
	-0,1	7,2	4,8	2,3	5,1	3,3	-35,57
	2,1	1,3	-5,2	1,4	3,3	4,6	-25,65
	8,4	-1,6	0,0	0,7	-1,8	1,2	8,50
	1,6	8,7	-0,2	0,8	-2,0	1,1	-14,46
5	-1,1	-0,8	0,1	0,6	5,7	2,0	11,83
	-2,7	1,9	-5,9	1,3	-2,2	1,0	16,24
	8,8	-1,5	0,3	-0,7	1,2	-2,1	18,64
	2,1	3,6	-1,5	-2,1	0,0	4,6	-37,76
	0,3	7,4	-1,9	1,1	0,9	0,2	-7,90
	2,3	-2,0	3,9	4,2	0,2	-1,9	-8,78

Продовження таблиці 4

6	3,4	-1,0	2,2	1,0	4,8	1,4	20,16
	2,2	0,6	6,8	0,0	-0,1	-0,4	-1,58
	4,4	-2,9	-1,5	-0,7	1,3	0,8	15,62
	-1,3	-0,8	0,1	0,6	2,0	5,7	-0,39
	-2,5	5,8	1,1	3,1	0,0	2,4	-11,95
	0,1	0,3	-1,0	5,4	-1,9	0,1	-12,82
7	2,2	-0,4	0,6	5,2	-1,2	0,1	9,43
	-2,1	3,6	4,7	-1,3	-2,8	2,0	7,77
	0,0	0,2	-1,0	0,0	6,8	1,4	-6,20
	4,9	-1,9	-2,7	1,2	0,3	-1,0	10,28
	-0,4	2,1	2,0	-0,3	1,8	7,6	16,05
	-2,9	4,0	1,1	-1,6	3,7	-1,1	-9,78
8	3,4	1,6	2,2	-1,2	4,2	-2,1	20,72
	-2,3	0,1	6,6	-0,4	0,0	1,2	6,52
	7,9	-0,3	1,3	-0,1	1,8	0,1	13,20
	2,2	-1,0	3,0	-1,2	3,4	5,8	5,70
	1,4	8,9	-0,1	0,0	-1,1	-0,7	-4,31
	3,2	-2,0	1,7	4,1	-1,9	0,4	0,23
9	2,2	-0,1	-0,3	0,2	5,3	-1,7	-6,11
	2,6	0,0	4,1	-1,2	2,1	-0,1	-18,21
	6,3	0,1	-2,7	0,2	-1,3	-0,5	-2,48
	-3,1	2,4	1,4	2,1	0,5	3,7	13,14
	-0,4	7,9	2,0	-0,2	-1,7	1,9	21,60
	3,3	-1,9	-2,1	4,8	0,0	1,7	2,68
10	-3,9	2,3	0,0	-1,5	3,8	-4,1	15,40
	0,4	-1,6	5,3	1,0	-0,2	-0,1	2,83
	4,6	0,7	2,1	-1,4	2,7	-3,6	35,68
	0,1	1,3	1,6	-2,1	0,2	6,7	-10,10
	2,2	5,2	0,9	-1,1	-2,1	1,2	-0,95
	-1,3	1,8	-0,2	8,6	-2,2	0,0	-29,34
11	0,1	0,0	0,9	-1,1	6,2	0,6	-2,06
	-2,3	3,6	4,3	2,4	0,3	-1,2	2,86
	6,8	0,1	-1,1	-1,4	2,0	-0,8	16,15
	-2,7	1,4	2,0	0,0	-3,4	4,3	-6,29
	-1,0	8,1	0,0	1,2	-0,1	0,4	-10,12
	3,3	-1,8	2,2	4,4	2,1	0,0	34,53
12	0,3	-0,9	0,0	1,1	6,3	-3,0	-18,47
	1,3	0,8	4,1	2,5	-3,0	-1,7	-11,85
	5,7	-1,5	-0,4	1,2	0,0	0,6	0,69
	2,7	3,2	-2,0	1,3	-3,6	4,9	33,99
	0,1	6,8	1,2	-2,0	-0,8	1,2	14,64
	-4,7	2,4	-3,9	-3,9	0,4	2,1	24,29

Продовження таблиці 4

	0,4	0,6	2,2	5,4	-1,2	-0,1	-26,32
	1,7	-2,2	4,1	-3,2	1,9	2,1	13,22
13	-2,0	-1,1	0,0	0,2	6,8	1,2	23,50
	3,1	-2,4	-3,8	2,0	0,0	4,6	-20,28
	-0,9	6,8	1,6	-0,2	1,2	-1,0	13,06
	4,5	2,4	-2,0	3,9	-1,1	4,1	-29,17
	-3,5	-1,3	-2,2	1,4	3,6	0,4	-22,69
	-2,4	1,0	0,1	6,9	1,6	0,0	-13,35
14	3,9	1,5	2,6	-1,2	1,0	-4,8	11,33
	0,1	7,1	0,7	-1,1	-1,9	1,6	-17,57
	-0,9	6,8	1,6	-0,2	1,2	-1,0	-23,88
	1,4	-0,6	-8,8	2,1	-0,6	2,8	-30,08
	2,1	0,4	7,7	-1,9	0,4	-1,7	-19,76
	-2,2	-3,1	0,8	4,2	-3,8	1,2	-15,45
15	0,1	-1,4	-1,8	2,0	0,0	6,6	1,03
	2,4	-3,4	1,1	-4,1	0,9	2,1	-20,28
	-0,7	2,9	4,6	3,2	1,6	-0,8	3,86
	7,5	0,4	-2,0	0,9	-1,1	0,1	14,59
	4,9	-2,7	0,9	1,4	-3,5	0,0	-29,45
	1,3	-0,8	-2,0	1,2	6,8	0,1	3,41
16	-2,7	1,4	3,3	-2,5	0,0	-0,8	20,11
	0,2	7,0	-1,5	-0,1	-2,3	1,0	-7,93
	1,0	-2,1	3,6	4,4	0,9	2,5	-21,21
	9,1	-0,5	1,2	-2,4	0,0	-0,6	-28,18
	0,1	0,0	0,9	-1,1	6,0	2,3	3,13
	-3,4	1,2	-2,7	4,8	-3,9	0,9	-4,70
17	0,3	0,0	8,1	1,5	-1,0	-0,7	-9,75
	1,9	-4,1	0,0	-2,0	3,7	0,9	13,91
	-0,8	1,1	-2,8	-1,4	0,1	2,2	2,47
	-1,7	0,4	-1,9	7,7	0,4	2,1	6,41
	1,2	0,0	-0,4	6,6	0,1	-2,5	16,04
	-3,7	1,3	2,8	-1,7	-4,2	0,0	19,46
18	0,9	1,5	0,6	-1,2	1,0	6,8	25,20
	-1,6	-2,4	-3,7	4,1	0,0	2,9	9,52
	4,8	-1,9	1,8	-0,2	-3,5	0,0	11,16
	7,5	0,4	-2,0	0,9	-1,1	0,1	33,70
	-3,7	0,9	4,1	-2,2	1,9	0,0	21,55
	0,4	0,6	2,2	5,4	-1,2	-0,1	-22,09
19	1,9	-2,3	-3,5	2,0	0,4	-4,2	2,71
	-7,8	-0,3	-1,9	0,4	1,7	2,2	12,63
	0,4	-0,2	1,1	-0,6	2,3	5,7	-4,15
	2,3	1,7	0,9	3,4	-4,4	-1,9	-27,60

Продовження таблиці 4

	1,2	0,0	-0,4	6,6	0,1	-2,5	-10,39
	-3,9	2,6	4,1	-0,8	2,4	1,6	12,90
20	0,0	-0,9	6,1	0,7	-1,0	1,2	-10,26
	2,4	0,8	-2,9	3,3	0,9	-1,6	4,21
	-4,1	3,7	2,5	-1,1	2,2	3,0	-3,00
	0,0	1,9	0,1	-1,3	0,2	7,8	-15,20
	1,7	-0,8	-2,1	1,1	0,4	0,0	14,51
	-0,7	-1,1	0,0	0,3	8,1	1,3	20,69
21	2,8	1,4	-1,0	-2,6	-0,7	3,1	1,51
	-0,1	5,2	-1,2	2,2	0,6	-0,4	-8,76
	7,9	0,4	-0,2	0,0	-1,0	1,2	3,98
	1,8	-2,4	3,5	-1,1	0,8	2,7	-5,78
	1,9	-1,7	0,3	2,1	-7,9	-0,4	16,42
	-0,9	0,0	6,8	-2,1	-0,9	1,3	0,66
22	2,1	3,3	-4,0	1,7	1,1	2,4	8,48
	-4,6	-2,8	1,3	3,5	0,9	0,0	24,85
	1,5	0,6	2,2	-0,4	1,8	-2,3	-14,05
	-0,5	0,3	1,3	2,9	0,1	6,2	35,58
	1,8	-5,2	0,2	-0,4	0,0	2,2	-1,16
	-2,1	1,7	-1,6	2,8	-3,4	0,0	-25,32
23	0,9	-1,4	0,2	-2,1	1,8	-3,4	11,05
	-4,4	2,9	-3,5	1,9	2,4	1,6	-14,78
	5,8	0,5	-2,4	0,3	1,4	-0,1	25,47
	0,0	2,2	-1,2	8,0	-0,1	1,7	-9,90
	-2,6	1,7	0,4	-2,3	3,1	0,0	-23,91
	1,4	-3,2	-2,9	0,7	-1,8	2,2	16,04
24	-0,1	0,2	-1,0	5,2	-0,8	1,4	9,91
	0,0	2,1	8,4	-0,2	1,6	-1,3	1,18
	3,6	-4,1	0,7	2,4	1,9	-3,2	45,77
	0,4	-0,1	-1,1	0,0	8,0	1,2	-1,15
	-1,2	5,7	-0,5	0,2	-0,1	-0,9	11,76
	-0,8	1,9	-1,4	1,1	0,0	6,6	43,81
25	4,5	-3,4	1,9	-2,8	3,7	0,0	-29,38
	2,6	1,8	-2,1	0,9	-1,1	-0,6	13,52
	6,7	-0,1	-1,2	1,7	0,5	0,0	11,10
	-1,5	2,0	0,8	0,0	-2,3	1,9	11,96
	-0,2	0,3	2,4	5,3	1,6	-0,3	-11,76
	4,6	-3,0	-2,7	0,0	-1,9	3,5	-4,58
26	1,1	2,9	0,8	-3,1	0,7	-2,3	7,68
	0,0	2,1	8,4	0,2	-1,8	1,3	-3,34
	0,4	-0,1	1,2	0,0	8,1	-1,0	30,76
	-2,8	1,5	-3,1	-2,2	0,0	3,3	20,42

Кінець таблиці 4

27	1,9	-4,6	0,0	3,8	-2,4	1,2	10,07
	0,6	6,0	-0,4	-1,1	0,9	0,0	-18,17
	-0,8	2,0	-1,4	-0,1	1,1	6,8	-12,57
	2,4	-3,9	1,6	4,1	-2,7	-1,0	15,23
	-1,1	0,0	0,5	1,7	0,8	0,0	3,21
	6,3	-1,4	0,0	2,0	0,4	-0,7	11,36
28	2,1	0,4	7,7	-1,9	0,4	-1,7	-8,75
	-0,8	1,2	0,0	2,0	-1,6	0,4	4,72
	3,1	-2,8	-3,6	1,4	0,9	-2,2	3,07
	1,3	-0,8	-2,0	1,2	-6,8	0,1	19,48
	-0,7	1,0	1,5	-8,1	0,0	0,3	-11,57
	0,9	0,0	0,1	0,0	1,2	-0,8	-2,73
29	2,5	-1,8	-3,4	0,0	2,9	1,4	-10,68
	0,0	6,2	2,3	1,1	-0,8	-0,4	10,44
	-1,8	2,1	0,7	-1,5	2,4	0,1	20,68
	0,6	0,0	1,2	-0,4	-2,5	5,7	-7,83
	8,9	-0,6	1,3	-2,0	0,2	0,7	-32,61
	-3,3	2,9	-4,1	1,8	0,0	-2,5	7,49
30	-0,7	-1,1	1,6	8,0	0,1	-0,3	21,43
	2,5	1,7	-3,1	0,0	-1,2	2,1	-1,33
	-1,1	0,9	2,2	-1,4	2,6	-0,7	-7,79
	2,0	-0,2	7,8	2,1	0,1	-1,6	21,91
	-1,2	-0,8	2,0	0,9	-6,6	0,1	4,83
	3,6	2,7	-3,3	-1,8	0,0	2,1	-6,21

РОЗДІЛ 3 ЛОКАЛІЗАЦІЯ КОРЕНІВ НЕЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ ТА ТРАНСЦЕНДЕНТНИХ РІВНЯНЬ. НАБЛИЖЕНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ ТА ТРАНСЦЕНДЕНТНИХ РІВНЯНЬ

3.1. Загальні положення

Нехай дано рівняння

$$f(x) = 0, \tag{16}$$

де $f(x)$ визначена і неперервна в певному скінченому чи нескінченному інтервалі.

Усяке значення x^*, що перетворює функцію $f(x)$ на нуль, тобто таке, що $f(x^*) = 0$, називається коренем рівняння (16) чи нулем функції $f(x)$.

Наближене знаходження дійсних коренів рівняння (16) звичайно складається з таких етапів:

- відділення коренів (задача локалізації коренів), тобто встановлення проміжків $[\alpha, \beta]$, що містять один і тільки один корінь рівняння (16);
- уточнення наближених коренів, тобто доведення їх до заданого степеня точності.

Для відділення коренів існує два способи:

- графічний;
- аналітичний.

Графічний спосіб формулюється так: якщо функція $f(x)$ така, що без особливих труднощів можна побудувати її графік, щоб представити ситуацію із кількістю та розташуванням нулів $f(x)$, виокремлюючи ті проміжки осі абсцис, де графік функції $y = f(x)$ перетинає Ox.

Якщо побудова графіка с викликає труднощі, то вихідне рівняння (16) можна представити у виді:

$$f_1(x) = f_2(x),$$

де $f_1(x)$ та $f_2(x)$, такі що $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ і їх графіки $y = f_1(x)$ та $y = f_2(x)$ легко будуються. Тоді задача локалізації коренів зведеться до пошуку точки перетину цих графіків.

Приклад 1. Розв’язати задачу локалізації коренів для рівняння $e^x + x = 0$.

Розв’язання. Нехай $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = -x$. Схематично будуємо графіки $y = f_1(x)$ та $y = f_2(x)$ (рис. 5).

Звідки видно, що $x^* \in [-1; 0]$.

Аналітичний метод базується на теоремі з математичного аналізу. Відповідно до цієї теореми, якщо неперервна функція $f(x)$ на кінцях відрізка $[\alpha, \beta]$, приймає значення різних знаків, тобто

$$f(\alpha)f(\beta) < 0, \tag{17}$$

то всередині цього відрізка міститься непарне число дійсних коренів. Ясно, що корінь виявиться єдиним, якщо всередині цього відрізка функція $f(x)$ крім того ще й монотонна, тобто її похідна існує і зберігає знак усередині інтервалу (α, β).

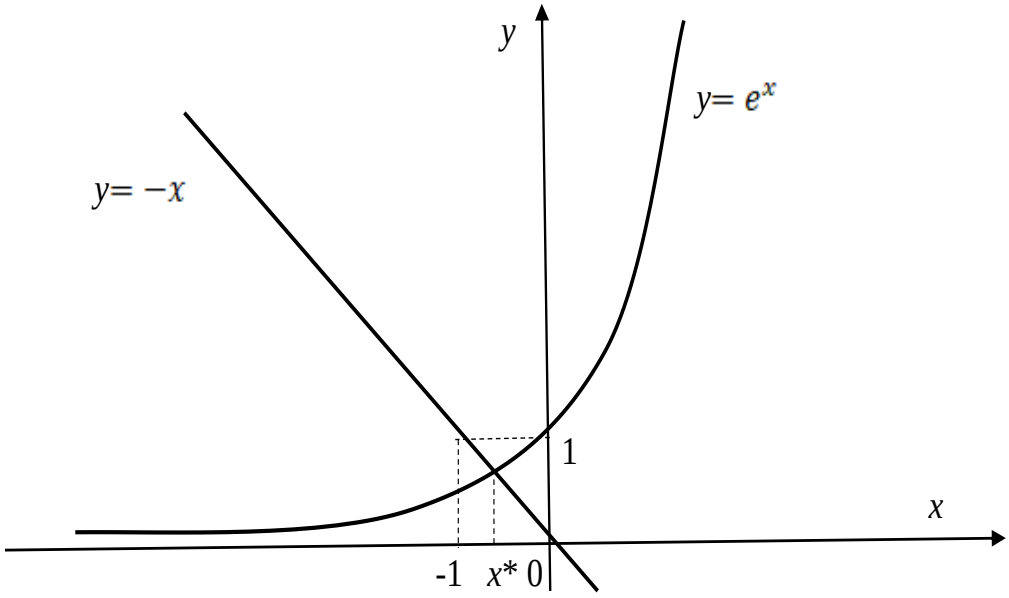


Рисунок 5 – Графічний метод розв’язання задачі локалізації коренів

Таким чином, якщо існує неперервна похідна $f'(x)$ і її нулі легко обчислюються, то для відділення коренів рівняння (16) можна вчинити так:

- знайти корені рівняння $f'(x) = 0$, тим самим ми визначимо кінці інтервалів монотонності функції $f(x)$;
- оцінити значення функції $f(x)$ на кінцях знайдених інтервалів монотонності й вибрати ті з них, на кінцях яких значення функції різних знаків. Вони і будуть шуканими інтервалами.

Корисно пам'ятати, що алгебраїчне рівняння n-го степеня $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0,\ (a_0 = 0)$ має не більше ніж n дійсних коренів. Тому якщо для такого рівняння ми одержимо n+1 зміну знаків, то всі його корені будуть відділеними.

Приклад 2. Відділити корені рівняння

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3.$$

Розв’язання. Область визначення даної функції $(-\infty;\ \infty)$.

Знайдемо корені рівняння $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x \quad = 3x(x-2) = 0 \implies x_1 = 0, x_2 = 2.$$

Одержуємо такі інтервали монотонності функції $f(x)$: $(-\infty;\ 0)$, $(0;\ 2)$, $(2;\ \infty)$.

Визначимо знаки функції $f(x)$ на кінцях кожного з цих інтервалів:

$f(-\infty) < 0, f(0) > 0, f(2) < 0, f(\infty) > 0.$

На кінцях кожного з інтервалів монотонності значення даної функції різних знаків, отже в кожному інтервалі міститься по одному дійсному кореню розглянутого рівняння.

