Міністерство освіти і науки України
Запорізький національний університет

В.В. Леонтьєва, Н.О. Кондрат'єва

ІГРОВІ ТА ЕКСПЕРТНІ МЕТОДИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

Курс лекцій
з навчальної дисципліни
блоку вибіркових дисциплін в межах університету
підготовки бакалавра
денної та заочної форм здобуття освіти



Затверджено
вченою радою ЗНУ
Протокол №
від

Запоріжжя
2026

УДК:519.816(075.8)
Л 478

Леонтьєва В. В., Кондрат’єва Н. О. Ігрові та експертні методи прийняття рішень : курс лекцій з навчальної дисципліни блоку вибіркових дисциплін в межах університету підготовки бакалавра денної та заочної форм здобуття освіти. Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2026. 99 с.

Курс лекцій містить теоретичні положення, основні поняття, принципи, підходи, алгоритми та методи складання та розв’язання задач прийняття рішень, рекомендації щодо вивчення курсу «Ігрові та експертні методи прийняття рішень» та спрямований на оволодіння системними знаннями з основних теоретичних і практичних засад теорії прийняття рішень, методологічних основ дослідження проблемних ситуацій, складання задач прийняття рішень, отримання досвіду із застосування ігрових та експертних методів розв’язання задач прийняття рішень та основних сфер застосування цих задач.

Рецензент
С. І. Гоменюк, доктор технічних наук, професор, професор кафедри програмної інженерії

Відповідальний за випуск
С. М. Гребенюк, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри фундаментальної та прикладної математики

ЗМІСТ

ВСТУП **4**
ЛЕКЦІЯ 1. МЕТОДОЛОГІЧНІ ОСНОВИ ТЕОРІЇ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ **6**
1.1 Вступ до курсу. Особливості методології прийняття рішень 6
1.2 Методологічні основи теорії прийняття рішень. Основні поняття та визначення 7
1.3 Методика дослідження задач прийняття рішень 12
1.4 «Типовий» процес прийняття рішення 12
1.5 Загальна постановка однокритеріальної задачі прийняття рішень 14
ЛЕКЦІЯ 2. КЛАСИФІКАЦІЯ ЗАДАЧ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ **16**
2.1 Основні ознаки та класифікації задач прийняття рішень 16
2.2 Класифікація задач прийняття рішень в умовах невизначеності 18
ЛЕКЦІЯ 3. ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ТА РИЗИКУ **24**
3.1 Методологія теорії прийняття рішень в умовах невизначеності та ризику. Матриця рішень та оціночні функції 24
3.2 Класичні критерії теорії прийняття рішень 27
3.3 Похідні критерії теорії прийняття рішень 32
3.4 Розширені критерії теорії прийняття рішень 34
3.5 Алгоритм розв’язання задач прийняття рішень в умовах невизначеності та ризику із використанням критеріїв прийняття рішень 36
ЛЕКЦІЯ 4. ЕКСПЕРТНІ МЕТОДИ В ТЕОРІЇ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ. РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ ІЗ ВИКОРИСТАННЯМ МЕТОДУ ДЕЛЬФІ **38**
4.1 Основні поняття та визначення. Проблеми експертного оцінювання, види експертних оцінок та основні етапи підготовки й проведення експертизи 39
4.2 Загальні методи експертного оцінювання 41
4.3 Методи обробки експертних оцінювань 45
4.3.1 Статистична обробка анкетованих даних експертного опитування 45
4.3.2 Математико-статистичні методи обробки експертних оцінювань 48
4.4 Розв’язання задач прийняття рішень із використанням методу Дельфі 50
ЛЕКЦІЯ 5. МЕТОД БЕЗПОСЕРЕДНЬОГО РАНЖИРУВАННЯ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ ДЛЯ РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ **56**
5.1 Поняття про ранжування. Основні види представлення ранжируваного ряду. Побудова ранжируваного ряду 56
5.2 Сутність та методологія експертного оцінювання за методом безпосереднього ранжирування. Визначення узгодженості суджень експертів 59
5.3 Особливості та умови використання методу безпосереднього ранжирування 60

