МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра фундаментальної та прикладної математики

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА

на тему: **«ЗАСТОСУВАННЯ БАЗИСНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ В ЗАДАЧАХ ТЕОРІЇ ПЕРЕСТАВЛЕНЬ РЯДІВ В ПРОСТОРАХ БАНАХА»**

Виконала: студентка 2 курсу, групи 8.1114-м
спеціальності 111 Математика
(шифр і назва спеціальності)
освітньої програми Математика
(назва освітньої програми)
А.І. Гаманець
(ініціали та прізвище)
Керівник доцент кафедри фундаментальної та прикладної математики, к.ф.-м.н., доцент, Д'яченко Н.М.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)
Рецензент доцент кафедри загальної математики, к.ф.-м..н., доцент Гречнєва М.О.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Запоріжжя – 2025

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет математичний

Кафедра фундаментальної та прикладної математики

Рівень вищої освіти магістр

Спеціальність 111 Математика
(шифр і назва)

Освітня програма Математика

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри фундаментальної та прикладної математики, д.т.н., професор

_____ Гребенюк С.М.
(підпис)

“ ____ ” _____ 2025 р.

З А В Д А Н Н Я

НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТОВІ

Гаманцю Артему Ігоровичу
(прізвище, ім’я та по-батькові)

1. Тема роботи Застосування базисних послідовностей в задачах теорії переставлень рядів в просторах Банаха

керівник роботи Д'яченко Наталія Миколаївна, к.ф.-м. н., доцент
(прізвище, ім’я та по-батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом ЗНУ від « 28 » лютого 2025 року № 326-с

2. Строк подання студентом роботи 17.11.2025

3. Вихідні дані до роботи 1. Постановка задачі.
2. Перелік літератури.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)
1. Вивчити відомі контрприклади до теореми Штейніца.
2. Побудувати контрприклад до переформульованої теореми Штейніца.
3. Узагальнення прикладів рядів на довільний нескінченовимірний банаховий простір за допомогою теорем про базисні послідовності.

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов’язкових креслень) презентація

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання 01.09.2025

К А Л Е Н Д А Р Н И Й П Л А Н

№	Назва етапів кваліфікаційної роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	Розробка плану роботи.	05.09.2025 – 10.09.2025	
2.	Збір вихідних даних.	11.09.2025 – 23.09.2025	
3.	Обробка методичних та теоретичних	25.09.2025 – 10.10.2025	
	джерел.		
4.	Розробка першого та другого розділу.	12.10.2025 – 03.11.2025	
5.	Розробка третього та четвертого	07.11.2025 – 27.11.2025	
	розділів.		
6.	Оформлення та нормоконтроль	30.11.2025 – 05.12.2025	
	кваліфікаційної роботи магістраа.		
7.	Захист кваліфікаційної роботи.	10.12.2025	

Студент _____ А.І. Гаманець
(підпис) (ініціали та прізвище)

Керівник роботи _____ Н.М. Д’яченко
(підпис) (ініціали та прізвище)

Нормоконтроль пройдено

Нормоконтролер _____ О.Г Спиця
(підпис) (ініціали та прізвище)

ЗМІСТ

Завдання на кваліфікаційну роботу 2
Реферат 3
Summary 4
Вступ 7
1 Попередні теоретичні відомості 10
1.1 Огляд деяких досліджень в теорії рядів в банахових просторах та їх застосуваннь 10
1.2 Огляд деяких досліджень в теорії базисі та базисних послідовностей та їх застосувань 12
1.3 Основні означення і теореми з теорії рядів банахового простору 13
1.4 Означення базисної послідовності. Критерій базисної послідовності та теорема про її існування 18
2 Відомі контрприклади до теореми С. Штейніца 21
2.1 Приклад умовно збіжного ряду в нескінченновимірному просторі X з одноточковою областю сум 21
2.2 Приклад Ю. Марцинкевича-П.А. Корнілова 23
2.3 Приклад М.Й. Островського 24
3 Контрприклад до переформульованої теореми С. Штейніца 26
4 Узагальнення контрприкладів на довільний нескінченновимірний банаховий простір 31
4.1 Узагальнення прикладу умовно збіжного ряду в просторі l_2 з одноточковою областю сум на будь-який нескінченновимірний банаховий простір 31
4.2 Узагальнення прикладу ряду в просторі $\boldsymbol{l_2}$, який задовольняє умовам теореми Штейніца, але має порожню область сум 36
Висновки 42
Перелік посилань 44

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота магістра «Застосування базисних послідовностей в задачах теорії переставлень рядів в просторах Банаха»: 45 с., 25 джерел.

БАЗИС, БАЗИСНА КОНСТАНТА, БАЗИСНА ПОСЛІДОВНІСТЬ, БАНАХОВИЙ ПРОСТІР, БЕЗУМОВНО ЗБІЖНІЙ РЯД, ОБЛАСТЬ СУМ РЯДУ В БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ, УМОВНО ЗБІЖНІЙ РЯД.

Об’єкт дослідження – область сум ряду в скінченновимірному і нескінченновимірному банахових просторах, базисна послідовність.

Мета роботи: узагальнення прикладів рядів на довільний нескінченовимірний банаховий простір за допомогою теореми про існування базисної послідовності.

Методи дослідження – аналітичний, практичний.

У роботі вивчається теорема про існування базисної послідовності, а також її застосування до розв’язання задач теорії рядів в просторах Банаха. У роботі побудовано наступні задачі. За допомогою теореми про існування базисної послідовності узагальнити на довільний нескінченновимірний банановий простір наступні приклади рядів. Перший із рядів є відомим умовно збіжним рядом, що має одно точкову область сум. Другий ряд побудовано в роботі, від є контр прикладом до пере формульованої теореми Штейніца. Обидва ряди наведено в конкретних просторах. У роботі вони узагальнюються на випадок довільного нескінченновимірного простору. У довільному нескінченновимірному банаховому просторі складається ряд з членів вигляду $\left\{\pm\frac{a_i}{n_i}e_i\right\}$, де $\frac{a_i}{n_i}\to 0$, $\{e_i\}$ – базисна послідовність. На ряд $\sum_i a_i e_i$ накладаються певні умови. Для доведення розбіжності отриманого ряду використовується критерій базисної послідовності.

SUMMARY

Graduation Thesis "Application of Basis Sequences in Problems of the Series Permutation Theory in Banach Spaces", 45 pages, 25 references.

BASIS, BASE CONSTANT, BASIC SEQUENCE, BANACH SPACE, UNCONDITIONALLY CONVERGENT SERIES, SET OF SUMS OF A SERIES IN A BANACH SPACE, CONDITIONALLY CONVERGENT SERIES.

The object of the study is a set sums of a series in a finite-dimensional and an infinite-dimensional Banach spaces, a basic sequence.

The aim of the study is a generalization of instances of series on an arbitrary infinite-dimensional Banach space using the theorem about the existence of a basic sequence.

The methods of research are analytical, practical.

The thesis deals with the theorem about the existence of basic sequences, and its application to the solve of problems of the theory of series in Banach spaces. On the basis of a series in concrete space a series in any infinite-dimensional space with members of type $\left\{\pm\frac{a_i}{n_i}e_i\right\}$, where $\frac{a_i}{n_i}\to 0$ and $\{e_i\}$ – basic sequence is executed. The certain condition on the series $\sum_i a_i e_i$ is imposed. The criterion of basic sequence is applied to the proof of divergence of a series.

In this thesis there are the following tasks. With the help of the theorem about existence of basic sequences are to generalize the contrary instances of the series to infinite-dimensional Banach space. The first series is known, it is conditionally convergent series and has a single-point set sums. The second series is constructed in the work, it is a contrary instances to the reformulated Steinitz theorem. Both of these series are given in specific spaces. In the work, they can be generalized to the case of infinite-dimensional space.

ВСТУП

Дана робота присвячується вивченню вже відомих контрприкладів до теореми С. Штейніца, а також проводиться побудова нових контрприкладів, які показують, що розповсюдити на ряди в нескінченновимірному банаховому просторі теорему С. Штейніца неможливо.

Актуальність даної проблематики обумовлена постійною зацікавленістю математиків до вивчення банахових просторів, до пошуку ефективних способів вирішення певних задач.