3.2. Методи дихотомії

Нехай функція $f(x)$ визначена, неперервна та монотонна при всіх $x \in [\alpha, \beta]$ і виконується умова (17). Візьмемо довільну точку $x \in (\alpha, \beta)$ – пробну точку. Тоді прийдемо до таких взаємовиключних ситуацій:

а) $f(\alpha)f(c) < 0$,

б) $f(c)f(\beta) < 0$,

в) $f(c) = 0$,

тобто а) корінь знаходиться на інтервалі (α, c),

б) корінь знаходиться на інтервалі (c, β),

в) с – корінь рівняння.

Таким чином, одне обчислення значення функції дозволяє зменшити проміжок $[\alpha, \beta]$ існування кореня (ситуація а) або б)) або вказати його значення (малоймовірна ситуація в)). В залежності від того, має місце ситуація а) або б), описана процедура одного кроку звуження проміжку існування нуля може бути застосована до проміжку $[\alpha, c]$ або $[c, \beta]$, відповідно, та далі повторюватися циклічно.

Такий процес називають методом дихотомії, методом бісекції, методом виделки, методом проб. Якщо спосіб визначення пробних точок задається так, що послідовність довжин проміжків існування кореня, що отримуються у цьому процесі, прагне до нуля, то методом дихотомії можна знайти будь-який корінь рівняння (16) із наперед заданою точністю.

3.3. Метод поділу навпіл

Одним із частинних випадків методів дихотомії є метод поділу навпіл (ділення проміжку існування кореня навпіл).

Виконати наближене обчислення с точністю ε кореня рівняння методом поділу навпіл можна за такою схемою:

1. Задати кінці відрізку α та β, функцію $f(x)$, мале число $\varepsilon > 0$ (допустиму абсолютну похибку кореня або напівдовжину його проміжку невизначеності), мале число $\delta > 0$ (допуск, пов'язаний із реальною точністю обчислення значень заданої функції).
2. Обчислити (або ввести) $f(\alpha)$.
3. Обчислити $c = 0{,}5(\alpha + \beta)$.
4. Якщо $\beta - \alpha < 2\varepsilon$, покласти $x^* \approx c$ (x^* – корінь) та зупинитися.
5. Обчислити $f(c)$.
6. Якщо $|f(c)| < \delta$, покласти $x^* \approx c$ та зупинитися.
7. Якщо $f(\alpha)f(c) < 0$, покласти $b = c$ та повернутися до пункту 3.

Апріорна оцінка абсолютної похибки:

$$|x^* - x_k| < \frac{\beta - \alpha}{2^k}. \qquad (18)$$

3.4. Метод пропорційних частин (метод хорд)

Основною ідеєю цього частинного випадку методів дихотомії є таке: відрізок $[\alpha, \beta]$ ділиться точкою с на частини не навпіл, а пропорційно величинам ординат $f(\alpha)$ та $f(\beta)$ графіка даної функції $f(x)$. Це означає, що точку с є сенс знаходити як абсцису точки перетину вісі Ох з прямою, що проходить через точки А(α; f(α)) та В(β; f(β)), інакше з хордою АВ дуги Аx^*В. Запишемо рівняння прямої, що проходить через точки А(α; f(α)) та В(β; f(β)):

$$\frac{y - f(\alpha)}{f(\beta) - f(\alpha)} = \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha}.$$

Звідси припускаючи, що $y = 0$, $x =$ с, знаходимо

$$c = \alpha - \frac{f(\alpha)(\beta - \alpha)}{f(\beta) - f(\alpha)}. \quad (19)$$

Цей метод називають методом хорд, або методом пропорційних частин.

Як найпростіший критерій зупинки ітераційного процесу можна використовувати:

$$|c_{k+1} - c_k| < \varepsilon, (k = 0, 1, 2, \dots),$$

де $c_0 = c$, c_k – k-е наближення до кореня рівняння.

3.5. Метод Ньютона (дотичних)

Цей метод дуже ефективний для розв'язання алгебраїчних і трансцендентних рівнянь. Його основна перевага полягає в тому, що при порівняно простій схемі обчислень він має швидку збіжність.

Нехай єдиний корінь ξ рівняння

$$f(x) = 0 \quad (20)$$

розташований усередині інтервалу $[\alpha, \beta]$, причому $f'(x)$ і $f''(x)$ неперервні і зберігають визначені знаки $\forall x \in [\alpha, \beta]$. Відповідно до методу Ньютона корінь вихідного рівняння відшукується як границя ітераційної послідовності

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}, (i = 0,1,2,\dots). \quad (21)$$

Початкове наближення $x_0 \in [\alpha, \beta]$ і повинне задовольняти умові

$$f(x_0)f''(x_0) > 0. \quad (22)$$

Геометрично метод Ньютона еквівалентний заміні рівняння кривої $y = f(x)$ рівнянням дотичної, проведеної до цієї кривої в точці $x = x_i$. За наближене значення кореня береться абсциса точки перетину цієї дотичної з віссю Ox.

Для оцінки точності наближення x_i можна скористатися формулою

$$|x_i - \xi| \le \frac{|f(x_i)|}{m_1}, \quad (23)$$

де

$$|f'(x)| \ge m_1 > 0, \forall x \in [\alpha, \beta], \quad (24)$$

ξ – точне значення кореня. На практиці обирають $m_1 = min\{|f'(\alpha)|; |f'(\beta)|\}$.

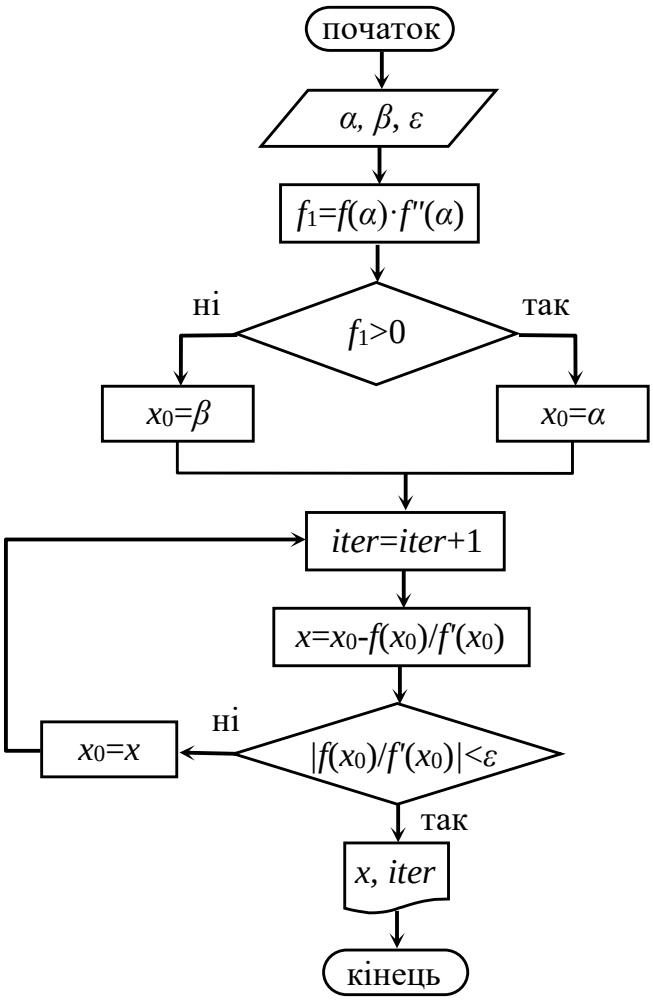


Рисунок 6 – Блок-схема розв'язання нелінійних трансцендентних рівнянь методом дотичних

На рис. 6 наведено блок-схему програми розв'язку нелінійних та трансцендентних рівнянь методом дотичних.

У даній блок-схемі: α – лівий кінець інтервалу; β – правий кінець інтервалу; ε – точність обчислень; x_0– корінь рівняння на попередній ітерації; x – корінь рівняння на поточній ітерації; *iter* – номер ітерації; $f(x)$ – значення функції у точці x.

Приклад. Знайдемо з точністю $\varepsilon = 0{,}0001$ корінь рівняння $x^3 - 3x^2 + 3 = 0$.

Розв'язання. Виконавши процедуру відділення коренів так, як описано вище (див. Розділ 3. Загальні положення) одержимо три інтервали $(-\infty; 0)$, $(0; 2)$, $(2; +\infty)$, що містять корені. Знайдемо корінь, розташований в інтервалі $(0; 2)$. Цей інтервал методом бісекції зменшимо так, щоб його довжина була $\leq 0{,}1$.

Маємо:

$$x_1 = \frac{0+2}{2} = 1, \quad f(x_1) = 1 > 0 \Rightarrow \xi \in [1; 2];$$

$$x_2 = \frac{1+2}{2} = 1{,}5, \quad f(x_2) = -0{,}375 < 0 \Rightarrow \xi \in [1; 1{,}5];$$

$$x_3 = \frac{1+1{,}5}{2} = 1{,}25, \quad f(x_3) = 0{,}2656 > 0 \Rightarrow \xi \in [1{,}25; 1{,}5];$$

$$x_4 = \frac{1{,}25+1{,}5}{2} = 1{,}375, \quad f(x_4) = -0{,}0727 < 0 \Rightarrow \xi \in [1{,}25; 1{,}375];$$

$$x_5 = \frac{1{,}25+1{,}375}{2} = 1{,}3125, \quad f(x_5) = 0{,}093 > 0 \Rightarrow \xi \in [1{,}3125; 1{,}375].$$

Довжина отриманого інтервалу

$$|1{,}375 - 1{,}3125| = 0{,}0625 < 0{,}1 .$$

Подальше уточнення кореня проведемо методом Ньютона.

Друга похідна $f''(x)$ на цьому інтервалі більша нуля, перша похідна $f'(x)$– менша нуля. За початкове наближення x_0 візьмемо лівий кінець інтервалу, тобто $x_0 = 1{,}3125$. Тоді

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1{,}3125 - \frac{0{,}093}{(-2{,}707)} = 1{,}3469, \quad f(x_1) = 0{,}00115.$$

Обчислимо значення першої похідної $f'(x)$ на другому кінці інтервалу й оцінимо похибку отриманого наближення $f'(1{,}375) \approx 2{,}578$, тобто $m_1 = 2{,}578$.

$$|x_1 - \xi| \le \frac{|f(x_1)|}{m_1} = \frac{0{,}00115}{2{,}578} \approx 0{,}00445 > 0{,}0001.$$

Точність, з якою обчислене перше наближення, недостатня. Тому робимо наступний крок

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1{,}3496 - \frac{0{,}0015}{(-2{,}639)} = 1{,}3473, \qquad f(x_2) = 2 \cdot 10^{-7},$$

$$|x_2 - \xi| \le \frac{|f(x_2)|}{m_1} = \frac{2 \cdot 10^{-7}}{2{,}578} \approx 7{,}76 \cdot 10^{-8} < 0{,}0001.$$

Як видно з оцінки похибки другого наближення, ми одержали значення кореня з похибкою, що не перевищує задану.

Корені, розташовані в двох інших інтервалах $(-\infty; 0)$, $(2; +\infty)$ знаходяться аналогічно.

Питання для самоконтролю до розділу 3

1. Сформулюйте постановку задачі.
2. Опишіть метод Ньютона.
3. Наведіть формулу для контролю похибки методу Ньютона.
4. Дайте геометричну інтерпретацію методу.
5. В чому полягає умова вибору нульового наближення?

Завдання до розділу 3. Локалізація коренів та розв'язання нелінійних рівнянь методом Ньютона

Обрати значення коефіцієнтів a_i $(i = 1{,}2{,}3{,}4)$ з таблиці варіантів (див. табл. 5). Номер варіанта, що являє собою двозначне число, задається викладачем. Перша цифра номера варіанта визначає значення шифри по вертикалі, друга – по горизонталі.

Таблиця 5 – Варіанти завдань до розділу 3

Шифр по вертикалі	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_1	1,6	-2,4	0,8	3,6	-1,2	6,4	-2,8	1,2	-0,4	5,2

	Шифр по горизонталі									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_2	5,1	3,3	-6,3	-1,5	5,7	6,3	1,2	-6,9	5,4	-2,1
a_3	0,2	0	0,8	0	-1,2	0,4	0	-0,6	1,0	0
a_4	-2	3	7	-1	-4	6	-3	8	9	-5

Підставивши обрані значення коефіцієнтів a_i $(i = 1{,}2{,}3{,}4)$, методом Ньютона з точністю до $\varepsilon = 0{,}0001$ обчислити всі дійсні корені рівняння

$$a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0.$$

РОЗДІЛ 4 НАБЛИЖЕНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

4.1. Методи спуску

Розглянимо методи спуску на найпростішому прикладі нелінійної системи двох рівнянь

$$\begin{cases} f(x,y)=0, \\ g(x,y)=0. \end{cases} \tag{25}$$

Побудуємо з лівих частин рівнянь системи функцію багатьох змінних виду:

$$\Phi(x,y)=f(x,y)^2+g(x,y)^2 \tag{26}$$

Якщо існує глобальний мінімум функції $\Phi(x,y)$, тобто

$$\min \Phi(x,y)=\Phi(x^*,y^*)=0 \Longrightarrow (x^*,y^*) - \text{розв}'\text{язок задачі.}$$

Маємо еквівалентні задачі, тобто:

$$\Phi(x^*,y^*)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x^*,y^*)=0, \\ g(x^*,y^*)=0. \end{cases}$$

Розв’яжемо еквівалентну задачу про глобальний мінімум функції $\Phi(x,y)$ за допомогою ітераційної процедури:

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}+\alpha_k \begin{pmatrix} p_k \\ q_k \end{pmatrix}, \tag{27}$$

де (x_k,y_k) – k-е наближення до точного розв’язку задачі (x^*,y^*), (p_k,q_k) – вектор мінімізації, α_k – кроковий множник.

Методи що визначаються формулою (27) називаються методами спуску («спуск на дно» поверхні $z=\Phi(x,y)$).

Однією з модифікацій методів спуска є метод покоординатного спуска, коли в (27) вектор мінімізації почергово паралельний одній та іншій осі $((p_k,0),(0,q_{k+1}),(k=0,2,4,\dots)$ або $(0,q_k),(p_{k+1},0),(k=0,2,4,\dots))$.

Напрям найшвидшого зростання функції показує градієнт функції, а напрям найшвидшого спадання – антиградієнт функції:

$$\begin{pmatrix} p_k \\ q_k \end{pmatrix}=-\overline{grad}\ \Phi(x_k,y_k)=-\begin{pmatrix} \Phi'_x(x_k,y_k) \\ \Phi'_y(x_k,y_k) \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Підстановка вектору мінімізації (28) в (27) дає метод градієнтного спуску:

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}-\alpha_k \begin{pmatrix} \Phi'_x(x_k,y_k) \\ \Phi'_y(x_k,y_k) \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Кроковий множник α_k, можна брати сталим (однаковим на всіх ітераціях), а можна обирати таким, щоб на кожній ітерації наступне наближення було точкою локального мінімуму в напряму мінімізації, тобто:

$$\alpha_k=\arg\min_{\alpha>0}\Phi\left(x_k-\alpha\Phi'_x(x_k,y_k),y_k-\alpha\Phi'_y(x_k,y_k)\right). \tag{30}$$

Використання методів спуска (27) сумісно із таким вибором крокового множника (30) дає методи вичерпного спуску. А використання методів градієнтного спуска (29) сумісно із вибором крокового множника (30) дає метод найшвидшого спуску.

4.2. Метод градієнтного спуску

Нехай маємо систему рівнянь

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \ (i = 1,2, \dots, n), \tag{31}$$

чи в матричній формі

$$F(\bar{x}) = 0, \tag{32}$$

де $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$, $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Припустимо, що функції $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ дійсні й неперервно-диференційовані в їхній загальній області визначення. Розглянемо функцію

$$\Phi(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} [f_i(x_1, x_2, .., x_n)]^2 = \big(F(\bar{x}), F(\bar{x})\big). \tag{33}$$

Очевидно, що кожний розв'язок системи (31) перетворює на нуль функцію $\Phi(\bar{x})$; навпаки, числа $x_1, x_2, \dots, x_n$, для яких функція $\Phi(\bar{x})$ дорівнює нулю, є коренями системи (31). Таким чином, задача зводиться до знаходження мінімуму скалярної функції багатьох змінних $\Phi(\bar{x})$.

Одним з методів мінімізації функцій багатьох змінних є метод градієнтного спуску. Якщо $\bar{x}^{(k)}$ – деяке наближення до розв'язку системи, то в методі градієнтного спуску ми одержуємо нове наближення $\bar{x}^{(k+1)}$, рухаючись за напрямком найбільшої миттєвої швидкості зміни функції $\Phi(\bar{x})$ в точці $\bar{x}^{(k)}$ $\left(grad\Phi\left(\bar{x}^{(k)}\right)\right)$ до точки, де значення $\Phi\left(\bar{x}^{(k+1)}\right)$ мінімальне, тобто

$$\bar{x}^{(k+1)} = \bar{x}^{(k)} + \lambda_k grad\Phi\left(\bar{x}^{(k)}\right), \tag{34}$$

де λ_k вибирається з умови мінімуму $\Phi\left(\bar{x}^{(k+1)}\right)$.

Якщо λ – мала величина, квадратом і вищими ступенями якої можна знехтувати, то, розкладаючи функції $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ за степенями λ з точністю до лінійних членів і виражаючи $grad\ \Phi(x)$ через матрицю Якобі $W(\bar{x})$, одержимо таке представлення розрахункової формули методу градієнтного спуску

$$\bar{x}^{(k+1)} = \bar{x}^{(k)} - \mu_k W^T\left(\bar{x}^{(k)}\right) F\left(\bar{x}^{(k)}\right), \ (k = 0,1,2, \dots), \tag{35}$$

де матриця Якобі вектор-функції $F(\bar{x})$ має вид:

$$W(\bar{x}) = \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \dots \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \dots \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \dots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

$$\mu_k = \frac{\left(F\left(\bar{x}^{(k)}\right), W\left(\bar{x}^{(k)}\right) W^T\left(\bar{x}^{(k)}\right) F\left(\bar{x}^{(k)}\right)\right)}{\left(W(\bar{x}^{(k)}) W^T(\bar{x}^{(k)}) F(\bar{x}^{(k)}), \quad W(\bar{x}^{(k)}) W^T(\bar{x}^{(k)}) F(\bar{x}^{(k)})\right)}. \tag{36}$$

Слід зазначити, що ітераційний процес, побудований за методом градієнтного спуску, збігається до точного розв'язку, якщо початкове наближення $x^{(0)}$ обране з досить малого околу кореня.

На рис. 7 наведено блок-схему програми розв'язання нелінійних систем методом градієнтного спуску.