ЛЕКЦІЯ 6. МЕТОД ПАРНИХ ПОРІВНЯНЬ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ 62
6.1 Сутність та методологія експертного оцінювання за методом парних порівнянь 62
6.2 Визначення узгодженості суджень експертів 64
6.3 Особливості та умови використання методу парних порівнянь 65
ЛЕКЦІЯ 7. ФОРМАЛІЗАЦІЯ КОНФЛІКТНИХ СИТУАЦІЙ ЗА ДОПОМОГОЮ ТЕОРІЇ ІГОР 66
7.1 Сутність конфліктних ситуацій та передумови їх виникнення 66
7.2 Основні поняття й визначення теорії ігор 67
7.3 Класифікація ігор 69
ЛЕКЦІЯ 8. МАТРИЧНІ ІГРИ. ГРА ДВОХ ОСІБ З НУЛЬОВОЮ СУМОЮ ВИГРАШУ. РОЗВ'ЯЗАННЯ МАТРИЧНИХ ІГОР У ЧИСТИХ СТРАТЕГІЯХ 71
8.1 Гра двох осіб з нульовою сумою виграшу 72
8.2 Принципи вибору стратегій гравцями в матричній грі з нульовою сумою виграшу. Розв'язання матричних ігор у чистих стратегіях 75
ЛЕКЦІЯ 9. ГРА ДВОХ ОСІБ З НУЛЬОВОЮ СУМОЮ ВИГРАШУ. РОЗВ'ЯЗАННЯ МАТРИЧНОЇ ГРИ З МАТРИЦЕЮ ГРИ (2×2) В ЗМІШАНИХ СТРАТЕГІЯХ. ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ МАТРИЧНИХ ІГОР 78
9.1 Розв'язання матричної гри в змішаних стратегіях 78
9.2 Властивості розв'язків матричних ігор 82
9.2.1 Домінування чистих стратегій 82
9.2.2 Строго детерміновані й не строго детерміновані ігри з матрицею (2×2). Принципи розв'язання 83
ЛЕКЦІЯ 10. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ІГОР В ЗМІШАНИХ СТРАТЕГІЯХ. ГРАФОАНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ІГОР З ПЛАТІЖНОЮ МАТРИЦЕЮ РОЗМІРНІСТЮ $(\boldsymbol{2\times n})$ ТА $(\boldsymbol{m\times 2})$ 88
10.1 Умови використання графоаналітичного (графічного) методу розв'язання матричних ігор у змішаних стратегіях 88
10.2 Основні етапи реалізації графоаналітичного методу. Розв'язання матричних ігор з платіжною матрицею розмірністю $(2\times n)$ та $(m\times 2)$ графоаналітичним методом 89
ЛЕКЦІЯ 11. ЧИСЕЛЬНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ІГОР В ЗМІШАНИХ СТРАТЕГІЯХ 91
11.1 Сутність чисельного методу розв'язання матричних ігор у змішаних стратегіях 91
11.2 Основна ідея та етапи реалізації чисельного методу розв'язання матричних ігор у змішаних стратегіях 91
РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА 94
ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА 96

ВСТУП

Здатність приймати рішення є ключовою компетенцією сучасного фахівця, конкурентоспроможного на ринку праці. Курс «Ігрові та експертні методи прийняття рішень» входить до циклу дисциплін вільного вибору студентів в межах університету та передбачає ґрунтовне ознайомлення з поняттями, принципами та методикою прийняття рішень в умовах невизначеності та конфліктності, опанування навичок розробки та практичного впровадження методів вирішення проблемних ситуацій при здійсненні ефективного керування системами й процесами, кількісного обґрунтування рішень щодо організації керування.

Метою вивчення навчальної дисципліни «Ігрові та експертні методи прийняття рішень» є оволодіння системними знаннями з основних теоретичних і практичних засад теорії прийняття рішень, методологічних основ дослідження проблемних ситуацій, складання задач прийняття рішень, отримання досвіду із застосування ігрових та експертних методів розв'язання задач прийняття рішень та основних сфер застосування цих задач.