При розв'язанні задач дуже часто доводиться переставляти члени рядів. Як відомо, з теореми Рімана при цьому сума числового ряду може змінюватись [3, 5, 10, 11, 18, 19]. Множина сум всіляких переставлень ряду охоплюється областю сум ряду. Яка структура цієї множини? При розгляді більш загальних рядів – рядів в скінченновимірному просторі і навіть рядів комплексних чисел – виникають складнощі. Для рядів комплексних чисел опис структури такої множини в 1905 році дав П. Леві, а у разі довільного скінченновимірного простору результат належить С. Штейніцу [18, 19, 25]. Вивчення переставлень ряду в нескінченновимірному просторі було почате В. Орлічем, продовжено в роботах М.І. Кадєца, В.М. Кадєца, Е.М. Никішина, М.Й. Островського [18, 19] та ін. і активно продовжується [4, 17, 21, 23].

Велике значення в теорії рядів має теорема С. Штейніца [3, 18, 25]. У цій теоремі мова йде про області сум умовно збіжного ряду в скінченновимірному просторі. Виникає природне бажання розповсюдити ці результати на нескінченновимірний випадок. Проте в повному обсязі перенести на нескінченновимірний об'єкт властивості скінченновимірного аналога не вдається. З теореми С. Штейніца виходить, що область сум умовно збіжного ряду в скінченновимірному просторі містить більш за одну точку (точніше, навіть цілу пряму), ця область сум є лінійною і замкненою множиною.

Структура області сум ряду в скінченновимірному і нескінченновимірному просторах істотно відрізняються. Відомий приклад ряду в нескінченновимірному просторі, який є умовно збіжним і має область сум, яка складається із однієї точки. Відомі приклади Ю.Марцинкевича-П.А. Корнілова [3, 18, 19] ряду в нескінченновимірному просторі з нелінійною областю сум і М.Й. Островського [3, 18, 19] – з незамкненою областю сум. Це неможливо в скінченновимірному просторі, що виходить з теореми С. Штейніца. Тому ці приклади є контрприкладами до теореми С. Штейніца в нескінченновимірному просторі.

Із доведення теореми Штейніца витікає, що область сум ряду $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ в скінченновимірному просторі не порожня тоді і тільки тоді, коли виконуються такі дві умови:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$;

б) для будь-якого функціоналу $f \in X^*$ маємо:

$$\sum_n |f(x_n)| = \infty \Rightarrow \sum_n [f(x_n)]^+ = \sum_n [f(x_n)]^- = \infty.$$

Дуже часто факти, що мають місце в скінченновимірному просторі, не виконуються в нескінченновимірному. Наступною задачею являється узагальнення прикладу ряду в l_2, для якого виконуються умови а) і б) непорожності області сум ряду в скінченновимірному просторі, що має порожню область сум в нескінченновимірному просторі l_2, на будь-який нескінченновимірний банаховий простір за допомогою теорем про базисні послідовності [16, 24].

Кваліфікаційна робота складається з чотирьох розділів.

У розділі 1 подано короткий огляд досліджень з теорії рядів у банахових просторах та базисів й базисних послідовностей, а також основні визначення і теореми, використані в роботі.

У розділі 2 розглянуто три відомі приклади умовно збіжних рядів в нескінченновимірних просторах. Приклад першого ряду має одноточкову область сум, другий – нелінійну (приклад Ю. Марцинкевича-П.А. Корнілова), а третій – має область сум, яка є незамкнутою множиною (приклад М.Й. Островського).

Переформульована теорема С. Штейніца дає умови непорожності області сум ряду в скінченновимірному просторі.

У розділі 3 представлений приклад ряду в l_2, який задовольняє умовам переформульованої теореми С. Штейніца, але має порожню область сум.

У розділі 4 розв'язується основна задача, яка базується на узагальненні на довільний банаховий простір прикладу умовно збіжного ряду в l_2 з одноточковою областю сум та контрприкладу, представленого в розділі 3, за допомогою теореми про базисну послідовність.

1 ПОПЕРЕДНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

1.1 Огляд деяких досліджень в теорії рядів в банахових просторах та їх застосувань

Теорія рядів у банахових просторах має глибоку класичну основу, проте питання переставлення членів ряду, умовної та безумовної збіжності, а також впливу геометричних властивостей простору на поведінку рядів залишаються актуальними. Одним із фундаментальних джерел у цій галузі є монографії М. Й. Кадеця та В. М. Кадеця (1991, 1997) [18, 19], у яких подано систематичний виклад теорії рядів у банахових просторах, критерії безумовної збіжності, поведінка переставлених рядів, а також розглянуто класичні результати, зокрема теореми Штейніца, Орлича та ін. Саме ці праці формують теоретичний базис для подальших сучасних узагальнень. Важливе значення має і робота С. Штейніца [25], у якій уперше сформульовано теорему про множину всіх сум перестановок умовно збіжного ряду – результат, на який спирається значна частина сучасних досліджень. Вивчення цієї теореми присвячено дану кваліфікаційну роботу.

У сучасній літературі дедалі частіше увага зосереджується на зв’язку між властивостями рядів та структурою банахових просторів, поведінкою операторів, аналізом підпослідовностей та рівномірно обмежених систем. Наприклад, у роботі M. P. Ramos та P. Rueda (2023) [23] досліджується вплив властивостей рядів і послідовностей у банахових просторах на динаміку лінійних операторів, зокрема на питання їх гіперциклічності та поведінки орбіт.

Стаття M. Jiménez-Sevilla та S. Lajara (2023) [17] зосереджується на структурі підпросторів банахових просторів та її впливі на існування й властивості базисних та мінімальних послідовностей. Робота узагальнює теореми Гурарія–Кадецiв і Лінденштрауса–Розенталя щодо

квазідоповнюваних підпросторів і пропонує розв’язання питання І. Зінгера про існування у спряженому просторі базисної послідовності, біортогональної до заданої мінімальної чи базисної послідовності. Це має безпосереднє відношення до теорії рядів, оскільки саме базисні системи визначають представлення елементів простору у вигляді рядів.

Окрему цінність становлять оглядові роботи та сучасні preprint-и, що узагальнюють властивості послідовностей і рядів у банахових просторах та містять новітні результати щодо перестановок, збіжності та ізометрій. Зокрема, огляд з геометрії банахових просторових послідовностей і операторних дій над ними подано у [21] (2022), де ці питання пов’язано з теорією операторів та ізометрій, що є важливим для аналізу переставних рядів.

Важливою частиною прикладних досліджень є застосування рядів у функціональних просторах, зокрема у задачах математичної фізики, інтегральних і диференціальних рівнянь та моделей контактної взаємодії. У роботі [6] (2021) розглянуто застосування рядів у функціональних просторах для побудови наближених розв’язків інтегральних рівнянь, що описують контактні процеси.

Таким чином, огляд показує, що сучасні дослідження у теорії рядів у банахових просторах поєднують класичні результати зі здобутками структурної теорії банахових просторів, операторного аналізу та прикладних задач. Ряди залишаються потужним інструментом як у теоретичних дослідженнях (базиси, переставні ряди, збіжність), так і у прикладних застосуваннях (інтегральні рівняння, моделювання фізичних процесів, аналіз операторів).

1.2 Огляд деяких досліджень в теорії базисі та базисних послідовностей та їх застосувань

Класична теорія базисів (Schauder-базис, Markushevich-(M-)базис, умови безумовної та умовної збіжності) залишається основою. Вона викладена в роботах I. Singer [24], J. Diestel [16]. Сучасні публікації останніх років розвивають цю тему в напрямку: структури банахових просторів, властивостей базисів (shrinking, unconditional, spreading), критеріїв існування базисних послідовностей, застосувань у теорії операторів і функціональних просторах.

Подальший розвиток теорії пов’язаний з аналізом тонких структурних властивостей банахових просторів і поведінки базисів у них. Значний внесок у це внесла робота A. C. Cáceres-Rigo та співавт. (2023) [15], де досліджуються властивості базисних послідовностей, зокрема spreading-моделі, поняття permutative equivalence, умови утворення повного базису з підпослідовностей та відповідні дихотомічні характеристики. Ці результати важливі для розуміння стійкості базисної структури при виборі підпослідовностей та перестановок.

У статті C. S. Barroso (2023) [14] досліджуються простори, що мають Schauder-базис, та встановлюються глибокі зв’язки між властивостями базисних послідовностей і геометричними характеристиками простору, зокрема fixed point property (FPP). Це дозволяє розглядати базис не лише як аналітичний інструмент, а і як показник геометричної структури простору.

Оглядова робота L. D. Antunes та ін. (2022) [12] узагальнює сучасні результати щодо банахових послідовнісних просторів (l_p, c_0 тощо) та їх базисів, включаючи поведінку ізометрій та критерії класифікації базисних систем. Представлений матеріал систематизує різні підходи до аналізу базисності в широких класах нормованих послідовнісних просторів.