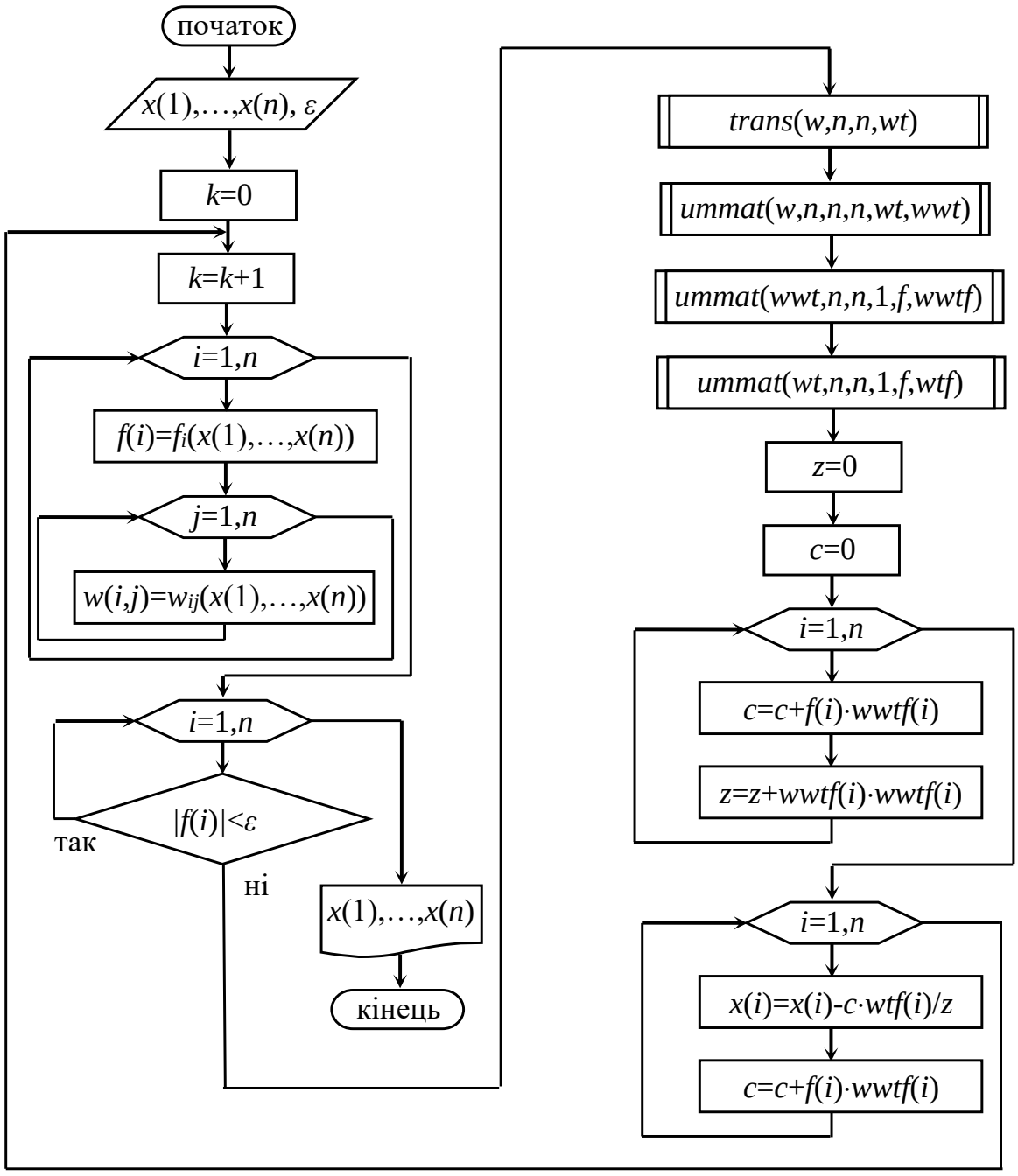


Рисунок 7 – Блок-схема розв'язання нелінійних систем методом градієнтного спуску

У даній блок-схемі: n – кількість рівнянь у системі, $x(1),\ldots,x(n)$ – наближені значення розв'язку системи; ε – точність обчислень; k – номер ітерації; $f(i)$, $f_i(x(1),\ldots,x(n))$ – значення, що приймає ліва частина i-го рівняння системи у точці $(x(1),\ldots,x(n))$; $w(i;j)$, $w_{ij}(x(1),\ldots,x(n))$ – значення коефіцієнтів матриці Якобі у точці

(*x*(1),…,*x*(*n*)); *trans*(*w*,*n*,*m*,*wt*) – підпрограма транспонування матриці (*w* – вихідна матриця, *n* – кількість рядків вихідної матриці, *m* – кількість стовпців матриці, *wt* – транспонована матриця); *ummat*(*w*,*n*,*m*,*l*,*wt*,*wwt*) – підпрограма добутку двох матриць (*w* – перша матриця, *n* – кількість рядків першої матриці, *m* – кількість стовпців першої та рядків другої матриці, *l* – кількість стовпців другої матриці, *wt* – друга матриця, *wwt* – добуток двох матриць).

Приклад. Методом градієнтного спуску обчислити корені системи

$$\begin{cases} x + x^2 - 2yz = 0{,}1; \\ y - y^2 + 3xz = -0{,}2; \\ z + z^2 + 2xy = 0{,}3, \end{cases}$$

розташовані в околі початку координат.

Розв'язання. Маємо $\bar{x}^{(0)} = (0{,}0{,}0)^T$.

Тут $F = \begin{pmatrix} x + x^2 - 2yz - 0{,}1 \\ y - y^2 + 3xz + 0{,}2 \\ z + z^2 + 2xy - 0{,}3 \end{pmatrix}$ і $W = \begin{pmatrix} 1 + 2x & -2z & -2y \\ 3z & 1 - 2y & 3x \\ 2y & 2x & 1 + 2z \end{pmatrix}$.

Підставляючи нульове наближення, будемо мати:

$$F\left(\bar{x}^{(0)}\right) = (-0{,}1; 0{,}2; -0{,}3)^T \text{ і } W\left(\bar{x}^{(0)}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

За формулами (35) і (36) одержуємо перше наближення

$$\mu_0 = \frac{\left(F\left(\bar{x}^{(0)}\right),\ F\left(\bar{x}^{(0)}\right)\right)}{\left(F(\bar{x}^{(0)}),\ F(\bar{x}^{(0)})\right)} = 1$$

і $\bar{x}^{(1)} = \bar{x}^{(0)} - 1 \cdot E \cdot F\left(\bar{x}^{(0)}\right) = (0{,}1; -0{,}2; 0{,}3)^T$.

Аналогічно знаходимо друге наближення $\bar{x}^{(2)}$. Маємо:

$$F\left(\bar{x}^{(1)}\right) = \begin{pmatrix} 0{,}13 \\ 0{,}05 \\ 0{,}05 \end{pmatrix}, W\left(\bar{x}^{(1)}\right) = \begin{pmatrix} 1{,}2 & -0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}9 & 1{,}4 & 0{,}3 \\ -0{,}4 & 0{,}2 & 1{,}6 \end{pmatrix}.$$

Звідси:

$$W^T\left(\bar{x}^{(1)}\right)F\left(\bar{x}^{(1)}\right) = \begin{pmatrix} 0{,}181 \\ 0{,}002 \\ 0{,}147 \end{pmatrix} \text{ та } W\left(\bar{x}^{(1)}\right)W^T\left(\bar{x}^{(1)}\right)F\left(\bar{x}^{(1)}\right) = \begin{pmatrix} 0{,}2748 \\ 0{,}2098 \\ 0{,}1632 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$\mu_1 = \frac{0{,}13 \cdot 0{,}2748 + 0{,}05 \cdot 0{,}2098 + 0{,}05 \cdot 0{,}1632}{0{,}2748^2 + 0{,}2098^2 + 0{,}1632^2} = \frac{0{,}054374}{0{,}14619797} = 0{,}3719$$

$$\text{і } \bar{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ -0{,}2 \\ 0{,}3 \end{pmatrix} - 0{,}3719 \begin{pmatrix} 0{,}181 \\ 0{,}002 \\ 0{,}147 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}0327 \\ -0{,}2007 \\ 0{,}2453 \end{pmatrix}.$$

Для контролю обчислимо відхил

$$F\left(\bar{x}^{(2)}\right) = \begin{pmatrix} 0{,}032 \\ -0{,}017 \\ -0{,}007 \end{pmatrix}.$$

Питання для самоконтролю до розділу 4

1. Сформулюйте постановку задачі, опишіть метод розв’язання.
2. В чому полягає основна ідея методу градієнтного спуску?
3. Які умови закінчення ітераційного процесу?
4. Що може відбутися при невдалому виборі нульового наближення?
5. Дайте геометричну інтерпретацію методу.

Завдання до розділу 4. Розв'язання нелінійних рівнянь методом градієнтного спуску

Методом градієнтного спуску при заданому початковому наближенні $\bar{x}^{(0)}$ знайдіть наближені корені системи

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1^2 + a_{12} \cdot x_2 \cdot x_3 + a_{13} \cdot x_2 \cdot x_4 + a_{14} \cdot x_1 = b_1, \\ a_{21} \cdot x_2^2 + a_{22} \cdot x_1 \cdot x_3 + a_{23} \cdot x_3 \cdot x_4 + a_{24} \cdot x_2 = b_2, \\ a_{31} \cdot x_3^2 + a_{32} \cdot x_1 \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_2 \cdot x_4 + a_{34} \cdot x_3 = b_3, \\ a_{41} \cdot x_4^2 + a_{42} \cdot x_1 \cdot x_2 + a_{43} \cdot x_2 \cdot x_3 + a_{44} \cdot x_4 = b_4. \end{cases}$$

За умову закінчення ітераційного процесу прийміть $\left\| F\left(\bar{x}^{(i)}\right) \right\|_\infty < 0{,}01$.

Індивідуальні варіанти наведено в табл. 6

Таблиця 6 – Варіанти завдань до розділу 4

№ варіанта	Матриця коефіцієнтів системи a_{ij}				Стовпець вільних членів b_i	Початкове наближення коренів $x_i^{(0)}$
1	-4,1	2,4	1,3	-0,7	-18,12338	-1,1
	0,6	-1,2	3,1	2,9	4,89797	2,2
	-3,4	0,4	-0,1	-1,1	-30,61106	-3,3
	0,5	-2,8	1,4	3,3	-3,70831	0,0
2	2,4	3,1	-0,8	1,5	-4,06003	1,3
	-1,8	-4,2	2,6	0,7	-16,26196	-1,1
	0,4	1,9	-0,5	-2,6	-6,20337	3,0
	-3,2	0,2	1,1	0,9	-3,44529	0,3
3	1,5	0,9	-2,2	3,2	11,10436	-0,5
	-0,4	3,6	1,7	-2,8	-10,36585	1,0
	2,1	-0,3	-2,9	1,4	-0,27533	-2,5
	-1,6	2,5	0,7	-0,1	-16,43394	3,0
4	-2,8	0,6	1,9	-3,1	-2,74332	0,9
	1,4	-2,2	-0,8	1,2	6,78768	2,1
	-0,1	1,5	2,6	-0,9	-0,35866	1,6
	3,5	-0,6	-1,7	2,4	-7,91985	-0,1
5	1,1	4,0	-2,3	-0,5	7,25672	1,6
	-3,4	-0,7	1,2	2,4	-9,89640	-0,3
	2,5	1,9	-3,0	0,8	16,31988	2,5
	-0,1	-0,8	2,5	-1,0	-1,00392	-1,7

Продовження таблиці 6

6	4,5 -0,6 1,1 -3,0	1,2 -2,0 0,8 -2,7	-0,6 1,3 -2,1 0,4	2,1 -3,2 0,2 -1,3	19,99632 -12,18632 -14,24772 -22,48474	-2,5 1,6 -0,7 3,3
7	2,4 -1,2 0,1 -2,0	0,9 -3,0 1,8 -0,5	-1,8 -2,3 0,4 1,6	0,2 1,7 -2,2 0,8	0,53615 -10,59093 -5,46305 -5,47281	0,9 -2,3 1,5 -0,8
8	0,8 -1,0 2,1 0,0	-1,1 3,4 -0,6 2,5	-0,4 1,8 -2,0 0,4	2,7 -0,2 1,9 -3,1	17,47656 -33,53480 9,65912 -9,05794	3,1 -0,6 -2,5 2,0
9	-3,4 2,1 0,0 -4,0	0,0 -1,9 3,4 1,9	1,2 -0,4 1,1 -0,2	-2,1 1,6 -0,7 2,4	-3,65902 0,76205 -1,16126 -15,32033	-0,1 0,2 1,8 -1,4
10	0,6 -1,9 2,0 -0,4	-2,1 3,4 -0,8 1,9	3,0 -1,5 2,4 -0,2	-0,1 2,4 -0,5 2,5	-0,57180 6,32067 5,10568 1,30491	-0,2 0,8 -0,3 2,3
11	2,7 -1,5 0,3 1,6	0,6 -1,4 2,2 -0,1	-1,5 -0,8 0,5 -2,4	-0,8 2,0 -1,8 0,5	12,31117 9,43067 18,78237 13,59151	2,6 2,1 -2,9 0,4
12	-0,5 1,0 -2,6 0,8	2,9 -0,8 1,5 -2,4	0,2 -2,5 0,8 1,2	-1,4 0,6 -2,2 0,5	2,02812 6,82786 -5,96430 10,15452	0,7 -2,0 -0,4 1,9
13	-1,2 0,5 -2,4 1,8	0,6 -2,2 1,6 -0,5	-0,5 1,4 -1,7 2,0	1,8 -0,9 2,5 -1,2	-1,89552 -0,51975 -4,79314 17,82578	-1,7 0,9 2,4 -2,6
14	-2,5 0,6 -0,5 1,4	0,2 1,5 -2,4 -3,2	1,8 -0,4 -1,6 0,5	-0,2 1,2 0,4 -2,0	-32,82288 -3,47712 14,80896 18,41504	3,6 -1,4 -0,5 2,5
15	0,9 -1,5 3,0 -2,8	-1,0 2,0 -0,5 1,2	2,2 -1,4 0,8 -1,0	-0,5 0,4 -2,6 0,5	1,24605 -3,02800 1,17404 -8,58912	-2,4 0,6 1,4 -1,6

Продовження таблиці 6

16	1,9 -0,6 -3,2 1,1	-0,7 2,4 -0,1 0,5	-1,5 0,4 2,5 1,8	2,0 -0,5 1,4 -2,2	4,99613 -9,27880 -43,01664 11,28333	0,9 -2,5 -2,9 1,8
17	0,6 -2,5 1,4 -0,5	-2,8 1,2 -1,5 2,0	3,4 -0,6 2,2 -1,6	0,5 1,8 -0,4 0,2	4,43632 4,15527 9,58114 0,39000	-1,3 0,3 -2,5 0,0
18	1,2 -2,6 0,5 -4,1	-0,5 1,4 -2,1 0,6	2,8 -3,0 1,1 -0,5	-3,2 0,5 -2,6 1,2	-2,42752 3,16474 8,81720 -26,58144	3,2 -1,3 0,4 -2,5
19	1,6 -2,0 0,8 -1,2	-0,5 4,1 -1,5 0,4	3,2 -0,8 2,4 -2,5	2,1 -1,5 0,1 -0,6	-2,90940 -3,30594 -1,82784 -6,36048	-0,7 -2,0 -1,0 0,0
20	-0,4 1,1 -3,5 -4,0	-2,5 3,2 -0,1 0,2	1,8 -2,6 1,4 -0,5	-2,0 0,5 -2,6 1,1	0,42576 -30,21898 -16,27821 -6,42578	3,0 0,4 -2,6 -1,0
21	2,4 1,5 -0,8 1,2	-1,6 0,9 1,1 -2,8	-2,5 1,2 2,4 -0,5	0,7 2,6 -0,5 2,0	-2,28288 1,84254 -7,93506 11,00036	0,6 -1,5 1,1 1,9
22	0,4 -1,5 2,0 0,1	1,9 0,6 -4,1 3,0	-2,4 1,2 0,5 1,4	0,5 2,4 1,6 -2,5	0,30678 -4,21839 -8,45331 1,53789	1,2 2,5 -0,5 1,6
23	1,7 -0,1 2,6 1,5	0,6 2,5 -1,2 0,2	2,1 3,0 2,1 -1,7	-1,5 1,8 -0,5 2,2	-5,66937 -4,99050 13,15266 8,54615	0,7 1,5 -2,2 1,0
24	4,0 2,6 -0,5 1,9	-0,5 1,3 3,0 0,8	2,1 0,6 1,2 -0,5	0,2 -1,5 -2,4 1,2	18,84720 3,40392 -22,47560 -6,43244	-2,5 2,0 2,2 -0,3
25	-2,5 0,8 2,1 1,4	1,6 1,1 -1,2 0,5	2,1 -3,0 0,5 2,2	0,1 1,5 -2,7 0,3	-37,97268 2,22006 6,74865 6,29984	3,5 0,0 -1,0 2,1

Кінець таблиці 6

26	0,5 3,0 1,9 -2,8	2,7 -2,2 0,5 1,3	-0,1 1,5 2,4 0,7	1,2 2,6 -0,4 2,5	-0,86703 14,43240 -12,59653 -9,05877	1,0 -2,5 0,2 1,5
27	1,1 0,9 -2,0 2,5	-0,6 3,0 0,5 1,1	2,2 -1,6 2,7 0,4	-1,5 2,4 1,1 -1,9	1,68870 10,30449 1,29780 2,89248	2,2 1,4 1,0 0,6
28	2,3 1,7 -0,2 1,4	1,4 0,9 2,6 -0,4	0,7 1,3 1,5 2,0	-1,1 2,2 -0,3 1,5	4,26706 24,95169 -11,60306 6,61972	-0,7 3,5 0,6 -1,5
29	0,9 4,1 -1,1 0,4	-0,9 1,4 2,2 3,0	1,7 -0,4 -3,3 1,5	2,0 2,7 1,1 -2,2	1,28439 10,74725 -17,52025 -8,26131	1,5 -2,0 -1,0 0,7
30	1,2 2,5 0,1 -2,4	-0,7 1,4 3,0 0,7	3,1 -2,1 1,6 2,5	2,4 0,9 -2,2 1,8	1,15208 13,88584 -0,20264 -11,25706	2,5 1,0 1,6 -2,0

РОЗДІЛ 5 ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ ВИЗНАЧЕННЯ ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ ТА ВЛАСНИХ ВЕКТОРІВ МАТРИЦЬ

5.1. Проблема власних значень

При розв'язанні теоретичних і практичних задач часто виникає потреба визначити власні значення матриці A.

Нехай дана квадратна матриця $A = [a_{ij}]$. Розглянемо лінійне перетворення

$$\bar{y} = A\bar{x} \tag{37}$$

де $\bar{x}$ і $\bar{y}$ – n -вимірні вектори якогось n -вимірного простору.