Основними завданнями вивчення дисципліни «Ігрові та експертні методи прийняття рішень» є засвоєння теоретичних знань з основних понять, типів задач, алгоритмів, напрямів й сфери застосування теорії прийняття рішень; набуття вмінь і навичок з формулювання задач прийняття рішень; використання набутих знань застосування методів та алгоритмів для аналітичного та чисельного розв'язання задач прийняття рішень; оволодіння здатністю використовувати набуті навички до застосування методології прийняття рішень при розв'язанні міждисциплінарних прикладних задач; набуття вмінь та навичок надання інтерпретації одержаних результатів; розвиток навичок творчого дослідження, логічного мислення та підвищення загального рівня математичної культури при розв'язанні практичних задач математичного моделювання і прийняття рішень.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен набути таких компетентностей:

– здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях;

– здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу;

– вміння виявляти, ставити та вирішувати проблеми;

– здатність приймати обґрунтовані рішення;

– здатність застосовувати знання та методи математики, природничих наук, інженерії та технологій у професійній діяльності.

Програмні результати навчання*:*

– демонструвати знання й розуміння основних концепцій, принципів, методів та підходів до прийняття рішень і використовувати їх на практиці;

– володіти методиками вибору раціональних методів та алгоритмів розв'язання прикладних практичних задач прийняття рішень;

– розв'язувати основні задачі з теорії прийняття рішень, проводити аналіз отриманих розв'язків, робити відповідні висновки та визначати найімовірніший напрямок розвитку об'єкту дослідження на основі обраного рішення.

Курс «Ігрові та експертні методи прийняття рішень» є дисципліною з циклу вільного вибору студентів в межах університету. Знання та навички, набуті студентами при вивченні курсу «Ігрові та експертні методи прийняття рішень», можуть бути використані при здійсненні подальшої професійної діяльності.

У запропонованому виданні подано тематику і зміст лекційних занять відповідно до силабуса навчальної дисципліни, визначено послідовність опрацювання студентом програмного матеріалу.

Автори курсу лекцій ставили своєю метою доступний виклад основних понять, підходів та методів сучасної теорії прийняття рішень, надання достатньої кількості завдань для самоконтролю знань здобувачів освіти.

Лекція 1. Методологічні основи теорії прийняття рішень

Мета лекції: сформувати у студентів уявлення про сутність, предмет, основні поняття та задачі прийняття рішень; розглянути основні етапи дослідження задач прийняття рішень; ознайомитись із загальною постановкою однокритеріальної ЗПР.

План лекції

1.1 Вступ до курсу. Особливості методології прийняття рішень.
1.2 Методологічні основи теорії прийняття рішень. Основні поняття та визначення.
1.3 Методика дослідження задач прийняття рішень.
1.4 «Типовий» процес прийняття рішення.
1.5 Загальна постановка однокритеріальної задачі прийняття рішень.

Перелік ключових термінів і понять з теми: *проблемна ситуація; задача прийняття рішень; дисциплінуючі умови; операція; особа, що приймає рішення; стратегія; види стратегій; оперуюча сторона; критерій оптимальності; «типовий» процес прийняття рішення; однокритеріальна задача прийняття рішень.*

1.1 Вступ до курсу. Особливості методології прийняття рішень

Зростаюча складність управлінських задач у різних сферах людської діяльності обумовлює використання комплексних підходів до їх розв’язання. Сучасні економічні, соціальні та технічні системи характеризуються високим рівнем невизначеності, наявністю множини зацікавлених сторін з різними інтересами, необхідністю врахування як кількісних, так і якісних факторів при прийнятті рішень.

«Ігрові та експертні методи прийняття рішень» являють собою комплекс математичних та аналітичних підходів, спрямованих на розв'язання складних управлінських задач в умовах невизначеності, ризику та конфліктних ситуацій. Ці методи розвивалися як відповідь на потребу у формалізації процесів прийняття рішень у різноманітних сферах людської діяльності, де класичні підходи виявляються недостатніми.

Кожен з цих методів має свою специфіку та область застосування, проте разом вони утворюють цілісний інструментарій для розв'язання широкого спектру практичних задач.

Фундаментальну частину теорії прийняття рішень становлять ***статистичні методи прийняття рішень в умовах невизначеності та ризику***. Вони враховують різні аспекти невизначеності та ставлення особи, що приймає рішення, до ризику та застосовуються в ситуаціях, де невизначеність може бути описана за допомогою імовірнісних характеристик. Такі методи базуються на математичному апараті теорії ймовірностей та математичної

статистики, використовуючи різноманітні критерії прийняття рішень, що використовують оціночні функції для формалізації процесу вибору оптимальних рішень та враховують як очікувані результати, так і можливі ризики. Статистичні методи особливо ефективні при наявності статистичних даних про досліджувані процеси та можливості оцінки ймовірностей різних сценаріїв розвитку подій.