Праця A. Augusto (2019) [13] містить важливі критерії, застосовні в довільному банаховому просторі, зокрема критерії існування базисних

послідовностей, умови стабільності та конструктивні методи побудови базисів. Ці результати відіграють ключову роль у задачах, де необхідно відтворити базисну структуру в узагальнених або нових просторах.

У сучасній літературі також представлені результати щодо збіжності розкладів за наявності заданого базису. Так, у роботі (2022) [22] наведено узагальнені характеристики збіжності та умови контролю поведінки коефіцієнтів при розкладах за Schauder-базисом, що є корисним у задачах аналізу операторів і функціональних просторів.

1.3 Основні означення і теореми з теорії рядів банахового простору

Означення 1.1 Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ в банаховому просторі X називається збіжним, якщо збігається послідовність його часткових сум $\left\{ S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \right\}$ за нормою простору X. Елемент $s \in X$, що є границею цієї послідовності, тобто $s = \lim_{n\to\infty} S_n$, називається сумою ряду і позначається $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = s$.

Означення 1.2 Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ елементів банахового простору називається безумовно збіжним, якщо він збігається при будь-якому своєму переставленні.

Для дослідження на безумовну збіжність буде потрібно поняття ряду, досконало збіжного.

Означення 1.3 Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ елементів банахового простору називається досконало збіжним, якщо для будь-якого набору коефіцієнтів $\alpha_n = \pm 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ є збіжним.

Теорема 1.1 [3, 18, 19**]** (критерій безумовної збіжності ряду). Ряд в скінченновимірному банаховому просторі безумовно збігається тоді і тільки тоді, коли він абсолютно збігається .

Означення 1.4 Ряд в банаховому просторі є умовно збіжним, якщо він збігається, але не безумовно.

У роботі вивчаються структурні властивості області сум ряду. Введемо її визначення.

Означення 1.5 Нехай $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ – ряд в банаховому просторі X. Областю сум цього ряду називається множина $OC\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right)$ – сукупність тих $x \in X$, що при деякому переставленні $\pi : N \to N$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ збігається до x.

Структуру цієї множини зручно досліджувати через вивчення структури області граничних точок ряду.

Означення 1.6 Нехай $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ – ряд в банаховому просторі X. Областю граничних точок цього ряду називається множина вигляду

$$OÃÒ\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right) = \left\{ x \in X : \exists \pi : N \to N \; \exists \{n_k\} : \right.$$
$$\left. 1 \le n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots \wedge \lim_{k \to \infty} \left\| x - \sum_{i=1}^{n_k} x_i \right\| = 0 \right\}.$$

Розглянемо в банаховому просторі X умовно збіжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, сума якого дорівнює S. Лінійний функціонал $f \in X^*$ назвемо функціоналом збіжності для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, якщо $\sum_{n=1}^{\infty} |f(x_n)| < \infty$. Множина всіх функціоналів

збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ є лінійним підпростором $\Gamma \subset X^*$, не обов'язково замкненим, якщо X нескінченновимірний. Через $\Gamma_0 \subset X$ позначимо аннулятор множини функціоналів збіжності

$$\Gamma_0 = \{x \in X : f(x) = 0 \text{ для всіх } f \in \Gamma\},$$

де Γ_0 – замкнутий лінійний підпростір в X.

Лема 1.1 [3, 18, 19] Нехай X – банановий простір, $\sum_{i=1}^{\infty} x_k$ – умовно збіжний ряд в X. Тоді з того, що $x \in \overline{Q}$ витікає, що $x + \Gamma_0 \subset \overline{Q}$.

Лема 1.2 (критерій приналежності $ОГТ$) [3, 18, 19] Для того щоб елемент $x \in X$ належав області граничних точок ряду $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ необхідно і достатньо, щоб для будь-якої скінченної множини індексів U існувала скінчена множина індексів V $(U \subset V)$, що

$$\left\| \sum_{i \in V} x_i - x \right\| < \varepsilon.$$

Твердження 1.1 [3] Нехай $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ в просторі X $(\dim X < \infty)$ при чому $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$, тоді

$$ОГТ\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n \right) = ОС\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n \right).$$

Теорема 1.2 (теорема С. Штейніца) [3, 18, 19, 25] Нехай $\sum_n x_n$ – збіжний ряд в m-вимірному просторі $\sum_n x_n = S$. Тоді область сум ряду $\sum_n x_n$ є зсунений підпростір вигляду $S + \Gamma_0$, де Γ_0 – анулятор множини Γ функціоналів збіжності:

$$OC\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right) = S + \Gamma_0.$$

Доведення. Нехай $f \in \Gamma$ і $x \in OC\left(\sum_i x_i\right)$. Тоді існує переставлення $\pi: N \to N$ таке, що $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_{\pi(i)}$, тому завдяки неперервності і лінійності функціонала отримаємо: $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f\left(x_{\pi(i)}\right)$. А оскільки $f \in \Gamma$, то $\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i)$ збіжний абсолютно, тоді

$$\sum_i f\left(x_{\pi(i)}\right) = \sum_i f(x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) = f(S).$$

Означає $f(x) = f(S)$ для $f \in \Gamma$, а значить $x - S \in \Gamma_0$, тобто $x \in S + \Gamma_0$. Отже $OC \subset S + \Gamma_0$.

Доведемо включення в інший бік.

Нехай $x \in S + \Gamma_0$. Оскільки $S \in OC\left(\sum_i x_i\right)$, то $S \in \overline{Q}$. Отже, за лемою 1.1 $S - \sum_{i=1}^{N} x_i + \Gamma_0 \in \overline{Q}\{x_i\}_{i=N+1}^{\infty}$. Оскільки $x \in S + \Gamma_0$, то $x \in \sum_{i=1}^{N} x_i + \overline{Q}\{x_i\}_{i=N+1}^{\infty}$.

Останнє означає, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує номер $n_0 > N$ і набір коефіцієнтів $\{x_i\}_{i=N+1}^{n_0}$ такі, що

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{N} x_i - \sum_{i=N+1}^{n_0} \lambda_i x_i \right\| < \varepsilon/2 . \qquad (1.1)$$

Вище номер N був вибраний так, що починаючи з нього, здійснюється нерівність

$$\|x_n\| < \frac{\varepsilon}{2\dim E} \left(\forall n \geq N\right). \qquad (1.2)$$

За лемою про округлення коефіцієнтів можна знайти округлені коефіцієнти, $\{Q_i\} \subset \{0,1\}$ для яких

$$\left\| \sum_{i=N+1}^{n_0} \lambda_i x_i - \sum_{i=N+1}^{n_0} Q_i x_i \right\| < \dim E \cdot \max_{i>N} \|x_i\| . \qquad (1.3)$$

З (1.1) – (1.3) витікає, що для індексної множини $U = \{1,2,...,N\}$ знайдено скінченну індексну множину

$$V = \{1,2,...,N\} \cup \{i : Q_i = 1,\ N < i < n_0\}$$

таку, що поглинає U і здійснюється нерівність

$$\left\| \sum_{i \in V} x_i - x \right\| < \varepsilon .$$

Таким чином $x \in ОГТ$ (за критерієм приналежності $ОГТ$), а оскільки $ОГТ = ОС$ для ряду в скінченновимірному просторі, для якого $x_i \to 0$, тому $x \in ОС$.

Включення $S + \Gamma_0 \subset ОС$ доведено, а значить доведено рівність: $S + \Gamma_0 = ОС$.

1.4 Означення базисної послідовності. Критерій базисної послідовності та теорема про її існування

Для введення поняття базисної послідовності необхідні означення деяких допоміжних понять, у тому числі базису [1, 2, 8, 16, 20, 24].

Означення 1.7 [2, 8, 16, 20, 24] Послідовність елементів $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ називається базисом, якщо для кожного елементу $x \in X$ знайдеться єдина послідовність чисел $\{a_k(x)\}$, для якої

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) e_k .$$

Означення 1.8 [2, 8, 20] Простір X називається сепарабельним, якщо в ньому існує зчислена всюди щільна множина. Іншими словами, в X існує зчислена підмножина Y, замикання якої $\overline{Y}$ збігається з X, тобто $\overline{Y} = X$.