Вектор $\bar{x} \neq \bar{0}$ називається власним вектором матриці A, якщо

$$A\bar{x} = \lambda\bar{x} \tag{38}$$

Число λ називається власним значенням чи характеристичним числом матриці A, що відповідає даному власному вектору $\bar{x}$. Власні вектори матриці $\bar{y}^{k+1} = A\bar{y}^k$ є ненульовими розв'язками матричного рівняння (38) або

$$(A - \lambda E)\bar{x} = \bar{0} \tag{39}$$

де матриця $(A - \lambda E)$ називається характеристичною матрицею. Рівняння (39) являє собою однорідну систему, що має ненульові розв'язки тоді й тільки тоді, коли визначник системи дорівнює нулю, тобто

$$det(A - \lambda E) = 0. \tag{40}$$

Визначник із (40) називається характеристичним (віковим) визначником матриці $\bar{y}^3$, а рівняння (40) називається характеристичним (віковим) рівнянням матриці A.

Для знаходження власних значень і власних векторів можна розгорнути характеристичне рівняння (40) $\bar{y}^6$-го ступеня й розв'язати це рівняння одним із чисельних методів, або використати ітераційний метод для обчислення коренів характеристичного рівняння і власних векторів без попереднього розгортання характеристичного визначника.

5.2. Пошук власних значень і власних векторів матриць методом простих ітерацій

Приклад 1. Обчислити власні числа і власні вектори матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^3 - 12\lambda^2 + 39\lambda - 28 = 0\ .$$

Розв'язавши це рівняння, одержимо:

$\lambda_2 = 1; \lambda_2 = 4; \lambda_3 = 7$ – власні числа.

Знайдемо власні вектори. Підставимо $\lambda = 1$ в (39) і, розписавши його, одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} (3-1)x_1 & +2x_2 & +0x_3 & = 0 \\ 0x_1 & -2x_2 & +(5-1)x_3 & = 0 \\ 2x_1 & +(4-1)x_2 & -2x_3 & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 & +2x_2 & & = 0 \\ & -2x_2 & +4x_3 & = 0 \\ 2x_1 & +3x_2 & -2x_3 & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & & = 0 \\ & -x_2 & +2x_3 & = 0 \\ 2x_1 & +3x_2 & -2x_3 & = 0 \end{cases}$$

Нехай $x_1 = 1$, тоді $x_2 = -1$; $x_3 = -1/2$;

$$\bar{x}^1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1/2 \end{Bmatrix}$$

$$\lambda = 4$$

$$\begin{cases} (3-4)x_1 & +2x_2 & +0x_3 & = 0 \\ 2x_1 & +0x_2 & -2x_3 & = 0 \\ 0x_1 & -2x_2 & +x_3 & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x_1 & +2x_2 & & = 0 \\ 2x_1 & & -2x_3 & = 0 \\ & -2x_2 & +x_3 & = 0 \end{cases}$$

Нехай $x_1 = 1$, тоді $x_2 = 1/2$; $x_3 = -1$

$$\bar{x}^2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\lambda = 7$$

$$\begin{cases} (3-7)x_1 & +2x_2 & +0x_3 & = 0 \\ 2x_1 & +(4-7)x_2 & -2x_3 & = 0 \\ 0x_1 & -2x_2 & +(5-7)x_3 & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x_1 & +2x_2 & & = 0 \\ 2x_1 & -3x_2 & -2x_3 & = 0 \\ & -2x_2 & -2x_3 & = 0 \end{cases}$$

$$x_1 = 1; x_2 = -1; x_3 = 2$$

$$\bar{x}^3 = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix}.$$

Приклад 2. Використати метод ітерацій для визначення найбільшого за модулем власного числа матриці $A = \begin{pmatrix} 1,6 & 2,3 & 1,2 \\ 2,3 & 0,6 & 1,5 \\ 1,2 & 1,5 & 3,8 \end{pmatrix}$ і відповідного йому власного вектора.

Розв'язання. 1. Будуємо послідовність векторів $\bar{y}^{k+1} = A\bar{y}^k$ $(k = 0,1,2,\dots)$, де $\bar{y}^0$ – довільний вектор; тоді $\lambda_1 \approx y_i^{(k+1)}/y_i^{(k)}$, де $y_i^{(k+1)}$ і $y_i^{(k)}$ – однойменні координати двох послідовних векторів.

Всі обчислення наведені у таблиці 7.

Таблиця 7 – Реалізація методи ітерацій для визначення найбільшого за модулем власного числа матриці і відповідного йому власного вектору

A	1,6	2,3	1,2	$\frac{y_1^{(k+1)}}{y_1^{(k)}}$	$\frac{y_2^{(k+1)}}{y_2^{(k)}}$	$\frac{y_3^{(k+1)}}{y_3^{(k)}}$
	2,3	0,6	1,5			
	1,2	1,5	3,8			
$\bar{y}^0$	1	1	1			
$\bar{y}^1$	5,1	4,4	6,5	5,11	5,48	5,76
$\bar{y}^2$	26,08	24,12	37,42	5,45	5,41	5,60
$\bar{y}^3$	142,108	130,586	209,672	5,484	5,511	5,548
$\bar{y}^4$	$7{,}793\cdot10^2$	$7{,}197\cdot10^2$	$1{,}163\cdot10^3$	5,5151	5,5148	5,5321
$\bar{y}^5$	$42{,}98\cdot10^3$	$3{,}969\cdot10^3$	$6{,}434\cdot10^3$	5,5205	5,5225	5,5267
$\bar{y}^6$	$2{,}372\cdot10^4$	$2{,}191\cdot10^4$	$3{,}556\cdot10^4$	5,5233	5,5235	5,5251
$\bar{y}^7$	$1{,}310\cdot10^5$	$1{,}210\cdot10^5$	$1{,}964\cdot10^5$	5,5240	5,5241	5,5246
$\bar{y}^8$	$7{,}239\cdot10^5$	$6{,}688\cdot10^5$	$10{,}855\cdot10^2$	5,5242	5,5243	5,5244
$\bar{y}^9$	$3{,}999\cdot10^6$	$3{,}694\cdot10^6$	$5{,}996\cdot10^6$	5,5243	5,5243	5,5244
$\bar{y}^{10}$	$2{,}209\cdot10^7$	$2041\cdot10^7$	$2{,}312\cdot10^7$	5,5243	5,5243	5,5243
$\bar{y}^{11}$	$1{,}220\cdot10^8$	$1{,}127\cdot10^8$	$1{,}8301\cdot10^8$			

Отже, $\lambda_1 = 5{,}5243$.

2. Власний вектор $\bar{x}^1$ визначається з рівності $\bar{x}^1 \approx \bar{y}^k$. Отже, $\bar{x}^1 \approx \bar{y}^{11} = (1{,}2047 \cdot 10^8;\quad 1{,}12753 \cdot 10^8;\quad 1{,}830184 \cdot 10^8)$

Питання для самоконтролю до розділу 5

1. Що називається власним значенням матриці?
2. Що називається власним вектором матриці?
3. Які існують методи знаходження найменшого й найбільшого власного значення?
4. Наведіть основне рівняння проблеми власних значень.

Завдання до розділу 5. Чисельні методи визначення власних значень та власних векторів матриць

За допомогою характеристичного визначника знайти власні числа і власні вектори матриці відповідно зо індивідуального варіанту.

№ 1.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$$

№ 2.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$$

№ 3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$$

№ 4.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 13 & 0 \end{pmatrix}$$

№ 5.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 19 & 30 \\ 0 & -5 & -12 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

№ 6.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -15 & -7 & 4 \end{pmatrix}$$

№ 7.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

№ 8.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

№ 9.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

№ 10.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

№ 11.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

№ 12.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

№ 13.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 12 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

№ 14.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 12 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

№ 15.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 23 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

№ 16.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 7 & -2 & 9 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

№ 17.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 16 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

№ 18.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 11 & 7 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

№ 19.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 7 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

№ 20.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 21 \\ 21 & 2 & 16 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

№ 21.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

№ 22.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

№ 23.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

№ 24.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

№ 25.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

№ 26.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

№ 27.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

№ 28.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 9 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

№ 29.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

№ 30.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

РОЗДІЛ 6 АПРОКСИМАЦІЯ ФУНКЦІЙ

6.1. Постановка задачі інтерполяції

При розв’язанні багатьох практичних задач, що виникають у різних областях, постає необхідність у використанні теорії наближення функцій або теорії апроксимації функцій.

Суть задачі апроксимації така. Нехай дана деяка невідома в аналітичному сенсі функція $y = f(x)$ і відома лише її поведінка (наприклад, дискретні значення в точках $f(x_i)$) на певному відрізку $[a, b]$. Таку функцію надалі будемо називати апроксимованою функцією. Треба побудувати іншу функцію $y = F(x)$, апроксимуючу функцію, яка б була близька до функції $y = f(x)$ з певною похибкою. При цьому потрібне виконання таких вимог: наявність дискретних значень функції $y_i = f(x_i)$; визначення класу апроксимуючих функцій, з яких конструюється функція $y = F(x)$; вид критерію згоди між функціями $y = f(x)$ і $y = F(x)$; оцінка похибки апроксимації.

Вид функції $y = F(x)$ залежить від класу розв'язуваних задач. Наприклад, при дослідженні напружено-деформованого стану методом скінченних елементів у задачах механіки деформіваного тіла апроксимуючі функції представляються комбінацією функцій $1, x, \dots, x^n$, або сплайнами. Експонентні функції мають широке застосування у фізиці при вивченні явищ типу розпаду і нагромадження, а тригонометричні функції – у механіці при коливальних процесах.

Критерій згоди або близькості апроксимованої й апроксимуючої функцій визначається з умови мінімуму відстаней між ними. Наприклад, найпоширенішим критерієм є критерій Чебишева:

$$\rho = \max_{0 \le i \le n} |f(x_i) - F(x_i)| \to min \to 0.$$

Інший критерій може бути записаний у вигляді:

$$\rho = \sum_{i=0}^{n} [f(x_i) - F(x_i)]^2 \to min.$$

Метод апроксимації, заснований на другому критерії, має назву методу найменших квадратів.

Якщо при використанні критерію Чебишева прийняти $\rho = 0$, то це буде означати, що значення апроксимованої й апроксимуючої функцій у вузлових точках відрізка $[a, b]$ збігаються. Цей спосіб апроксимації називається інтерполюванням або інтерполяцією.

Питання оцінки похибки апроксимації безумовно залежать від попередніх трьох вимог і розглядаються окремо для кожного конкретного процесу апроксимації.

6.2. Наближене відновлення функції за допомогою інтерполяційного многочлена Лагранжа

Нехай відомі значення деякої функції f в $n+1$ різних точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Введемо позначення:

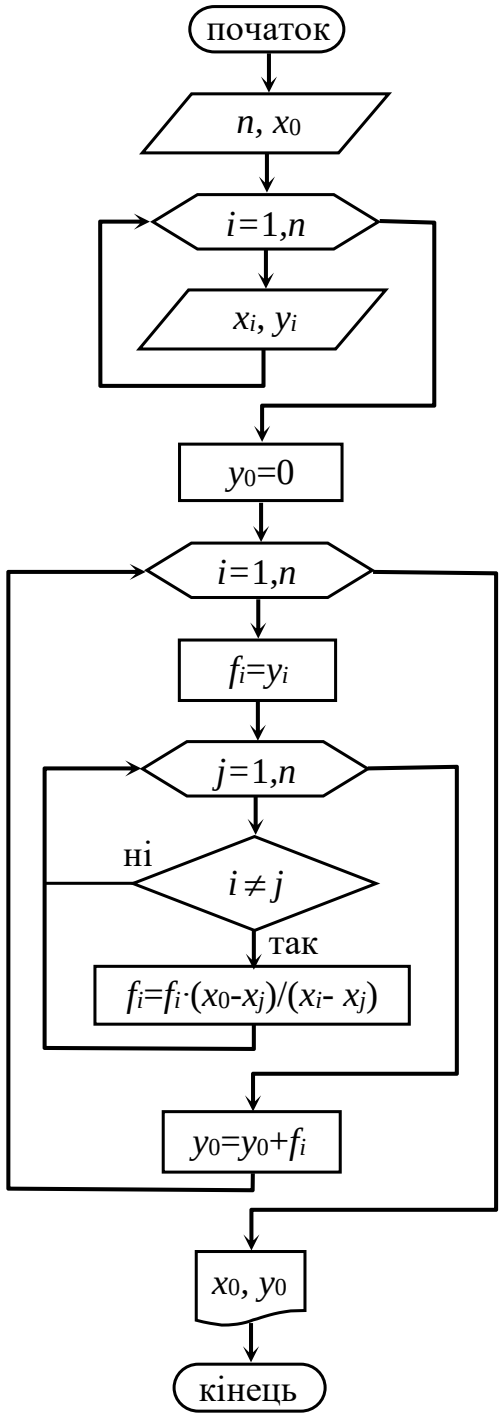


Рисунок 8 – Блок-схема побудови інтерполяційного многочлена Лагранжа

$$f_i = f(x_i), \quad i = 0,1,\ldots,n.$$

Наприклад, ці значення отримані з експерименту чи знайдені за допомогою досить складних обчислень.

Виникає задача наближеного відновлення функції f в довільній точці x. Часто для розв'язання цієї задачі будується алгебраїчний многочлен $L_n(x)$ степеня n, що у точках x_i приймає задані значення, тобто

$$L_n(x_i) = f_i \quad (i = 0,1,\ldots,n),$$

і називається інтерполяційним. Точки x_i $(i = 0,1,\ldots n)$ називаються вузлами інтерполяції.

Наближене відновлення функції f за формулою

$$f(x) \approx L_n(x)$$

називається інтерполяцією функції f. Якщо x розташований поза мінімальним відрізком, що містить усі вузли інтерполяції, то заміну функції f за зазначеною формулою називають також екстраполяцією.

На рис. 8 наведена блок-схема програми обчислення значення функції у точці за допомогою інтерполяційного многочлена Лагранжа.

У даній блок-схемі: n – кількість вузлових точок; x_i – координати вузлових точок; y_i – значення функції у вузлових точках; x_0 – координата точки, у якій знаходиться значення функції; y_0 – значення шуканої функції.

Приклад. Нехай задані такі значення функції $f(x)$: $f(1) = 4,\ f(2) = 2,\ f(3) = 4,\ f(4) = 16.$

Для заданої таблиці значень функції $f(x)$ побудуємо інтерполяційний многочлен Лагранжа у вигляді

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)}.$$

Розв'язання. Тут

$$\omega(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n),$$

$$\omega'(x_k) = \prod_{i \neq k}(x_k - x_i).$$

Для нашого прикладу $\omega(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$.

$\omega'(1) = (1-2)(1-3)(1-4) = -6$; $\omega'(2) = 2$; $\omega'(3) = -2$; $\omega'(4) = 6$.

Тоді

$$L_3(x) = -\frac{4}{6}(x-2)(x-3)(x-4) + (x-1)(x-3)(x-4) -$$

$$-2(x-1)(x-2)(x-4) + \frac{16}{6}(x-1)(x-2)(x-3) = x^3 - 4x^2 + 3x + 4.$$

Питання для самоконтролю до тем 6.1 і 6.2

1. Сформулюйте постановку задачі інтерполяції.
2. Наведіть умови інтерполяції.
3. Наведіть формулу для оцінки похибки.
4. Дайте геометричну інтерпретацію процесу інтерполяції.

Завдання до теми 6.2 Інтерполяційний многочлен Лагранжа

За заданою таблицею 8 значень функції $f(x)$ приблизно обчислити значення цієї функції в заданій точці $\bar{x}$ за допомогою інтерполяційного многочлена Лагранжа $L_4(x)$.

Таблиця 8 – Таблиця варіантів завдань до теми 6.2

Шифр по вертикалі	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_0	-9,9	-8,1	-9,2	-8,7	-7,4	-9,5	-7,7	-8,4	-9,3	-8,8
$f(x_0)$	6,0	3,3	4,8	4,1	2,6	5,3	2,9	3,7	5,1	4,2

	Шифр по горизонталі									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_1	-0,9	0,0	0,5	-0,8	0,7	0,1	0,3	-0,4	-1,1	-0,2
$f(x_1)$	0,9	1,0	1,1	0,9	1,2	1,1	1,1	1,0	0,9	1,0
x_2	4,0	3,5	2,8	3,9	2,3	3,4	2,9	3,7	2,0	3,1
$f(x_2)$	2,0	1,9	1,7	2,0	1,6	1,9	1,7	1,9	1,5	1,8
x_3	-4,8	-4,1	-5,3	-4,2	-4,9	-3,9	-5,6	-4,5	-3,6	-5,1
$f(x_3)$	1,1	0,9	1,3	1,0	1,1	0,9	1,4	1,0	0,9	1,2
x_4	6,5	7,7	8,2	6,2	7,4	8,5	6,8	7,9	6,0	7,1
$f(x_4)$	2,7	3,0	3,1	2,6	2,9	3,2	2,8	3,1	2,6	2,9
$\bar{x}$	-6,6	-2,3	1,2	1,8	4,2	4,5	5,1	5,4	5,6	5,8

6.3. Чисельне диференціювання функцій за допомогою інтерполяції кубічним сплайном

Один з основних підходів чисельного диференціювання полягає в тому, що формули для апроксимації похідних різного порядку точності отримують у результаті диференціювання різних інтерполяційних многочленів.

Дійсно, нехай відомі значення певної функції $f(x)$ в точках $x_0, x_1, \dots, x_n$ і треба обчислити $f^{(k)}(\bar{x})$. Для цього побудуємо функцію $\phi(x)$, що інтерполює $f(x)$, і наближено покладемо $f^{(k)}(\bar{x}) \approx \phi^{(k)}(\bar{x})$. Якщо для функції $\phi(x)$ відома похибка $R(x) = f(x) - \phi(x)$ (чи її оцінка), то похибка $\phi^{(k)}(x)$ похідної може бути виражена формулою $r(x) = f^{(k)}(x) - \phi^{(k)}(x) = R^{(k)}(x)$.

Сплайном $S_m(x)$ порядку m називають функцію, що є многочленом степеня m **окремо на кожному із відрізків** $[\boldsymbol{x_{n-1}, x_n}]$ $(n = 1,2,\dots,N)$, на які розбитий вихідний відрізок $[a, b]$, тобто $S_m(x) = P_{nm}(x) = a_{n0} + a_{n1} + \dots a_{nm}x^m$ при $x \in [x_{n-1}, x_n]$, і яка, крім того, задовольняє умовам неперервності похідних до порядку $m-1$ в точках $x_1, x_2, \dots, x_{N-1}$:

$$P_{nm}^{(k)}(x_n) = P_{n+1,m}^{(k)}(x_n) \text{ при } k = 0,\dots,m-1; n = 1,\dots,N-1.$$

Кубічний сплайн $S_3(x) = P_{n3}(x)$, що задовольняє умові інтерполяції, тобто співпадає з функцією $f(x)$ в точках $x_0, \dots, x_N$, можна записати у вигляді

$$P_{n3}(x) = a_n + b_n(x - x_n) + \frac{c_n}{2}(x - x_n)^2 + \frac{d_n}{6}(x - x_n)^3, \qquad (41)$$
$$x \in [x_{n-1}, x_n], n = 1,..,N.$$

За умови, що $f''(a) = f''(b) = 0$ (один із варіантів задання крайових умов), коефіцієнти c_n визначаються із системи рівнянь

$$h_n c_{n-1} + 2(h_n + h_{n+1})c_n + h_{n+1}c_{n+1} = 6\left(\frac{f_{n+1} - f_n}{h_{n+1}} - \frac{f_n - f_{n-1}}{h_n}\right), \qquad (42)$$
$$c_0 = c_N = 0,\ n = 1,\dots,N-1.$$

Тут $h_n = x_n - x_{n-1},\ f_n = f(x_n)$.