Експертні методи прийняття рішень доповнюють формальні підходи можливістю врахування якісних факторів та використання досвіду фахівців у відповідних областях. Вони займають особливе місце при розв'язанні слабо структурованих та неструктурованих проблем, де формальні методи виявляються недостатніми через складність або неможливість точного математичного опису ситуації. Ці методи базуються на систематизації та формалізації експертних знань та оцінок.

Ігрові методи в теорії прийняття рішень розширюють можливості аналізу, додаючи інструментарій для дослідження ситуацій з активною протидією або конфліктом інтересів. Вони дозволяють моделювати взаємодію кількох учасників процесу прийняття рішень, кожен з яких має власні цілі та стратегії. Теоретико-ігровий підхід забезпечує формальний апарат для аналізу стратегічної взаємодії та пошуку оптимальних рішень у конфліктних ситуаціях, дозволяє моделювати ситуації, де результат залежить від дій кількох сторін, кожна з яких намагається максимізувати власну вигоду.

Практичне застосування цих методів охоплює широкий спектр задач: від стратегічного планування в бізнесі до управління складними технічними системами. У економіці та менеджменті вони використовуються для оптимізації інвестиційних портфелів, оцінки ризиків, вибору стратегій розвитку. В технічних системах ці методи застосовуються для управління виробничими процесами, забезпечення безпеки складних систем, оптимізації логістичних операцій.

1.2 Методологічні основи теорії прийняття рішень. Основні поняття та визначення

В останні десятиріччя спостерігається швидке поширення застосування різних галузей знань, особливо математичних, в моделюванні, аналізі та керуванні об’єктами дослідження [1-5]. При цьому спостерігається постійна взаємодія і взаємозбагачення між постановками практичних задач прийняття рішень та розробкою математичного апарату, необхідного для їх вирішення.

Основна увага при цьому приділяється науковому аналізу ряду можливих способів дії особи, що приймає рішення, з метою знаходження такого з них, який в певних умовах був би найкращим. Іншими словами, проводиться розгляд проблеми прийняття оптимальних рішень стосовно об'єктів різної природи в різних умовах їх існування.

Такий розгляд проводиться в рамках єдиної наукової дисципліни – ***теорії прийняття рішень* (*ТПР*).**

Проблема прийняття рішень при цьому має універсальний, усеосяжний характер [3, 6]. Вона виникає практично у будь-якій сфері цілеспрямованої людської діяльності і складає її принципову суть.

Для розуміння поняття проблеми розглянемо поняття мети дослідження.

Під ***метою*** розуміється ідеальне представлення бажаного стану або результату діяльності.

Якщо фактичний стан не відповідає бажаному, то має місце ***проблема***.

Вироблення плану дій з усунення проблеми складає ***сутність задачі прийняття рішень***.

Проблеми можуть виникати в наступних випадках:

- функціонування системи в даний момент не забезпечує досягнення поставлених цілей;
- функціонування системи в майбутньому не забезпечить досягнення поставлених цілей;
- потрібна зміна цілей діяльності і т. ін.

Проблема завжди пов'язана з певними умовами, які узагальнено називають ***ситуацією***.

Сукупність проблеми і ситуації утворює ***проблемну ситуацію***. Виявлення і опис проблемної ситуації дає початкову інформацію для постановки задачі прийняття рішень.

В такому випадку ***об'єктом дослідження ТПР*** виступає ситуація прийняття рішень, або так звана проблемна ситуація.