Означення 1.9 [2, 8, 20] Замикання множини A називається сама множина A з усіма її граничними точками

$$\overline{A} = A \cup A .$$

Означення 1.10 [2, 8, 20] Точка x називається граничною для множини A, в нормованому просторі X якщо існує послідовність $x_k \in A$, яка збігається до x.

Теорема 1.3 Нехай $\{a_n\}$ – послідовність в X, вона збіжна тоді і тільки тоді, коли збіжна будь-яка її підпослідовність, при цьому кожна з них збіжна до однієї і тієї ж границі a (до тієї ж границі a збіжна і вся послідовність).

Доведення. Розглянемо необхідність. Фіксуємо ε, оскільки $a_n \to a$, то

$$\exists\, N : \forall\, n \geq N \; \|a_n - a\| < \varepsilon .$$

Нехай $\{a_{k_n}\}$ – довільна підпослідовність послідовності $\{a_n\}$. Оскільки $k_N \geq N$, то для будь-якого $n \geq N$ виконується умова $\|a_{k_N} - a\| < \varepsilon$, що і означає, що послідовність $\{a_{r_n}\}$ збіжна до a.

Розглянемо тепер достатність.

Так як сама послідовність $\{a_n\}$ частковий випадок підпослідовності, то $\{a_n\}$ збіжна до деякої границі a. Але тоді із необхідності випиває, що будь-яка її підпослідовність збіжна до a. Що і треба було довести.

Якщо в банаховому просторі X існує базис, то легко бачити, що X – сепарабельний. Але не будь-який сепарабельний простір має базис. Перший приклад сепарабельного простору без базису було наведено П. Энфло в 1973 році.

Розглянемо нескінченновимірний банаховий простір X та сформулюємо деякі поняття.

Означення 1.11 Простір називається нескінченновимірним, якщо для будь-якого натурального числа n існує n лінійно незалежних векторів в ньому.

Означення 1.12 Вектори $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ називаються лінійно незалежними, якщо із того, що $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k = 0$,витікає, що $\alpha_k = 0$ для всіх $k \in \{1,2,...,n\}$.

Означення 1.13 [16, 24] Послідовність елементів $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ нескінченновимірного банахового простору X називається базисною послідовністю, якщо $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – базис в $\overline{Lin}\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, де $\overline{Lin}\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – замикання лінійної оболонки системи $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Теорема 1.4 (критерій базисної послідовності) [16, 24] Для того, щоб система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, $e_k \neq 0$ була базисною послідовністю, необхідно і достатньо, щоб знайшлась постійна, для якої нерівність

$$\left\| \sum_{j=1}^{m+n} a_j e_j \right\| \geq K \left\| \sum_{j=1}^{m} a_j e_j \right\| \tag{1.4}$$

виконується при всіх $m,n \in N$ и $a_j \in R$.

Означення 1.14 Базисною константою базисної послідовності $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ називається точна верхня межа тих K, які можна підставити в нерівність (1.4).

У наступній теоремі стверджується, що в будь-якому нескінченновимірному банаховому просторі існують базисні послідовності. Цей класичний результат був отриманий школою Банаха.

Теорема 1.4 (про існування базисної послідовності) [16, 24] Нехай X – нескінченновимірний банаховий простір, $\varepsilon > 0$. Тоді в X можна виділити базисну послідовність $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ з базисною константою, не меншою, ніж $1-\varepsilon$.

2 ВІДОМІ КОНТРПРИКЛАДИ ДО ТЕОРЕМИ С. ШТЕЙНІЦА

2.1 Приклад умовно збіжного ряду в нескінченновимірному просторі X з одноточковою областю сум

З теореми С. Штейніца виходить, що будь-який умовно збіжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ в скінченновимірному просторі має область сум $OC\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right)$, що складається більш, ніж з однієї точки (як мінімум, містить цілу пряму).

Приведемо відомий приклад умовно збіжного ряду в нескінченновимірному просторі, який має одноточкову область сум. Перед тим, як розглянути приклад, нагадаємо визначення простору l_2.

Означення 2.1 Простором l_2 називають простір послідовностей $x=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n,...)$, квадрати членів яких утворюють збіжний ряд, тобто $\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^2<\infty$, а норма цих членів визначається формулою $\|x\|=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n{}^2|\right)^{\frac{1}{2}}$. Тобто

$$l_2=\left\{x=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n,...):\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^2<\infty;\|x\|=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n{}^2|\right)^{\frac{1}{2}}\right\}.$$

Приклад 2.1 Побудову проводитимемо в гільбертовому просторі l_2. Нехай $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – канонічний ортонормований базис в l_2. Випишемо наступний ряд:

$$e_1+\frac{1}{2}e_2-\frac{1}{2}e_2+\frac{1}{4}e_3-\frac{1}{4}e_3+\frac{1}{4}e_3-\frac{1}{4}e_3+\frac{1}{8}e_4-\frac{1}{8}e_4+...+\frac{1}{16}e_5+... \ .$$

Це збіжний ряд і сума його дорівнює e_1, оскільки

$$S_1 = e_1, \quad S_2 = e_1 + \frac{1}{2}e_2, \quad S_3 = e_1, \quad S_4 = e_1 + \frac{1}{4}e_3,$$
$$S_5 = e_1, \quad S_6 = e_1 + \frac{1}{4}e_3, \quad S_7 = e_1, \quad S_8 = e_1 + \frac{1}{8}e_4.$$

Тоді для будь-якого $n \in N$ знайдеться $j \in N$ таке, що

$$S_{2n} = e_1 + \frac{1}{j}e_{j+1}, \quad S_{2n+1} = e_1.$$

І тоді для будь-якого $n \in N$ знайдеться $m \in N$, для якого

$$\|S_n - e_1\| \le \frac{1}{2^m}\|e_{m+1}\| = \frac{1}{2^m},$$

тобто $S_n \to e_1$.

Побудований ряд збігається не безумовно, оскільки ряд

$$e_1 + \frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{4}e_3 + \frac{1}{4}e_3 + \ldots$$

розбіжний (критерій безумовної збіжності). З іншого боку, область сум цього ряду складається тільки з однієї точки e_1, оскільки проекція цього ряду на будь-яку координатну вісь містить лише скінченне число ненульових доданків, а скінченна сума від переставлення не змінюється.

2.2 Приклад Ю. Марцинкевича-П.А. Корнілова

Основна частина твердження теореми С. Штейніца – це лінійність множини $OC\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right)$, тобто множина $OC\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right)$ разом з кожними двома своїми різними точками містить і з'єднуючу їх пряму.

Наведемо приклад, який показує, що в нескінченновимірному гільбертовому просторі є ряди з нелінійною областю сум (приклад Ю. Марцинкевича-П.А. Корнілова [3, 18, 19]).

Приклад 2.2 (приклад Ю. Марцинкевича-П.А. Корнілова) Функцію, що приймає значення 1 на відрізку $[a,b]$ і нуль поза відрізком, позначимо $I(a,b)$. Наш ряд складатиметься з таких елементів:

$$x_{ik} = I\left(k2^{-i};(k+1)2^{-i}\right); \quad y_{ik} = -x_{ik},$$

де $0 < k < 2^i$.

Це послідовність елементів з $L_2[0,1]$. Якщо суму записати в наступному порядку:

$$x_{0,0} + y_{0,0} + x_{1,0} + y_{1,0} + x_{1,1} + y_{1,1} + x_{2,0} + \ldots,$$

то ряд буде збігатися до нуля. Якщо змінити порядок:

$$x_{0,0} + x_{1,0} + x_{1,1} + y_{0,0} + x_{2,0} + x_{2,1} + y_{1,0} + x_{2,2} + x_{2,3} + y_{1,1} + \ldots,$$

то ряд збігатиметься до тотожної одиниці. При цьому до функції, рівної $\frac{1}{2}$ в усіх точках відрізка $[0,1]$, ряд не може бути збіжним ні при якому

переставленні, оскільки будь-яка часткова сума ряду – це функція, що приймає тільки цілочисельні значення.

2.3 Приклад М.Й. Островського

Наступний приклад, що належить М.Й. Островському [3, 18, 19], показує, що область сум ряду в гільбертовому просторі може бути незамкненою множиною.

Приклад 2.3 Приклад будуватимемо в гільбертовому просторі $L_2([0,1]\times[0,1])$ – просторі функцій, визначених на квадраті $0 < x < 1,\ 0 < y < 1$. Нехай $\sum f_k(t)$ – ряд, побудований в попередньому прикладі (приклад Марцинкевича-Корнілова). Наш ряд виглядатиме таким чином:

$$\sum g_k(x,y) = f_1(x) + \sqrt{2} f_1(y) + f_2(x) + \sqrt{2} f_2(y) + \dots .$$

Функції вигляду $u(x,y) = const$ належать області сум ряду в тому і лише в тому випадку, якщо $u(x,y) = n + \sqrt{2}m$, де n, m – цілі числа.