За знайденими числами c_n коефіцієнти b_n і d_n визначаються за формулами:

$$d_n = \frac{c_n - c_{n-1}}{h_n}, b_n = \frac{h_n}{2}c_n - \frac{h_n^2}{6}d_n + \frac{f_n - f_{n-1}}{h_n}, a_n = f_n, \qquad (43)$$
$$n = 1,2,\dots,N.$$

Для нашого прикладу $x_0 = 1,\quad f_0 = 4,\quad x_1 = 2,\quad f_1 = 2,\quad x_2 = 3, f_2 = 4,\quad x_3 = 4,\quad f_3 = 16$, тобто сітка рівномірна $h_n = x_n - x_{n-1} = 1 = const$, що трохи спрощує обчислення. Система рівняння (42) набуває вигляду (за умови $f''(x_0) = f''(x_3) = 0$)

$$c_{n-1} + 4c_n + c_{n+1} = 6(f_{n+1} + f_{n-1} - 2f_n), n = 1,2;$$
$$c_0 = c_3 = 0.$$

У розгорнутому вигляді маємо:

$$\begin{cases} c_0 + 4c_1 + c_2 = 6(f_2 + f_0 - 2f_1), \\ c_1 + 4c_2 + c_3 = 6(f_3 + f_1 - 2f_2), \\ c_0 = c_3 = 0. \end{cases}$$

Підставляючи в систему вхідні дані та враховуючи, що $c_0 = c_3 = 0$, перетворимо її до вигляду:

$$\begin{cases} 4c_1 + c_2 = 24, \\ c_1 + 4c_2 = 60. \end{cases}$$

Розв'язуючи останню систему, знаходимо:

$$c_1 = \frac{12}{5};\ c_2 = \frac{72}{5}.$$

Далі за формулами (43) одержуємо:

$$d_1 = \frac{12}{5};\ d_2 = 12;\ d_3 = -\frac{72}{5};$$

$$b_1 = -\frac{6}{5};\ b_2 = \frac{36}{5};\ b_3 = \frac{72}{5};$$

$$a_1 = 2;\ a_2 = 4;\ a_3 = 16.$$

Таким чином, шуканий сплайн має вигляд

$$S_3(x) = \begin{cases} P_{13}(x) = 2 - \frac{6}{5}(x-2) + \frac{6}{5}(x-2)^2 + \frac{2}{5}(x-2)^3, x \in [1;2]; \\ P_{23}(x) = 4 + \frac{36}{5}(x-3) + \frac{36}{5}(x-3)^2 + 2(x-3)^3, x \in [2;3]; \\ P_{33}(x) = 16 + \frac{72}{5}(x-4) + 0(x-4)^2 - \frac{12}{5}(x-4)^3, x \in [3;4]. \end{cases}$$

Тоді

$$f''(1{,}5) \approx P''(1{,}5) = \frac{12}{5} + \frac{12}{5}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{6}{5}.$$

Питання для самоконтролю до теми 6.3

1. Сформулюйте постановку задачі чисельного диференціювання.
2. Що називається сплайном, степенем сплайна, дефектом сплайна?
3. Що являє собою інтерполюючий кубічний сплайн?
4. Опишіть метод побудови інтерполюючого кубічного сплайна з дефектом, рівним одиниці.
5. Дати оцінку похибки інтерполяції сплайном.

Завдання до теми 6.3. Апроксимація функцій кубічними сплайнами

За заданою таблицею значень функції $f(x)$ побудуйте кубічний сплайн $S_\Delta^3(f,x) = P_{n3}(x)$, що задовольняє умовам інтерполяції. Потім з його допомогою приблизно обчисліть значення функції $f(x)$ та її похідної другого порядку $f''(x)$ в заданій точці $\bar{x}$.

Таблицю варіантів візьміть з завдань до лабораторної роботи №6.

РОЗДІЛ 7 МЕТОДИ ЧИСЕЛЬНОГО ІНТЕГРУВАННЯ

7.1. Загальні положення

У багатьох випадках первісна $F(x)$ функції $f(x)$ не може бути знайдена за допомогою елементарних засобів чи є занадто складною. Внаслідок цього обчислення визначеного інтеграла від такої функції $f(x)$ за формулою Ньютона-Лейбніца може бути складним чи навіть неможливим.

Крім того, підінтегральна функція може задаватися за допомогою таблиці, і тоді саме поняття первісної втрачає зміст. Тому важливе значення мають наближені і, у першу чергу, чисельні методи обчислення визначених інтегралів.

Звичайний прийом побудови квадратурних формул полягає в тому, що дану функцію $f(x)$ замінюють інтерполюючою чи апроксимуючою функцією $\phi(x)$ простого вигляду (наприклад, поліном), а потім наближено покладають:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b \phi(x)dx\,.$$

Функція $\phi(x)$ повинна бути така, щоб інтеграл від неї обчислювався безпосередньо.

Якщо в якості $\phi(x)$ взяти інтерполяційний многочлен Лагранжа $L_n(x)$ з вузлами інтерполяції $x_1, \ldots, x_n$ з відрізка інтегрування, то одержимо квадратурну формулу Ньютона-Котеса. Якщо $L_n(x)$ – многочлен другого ступеня з вузлами $x_1 = a,\ x_2 = \frac{a+b}{2},\ x_3 = b$, то інтегруючи його, одержимо окремий випадок квадратурної формули Ньютона-Котеса – квадратурну формулу Сімпсона

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f(x_1) + 4f(x_2) + f(x_3)].$$

Часто виникає задача обчислення інтегралів, де підінтегральна функція чи її похідні невисокого порядку мають ділянки різкої зміни, наприклад, обертаються на нескінченність. Такі функції погано наближаються многочленами відразу на усьому відрізку інтегрування. У таких випадках часто виявляється більш зручним розбити вихідний відрізок на частини й на кожній частині застосувати свою квадратурну формулу. Підсумовуючи потім квадратурні формули за усіма елементарними відрізками, одержимо так звану складену чи узагальнену квадратурну формулу.

7.2. Квадратурна формула Гауса

Якщо в квадратурній формулі Ньютона-Котеса, що, як відомо, є точною для многочленів степеня $n-1$, за вузли інтегрування взяти нулі многочлена Лежандра степеня n, ортогонального до усіх многочленів нижчого степеня, то одержимо квадратурну формулу Гауса, точну для многочленів степеня $2n-1$:

$$\int_a^b f(x)p(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\sum_{j=1}^{n} D_j f\left(x_j\right). \qquad (44)$$

Для практичного застосування формул Гауса необхідно мати в розпорядженні вузли й коефіцієнти цих квадратур. Наведемо параметри квадратур Гауса для відрізка $[-1,1]$ при $p(x) \equiv 1$. У цьому випадку залишковий член $R(f)$ для квадратурної формули (44) має вигляд:

$$R(f) = f^{(2n)}(\xi)\frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n!)^3(2n+1)}.$$

Таблиця вузлів і коефіцієнтів квадратур Гауса для відрізка $[-1,1]$ при $p(x) \equiv 1$ (див. табл. 9).

Таблиця 9 – Вузли і коефіцієнтів квадратур Гауса для відрізка $[-1,1]$ при $p(x) \equiv 1$

n	j	d_j	D_j
1	1	0	2,00000000
2	2; 1	±0,57735027	1,00000000
3	3; 1	±0,77459667	$\frac{5}{9} = 0{,}55555556$
	2	0,00000000	$\frac{8}{9} = 0{,}88888889$
4	4; 1	±0,86113631	0,34785484
	3; 2	±0,33998104	0,65214516
5	5; 1	±0,90617985	0,23692688
	4; 2	±0,53846931	0,47862868
	3	0,00000000	0,56888889
6	6; 1	±0,93246951	0,17132450
	5; 2	±0,66120939	0,36076158
	4; 3	±0,23861919	0,46791394
7	7; 1	±0,94910791	0,12948496
	6; 2	±0,74153119	0,27970540
	5; 3	±0,40584515	0,38183006
	4	0,00000000	0,41795918
8	8; 1	±0,96028986	0,10122854
	7; 2	±0,79666648	0,22238104
	6; 3	±0,52553242	0,31370664
	5; 4	±0,18343464	0,36268378

На рис. 9 наведена блок-схема програми обчислення визначених інтегралів за допомогою квадратурних формул Гауса.

У даній блок-схемі: a – лівий кінець інтервалу інтегрування; b – правий кінець інтервалу; n – кількість вузлових точок; t_i – координати вузлових точок на відрізку [–1; 1]; d_i – вагові коефіцієнти; x_i – координати вузлових точок на відрізку [a; b]; $f(x_i)$ – значення підінтегральної функції у вузловій точці x_i; J – значення визначеного інтеграла.

Приклад. Обчислити інтеграл

$$I = \int_0^1 \sqrt{1+2x}\,dx,$$

застосовуючи формулу Гауса з трьома вузлами інтегрування. Оцінити похибку отриманого результату.

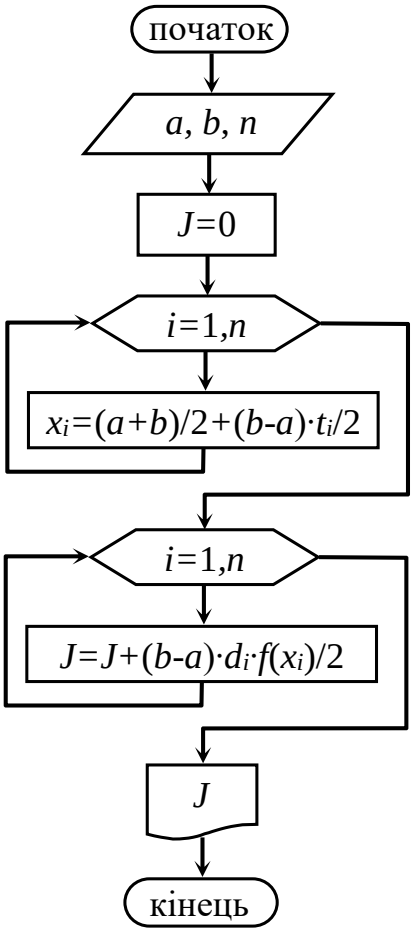


Рисунок 9 – Блок-схема обчислення визначеного інтеграла квадратурною формулою Гауса

Розв'язання. Оцінку похибки виконаємо за правилом Рунге. Тому інтеграл обчислимо двічі. Спочатку застосуємо формулу Гауса з трьома вузлами по всьому інтервалу інтегрування. Позначимо це наближене значення I_1. Потім розіб'ємо інтервал інтегрування $[0; 1]$ на два – $[0; 0{,}5]$ і $[0{,}5; 1]$, й за допомогою тієї ж формули обчислимо значення інтеграла на цих відрізках. Підсумовуючи отримані значення, знайдемо I_2.

Відрізок інтегрування $[-1,1]$, для якого наведена таблиця вузлів і коефіцієнтів квадратур Гауса, заміною змінних

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t$$

відображається на $[a; b]$. Це дозволяє нам визначити вузли інтегрування

$$x_1 = \frac{1+0}{2} + \frac{1-0}{2}d_1 = 0{,}11270;$$

$$x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}d_2 = 0{,}5000;$$

$$x_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}d_3 = 0{,}88730.$$

Відповідні коефіцієнти квадратурної формули (44) для нашого випадку будуть:

$$C_1 = \frac{b-a}{2}D_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{9} = \frac{5}{18};$$

$$C_2 = \frac{b-a}{2}D_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{8}{9} = \frac{4}{9};$$

$$C_3 = \frac{b-a}{2}D_3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{9} = \frac{5}{18}.$$

Подальші обчислення зведемо в таблицю 10.

Таблиця 10 – Розрахунки за квадратурою формулою Гауса

j	x_j	y_j	C_j	$C_j \cdot y_j$
1	0,11270	1,10698	5/18	0,30749
2	0,50000	1,41421	4/9	0,62854
3	0,88730	1,66571	5/18	0,46270
$I_1 = \sum_{j=1}^{3} C_j y_j = 1{,}39873$				
1	0,05635	1,05485	5/36	0,14651
2	0,25000	1,22474	2/9	0,27217
3	0,44365	1,37379	5/36	0,19080
4	0,55635	1,45351	5/36	0,20188
5	0,75000	1,58114	2/9	0,35136
6	0,94365	1,69921	5/36	0,23600
$I_2 = \sum_{j=1}^{6} C_j y_j = 1{,}39872$				

$$I = I_2 + \frac{I_2 - I_1}{63} = 1{,}3987198.$$

$$\varepsilon = \frac{|I_2 - I_1|}{63} \approx 2 \cdot 10^{-7}.$$

Питання для самоконтролю до розділу 7

1. З яких міркувань обираються вузли і вагові коефіцієнти квадратурної формули Гауса?
2. У чому полягають властивості формули Гауса?
3. Які особливості застосування правила Рунге практичної оцінки похибки?

Завдання до розділу 7. Квадратурна формула Гауса

За допомогою квадратурної формули Гауса, з похибкою, що не перевищує $\varepsilon = 10^{-6}$, обчислити заданий визначений інтеграл.

Варіанти завдань до розділу 7

1. $\int_{\pi/3}^{\pi} cos(x + sin\, x^2)\, dx$;
2. $\int_{-\pi/2}^{0} lg(2 - cos\, 3x)\, dx$;
3. $\int_{1,5}^{3} x^4 \cdot 2^{-x^2} dx$;
4. $\int_{2}^{4} \frac{sin(x^2 - 2x)}{x^2}\, dx$;
5. $\int_{0}^{\pi/4} tg(x^2 - cos\, x) dx$;
6. $\int_{1,1}^{4,3} ln(x + x^{-1})\, dx$;

7. $\int_{0,17}^{0,48} ch(2x - x^3)dx$;

8. $\int_{-2,1}^{1,1} \frac{e^x}{2x+7} dx$;

9. $\int_{-\pi}^{-\pi/6} lg(3 + sin\,3\,x)\,dx$;

10. $\int_{0,23}^{0,42} ch(x - 2x^{-1})dx$;

11. $\int_{3}^{4,5} x^{1/3} \cdot 3^{-x^2} dx$;

12. $\int_{-\pi/4}^{\pi/2} cos(x^2 - sin\,2\,x)\,dx$;

13. $\int_{\pi/6}^{\pi} (3 - x^2\,cos\,x^4)dx$;

14. $\int_{0}^{3\pi/2} 4^{cos^2 x} dx$;

15. $\int_{-1}^{2,1} \frac{3^x}{3x+4} dx$;

16. $\int_{1}^{3,2} th(2x + x^2)dx$;

17. $\int_{1}^{1,3} cos(3x + x^{-1})\,dx$;

18. $\int_{-\pi/6}^{\pi/2} sin(1 + cos^2\,x)\,dx$;

19. $\int_{-\pi/3}^{\pi} lg(4 + sin\,2\,x)\,dx$;

20. $\int_{1,1}^{4,2} x^2 \cdot 4^{-x^4} dx$;

21. $\int_{1,6}^{3,1} x^{-2}\,cos(2x - x^2)\,dx$;

22. $\int_{0}^{7\pi/2} sin(2\,cos\,x + 1)\,dx$;

23. $\int_{1}^{4,3} 5^{-(x+x^{-1})} dx$;

24. $\int_{1,1}^{4,2} 2^x (3x - 2)^{-1} dx$;

25. $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} tgx^2 dx$;

26. $\int_{-\pi/2}^{5\pi/6} (2 - cos\,x^3)dx$;

27. $\int_{-\pi/6}^{\pi/2} sin(x^3 + cos\,x^2)\,dx$;

28. $\int_{-\pi/3}^{\pi} 3^{sin^2 x} dx$;

29. $\int_{1}^{3,5} x^{-3}\,sin(x^3 - 2x)\,dx$;

30. $\int_{1,1}^{3,2} x^4 \cdot 2^{-(x+3)^2} dx$.

РОЗДІЛ 8 НАБЛИЖЕНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

8.1. Метод Ейлера розв'язання задачі Коші

Розглянемо диференціальне рівняння

$$y' = f(x, y)$$

з початковою умовою $y(x_0) = y_0$. Вибравши досить малий крок h, побудуємо систему рівновіддалених точок $x_i = x_0 + ih$.

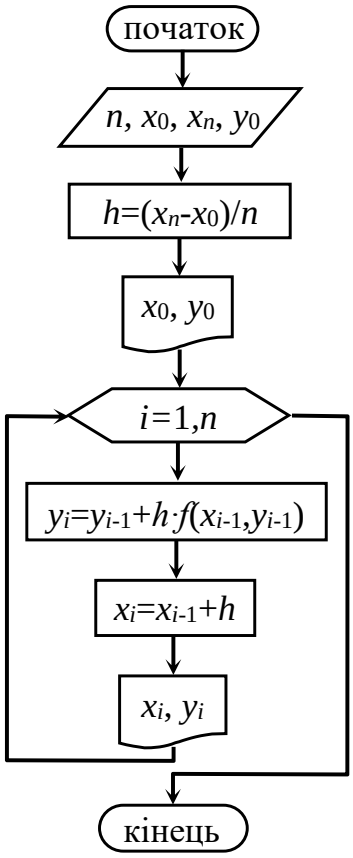


Рисунок 10 – Блок-схема розв'язання задачі Коші методом Ейлера

Наближені значення $y(x_i) = y_i$ обчислюються послідовно за формулами:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)\ (i = 0,1,2,\dots).$$

При цьому шукана інтегральна крива $y = y(x)$, що проходить через точку $M_0(x, y)$ замінюється ламаною $M_0M_1M_2\dots$ з вершинами $M_i(x_i, y_i)$, $(i = 0,1,2,\dots)$; кожна ланка цієї ламаної (ламаної Ейлера) має напрямок, що збігається з напрямком тієї інтегральної кривої вихідного рівняння, що проходить через точку M_0.

Похибка методу – величина порядку $O(h)$.

На рис. 10 наведена блок-схема програми наближеного розв'язання задачі Коші для диференціальних рівнянь першого порядку методом Ейлера.

В даній блок-схемі: x_0 – лівий кінець інтервалу; x_n – правий кінець інтервалу; n – кількість відрізків розбиття; y_0 – початкове умова; h – шаг сітки; y_i – значення шуканої функції; $f(x_i;y_i)$ – значення правої частини диференціального рівняння $y'=f(x,y)$ в точці $(x_i;y_i)$.