При цьому ***проблемну ситуацію*** (ситуацію, в якій відбувається прийняття рішень) характеризують наступні основні риси [7, 8]:

– *наявність мети (цілей).* Необхідність прийняття рішення диктується наявністю деякої мети, яку треба досягти: наприклад, виконати планове завдання, вибрати тип верстата, призначити план перевезень і так далі. Якщо ж мета не поставлена, то не виникає і необхідність приймати яке-небудь рішення;

– *наявність альтернативних ліній поведінки.* Рішення приймаються в умовах, коли існує більше за один спосіб досягнення мети, або, інакше, декілька альтернатив досягнення мети. З різними альтернативами можуть бути пов'язані різні витрати і різна вірогідність досягнення мети. Ці витрати і вірогідність не завжди можуть бути точно визначені. Тому часто прийняття рішень пов'язане з неясністю і невизначеністю. Якщо ж існує лише одна лінія поведінки, то вибору немає і, отже, рішення приймати не потрібно, воно є очевидним;

– *наявність обмежуючих чинників.* Рішення зазвичай приймаються в умовах дії великого числа чинників, що обмежують можливість вибору способів дій. Такі чинники ще називають *дисциплінуючими умовами*.

  Обмежуючі чинники, що підлягають розгляду, можна укрупнено розбити на три основні групи:

- *економічні чинники,* пов'язані з ресурсами (наприклад, час, грошові засоби, трудові ресурси, виробничі можливості і т. ін.);
- *технічні чинники,* які безпосередньо пов'язані з інженерним аналізом і виробленням вимог до технічних характеристик об'єктів (наприклад, габарити, вага, міцність, надійність, точність, температурні умови і т. ін.);
- *соціальні чинники* (у тому числі і чисто людські), які виражають вимоги як політичної й соціальної доцільності здійснення тієї або іншої альтернативи, так і людської етики і моралі.

Вказані чинники накладають обмеження на можливості досягнення поставленої мети. Очевидно, що відсутність обмежень істотно спрощує задачу прийняття рішення.

Предметом дослідження ТПР виступають загальні закономірності вироблення рішень в проблемних ситуаціях, а також закономірності, властиві процесу моделювання основних елементів проблемної ситуації.

Основним призначенням ТПР є розробка для практики науково-обгрунтованих рекомендацій по організації і технології побудови процедур підготовки і прийняття рішень в складних ситуаціях із застосуванням сучасних методів і засобів (в першу чергу, комп'ютерів і комп'ютерних систем).

Задача прийняття рішення (ЗПР) виникає в тому і тільки у тому випадку, коли існує мета, яку треба досягти, коли можливими є різні способи її досягнення і існують чинники, що обмежують можливості досягнення мети. Виявлення усіх трьох вказаних основних елементів ЗПР має обов'язково передувати її безпосередньому рішенню.

В основі сучасної ТПР лежить *комплексна концепція прийняття рішень*, яка вимагає врахування усіх істотних аспектів проблемної ситуації і раціональної інтеграції як логічного мислення і інтуїції людини, так і математичних і технічних засобів [8, 9]. Згідно цієї концепції ***прийняття рішення*** – це свідомий вибір з ряду (альтернатив).

Цей вибір робить ***особа, що приймає рішенн***я (***ОПР***), яка є суб'єктом всякого рішення та в ролі якої виступає людина (*індивідуальне ОПР*) або група осіб (*групове ОПР*), що мають права вибору рішення і несуть відповідальність за його наслідки.

Одним з основних понять ТПР є поняття ***операції***, тобто організованої діяльності у досліджуваній сфері життя, об'єднаної єдиним задумом, спрямованої на досягнення певної мети і такої, що має характер повторюваності, тобто багатократності.

В якості прикладів різних операцій можна навести, наприклад, наступні:

1) виробнича діяльність галузі промисловості, що випускає деяку продукцію, спрямована на зменшення викидів хімічних речовин;
2) організація обчислювальної мережі з заданої кількості комп’ютерів, що забезпечує зберігання та обробку з найменшим часом доступу заданих обсягів інформації;

3) відображення повітряного нальоту засобами системи протиповітряної оборони;
4) сукупність заходів, спрямованих на підвищення надійності деякого технічного пристрою;
5) сукупність заходів, спрямованих на підвищення якості навколишнього середовища;
6) розподіл певних типів ресурсів, які відповідають сукупності вимог і забезпечують отримання найбільшого прибутку.

Сукупність осіб і технічних пристроїв, які прагнуть в цій операції до досягнення деякої мети, називається ***оперуючою стороною***.

> Так, в першому наведеному вище прикладі операції (з галуззю промисловості) оперуючою стороною є особи, відповідальні за прийняття рішень відносно діяльності підприємств, що входять до складу галузі.