Множина

$$M = \left\{ n + \sqrt{2}m : n, m \in Z \right\} -$$

незамкнена, оскільки $\frac{1}{2}$ не належить множині M, але являється його граничною точкою. Дійсно, збіжність послідовності $n_k + \sqrt{2}m_k$ до $\frac{1}{2}$ рівносильна збіжності послідовності $\frac{1-2n_k}{2m_k}$ до $\sqrt{2}$. Наближення дійсного числа послідовностями скінченних десяткових дробів з надлишком $\{x_k\}$ то з

недостачею $\{y_k\}$ (де $x_k - y_k < 10^{-k}$) дозволяє вибрати при кожному k з двох дробів x_k і y_k такий дріб z_k, представлення якого в вигляді неправильного дробу має непарний чисельник. Отриману послідовність z_k, яка складається з елементів x_k і y_k, представимо у вигляді $\frac{1-2n_k}{2m_k}$ за правилом:

$$m_k = 10^k / 2,\ n_k = (1 - z_k 10^k) / 2.$$

Таким чином, множина M незамкнена, отже, область сум – незамкнена множина.

3 КОНТРПРИКЛАД ДО ПЕРЕФОРМУЛЬОВАНОЇ ТЕОРЕМИ С. ШТЕЙНІЦА

Нехай X – скінченновимірний банаховий простір, то можна довести, що для того, щоб ряд $\sum_n x_n$ був збіжним при деякому переставленні, тобто щоб $OC\left(\sum_n x_n\right)\neq\varnothing$, необхідно і достатньо, щоб ряд $\sum_n x_n$ задовольняв таким властивостям:

а) $\lim x_n = 0$;

б) для будь-якого функціоналу $f \in X^*$ маємо:

$$\sum_n |f(x_n)| = \infty \Rightarrow \sum_n [f(x_n)]^+ = \sum_n [f(x_n)]^- = \infty.$$

Якщо X – одновимірний, тоді кожен функціонал $f \in X^*$ представимо у вигляді $f(x) = ax$, де a – деяке число. Тому $\sum_n f(x_n) = a\sum_n x_n$, тому властивості а) та б) відповідають умовам а) й б) переформульованої теореми Рімана, і $OC\left(\sum_n x_n\right)\neq\varnothing$ якщо $\sum_n |f(x_n)| = \infty$,то $OC\left(\sum_n x_n\right) = X$, а якщо $\sum_n |f(x_n)| < \infty$, то область сум складається рівно з однієї точки.

У цьому розділі буде розв’язана наступна задача.

Нехай ряд $\sum_n x_n$ елементів дійсного банахового простору X задовольняє таким властивостям:

а) $\lim x_n = 0$;

б) для будь-якого функціоналу $f \in X^*$ маємо:

$$\sum_n |f(x_n)| = \infty \Rightarrow \sum_n [f(x_n)]^+ = \sum_n [f(x_n)]^- = \infty.$$

Тоді чи буде область сум $\sum_n x_n$ непорожньою множиною?

Якщо X – нескінченновимірний банаховий простір, то відповідь буде негативною – приведемо контрприклад. Побудуємо ряд в довільному нескінченновимірному банаховому просторі, що задовольняє властивостями а) і б), але при цьому має порожню область сум.

Приклад 3.1 Побудуємо такий ряд в нескінченновимірному банаховому просторі l_2, і далі покажемо, що він задовольняє властивостям а) і б) поставленої задачі.

$$x_1 = (2,0,0,0,...) = 2e_1,$$
$$x_2 = (-1,0,0,0,...) = -e_1,$$
$$x_3 = \left(0, \frac{2}{\sqrt{2}}, 0, 0, ...\right) = \frac{2}{\sqrt{2}} e_2,$$
$$.....,$$
$$x_{2n-1} = \left(0,...,0, \frac{2}{\sqrt{n}}, 0, 0, ...\right) = \frac{2}{\sqrt{n}} e_k$$
$$x_{2n} = \left(0,...,0, -\frac{1}{\sqrt{n}}, 0, 0, ...\right) = -\frac{1}{\sqrt{n}} e_k,$$
$$.....,$$

де $\{e_n = \underbrace{(0,0,...,0,1,0,...)}_{n}\}$ – канонічний базис в l_2.

Покажемо виконання умов а) і б) для даного ряду. Перевіримо умову а):

$$\|x_{2n-1}\| = \left(\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \tag{3.1}$$

$$\|x_{2n}\| = \left(\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{3.2}$$

Отже, $\lim x_n = 0$.

Покажемо, що побудований нами ряд – розбіжний в просторі l_2. Побудуємо послідовність часткових сум:

$$S_1 = (2,0,0,0,...),$$
$$S_2 = (1,0,0,0,...),$$
$$S_3 = \left(1,\frac{2}{\sqrt{2}},0,0,...\right),$$
$$S_4 = \left(1,\frac{1}{\sqrt{2}},0,0,...\right),$$
$$.....,$$
$$S_{2n} = \left(1,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{3}},...,\frac{1}{\sqrt{n}},0,0,...\right),$$
$$S_{2n+1} = \left(1,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{3}},...,\frac{1}{\sqrt{n}},\frac{2}{\sqrt{n+1}},0,0,...\right).$$

Знайдемо покоординатну границю

$$S_0 = \left(1,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{3}},...,\frac{1}{\sqrt{n}},...\right).$$

Розглянемо суму квадратів координат отриманої послідовності:

$$\sum_n \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 = \sum_n \frac{1}{n}.$$

Цей ряд є розбіжним, як гармонічний. Отже $S_0 \notin l_2$,тому даний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ розбігається в l_2.

Доведемо виконання умови б) поставленої задачі.

Позначимо $f_k = f(e_k)$. Тоді:

$$f(x_1) = f(2e_1) = 2f(e_1) = 2f_1,$$
$$f(x_2) = f(-e_1) = -f(e_1) = -f_1,$$
$$f(x_3) = f\left(\frac{2}{\sqrt{2}}e_2\right) = \frac{2}{\sqrt{2}}f(e_2) = \frac{2}{\sqrt{2}}f_2,$$
$$f(x_4) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}e_2\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}f(e_2) = -\frac{1}{\sqrt{2}}f_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$f(x_{2k-1}) = f\left(\frac{2}{\sqrt{k}}e_k\right) = \frac{2}{\sqrt{k}}f(e_k) = \frac{2}{\sqrt{k}}f_k,$$
$$f(x_{2k}) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{k}}e_k\right) = -\frac{1}{\sqrt{k}}f(e_k) = -\frac{1}{\sqrt{k}}f_k.$$

Нескладно бачити, що:

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left[f(x_k)\right]^- \le \sum_{k=1}^{\infty}\left[f(x_k)\right]^+ \le 2\sum_{k=1}^{\infty}\left[f(x_k)\right]^- .$$

З цієї нерівності випливає за ознакою порівняння числових знакододатних рядів, що ряди $\sum_k [f(x_k)]^+$ і $\sum_k [f(x_k)]^-$ збіжні або розбіжні одночасно. Тобто умова б) виконується.

Доведемо, що $OC\left(\sum_k x_k\right) = \varnothing$. Нехай $\pi : N \to N$ – деяке переставлення. Зафіксуємо $k \in N$. Розглянемо $\left\| \sum_{n=k+1}^{k+p} x_{\pi(n)} \right\|$.

Виберемо такий відрізок ряду $\left\| \sum_{n=k+1}^{k+p} x_{\pi(n)} \right\|$, щоб його координати від $(k+1)$-ої до $(2k)$-ої були рівні відповідно $\frac{1}{\sqrt{k+j}}$, де $k+1 < j \le k$, тоді

$$\left\| \sum_{n=k+1}^{k+p} x_{\pi(n)} \right\| \ge \left(\sum_{n=k+1}^{2k} \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \ldots + \frac{1}{2k} \right)^{\frac{1}{2}} \ge \sqrt{\frac{k}{2k}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Таким чином, за критерієм Коші отримаємо, що при будь-якому переставленні ряд є розбіжним. Таким чином, $OC\left(\sum_k x_k \right) = \varnothing$.