Приклад. Знайти розв'язок диференціального рівняння методом Ейлера на відрізку $(0; 0,4)$ при $h = 0,1$, якщо $y' = x + y$ при початковій умові $y(0) = 1$.

Розв'язання. Знаходимо значення аргументу: $x_0 = 0$; $x_1 = 0,1$; $x_2 = 0,2$; $x_3 = 0,3$; $x_4 = 0,4$ і відповідні їм значення y:

$$y_1 = y_0 + hf(x_0; y_0) = 1 + 0,1(0 + 1) = 1,1;$$
$$y_2 = y_1 + hf(x_1; y_1) = 1,1 + 0,1(0,1 + 1,1) = 1,22;$$
$$y_3 = y_2 + hf(x_2; y_2) = 1,22 + 0,1(0,2 + 1,22) = 1,36;$$
$$y_4 = y_3 + hf(x_3; y_3) = 1,36 + 0,1(0,3 + 1,36) = 1,52.$$

Одержимо таблицю 11 наближених значень шуканої функції

Таблиця 11 – Значення шуканої функції для задачі Коші (метод Ейлера)

x_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4
y_i	1	1,1	1,22	1,36	1,52
$y_{\text{аналіт.}}$	1	1,1103	1,2428	1,3997	1,5836

Питання для самоконтролю до теми 8.1

1. Сформулюйте задачу Коші для звичайних диференціальних рівнянь 1-го порядку.
2. Дайте геометричну інтерпретацію розв'язку задачі Коші. Запишіть формули методу Ейлера.
3. Як отримано формули методу Ейлера?
4. В чому полягають переваги й недоліки методу Ейлера?
5. Як визначається похибка методу Ейлера?

8.2. Метод Рунге-Кутта четвертого порядку точності

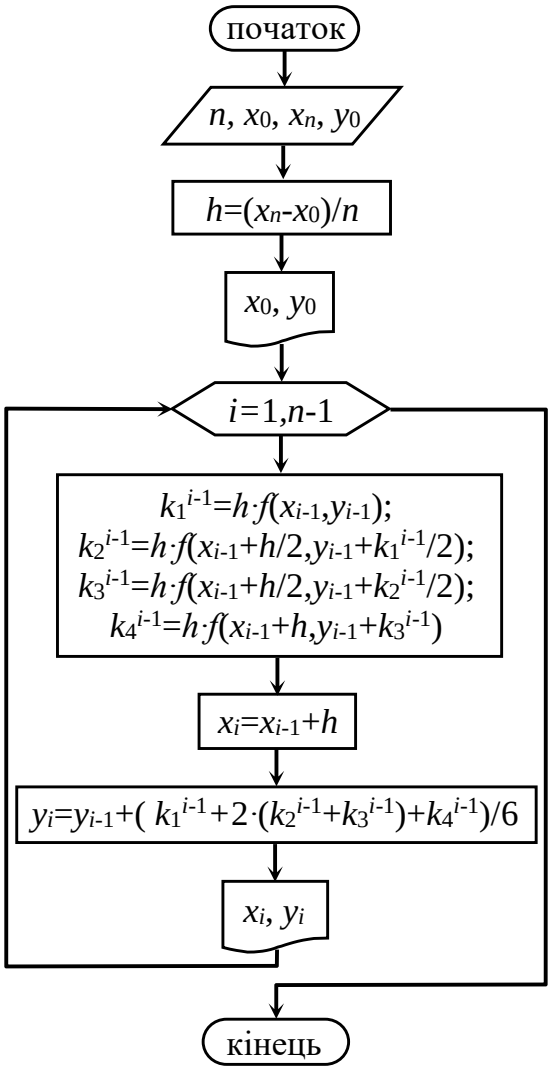


Рисунок 11 – Блок-схема розв'язання задачі Коші методом Рунге-Кутта

Нехай дано диференціальне рівняння $y' = f(x, y)$ з початковою умовою $y(x_0) = y_0$. Виберемо крок h, позначивши $x_i = x_0 + ih$ і $y_i = y(x_i)$, $(i = 0,1,2,\dots)$. Розглянемо числа:

$$k_1^i = hf(x_i; y_i);$$
$$k_2^i = hf\left(x_i + h/2\,; y_i + k_1^i/2\right)\ ;$$
$$k_3^i = hf\left(x_i + h/2\,; y_i + k_2^i/2\right)\ ;$$
$$k_4^i = hf\left(x_i + h; y_i + k_3^i\right)\ .$$

Тоді значення шуканої функції y визначається за формулою

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i\ ,$$

де $\Delta y_i = \left(k_1^i + 2k_2^i + 2k_3^i + k_4^i\right)/6;\ (i = 0,1,2,\dots)$.

Похибка цього методу – величина порядку $O\left(h^4\right)$.

На рис. 11 наведена блок-схема програми наближеного розв'язання задачі Коші для диференціальних рівнянь першого порядку методом Рунге-Кутта четвертого порядку точності.

В даній блок-схемі: x_0 – лівий кінець інтервалу; x_n – правий кінець інтервалу; n – кількість відрізків розбиття; y_0 – початкова умова; h – шаг сітки; y_i – значення шуканої функції;

$f(x_i;y_i)$ – значення правої частини диференціального рівняння $y'=f(x,y)$ в точці $(x_i;y_i)$; k_1^i, k_2^i, k_3^i, k_4^i – допоміжні числа.

Приклад. Розв'яжемо методом Рунге-Кутта задачу Коші: $y' = x + y$; $y(0) = 1$; $h = 0{,}1$ на інтервалі (0; 0,4).

Розв'язання. Покажемо початок процесу. Для y_1 обчислюємо послідовно

$k_1^0 = (0 + 1)0{,}1 = 0{,}1,$

$k_2^0 = \big(0{,}05 + (1 + 0{,}05)\big)0{,}1 = 0{,}11,$

$k_3^0 = \big(0{,}05 + (1 + 0{,}055)\big)0{,}1 = 0{,}1105,$

$k_4^0 = \big(0{,}01 + (1 + 0{,}1105)\big)0{,}1 = 0{,}12105$.

Звідси $\Delta y_0 = (0{,}1 + 2(0{,}1105 + 0{,}11) + 0{,}12105) = 0{,}1103.$

Отже $y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1 + 0{,}1103 = 1{,}1103.$

Аналогічно обчислюються подальші наближення. Отримані значення занесені в таблицю 12.

Таблиця 12 – Значення шуканої функції для задачі Коші (метод Рунге-Кутта)

x_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4
y_i	1	1,1103	1,2427	1,3996	1,5836
$y_{\text{аналіт.}}$	1	1,1103	1,2428	1,3997	1,5836

Питання для самоконтролю до теми 8.2

1. Основна ідея методу Рунге-Кутта?
2. В чому полягають переваги й недоліки методу Рунге-Кутта?
3. Який порядок похибки методу?
4. Як розв'язується методом Рунге-Кутта задача Коші для рівняння більш високого порядку?

8.3. Метод Адамса

Розглянемо задачу

$$y' = f(x;y);\ y(x_0) = x_0\ .$$

Потрібно знайти розв'язок рівняння на скінченому відрізку $(x_0; x_n)$. Поклавши h – крок інтегрування і $h > 0$, одержимо систему точок $x_k = x_0 + kh$ на відрізку $(x_0; x_n)$, $(k = 0{,}1, .., n)$.

Далі знаходять будь-яким методом наступні три значення шуканої функції:

$$y_1 = y(x_1)\ ;\ y_2 = y(x_2);\ y_3 = y(x_3);$$

(ці три значення можна одержати будь-яким методом, що забезпечує потрібну точність: можливо, методом Рунге-Кутта, але не методом Ейлера, через його недостатню точність).

За допомогою чисел x_0, x_1, x_2, x_3 і y_0, y_1, y_2, y_3 обчислюють величини

$$q_0 = hy_0' = hf(x_0;y_0);\quad q_1 = hf(x_1;y_1);$$

$$q_2 = hf(x_2;y_2);\quad q_3 = hf(x_3;y_3).$$

Далі складають таблицю 13 скінченних різниць величин "y_k" і "q_k".

Таблиця 13 – Скінченні різниці в методі Адамса

x_k	y_k	Δy_k	$q_k = hf(x_k; y_k)$	Δq_k	$\Delta^2 q_k$	$\Delta^3 q_k$
x_0	y_0		q_0			
		Δy_0		Δq_0		
x_1	y_1		q_1		$\Delta^2 q_0$	
		Δy_1		Δq_1		$\Delta^3 q_0$
x_2	y_2		q_2		$\Delta^2 q_1$	
		Δy_2		Δq_2		
x_3	y_3		q_3			

Знаючи числа в нижньому косому рядку, за формулою Адамса знаходять

$$\Delta y_3 = q_3 + \Delta\, q_2/2 + 5\Delta^2 q_1/12 + 3\Delta^3 q_0/8\,,$$

а потім величину $y_4 = y_3 + \Delta y_3$. Знаючи тепер y_4, обчислюють $q_4 = hf(x_4; y_4)$, після чого можна написати наступний косий рядок:

$$\Delta q_3 = q_4 - q_3\,; \qquad \Delta^2 q_2 = \Delta q_3 - \Delta q_2\,; \qquad \Delta^3 q_1 = \Delta^2 q_2 - \Delta^2 q_1\,.$$

Він дозволяє обчислити за формулою Адамса значення

$$\Delta y_4 = q_4 + \Delta\, q_3/2 + 5\Delta^2 q_2/12 + 3\Delta^3 q_1/8\,,$$

а отже $y_5 = y_4 + \Delta y_4$ і т.д., тобто в загальному вигляді

$$\Delta y_k = q_k + \Delta\, q_{k-1}/2 + 5\Delta^2 q_{k-2}/12 + 3\Delta^3 q_{k-3}/8\,.$$

Приклад. Методом Адамса знайти на відрізку [0;1] розв'язок рівняння $y' = x + y, y(0) = 1$.

Розв'язання. Приймемо крок $h = 0{,}1$. Для початку процесу використовуємо значення, знайдені методом Рунге-Кутта, тобто $y_0 = 1$; $y_1 = 1{,}1103$; $y_2 = 1{,}2427$; $y_3 = 1{,}3996$. Подальші обчислення розташуємо в таблиці 14.

Таблиця 14 – Розрахунки за методом Адамса

i	x	y	Δy	q	Δq	$\Delta^2 q$	$\Delta^3 q$	$y_{\text{аналіт.}}$
0	0	1		0,1000				1
					210			
1	0,1	1,1103		0,1210		23		1,1103
					333		1	
2	0,2	1,2427		0,1443		24		1,2428
					257		2	
3	0,3	1,3996		0,1700		26		1,3997
			0,1838		283		5	
4	0,4	1,5834		0,1983		31		1,5836
			0,2137		314		2	
5	0,5	1,7971		0,2297		33		1,7974
			0,2469		347		3	
6	0,6	2,0440		0,2644		36		2,0442
			0,2833		383		5	
7	0,7	2,3273		0,3027		41		2,3275
			0,3235		424		3	
8	0,8	2,6508		0,3451		44		2,6511
			0,3682		468			
9	0,9	3,0190		0,3919				3,0192
			0,4172					
10	1	3,4362						3,4366

З таблиці видно, що максимальна похибка наближеного розв'язку y не перевершує чотирьох одиниць останнього десяткового розряду.

Питання для самоконтролю до теми 8.3

1. Яким чином отримано розрахункову формулу методу Адамса?
2. Яка похибка методу Адамса (залежність від трьох факторів)?

Завдання 1сдо розділу 8. Метод Ейлера розв'язання задачі Коші

Розв'яжіть рівняння $y' = f(x; y)$ методом Ейлера відповідно до індивідуального варіанта (табл. 15).

Таблиця 15 – Варіанти завдання 1 до розділу 8

Шифр по вертикалі	A
0	1
1	0,4
2	-0,3
3	2
4	0,3
5	1
6	-1
7	0,3
8	2
9	-1

	Права частина $f(x,y)$
0	$\frac{(Ax+0{,}3y)(1-xy)}{-x-0{,}2y}$
1	$\frac{0{,}3A-x}{0{,}3y}$
2	$Ax^3-\frac{2}{y^2}$
3	$\frac{A}{y^2}+\frac{0{,}2}{x^2}$
4	$\frac{Ax^2-1}{y^3+x^2+0{,}3}$
5	$\frac{A}{x^2}-\frac{0{,}3}{x}+\frac{1}{y^2}$
6	$-\frac{A}{y^2}-\frac{0{,}4x}{0{,}8+x}$
7	$\frac{A}{0{,}4y^2+2x}$
8	$\frac{Ax}{y^3}+y$
9	$\frac{Ay}{2x+0{,}7}+\frac{3}{y^2}$

шифр по горизонталі

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Номер правої частини	2	4	5	8	1	3	9	0	7	6
y_0	1	-2	1	-2	2	2	-1	1,05	-2	0,5
h	0,2	0,2	0,1	0,2	0,1	0,2	0,05	0,1	0,4	0,2
Інтервал	[0;2]	[0;2]	[1;2]	[1;3]	[0;1]	[1;3]	[1;1,5]	[0;1]	[0;4]	[1;3]

Завдання 2 до розділу 8. Розв'язання задачі Коші методом Адамса

Методом Адамса розв'яжіть задачу Коші.

Завдання вибирається з таблиці варіантів до лабораторної роботи № 8.

РОЗДІЛ 9 НАБЛИЖЕНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

9.1. Метод Гальоркіна розв'язання крайової задачі

Нехай дана крайова задача

$$Ly \equiv y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{45}$$

$$\begin{cases} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B \end{cases} \tag{46}$$

Для знаходження наближеного розв'язку цієї задачі вчинимо так. Задаємося на (a, b) деякою системою лінійно-незалежних функцій $u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$, неперервних і двічі неперервно-диференційованих. Причому функція $u_0(x)$ повинна задовольняти неоднорідним крайовим умовам (46), а $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ повинні задовольняти однорідним крайовим умовам, тобто крайовим умовам

$$\begin{cases} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = 0 \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = 0 \end{cases}.$$

Розглянемо функцію y_n як лінійну комбінацію

$$y_n(x) = u_0(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i u_i(x), \tag{47}$$

де c_i – невідомі константи.

Якщо базисні функції вибрати так, як це було описано вище, то y_n буде задовольняти крайовим умовам (46), незалежно від вибору c_i.

Розглянемо функцію $R(x, c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n) = Ly_n - Ly$. Вона називається відхилом і отримується при підстановці в рівняння (45) виразу (47). Якщо відхил дорівнює нулю, то маємо випадок точного розв'язку. Задача розв'язання звичайного диференціального рівняння зводиться до того, щоб відхил був мінімальним. Тоді вираз (47) буде наближеним розв'язком задачі.

Підбір коефіцієнтів c_i породжує різні методи.

Суть методу Гальоркіна полягає в тому, що базисні функції повинні бути ортогональними до відхилу.

Умова ортогональності двох функцій має вигляд:

$$\int_a^b R(x, c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n) u_i(x) dx = 0, i = 1,2, \ldots, n.$$

В результаті одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь щодо невідомих коефіцієнтів $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$. Знайшовши ці коефіцієнти і підставивши їх у (47), одержимо наближений розв'язок крайової задачі.

Приклад. Методом Гальоркіна знайти наближений розв'язок рівняння $y'' + xy' + y = 2x$, що задовольняє крайовим умовам $y(0) = 1; y(1) = 0$.

Розв'язання. За систему базисних функцій обираємо функції $u_0(x) = 1 - x$; $u_1(x) = x(1-x)$; $u_2(x) = x^2(1-x)$; $u_3(x) = x^3(1-x)$.

Наближений розв'язок задачі шукаємо у вигляді полінома

$$y_3 = (1-x) + c_1 x(1-x) + c_2 x^2(1-x) + c_3 x^3(1-x).$$

Підставляючи y_3 в ліву частину заданого диференціального рівняння, одержуємо відхил:

$$R(x, c_1, c_2, c_3) = (1 - 4x) + c_1(-2 + 2x - 3x^2) +$$
$$+c_2(2 - 6x + 3x^2 - 4x^3) + c_3(6x - 12x^2 + 4x^3 - 5x^4).$$

Умови ортогональності функції R до функцій $u_i(x)$ приводять до системи

$$\begin{cases} \int_0^1 (x - x^2)\, R(x, c_1, c_2, c_3)dx = 0, \\ \int_0^1 (x^2 - x^3)\, R(x, c_1, c_2, c_3)dx = 0, \\ \int_0^1 (x^3 - x^4)\, R(x, c_1, c_2, c_3)dx = 0. \end{cases}$$

Підставляючи замість R її значення, після відповідного інтегрування одержуємо систему

$$\begin{cases} 133c_1 + 63c_2 + 36c_3 = -70, \\ 140c_1 + 108c_2 + 79c_3 = -98, \\ 264c_1 + 252c_2 + 211c_3 = -210. \end{cases}$$

Звідси знаходимо: $c_1 = -0{,}2090$; $c_2 = -0{,}7894$, $c_3 = 0{,}2090$, і, отже, $y_3 = (1-x)(1 - 0{,}29x - 0{,}7894x^2 + 0{,}2090x^3)$ – наближений розв'язок крайової задачі. Похибка наближеного розв'язку залежить від кількості базисних функцій.

Питання для самоконтролю до теми 9.1

1. Які існують типи крайових умов?
2. В чому полягає метод Гальоркіна? Що таке відхил?
3. В чому полягають принципи підбору базисних функцій?
4. Від чого залежить похибка методу Гальоркіна?

9.2. Метод скінченних різниць

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння 2-го порядку із змінними коефіцієнтами

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \\ \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A, \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B, \end{cases} \qquad (48)$$

де $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ неперервні функції на $[a,b]$, α_i, β_i, A, B - сталі, такі, що $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0,; |\beta_0| + |\beta_1| \neq 0$. Розіб'ємо відрізок $[a,b]$ на n рівних частин, тобто одержимо $h = (b-a)/n$; побудуємо систему рівновіддалених вузлів

$$x_i = x_0 + ih \quad (i = 1, \dots, n-1); \quad x_0 = a; \quad x_n = b.$$

Розв'язок задачі будемо шукати чисельно. Для цього в рівнянні (48) похідні замінимо скінченними різницями другого порядку точності.

Введемо позначення $y(x_i) = y_i$, $p(x_i) = p_i$, $q(x_i) = q_i$, $f(x_i) = f_i$.

Одержимо:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i \quad (i = 1,2,\dots,n-1). \quad (49)$$

Граничні умови запишемо в такому вигляді:

$$\begin{cases} \alpha_0 y_0 + \alpha_1 \dfrac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h} = A, \\ \beta_0 y_n + \beta_1 \dfrac{3y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2}}{2h} = B. \end{cases} \quad (50)$$

Таким чином, одержимо систему $n+1$ рівнянь з $n+1$ невідомими. Розв'язуючи цю систему, знайдемо значення функції y у відповідних точках.

Приклад. Методом скінченних різниць знайти розв'язок наступної крайової задачі:

$$y'' + (1 + x^2)y = -1$$
$$y(-1) = y(1) = 0.$$

Розв'язання. Виберемо крок $h = 0{,}5$. Поклавши $x_{-2} = -1$; $x_{-1} = -0{,}5$; $x_0 = 0$; $x_1 = 0{,}5$; $x_2 = 1$, з огляду на симетрію рівняння і крайових умов будемо мати $y_{-2} = y_2 = 0$; $y_{-1} = y_1$. Таким чином, потрібно визначити лише дві ординати: y_0 і y_1. Запишемо рівняння (49) у вигляді

$$(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})/h^2 + \left(1 + x_i^2\right)y_i = -1 .$$

При $i = 0$, тобто при $x_0 = 0$ будемо мати

$$(y_1 - 2y_0 + y_{-1})/0{,}25 + y_0 = -1 .$$

Аналогічно, при $i = 1$, тобто при $x_1 = 0{,}5$ будемо мати

$$(y_0 - 2y_1 + y_2)/0{,}25 + (1 + 0{,}25)y_1 = -1 .$$

З огляду на $y_{-1} = y_1$ і використовуючи крайову умову $y_2 = 0$, маємо систему

$$-7y_0 + 8y_1 = -1 \qquad 4y_0 - 6{,}75y_1 = -1.$$

Звідси $y_0 = 0{,}967$; $y_1 = 0{,}721$.

Отримані значення занесемо в таблицю 16.

Таблиця 16 – Значення шуканої функції для крайової задачі (метод скінченних різниць)

i	-2	-1	0	1	2
x	-1	-0,5	0	0,5	1
y	0	0,721	0,967	0,721	0

Питання для самоконтролю до теми 9.2

1. Опишіть метод скінченних різниць.
2. Яка похибка методу скінченних різниць?

Завдання 1 до розділу 9. Метод Гальоркіна розв'язання крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

Розв’яжіть крайову задачу методом Гальоркіна.

Завдання вибираються з наведеної нижче таблиці варіантів (табл. 17).

Завдання 2 до розділу 9. Метод скінченних різниць розв'язання крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

Розв’язати крайову задачу для звичайних диференціальних рівнянь методом скінченних різниць.

Завдання вибираються з наведеної нижче таблиці варіантів (табл. 17).

Таблиця 17 – Таблиця варіантів до розділу 9

Шифр по вертикалі	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
C_1	-1	2	-3	-1	-2	-4	-3	-4	2	-2,7
C_2	-4,8	-3,1	2,5	1,7	2	1,2	2	3,2	3	-1,3

Шифр по горизон-талі	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	0,5	1,3	2,4	-1	0	1	0	0,8	-4	0
B	0,5	0,7	0	1	-2	0,5	0	0,3	-0,6	2
a	1	-1	-1	0,5	0	2	-1	-0,5	-1	0
b	2	0	1,5	1,5	1	3	0	1,5	1	1
α_0	0	2	-1	0	0	5	-4	0	1	-1
α_1	2	0	0	-3	2	0	0	-1	0	0
β_0	-1	0	0	3	-2	0	0	-1	0	0
β_1	0	-1	2	0	0	-5	4	0	1	-1
h	0,1	0,1	0,25	0,1	0,1	0,1	0,1	0,2	0,2	0,1
$p(x)$	$c_1 x$	$\frac{c_1}{x + c_2}$	$c_1 x + c_2$	$c_2 x$	$c_2 x^2 - c_1$	$c_1 - x$	$c_2 + x^2$	$c_1 x^3$	$c_2 x^3 - c_1$	$x^2 c_1^2$
$q(x)$	$\frac{c_1 x}{x^2 + c_2^2}$	$c_2 x$	$c_1 x^2$	$c_2 x^3 + c_1$	$c_2 - x$	$c_2 + x^3$	$c_2 x$	$c_2 x - c_1$	$c_1 x + c_2$	$\frac{c_2}{x + 1}$
$f(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 + c_1^2}}$	$c_2 + x^3$	$\frac{c_2 + x}{x^2 - c_1}$	$\frac{x^2 + c_2}{x}$	$\frac{1}{c_1 x - c_2}$	$\sqrt{x^2 + c_2^2}$	$\frac{c_1 x^2}{c_2 + x}$	$\frac{1}{c_2 x^2 - c_1}$	$c_2 x^2 + c_1 x$	$\frac{c_1 x + c_2}{(c_1 - x)^3}$

РОЗДІЛ 10 ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

10.1. Різницевий метод розв'язання задачі Діріхле для рівняння Пуассона

Розглянемо задачу Діріхле для рівняння еліптичного типу – рівняння Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y) \text{ на } G, \tag{51}$$

$$u=\phi \text{ на } \Gamma, \tag{52}$$

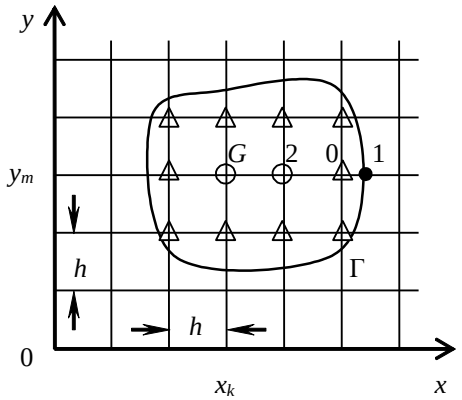


Рисунок 12 – Сітка для довільної області

де G – деяка скінчена область (рис. 11), Γ – границя області G, $f(x,y)$ – задана на G функція, ϕ – задана на Γ функція.

Суть різницевого методу розв'язання задачі (51), (52) така. Будуємо квадратну сітку з кроком $h=1/M$ (M – натуральне): $x_k=kh$, $y_m=mh$. В усіх розташованих в області G вузлах сітки, які можна з'єднати з чотирма найближчими вузлами відрізками прямих, не перетинаючи границю Г, частинні похідні $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, що входять у рівняння (51), замінимо формулами чисельного диференціювання другого порядку точності (порядку $O(h^2)$):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\approx\frac{V_{k-1,m}-2V_{km}+V_{k+1,m}}{h^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\approx\frac{V_{k,m-1}-2V_{km}+V_{k,m+1}}{h^2}, \tag{53}$$

де $V_{km}=V(x_k,y_m)$ – наближений розв'язок задачі (51), (52).

Підставляючи (53) у (51), одержимо:

$$\frac{V_{k-1,m}-2V_{km}+V_{k+1,m}}{h^2}+\frac{V_{k,m-1}-2V_{km}+V_{k,m+1}}{h^2}=f_{km}, \tag{54}$$

де $f_{km}=f(x_k,y_m)$.

Для всіх внутрішніх вузлів області G поблизу її границі Г (позначених на рис. 12 трикутниками), для задання різницевих рівнянь застосовується лінійна інтерполяція в напрямку осі x. Наприклад, у точці з номером 0 рівняння має вигляд

$$V_0 = \frac{\rho_1}{\rho_1 + \rho_2} V_2 + \frac{\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \phi_1, \tag{55}$$

де ρ_1 – відстань від точки 0 до точки 1 на границі Γ, у якій береться задане значення функції ϕ, позначене через ϕ_1; V_0, V_2 – невідомі в точках $0,\ 2$; $\rho_2 = h$ – відстань між цими точками. Тут для простоти використовується один індекс. Формула (55) означає лінійну інтерполяцію між точками $1,\ 2$ в точці 0.

Аналогічні різницеві рівняння задаються в інших вузлах, позначених трикутниками. При цьому відстань від точки, в яку відбувається інтерполяція, до обох крайніх точок не повинна перевищувати h і одна чи обидві крайні точки повинні лежати на границі Γ.

Отже, у кожному вузлі, позначеному кружком, маємо рівняння (54), а в кожному вузлі, позначеному трикутниками, рівняння має вид типу (55). Загальне число рівнянь збігається з числом невідомих. Отримана система лінійних алгебраїчних рівнянь має єдиний розв'язок V, для знаходження якого можуть бути застосовані прямі й ітераційні методи розв'язання систем рівнянь, викладені вище.

Якщо розв'язок задачі Діріхле (51), (52) $u(x, y) \in C_4(\bar{G})$, то має місце оцінка похибки

$$\max_{G_h} |u - V| = O\left(h^2\right),$$

де $\bar{G} = G \cup \Gamma$, G_h – множина усіх вузлів, позначених кружками й трикутниками.

Приклад. Розв'язати задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = cos(x - y) + \frac{1{,}25y}{1{,}5 + x}$$
$$u(x, y)|_\Gamma = |x| + |y|\ ,$$

де $\Gamma: x^2 + y^2 = 1$.

Розв'язання. Візьмемо крок $h = 0{,}5$ і побудуємо сітку (див. рис. 12).

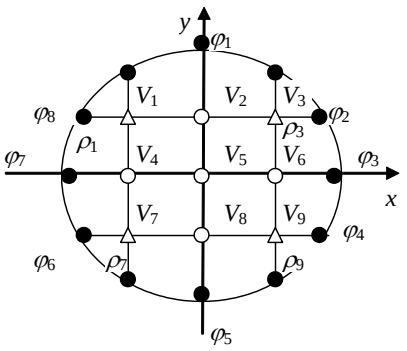


Рисунок 13 – Сітка для кола

З метою спрощення запису будемо використовувати один нижній індекс. Для зручності обчислень рівняння (54) розв'яжемо відносно V_{km}:

$$V_{km} = \frac{V_{k-1,m} + V_{k+1,m} + V_{k,m-1} + V_{k,m+1}}{4} - \frac{h^2}{4} f_{km}. \qquad (54^*)$$

Використовуючи далі формули (54*), (55), одержимо систему рівнянь щодо невідомих $V_i (i = 1,2,\dots,9)$:

$$\begin{cases} V_1 = \dfrac{\rho_1}{\rho_1 + h} V_2 + \dfrac{h}{\rho_1 + h} \phi_8 \\ V_2 = \dfrac{V_1 + \phi_1 + V_3 + V_5}{4} - \dfrac{h^2}{4} f_2 \\ V_3 = \dfrac{\rho_3}{\rho_3 + h} V_2 + \dfrac{h}{\rho_3 + h} \phi_2 \\ V_4 = \dfrac{\phi_7 + V_1 + V_5 + V_7}{4} - \dfrac{h^2}{4} f_4 \\ V_5 = \dfrac{V_4 + V_2 + V_6 + V_8}{4} - \dfrac{h^2}{4} f_5 \\ V_6 = \dfrac{V_5 + V_3 + \phi_3 + V_9}{4} - \dfrac{h^2}{4} f_6 \\ V_7 = \dfrac{\rho_7}{\rho_7 + h} V_8 + \dfrac{h}{\rho_7 + h} \phi_6 \\ V_8 = \dfrac{V_7 + V_5 + V_9 + \phi_5}{4} - \dfrac{h^2}{4} f_8 \\ V_9 = \dfrac{\rho_9}{\rho_9 + h} V_8 + \dfrac{h}{\rho_9 + h} \phi_4 \end{cases}$$

Обчислимо величини $\phi_i (i = 1,2,\dots,8)$, f_2, f_4, f_5, f_6, f_8, ρ_1, ρ_3, ρ_7, ρ_9, використовуючи умови задачі:

$$\phi_1 = \phi_3 = \phi_5 = \phi_7 = 1; \quad \phi_2 = \phi_4 = \phi_6 = \phi_8 = \left|\sqrt{1 - 0,5^2}\right| + |0,5| \approx 1,367;$$

$$f_2 = cos(0 - 0,5) + \frac{1,25 \cdot 0,5}{1,5 + 0} \approx 1,295;$$

$$f_4 = cos(-0,5 - 0) + \frac{1,25 \cdot 0}{1,5 - 0,5} \approx 0,878;$$

$$f_5 = cos\, 0 + \frac{1,25 \cdot 0}{1,5 + 0} = 1; \quad f_6 = cos(0,5 - 0) + \frac{1,25 \cdot 0}{1,5 + 0,5} \approx 0,878;$$

$$f_8 = cos(0 + 0,5) + \frac{1,25 \cdot (-0,5)}{1,5 + 0} \approx 0,461;$$

$$\rho_1 = \rho_3 = \rho_7 = \rho_9 = \sqrt{1 - 0,5^2} - 0,5 \approx 0,366\,.$$

Підставляючи обчислені значення в останню систему, перетворимо її до вигляду

$$\begin{cases} V_1 = 0{,}423V_2 + 0{,}789 \\ V_2 = 0{,}25(V_1 + V_3 + V_5) + 0{,}169 \\ V_3 = 0{,}423V_2 + 0{,}789 \\ V_4 = 0{,}25(V_1 + V_5 + V_7) + 0{,}195 \\ V_5 = 0{,}25(V_2 + V_4 + V_6 + V_8) - 0{,}063 \\ V_6 = 0{,}25(V_3 + V_5 + V_9) + 0{,}195 \\ V_7 = 0{,}423V_8 + 0{,}789 \\ V_8 = 0{,}25(V_5 + V_7 + V_9) + 0{,}221 \\ V_9 = 0{,}423V_8 + 0{,}789 \end{cases}$$

Розв'язуючи систему, одержимо наближений розв'язок задачі: $V_1 = 1{,}225$; $V_2 = 1{,}032$; $V_3 = 1{,}225$; $V_4 = 1{,}065$;; $V_5 = 1{,}003$; $V_6 = 1{,}065$; $V_7 = 1{,}253$; $V_8 = 1{,}098$; $V_9 = 1{,}253$.

Питання для самоконтролю до розділу 10

1. Дайте класифікацію диференціальних рівнянь з частинними похідними.
2. Які існують типи задач для рівнянь з частинними похідними?
3. У чому полягає задача Діріхле для рівняння Пуассона?
4. Викладіть метод скінченних різниць розв'язання задачі Діріхле.
5. Яка похибка методу скінченних різниць розв'язання задачі Діріхле?

Завдання до розділу 10. Різницевий метод розв'язання задачі Діріхле для рівняння Пуасона

Різницевим методом розв'яжіть задачу Діріхле для рівняння Пуассона.

№1.

$$f(x,y) = 1 + 0{,}2y\sin x - y^2;$$
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1(\Gamma),$$
$$\phi(x,y)|_\Gamma = |x| + |y|.$$

№2.

$$f(x,y) = \cos(x+y) + 0{,}5(x-y);$$
$$(|x|+2)(|y|+2) = 12(\Gamma),$$
$$\phi(x,y)|_\Gamma = 2|x| + |y|.$$

№3.

$$f(x,y) = \frac{\cos x}{x+1} - 0{,}5y^2;$$
$$\left.\begin{matrix} |y| = 4 - x^2 \\ x \in [-2,2] \end{matrix}\right\}(\Gamma),$$
$$\phi(x,y)|_\Gamma = |x| \cdot |y|.$$

№4.

$$f(x,y) = (1-y^2)\cos x + 0{,}6y;$$
$$x^2 + y^2 = 16(\Gamma),$$
$$\phi(x,y)|_\Gamma = |x| + 2|y|.$$

№5.

$$f(x,y) = 1 + 0{,}4y\sin x - 1{,}5y^2;$$
$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1(\Gamma),$$
$$\phi(x,y)|_\Gamma = |x| \cdot |y|.$$

№6.

$$f(x,y) = \frac{\cos y}{x+2} + 0{,}3y^2;$$
$$\left.\begin{matrix} |x| = 4 - y^2 \\ y \in [-2,2] \end{matrix}\right\}(\Gamma),$$
$$\phi(x,y)|_\Gamma = |x| + |y|.$$

№7.

$$f(x,y) = cos(1{,}5x + y) + (x - y);$$
$$(|x| + 2)(|y| + 2) = 12(\Gamma),$$
$$\phi(x,y)|_\Gamma = |x| \cdot |y|.$$

№8.

$$f(x,y) = 1 - sin(x + y) + \frac{0{,}5y}{x+2};$$
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1(\Gamma),$$
$$\phi(x,y)|_\Gamma = 2|x| + |y|.$$

№9.

$$f(x,y) = \frac{cos\, y}{1{,}5 + x} + 0{,}1y^2;$$
$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1(\Gamma),$$
$$\phi(x,y)|_\Gamma = |x| \cdot |y|.$$

№10.

$$f(x,y) = 0{,}6\, sin\, x - 1{,}25y^2 + 1;$$
$$\left.\begin{array}{l} |y| = 4 - x^2 \\ x \in [-2,2] \end{array}\right\}(\Gamma),$$
$$\phi(x,y)|_\Gamma = |x| + |y|.$$

№11.

$$f(x,y) = cos(2x + y) + 1{,}5(x - y);$$
$$x^2 + y^2 = 16(\Gamma),$$
$$\phi(x,y)|_\Gamma = 0{,}5|x| + |y|.$$

№12.

$$f(x,y) = 1 - \frac{0{,}1y}{x+2} - sin(2x + y);$$
$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1(\Gamma),$$
$$\phi(x,y)|_\Gamma = |x| + 0{,}5|y|.$$

№13.

$$f(x,y) = \frac{cos\, y}{1{,}25 + x} - 0{,}1y^2;$$
$$\left.\begin{array}{l} |x| = 4 - y^2 \\ y \in [-2,2] \end{array}\right\}(\Gamma),$$
$$\phi(x,y)|_\Gamma = |x| + \tfrac{y^2}{2}.$$

№14.

$$f(x,y) = 1 + 0{,}8y\, sin\, x - 2y^2;$$
$$(|x| + 2)(|y| + 2) = 12(\Gamma),$$
$$\phi(x,y)|_\Gamma = 2|x| + 0{,}5|y|.$$

№15.

$$f(x,y) = cos(1{,}5x + y) + 1{,}5(x - y);$$
$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1(\Gamma),$$
$$\phi(x,y)|_\Gamma = |x| + |y|.$$

№16.

$$f(x,y) = 1 - sin(2x + y) + \frac{0{,}3y}{x+2};$$
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1(\Gamma),$$
$$\phi(x,y)|_\Gamma = 2|x| + 0{,}5|y|.$$

№17.

$$f(x,y) = \frac{cos\, y}{1{,}75 + x} - 0{,}5y^2;$$
$$\left.\begin{array}{l} |y| = 9 - x^2 \\ x \in [-3,3] \end{array}\right\}(\Gamma),$$
$$\phi(x,y)|_\Gamma = |x| + \tfrac{1}{2}|y|.$$

№18.

$$f(x,y) = 1 + (1 - x)\, sin\, y - (2 + x)y;$$
$$x^2 + y^2 = 16(\Gamma),$$
$$\phi(x,y)|_\Gamma = \tfrac{1}{2}|x| + 2|y|.$$