4 УЗАГАЛЬНЕННЯ КОНТРПРИКЛАДІВ НА ДОВІЛЬНИЙ НЕСКІНЧЕННОВИМІРНИЙ БАНАХОВИЙ ПРОСТІР

4.1 Узагальнення прикладу умовно збіжного ряду в просторі l_2 з одноточковою областю сум на будь-який нескінченновимірний банаховий простір

У силу теореми про існування базисної послідовності в будь-якому нескінченновимірному банаховому просторі X можна знайти нормовану базисну послідовність $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Позначимо через $Y = \overline{Lin}\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – замикання лінійної оболонки системи $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Виберемо такий набір чисел $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$, щоб ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_{n+1}$ був розбіжним в X.

Виберемо $\{k_n\}_{n=1}^{\infty} \subset N$, таку що $\frac{a_n}{k_n} \to 0$.

Розглянемо ряд виду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = e_1 + \underbrace{\frac{\alpha_1}{k_1}e_2 - \frac{\alpha_1}{k_1}e_2 + \ldots + \frac{\alpha_1}{k_1}e_2 - \frac{\alpha_1}{k_1}e_2}_{2k_1} + \underbrace{\frac{\alpha_2}{k_2}e_3 - \frac{\alpha_2}{k_2}e_3 + \ldots + \frac{\alpha_2}{k_2}e_3}_{2k_2} +$$

$$+ \ldots + \underbrace{\frac{\alpha_i}{k_i}e_{i+1} + \ldots - \frac{\alpha_i}{k_i}e_{i+1}}_{2k_i} + \ldots . \qquad (4.1)$$

Покажемо, що вказаний ряд умовно збіжний та має одноточкову область сум.

Лема 4.1 Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ (4.1) є умовно збіжним.

Доведення**.** Для доведення необхідно показати, що ряд (4.1):

а) збіжний;

б) безумовно розбіжний, що еквівалентно тому, що ряд не є досконало збіжним.

Доведемо збіжність ряду (4.1). Часткова сума з непарним номером дорівнює e_1, з парним – дорівнює виразу вигляду:

$$e_1 + \frac{\alpha_i}{k_i} e_{i+1}.$$

для деякого $i \in \mathbb{N}$.Тоді для кожного n існує i таке, що

$$\|S_n - e_1\| \le \left\| \frac{\alpha_i}{k_i} e_{i+1} \right\| = \frac{|\alpha_i|}{k_i}.$$

При $n \to \infty$ виконано: $i \to \infty$.Оскільки $\frac{\alpha_i}{k_i} \to 0$, то $\|S_n - e_1\| \to 0$ при $n \to \infty$, отже, даний ряд збіжний.

Тепер доведемо той факт, що ряд (4.1) не є досконало збіжним. Виберемо набір знаків θ_n таким, щоб

$$\sum_n \theta_n x_n = e_1 + \underbrace{\frac{\alpha_1}{k_1} e_2 + \frac{\alpha_1}{k_1} e_2 + \ldots + \frac{\alpha_1}{k_1} e_2}_{2k_1} + \underbrace{\frac{\alpha_2}{k_2} e_3 + \frac{\alpha_2}{k_2} e_3 + \ldots + \frac{\alpha_2}{k_2} e_3}_{2k_2} +$$

$$+ \ldots + \underbrace{\frac{\alpha_i}{k_i} e_{i+1} + \frac{\alpha_i}{k_i} e_{i+1} + \ldots + \frac{\alpha_i}{k_i} e_{i+1}}_{2k_i} + \ldots . \qquad (4.2)$$

Будемо стверджувати, що елементи $\pm \frac{\alpha_i}{k_i} e_{i+1}$ входять в i-й блок. Нехай

$$n_1 = 1 + 2k_1, n_2 = 1 + 2(k_1 + k_2), \ldots, n_i = 1 + 2\sum_{j=1}^{i} k_j .$$

Тоді часткові суми ряду (4.2) мають вигляд:

$$\overline{S_1} = e_1,$$

$$\overline{S_{n_1}} = e_1 + 2\alpha_1 e_2,$$

$$\overline{S_{n_2}} = e_1 + 2\alpha_1 e_2 + 2\alpha_2 e_3,$$

……..,

$$\overline{S_{n_j}} = e_1 + 2\sum_{i=1}^{j} \alpha_i e_{i+1}.$$

Доведемо, що $\overline{S_{n_j}}$ розбіжна.

Оскільки $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_{i+1}$ розбіжний то виконуються умови:

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall N \ \exists j \geq N \ \exists p > 0 : \left\| \sum_{i=j+1}^{j+p} \alpha_i e_{i+1} \right\| \geq \varepsilon,$$

$$\left\| \overline{S}_{n_{j+p}} - \overline{S}_{n_j} \right\| = 2 \left\| \sum_{i=j+1}^{j+p} \alpha_i e_{i+1} \right\| \geq \varepsilon.$$

Звідки випливає розбіжність підпослідовності часткових сум $\left\{\overline{S_{n_j}}\right\}$ ряду (4.2).

Отже, ряд (4.2) є розбіжним.

Що і потрібно було довести.

Лема 4.2 Область сум ряду (4.1) дорівнює $\{e_1\}$.

Доведення. Припустимо супротивне:

$$\exists x \neq e_1 \quad \text{і} \quad \exists \pi : N \to N : \sum x_{\pi(n)} = x.$$

Оскільки $x_n \in Y$, то $S_m = \sum_{n=1}^{m} x_{\pi(n)} \in Y$, а так як $Y = \overline{Lin}\{e_n\}$ – замкнена, то $x = \lim_m S_m$ належить Y. Отже, x єдиним чином можна представити у вигляді

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j e_j .$$

Очевидно, що знайдеться такий номер n_0, що $x_{\pi(n_0)} = e_1$, тоді для будь-якого $N \geq n_0$ має місце подання $\sum_{n=1}^{N} x_{\pi(n)} = e_1 + \sum_{j=2}^{m_N} \gamma_j^N e_j$, де γ_j^N – дійсні коефіцієнти, при e_j, залежні від N.

Доведемо, що β_1 в розкладі x дорівнює 1. Припустимо супротивне: $\beta_1 \neq 1$. Оскільки $\lim_{N \to n} \sum_{n=1}^{N} x_{\pi(n)} \to x$ при $N \to \infty$, то

$$\left\| x - \sum_{n=1}^{N} x_{\pi(n)} \right\| = \left\| x - \left(e_1 + \sum_{j=2}^{m_N} \gamma_j^N e_j \right) \right\| = \left\| \sum_{j=1}^{m_N} \beta_j e_j + \sum_{j=m_N+1}^{\infty} \beta_j e_j - e_1 - \sum_{j=2}^{m_N} \gamma_j^N e_j \right\| =$$

$$= \left\| (\beta_1 - 1) e_1 + \sum_{j=2}^{m_N} (\beta_1 - \gamma_j^N) e_j + \sum_{j=m_N+1}^{\infty} \beta_j e_j \right\| \geq$$

$$\geq \left\| (\beta_1 - 1) e_1 + \sum_{j=2}^{m_N} (\beta_1 - \gamma_j^N) e_j \right\| - \left\| \sum_{j=m_N+1}^{\infty} \beta_j e_j \right\| .$$

Використовуючи критерій базисної послідовності, отримаємо

$$\left\| (\beta_1 - 1) e_1 + \sum_{j=2}^{m_N} (\beta_j - \gamma_j^N) e_j \right\| \geq K |\beta_1 - 1| \cdot \|e_1\| = K \cdot |\beta_1 - 1| = \text{const} .$$

Тут K – базисна постійна.

У силу збіжності ряду $\sum_{j=1}^{\infty}\beta_j e_j$ норма послідовності його залишків $\lim_{N\to\infty}\left\|\sum_{j=m_N}^{\infty}\beta_j e_j\right\|=0$ Тоді $\left\|x-\sum_{n=1}^{N}x_{\pi(n)}\right\|$ обмежена знизу, що неможливо в силу збіжності ряду $x=\sum_{n=1}^{\infty}x_{\pi(n)}$. Отримане протиріччя доводить, що $\beta_1=1$.

Знайдемо номер j_0, такий що коефіцієнт β_{j_0} в розкладі x по базисній послідовності не дорівнює нулю, а попередні коефіцієнти окрім першого, дорівнюють 0. Це необхідно для виконання співвідношення $x\neq e_1$. Але тоді (в силу скінченності елементів кожного блока в даній сумі ряду(4.1)) існує номер $\overline{n}$, такий що

$$\forall\ N\geq\overline{n}\quad \sum_{n=1}^{N}x_{\pi(n)}=e_1+\sum_{n=j_0+1}^{r_N}\xi_j^N e_j\,.$$

Іншими словами, усі часткові суми $\sum_{n=1}^{N}x_{\pi(n)}$ в розкладі за $\{e_j\}$ мають коефіцієнти перед $e_2,e_3,...,e_{j0}$, рівні 0.

При цьому

$$\left\|x-\sum_{n=1}^{N}x_{\pi(n)}\right\|=\left\|x-\left(e_1+\sum_{j=j_0+1}^{r_N}\xi_j^N e_j\right)\right\|\geq\left|\left\|\sum_{j=j_0+1}^{r_N}\left(\beta_j-\xi_j^N\right)e_j+\beta_{j_0}e_{j_0}\right\|-\left\|\sum_{j=r_N+1}^{\infty}\beta_j e_j\right\|\right|.$$

Перша норма в останньому виразі не перевищує $K\cdot\left|\beta_{j_0}\right|=\text{const}$ (за критерієм базисної послідовності), а друга, являючись нормою послідовності залишків збіжного ряду, може бути зроблена достатньо малою. Звідси,

$\left\| x - \sum_{n=1}^{N} x_{\pi(n)} \right\|$ рівномірно обмежена знизу. Останнє суперечить збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$. Отже, $\beta_{j_0} = 0$.

У силу довільності вибору j_0, приходимо до висновку, що $\beta_j = 0$ для будь-якого $j > 1$. Значить $x = e_1$. Але це суперечить припущенню, що і доводить потрібне.

4.2 Узагальнення прикладу ряду в просторі l_2, який задовольняє умовам теореми Штейніца, але має порожню область сум

Нехай $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$,– нормована базисна послідовність в X та $Y = \overline{Lin}\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Тоді існує послідовність чисел

$$a_1, a_2, a_3, ..., a_i, ...,$$

для якої

$$\lim_m \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i e_i \right\| = \infty.$$

Знайдеться послідовність натуральних чисел

$$n_1, n_2, n_3, ..., n_i, ...$$

така, що

$$\lim_i \frac{a_i}{n_i} = 0 .$$

Складемо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \underbrace{2\frac{a_1}{n_1}e_1 + 2\frac{a_1}{n_1}e_1 + ... + 2\frac{a_1}{n_1}e_1}_{n_1} - \underbrace{\frac{a_1}{n_1}e_1 - \frac{a_1}{n_1}e_1 - ... - \frac{a_1}{n_1}e_1}_{n_1} +$$

$$+ \underbrace{2\frac{a_2}{n_2}e_2 + ... + \frac{a_2}{n_2}e_2}_{n_2} - \underbrace{\frac{a_2}{n_2}e_2 - .... - \frac{a_2}{n_2}e_2}_{n_2} + ...$$

Покажемо, що $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ задовольняє умовам теореми Штейніца. Виконання умови $x_k \to 0$ при $k \to \infty$ очевидно. Відомо, що для $f \in Y^*$, $f(\alpha x) = \alpha f(x)$, тоді

$$f(x_1) = 2\frac{a_1}{n_1} f_1, ..., f(x_{n_1}) = 2\frac{a_1}{n_1} f_1,$$

$$f(x_{n_1+1}) = -\frac{a_1}{n_1} f_1, ..., f(x_{2n_1}) = -\frac{a_1}{n_1} f_1,$$

$$f(x_{2n_1+1}) = 2\frac{a_2}{n_2} f_2, ..., f(x_{2n_1+n_2}) = 2\frac{a_2}{n_2} f_2,$$

$$f(x_{2n_1+n_2+1}) = -\frac{a_2}{n_2} f_2, ..., f(x_{2n_1+2n_2}) = -\frac{a_2}{n_2} f_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

де $f(e_i) = f_i$, $i \in \mathbb{N}$.

Отже, або числа

$$f(x_{2n_1+...+2n_k+1}), ..., f(x_{2n_1+...+n_k+n_{k+1}})$$

додатні, а числа

$$f\left(x_{2n_1+\ldots+2n_k+n_{k+1}+1}\right), \ldots, f\left(x_{2n_1+\ldots+2n_k+2n_{k+1}}\right)$$

від'ємні, або навпаки, і для будь-яких $j_1, j_2 \in \{1,2,\ldots,n_{k+1}\}$

$$f\left(x_{2n_1+\ldots+2n_k+j_1}\right) = -2 f\left(x_{2n_1+\ldots+2n_k+n_{k+1}+j_2}\right).$$

Оцінимо $[f(x_k)]^+$ и $[f(x_k)]^-$:

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left[f\left(x_k\right)\right]^- \le \sum_{k=1}^{\infty}\left[f\left(x_k\right)\right]^+ \le 2\sum_{k=1}^{\infty}\left[f\left(x_k\right)\right]^-.$$

Звідси $\sum_k [f(x_k)]^+$ і $\sum_k [f(x_k)]^-$ збіжні або розбіжні одночасно. Очевидно, що $\lim_n x_n = 0$. Що і доводить той факт, що побудований ряд задовольняє умовам теореми Штейніца.

Лема 4.3 Якщо π – довільне переставлення натурального ряду, то для побудованого ряду переставлений ряд $\sum_k x_{\pi(k)}$ є розбіжним. Іншими словами,

$OC\left(\sum_k x_k\right) = \varnothing$ в Y.

Доведення. Оскільки

$$\lim_m \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i e_i \right\| = \infty,$$

то для будь-якого ε знайдеться номер m_0 такий, що для всіх $m > m_0$

$$\left\| \sum_{i=1}^{m} a_i e_i \right\| \ge \varepsilon.$$

Для кожного переставлення π і кожного N існує номер l_0, що охоплює пари блоків членів непереставленого ряду, які стоять один за одним, тобто $l_0 = 2\sum_{k=1}^{m} n_k$ – і скінчена індексна множина U_0, що йому відповідає, для яких виконані співвідношення:

$$\sum_{k=1}^{N} x_{\pi(k)} = \sum_{k=1}^{l_0} x_k + \sum_{k \in U_o} x_k ,$$

$$U_0 = \{\pi(1), \pi(2), ..., \pi(N)\} / \{1, 2, ..., l_0\}.$$

Знайдемо індексну множину V і числа $\{b_i\}_{i \in V}$, для яких

$$\sum_{k \in U_0} x_k = \sum_{i \in V} b_i e_i ,$$

тоді

$$\sum_{k=1}^{N} x_{\pi(k)} = \sum_{i=1}^{m} a_i e_i + \sum_{i \in V} b_i e_i .$$

Звідси, згідно теореми про існування базисної послідовності і (1.1) знайдеться $K > 0$ таке, що

$$\left\| \sum_{k=1}^{N} x_{\pi(k)} \right\| \geq K \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i e_i \right\|,$$

тоді

$$\lim_{N \leftarrow \infty} \left\| \sum_{k=1}^{N} x_{\pi(k)} \right\| = \infty .$$

Тому ряд $\sum_{k=1}^{N} x_{\pi(k)}$ розбіжний при будь-якому переставленні π. Лему доведено.

Лема 4.4 Якщо в банаховому просторі X існує підпростір Y, в якому наведено приклад ряду $\sum_n x_n$ з порожньою областю сум, що задовольняє умовам теореми Штейніца, то цей приклад справедливий і у всьому банаховому просторі X.

Дійсно, умова $\lim x_n = 0$ і той факт, що $OC\left(\sum_k x_k\right) = \varnothing$ очевидно справедливі в X. Покажемо, що вірна в X умова: для будь-якого $f \in X^*$.

Дійсно, доведемо, що виконується імплікація

$$\sum_n |f(x_n)| = \infty \Rightarrow \sum_n [f(x_n)]^+ = \sum_n [f(x_n)]^- = \infty. \qquad (4.2)$$

Якщо ж $f \in X^*$, то розглянемо обмеження функціоналу f на Y, тобто $f|_Y$. Очевидно, що $f|_Y \in Y^*$.

Оскільки $x_k \in Y$, то $f(x_k) = f|_Y(x_k)$. Для кожного $g \in Y^*$ вище було доведено, що

$$\sum_n |g(x_n)| = \infty \Rightarrow \sum_n [g(x_n)]^+ = \sum_n [g(x_n)]^- = \infty.$$

Нехай $g = f|_Y$, Звідси випливає що, виконано (4.2) для $f \in X^*$. Лему доведено.

Із лем 4.3 та 4.4 і сказаного вище витікає справедливість твердження.