№19.

$$f(x,y) = (0{,}8 - y^2)\, cos\, x + 0{,}3y;$$
$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1(\Gamma),$$
$$\phi(x,y)|_\Gamma = 0{,}5|x| + |y|.$$

№20.

$$f(x,y) = 1 + 2{,}2\, sin\, x + 1{,}5y^2;$$
$$\left.\begin{array}{l} |y| = 9 - x^2 \\ x \in [-3,3] \end{array}\right\}(\Gamma),$$
$$\phi(x,y)|_\Gamma = 0{,}5|x| + |y|.$$

№21.

$$f(x,y) = cos(x+y) + 0{,}75(x-y);$$
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1(\Gamma),$$
$$\phi(x,y)|_\Gamma = 0{,}5|x| + 2|y|.$$

№22.

$$f(x,y) = 1 - sin(1{,}25x + y) + \frac{0{,}5y}{x+2};$$
$$x^2 + y^2 = 16(\Gamma),$$
$$\phi(x,y)|_\Gamma = 0{,}5|x| \cdot |y|.$$

№23.

$$f(x,y) = \frac{cos\, y}{x+2} - 0{,}3y^2;$$
$$(|x|+3)(|y|+2) = 18(\Gamma),$$
$$\phi(x,y)|_\Gamma = |x| + 0{,}5|y|.$$

№24.

$$f(x,y) = 1 - sin(0{,}75x + y) + \frac{0{,}1y}{x+2};$$
$$\left.\begin{array}{c} |y| = 9 - x^2 \\ x \in [-3{,}3] \end{array}\right\}(\Gamma),$$
$$\phi(x,y)|_\Gamma = 2|x| + 0{,}5|y|.$$

№25.

$$f(x,y) = \frac{cos\, y}{1{,}25 + x} - 0{,}5y^2;$$
$$x^2 + y^2 = 16(\Gamma),$$
$$\phi(x,y)|_\Gamma = 0{,}5(|x| + |y|).$$

№26.

$$f(x,y) = cos(1{,}5x + y) - 2{,}25(x+y);$$
$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1(\Gamma),$$
$$\phi(x,y)|_\Gamma = \frac{1}{2}|x| + |y|.$$

№27.

$$f(x,y) = \frac{cos\, y}{1{,}5 + x} - 1{,}25y^2;$$
$$\left.\begin{array}{c} |x| = 4 - y^2 \\ y \in [-2{,}2] \end{array}\right\}(\Gamma),$$
$$\phi(x,y)|_\Gamma = |x| + 0{,}5|y|.$$

№28.

$$f(x,y) = 1 - (x-1)\, sin\, y + 2(x+y);$$
$$(|x|+2)(|y|+3) = 18(\Gamma),$$
$$\phi(x,y)|_\Gamma = 2|x| + 0{,}5|y|.$$

№29.

$$f(x,y) = 1 - sin(0{,}75x - y) + \frac{1{,}75y}{x+1};$$
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1(\Gamma),$$
$$\phi(x,y)|_\Gamma = |x| + 0{,}5|y|.$$

№30.

$$f(x,y) = cos(x-y) + \frac{1{,}25y}{1{,}5 + x};$$
$$(|x|+5)(|y|+5) = 45(\Gamma),$$
$$\phi(x,y)|_\Gamma = |x| + 0{,}5|y|.$$

РОЗДІЛ 11 ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ФРЕДГОЛЬМА ІІ РОДУ

11.1. Квадратурний метод розв'язання інтегрального рівняння Фредгольма ІІ роду

Нехай дано інтегральне рівняння Фредгольма ІІ роду

$$\phi(x) - \lambda \int_a^b K(x,y)\phi(y)dy = f(x)\,, \tag{56}$$

де $K(x,y)$, $f(x)$ – ядро рівняння й вільний член відповідно, λ – чисельний параметр, $\phi(x)$ – шукана функція.

Інтеграл, що входить у цю рівність, ми можемо за допомогою будь-якої квадратурної формули наближено замінити на деякий простого виду вираз, що не містить знака інтеграла. Дійсно, усяка лінійна формула наближеного інтегрування має вид:

$$\int_a^b \psi(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k \psi(x_k)\,, \tag{57}$$

де A_k, x_k – ваги і вузли квадратурної формули відповідно.

Після застосування формули (57) до інтеграла в лівій частині рівняння (56) приходимо до рівності:

$$\tilde{\phi}(x) - \lambda \sum_{k=1}^{n} A_k K(x,x_k)\,\tilde{\phi}(x_k) = f(x), \tag{58}$$

де через $\tilde{\phi}(x)$ позначений наближений розв'язок для шуканої функції $\phi(x)$.

Поклавши потім у рівності (58) послідовно $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$ приходимо, до наступної системи лінійних алгебраїчних рівнянь щодо невідомих $\tilde{\phi}(x_i)$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ – наближень для значень шуканої функції $\phi(x_i)$:

$$\tilde{\phi}(x_i) - \lambda \sum_{k=1}^{n} A_k K(x_i,x_k)\tilde{\phi}(x_k) = f(x_i) \quad (i = 1,2,\ldots,n). \tag{59}$$

За цими значеннями наближене значення самої функції може бути знайдене за допомогою того чи іншого прийому інтерполяції. У даному спеціальному випадку зручніше за все одержати це значення, виходячи з рівності (58), а саме:

$$\tilde{\phi}(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} A_k K(x,x_k)\tilde{\phi}(x_k)\,. \tag{60}$$

Очевидно, що точність результату, отриманого при заміні інтегрального рівняння (56) системою лінійних рівнянь (59), буде тим вище, чим меншу похибку ми робимо, заміняючи інтеграл сумою, тобто буде залежати від того, яку квадратурну формулу ми застосовуємо для апроксимації інтеграла в рівності (56).

Приклад. Застосуємо розглянутий вище спосіб наближеного розв'язання інтегральних рівнянь до знаходження розв'язку рівняння

$$\phi(x) - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{xy}\phi(y)\,dy = 1 - \frac{1}{2x}(e^x - 1),$$

використовуючи при цьому квадратурну формулу Гауса.

Розв'язання. Заміняючи це інтегральне рівняння на систему, при $n = 2$, і прийнявши до уваги, що $\lambda = \frac{1}{2}$, $A_1 = A_2 = \frac{1}{2}$, одержимо систему (59) для даного випадку у вигляді:

$$\left(1 - \frac{1}{4}K_{1,1}\right)\tilde{\phi}(x_1) - \frac{1}{4}K_{1,2}\tilde{\phi}(x_2) = f_1,$$
$$-\frac{1}{4}K_{2,1}\tilde{\phi}(x_1) + \left(1 - \frac{1}{4}K_{2,2}\right)\tilde{\phi}(x_2) = f_2.$$

Відповідно до викладеного вище, за x_1 й x_2 взяті вузли квадратурної формули Гауса для інтервалу $(0;1)$: $x_1 = 0{,}2113$; $x_2 = 0{,}7887$. Обчисливши значення $K_{i,k} = K(x_i, x_k)$, $f_i = f(x_i)$ і підставивши їх у систему, приведемо її до вигляду

$$0{,}7386\tilde{\phi}(x_1) - 0{,}2954\tilde{\phi}(x_2) = 0{,}4434$$
$$-0{,}2954\tilde{\phi}(x_1) + 0{,}5343\tilde{\phi}(x_2) = 0{,}2384.$$

Розв'язуючи дану систему, одержимо:

$$\tilde{\phi}(x_1) = 0{,}9997;\ \tilde{\phi}(x_2) = 0{,}9990.$$

Тоді наближений розв'язок в інших точках, згідно (60), може бути записаний у вигляді:

$$\tilde{\phi}(x) = \frac{1}{4}(e^{0{,}2113x} \cdot 0{,}9997 + e^{0{,}7887x} \cdot 0{,}9990) + 1 - \frac{1}{2x}(e^x - 1).$$

Питання для самоконтролю до теми 11.1

1. Дайте визначення інтегрального рівняння Фредгольма. Які основні проблеми виникають при розв'язанні інтегрального рівняння?
2. Сформулюйте постановку задачі, опишіть метод розв'язання, оцініть похибку методу.

11.2. Розв'язання інтегрального рівняння Фредгольма II роду методом послідовних наближень

Розглянемо інтегральне рівняння Фредгольма II роду (56).

Метод послідовних наближень для його розв'язання полягає в такому. Шукаємо розв'язок у вигляді ряду, за степенями λ:

$$\phi(x) = \phi_0(x) + \lambda\phi_1(x) + \lambda^2\phi_2(x) + \ldots \qquad (61)$$

Підставляючи цей ряд у рівняння (56) і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях λ, одержимо:

$$\left.\begin{aligned}\phi_0(x) &= f(x)\\ \phi_1(x) &= \int_a^b K(x,y)\phi_0(y)dy\\ \phi_2(x) &= \int_a^b K(x,y)\phi_1(y)dy\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\} \tag{62}$$

З цих рівностей можна визначити послідовно усі функції $\phi_0(x)$, $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$,…, підставивши які потім в (61), закінчимо процес побудови розв'язку.

Можна довести, припускаючи обмеженим ядро $|K(x,y)| \le M$, що ряд (61) буде рівномірно збігатися до розв'язку рівняння (56), якщо λ задовольняє умову:

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}. \tag{63}$$

Похибка ε, яку ми допустимо, якщо обмежимося n членами в ряді (61), може бути оцінена досить просто. А саме, припускаючи $|f(x)| \le N$, легко одержати, що

$$\varepsilon < \frac{NM^n(b-a)^n|\lambda|^n}{1-M(b-a)|\lambda|}.$$

Зазначимо, що якщо інтеграли (62) не можуть бути обчислені точно, то потрібно застосувати формули наближеного інтегрування, що, однак, внесе додаткову похибку в розв'язок.

Приклад. Методом послідовних наближень розв'язати рівняння

$$\phi(x) - \frac{1}{2}\int_0^1 \phi(y)dy = \sin \pi x.$$

Розв'язання. У даному випадку, оскільки $\lambda = \frac{1}{2}$ і $K(x,y) = 1$, умова (63) виконана. Прийнявши $\phi_0(x) = \sin \pi x$, послідовно знаходимо

$$\phi_1(x) = \sin \pi x + \frac{1}{2}\int_0^1 \phi_0(y)dy = \sin \pi x + \frac{1}{2}\int_0^1 \sin \pi y dy = \sin \pi x + \frac{1}{\pi};$$

$$\phi_2(x) = \sin \pi x + \frac{1}{2}\int_0^1 \phi_1(y)dy = \sin \pi x + \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\sin \pi y + \frac{1}{\pi}\right)dy =$$

$$= \sin \pi x + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi};$$

$$\phi_3(x) = \sin \pi x + \frac{1}{2}\int_0^1 \phi_2(y)dy = \sin \pi x + \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\sin \pi y + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi}\right)dy =$$

$$= \sin \pi x + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2^2\pi}.$$

Взагалі,

$$\phi_n(x) = \sin \pi x + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}\pi} = \sin \pi x + \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k},$$

звідси

$$\lim_{n\to\infty}\phi_n(x) = \sin\pi x + \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k} = \sin\pi x + \frac{2}{\pi}.$$

Тому розв'язком вихідного рівняння є функція

$$\phi(x) = \sin\pi x + \frac{2}{\pi},$$

у чому можна переконатися за допомогою безпосередньої перевірки.

Питання для самоконтролю до теми 11.2

1. Сформулюйте постановку задачі, опишіть метод розв'язання.
2. Які існують джерела похибки?
3. В чому полягають умови збіжності наближеного розв'язку до точного?

Завдання 1 до розділу 11. Розв'язання інтегральних рівнянь Фредгольма II роду квадратурним методом

Розв'яжіть інтегральне рівняння Фредгольма II роду квадратурним методом.

1. $y(x) - \frac{1}{2}\int_0^1 xty(t)dt = 2x;$
2. $y(x) + \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \cos^2 t\, y(t)dt = 1;$
3. $y(x) - \frac{\pi}{4}\int_0^1 (1-x)\sin 2\pi t y(t)dt = \frac{1}{2}(1-x);$
4. $y(x) - \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \sin x\, y(t)tdt = 2\sin x;$
5. $y(x) + \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi (\cos(x+t) + \cos(x-t))y(t)dt = \cos x;$
6. $y(x) - \frac{1}{2}\int_0^1 y(t)dt = \sin\pi x;$
7. $y(x) - \frac{1}{3\pi}\int_0^{2\pi} \cos x \sin t\, y(t)dt = \sin x;$
8. $y(x) - \frac{1}{3}\int_0^1 (1+x)\cos 2\pi t y(t)dt = x;$
9. $y(x) - \frac{\ln 2}{3}\int_0^1 2^{x+t} y(t)dt = x;$
10. $y(x) - \frac{1}{3}\int_0^1 (2x-t)y(t)dt = \cos 2\pi x;$
11. $y(x) - \frac{1}{4}\int_0^1 (1+2xt)y(t)dt = -\frac{1}{6}(x+3);$

12. $y(x)+\frac{1}{2}\int_0^1 \left(x-\sqrt{t}\right)y(t)dt=\frac{5}{3}x+\sqrt{x}-\frac{1}{6}$;

13. $y(x)-\frac{1}{2\ln 2}\int_0^1 \frac{x}{1+t^2}y(t)dt=1+x^2$;

14. $y(x)-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} y(t)dt=\sin x$;

15. $y(x)+\frac{1}{\pi}\int_0^1 x\sin 2\pi t y(t)dt=\cos 2\pi x$;

16. $y(x)-\frac{1}{3}\int_0^1 xe^t y(t)dt=e^{-x}$;

17. $y(x)-\frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} \sin x\cos t\, y(t)dt=1$;

18. $y(x)-\frac{1}{2}\int_0^1 x\left(1-\frac{3}{2}t\right)y(t)dt=1$;

19. $y(x)-\frac{1}{2}\int_0^1 \sin 2\pi x y(t)dt=x$;

20. $y(x)-\frac{1}{3\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x+2t)\, y(t)dt=x$;

21. $y(x)-\frac{1}{8}\int_{-1}^1 (x^2+1+xt)y(t)dt=1$;

22. $y(x)+\frac{1}{8\,\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (x\sin t+\sin 2x)y(t)dt=\sin x$;

23. $y(x)-\frac{1}{3}\int_{-1}^1 \cos\pi x\cos 3\pi t y(t)dt=\cos 3\pi x$;

24. $y(x)-\frac{1}{2\pi}\int_0^1 xy(t)dt=\sin 2\pi x$;

25. $y(x)-\frac{1}{4}\int_0^1 (1+2x)ty(t)dt=1-\frac{3}{2}x$.

Завдання 2 до розділу 11. Метод послідовних наближень розв'язання інтегральних рівнянь Фредгольма II роду

Методом послідовних наближень розв’яжіть інтегральне рівняння Фредгольма. Вихідні дані візьміть з завдань до лабораторної роботи № 12.

ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Грищак В.З., Гребенюк С.М., Левчук С.А. Методи обчислень : методичні вказівки до виконання лабораторних робіт для студентів освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр» напряму підготовки «Математика». Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2016. 86 с.
2. Гребенюк С. М., Д'яченко Н. М., Красікова І. В. Наближені методи розв’язання крайо-вих задач : методичні рекомендації до лабораторних занять для здобувачів ступеня вищої освіти магістра спеціальності «Математика» освітньо-професійної програми «Математика». Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2025. 68 с.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Андруник В.А., Висоцька В.А., Пасічник В.В., Чирун Л.Б., Чирун Л.В. Чисельні методи в комп’ютерних науках : навчальний посібник. Львів : Новий світ – 2000, 2017. 470 с.
2. Вербіцький В.В., Реут В.В. Введення в чисельні методи аналізу і диференційних рівнянь : навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл., що навч. за спец. "Прикладна математика". Одеса : ОНУ ім. І.І. Мечникова, 2018. 116 с.
3. Гребенюк С.М., Левчук С.А. Чисельні методи в інформатиці : методичні рекомендації до лабораторних занять для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра спеціальності «Інженерія програмного забезпечення» освітньо-професійної програми «Програмна інженерія». Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2020. 66 с.
4. Крижанівська Т.В., Бойцова І.А. Конспект лекцій з дисципліни «Чисельні методи». Одеса : вид-во ОДЕУ, 2013. 152 с.
5. Ляшенко Б.М., Кривонос О.М., Вакалюк Т.А. Методи обчислень : навчально-методичний посібник для студентів фізико-математичного факультету. Житомир : Вид-во ЖДУ, 2014. 228 с.
6. Ярошенко О.І., Григорків М.В. Числові методи : навч. посібник. Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2018. 172 с.
7. Грищак В.З., Гребенюк С.М., Левчук С.А. Методи обчислень : методичні вказівки до виконання лабораторних робіт для студентів освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр» напряму підготовки «Математика». Запоріжжя : ЗНУ, 2016. 86 с.
8. Burden R.L., Faires J.D. Numerical Analysis. Boston: Cengage Learning, 2011. 877 p.
9. Epperson J.F. An introduction to numerical methods and analysis. New Jersey, Hoboken : John Wiley & Sons, 2013. 591 p.
10. Grebenyuk S.M., Klymenko M.I. Finite element modeling of the stress-strain state of a composite material with a viscoelastic matrix / Mathematical and computer modelling of engineering systems: Collective monograph. Riga : Baltija Publishing. 2020. Pp. 19-34.

11. Jantschi L., Rosca D. Numerical Methods. Basel : MDPI, 2020. 184 p.
12. Kong Q., Siauw T., Bayen A.M. Python Programming and Numerical Methods: A Guide for Engineers and Scientists. Cambridge : Elsevier, 2020. 480 p.
13. Linge S., Langtangen H.P. Programming for Computations – Python: A Gentle Introduction to Numerical Simulations with Python 3.6. 2nd ed. Cham : Springer, 2020. 323 p.
14. Moser R.D. Numerical Methods in Turbulence Simulation. London : Academic Press, 2023. 553 p.
15. Muftu S. Finite Element Method: Physics and Solution Methods. London : Academic Press, 2023. 519 p.
16. Sastry S.S. Introductory methods of numerical analysis. New Delhi : PHI Learning Private Limited, 2012. 450 p.
17. Vaquero J.M., Minhos F., Guirao J.L.G., Wade B.A. Analytical and Numerical Methods for Differential Equations and Applications. Lausanne : Frontiers Media SA, 2021. 94 p.

83

Навчальне видання
(*українською мовою*)

Сергій Миколайович Гребенюк
Наталія Миколаївна Д'яченко

МЕТОДИ ОБЧИСЛЕНЬ

Навчальний посібник для здобувачів
ступеня вищої освіти бакалавра
спеціальності «Математика»
освітньо-професійної програми «Математика»

Рецензент *С.І. Гоменюк*
Відповідальний за випуск *С.М. Гребенюк*
Коректор *Н.М. Д'яченко*