Твердження 4.1 У будь-якому нескінченовимірному банаховому просторі X існує ряд $\sum_n x_n$, який задовольняє властивостям:

а) $\lim\limits_{n} x_n = 0$;

б) для будь-якого функціоналу $f \in X^*$ маємо:

$$\sum_n |f(x_n)| = \infty \Rightarrow \sum_n [f(x_n)]^+ = \sum_n [f(x_n)]^- = \infty,$$

Але цей ряд має порожню область сум, тобто $OC\left(\sum\limits_n x_n\right) = \varnothing$.

ВИСНОВКИ

Питання, розглянуті в роботі пов'язані з розділом математики, що вивчає переставлення рядів в банахових просторах.

У роботі вивчалось поняття базисної послідовності, введення якої пов’язане з наступним. Справа в тому, що не в кожному банаховому просторі існує базис. Цей факт було отримано П. Енфло в 1973 році. В той же час відомо, що в кожному банаховому просторі існує базисна послідовність.

У роботі були побудовані і вивчені приклади, які показують, що без додаткових обмежень розповсюдити на ряди в нескінченновимірному банаховому просторі теорему Штейніца неможливо. Розглянуті факти показують на істотні відмінності структури області сум рядів в скінченновимірних і нескінченновимірних просторах.

Спочатку були наведені відомі приклади рядів в нескінченновимірних просторах Марцинкевича-Корнілова і Островського, що є контрприкладами до теореми Штейніца в нескінченновимірному просторі. В першому із цих прикладів приведено умовно збіжного ряду нескінченновимірного банахового простору, який має нелінійну область сум. В другому прикладі область сум ряду, що задовольняє тим же умовам, являється незамкненою множиною. Крім прикладів Марцинкевича-Корнілова і Островського в роботі приведено ще один відомий приклад ряду, який також являється контрприкладом до теореми Штейніца. В цьому прикладі приведено ряд нескінченновимірного банахового простору, що задовольняє умовам теореми Штейніца, але має одноточкову область сум.

Узагальнення деяких розглянутих прикладів на довільний банаховий простір за допомогою теореми про існування базисної послідовності в нескінченновимірному банаховому просторі та критерію базисної послідовності було основною задачею роботи.

Перший із узагальнених нами прикладів – це приклад умовно збіжного ряду в нескінченновимірному просторі l_2, який має одноточкову область сум на довільний банаховий простір.

Другий приклад, узагальнений в даній роботі за допомогою теореми про існування базисної послідовності – це приклад ряду в просторі l_2, що задовольняє умовам:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$;
2. для будь-якого функціонала $f \in X^*$ маємо:

$$\sum_n |f(x_n)| = \infty \Rightarrow \sum_n [f(x_n)]^+ = \sum_n [f(x_n)]^- = \infty,$$

що має порожню область сум. Такий приклад не можна привести в скінченновимірному просторі в силу теореми Штейніца.

У прикладах розглядались ряди, які задовольняють одним умовам, але не задовольняють іншим. Тому доведення їх узагальнень було побудовано за допомогою ідеї, яка припускає вивчення збіжного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_i e_i$, де e_i - базисна послідовність простору X. Далі на основі цього ряду було вивчено ряд, отриманий комбінацією членів $\left\{\pm \frac{a_i}{n_i}\right\}$, де $\frac{a_i}{n_i} \to 0$.

Узагальнення вказаних прикладів може бути здійснено на основі іншої ідеї і навіть, можливо, без допомоги теореми про існування базисної послідовності.

Доведені факти показують на істотні відмінності структури області сум рядів в скінченновимірних та нескінченновимірних бананових просторах. Крім того, вивчені питання тісно переплітаються з питаннями, що широко розвиваються в даний час в області математики, яка вивчає поведінку переставлень рядів в банахових просторах.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Банах С. Курс функціонального аналізу (лінійні операції). Київ : Радянська школа, 1948. 216 с.

2. Березанський Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г. Функціональний аналіз. Львів : Чижиков І.Е., 2014. 589 с.

3. Д’яченко Н. М., Ткаченко І. Г. Ряди в скінченновимірних банановых просторах : навч. посіб. Запоріжжя : ЗНУ, 2013. 76 с.

4. Д’яченко Н.М. Про структуру слабкої і Чезарівської областей сум. *Вісник Запорізького держ. університету. Фіз.-мат. науки. Біологічні науки,* 1998. №1. -С.34-36.

5. Д’яченко Н.М., Красікова І.В., Панасенко Є.В. Математичний аналіз – ІІ: Числові та функціональні ряди: навчальний посібник для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра освітньо-професійних програм «Математика», «Середня освіта (Математика)». Запоріжжя : ЗНУ, 2018. 244 с.

6. Дмитрів К. М., Д’яченко Н. М. Порівняльний аналіз конформних плоских контактних задач про зношування за степеневим законом при фіксованій площадці контакту. *Computer Science and Applied Mathematics*, 2021. №2. С. 14-24.

7. Заболоцький М. В., Сторож О. Г., Тарасюк С. І. Математичний аналіз : підручник. Львів : Видавництво Львівської політехніки, 2015. 421 с.

8. Кадець В.М. Курс функціонального аналізу та теорії міри. Львів : Чижиков І.Е., 2014. 558 с.

9. Красікова І. В., Д’яченко Н. М. Функціональний аналіз : навчальний посібник для здо-бувачів ступеня вищої освіти бакалавра спеціальності «Математика» освітньо-професійної програми «Математика». Запоріжжя : ЗНУ, 2025. 95 с.

10. Шкіль М.І. Математичний аналіз : У 2 ч.: підручн. для студ. математ. спец. вузів затвердж. МОНУ. Ч. 1. К. : Вища школа, 2005. 447 с.

11. Шкіль М.І. Математичний аналіз : У 2 ч.: підручн. для студ. математ. спец. вузів затвердж. МОНУ. Ч. 2. К. : Вища школа, 2005. 510 с.

12. Antunes L. D., et al. Surjective isometries on Banach sequence spaces: a survey. *Constructive Operator Theory*. 2022. No. 9. P. 1–32.

13. Augusto A. Hypercyclicity and basic sequences criteria in Banach spaces. *ArXiv preprint*. 2019. arXiv:1911.08066. URL: https://arxiv.org/pdf/1911.08066 (дата звернення: 2025-12-09)

14. Barroso C. S. Remarks on the FPP in Banach spaces with unconditional Schauder basis. *ArXiv preprint.* 2023. arXiv:2302.11287. URL: https://arxiv.org/pdf/2302.11287 (дата звернення: 2025-12-09)

15. Cáceres-Rigo A. C., et al. Tight - minimal dichotomies in Banach spaces. *ArXiv preprint*. 2023. arXiv:2312.00721. URL: https://arxiv.org/pdf/2312.00721 (дата звернення: 2025-12-09)

16. Diestel J. Sequences and Series in Banach Spaces. New York : Springer-Verlag, 1984.

17. García-Beltrán, R., Hernández, S., Piñeiro, C. Quasicomplemented Subspaces of Banach Spaces and Separable Quotients. *Results in Mathematics*. 2023. Vol. 78. Article 158.

18. Kadets M. I., Kadets V. M. Series in Banach Spaces: Conditional and Unconditional Convergence. Basel : Birkhäuser, 1997. 290 p.

19. Kadets V. M., Kadets M. I. Rearrangements of Series in Banach Spaces. *Providence: American Mathematical Society*. 1991. 220 p. (Translations of Mathematical Monographs; vol. 86).

20. Kantorovich L.V., Krylov V.I. Approximate Methods of Higher. New York: Interscience. 1958. 681 p.

21. Moldovan, D. Rearrangement of Series in Banach Spaces and Applications. *Banach Journal of Mathematical Analysis*. 2022. Vol. 16, no. 4. P. 1–25.

22. On a characterization of convergence in Banach spaces with a Schauder basis. *Preprint*. 2022. URL: https://scispace.com/pdf/on-a-characterization-of-convergence-in-banach-spaces-with-a-1ft2jv488q.pdf (дата звернення: 2025-12-09)

23. Ramos M. P., Rueda P. The Backward Shift and Two Infinite-Dimension Phenomena in Banach Spaces. *Symmetry*. 2023. Vol. 15. No. 10. P. 1855.

24. Singer I. Bases in Banach Spaces. Vol. I. Berlin New York : Springer-Verlag, 1970. 370 p.

25. Steinitz E. Bedingt konvergente Peihen und konvex Systeme. *J. reine und angew. Math.* 1913. P. 128–175.