У операції можуть брати участь одна або декілька оперуючих сторін, переслідуючих різні, неспівпадаючі цілі.

Неспівпадання цілей оперуючих сторін створює ***конфліктну ситуацію***. Подібні операції називаються ***багатосторонніми*** або ***конфліктними***.

> Так, в третьому наведеному вище прикладі операції результат операції залежить від діяльності двох сторін, переслідуючих протилежні цілі : нападаючої сторони, що здійснює повітряний наліт, і сторони, яка обороняється, відбиває наліт.

Разом з оперуючими сторонами в операції можуть брати участь арбітри і природні сили, поведінка яких не підпорядкована прагненню до досягнення цілей операції.

Для досягнення мети оперуюча сторона повинна мати в розпорядженні деякий *запас активних засобів (ресурсів)*, використовуючи або витрачаючи які вона може домагатися досягнення мети. В якості таких ресурсів, залежно від сутності операції, можуть виступати, наприклад, виробниче обладнання, запаси сировини, робоча сила, грошові кошти, засоби протидії в системі протиповітряної або протиракетної оборони і т. ін.

Операція є керованим заходом. Оперуюча сторона керує операцією, обираючи ті або інші способи використання ресурсів – ***способи дій*** (в якості синонімів терміну «спосіб дії» часто використовуються наступні терміни: ***альтернатива, стратегія, керування, рішення***).

Спосіб дій – один із способів досягнення мети або один з кінцевих варіантів рішень.

Можливості оперуючої сторони по керуванню операцією завжди є обмеженими, оскільки завжди є обмеженими рядом природних причин ресурси, що перебувають у її розпорядженні. Цей факт проявляється в наявності обмежень – ***дисциплінуючих умов*** та у виборі способів дій оперуючої сторони – ***стратегій***.

Стратегії, що задовольняють накладеним обмеженням, називаються ***можливими*** або ***допустимими*** (у сенсі накладених обмежень).

Реалізація тієї або іншої допустимої стратегії оперуючої сторони зазвичай призводить до різних ***результатів операції***.

Щоб порівнювати між собою якість різних стратегій, треба мати можливість оцінювати відповідні результати операції. Результат операції оцінюється за допомогою деяких ***критеріїв якості*** (інакше: ***критеріїв ефективності*** або ***критеріїв оптимальності***).

Критерій оптимальності є математичним вираженням мети операції (математичною моделлю мети операції), що дозволяє кількісно оцінити міру досягнення цієї мети.

Стратегія, найкраща в сенсі вибраного критерію оптимальності, тобто яка доставляє йому необхідне екстремальне (максимальне або мінімальне) значення, називається ***оптимальною стратегією*** (синонімами цьому терміну є терміни оптимального рішення, оптимального керування і т. п.).

Дослідження операції завершується рекомендаціями по вибору оптимальної стратегії. Саме ж прийняття рішення, тобто остаточний вибір стратегії і її реалізація, виходить за рамки дослідження і відноситься до компетенції відповідальної особи – ***керівника операції***.

Таким чином, теорію прийняття рішень, можливо, правильніше було б називати ***теорією обґрунтування рішень***.

Отже, ***наукове обґрунтування рішень*** – це передусім кількісна оцінка можливих рішень і вибір найкращого з них за деяким об'єктивним критерієм. Тому в кількісній теорії прийняття рішення в якості критерію оптимальності може виступати тільки такий, який допускає кількісну оцінку. У кількісній теорії прийняття рішень широко оперують поняттями ***показник*** і ***критерій***.

Під ***показником*** в ТПР слід розуміти кількісну оцінку якоїсь властивості досліджуваного об'єкту. При цьому властивості більшості складних об'єктів зазвичай є багатогранними. Для їх кількісної характеристики має бути використана сукупність багатьох показників.

> Так, наприклад, транспортний літак можна охарактеризувати за допомогою таких показників, як крейсерська швидкість, безпосадочна дальність польоту, вантажопідйомність, злітна вага, потрібна довжина злітної і посадочної смуги, і багатьох інших.

В ТПР ***критерієм*** є засіб для кількісної оцінки рішень, порівняння їх між собою і вибору найкращого (оптимального).

У сучасній науці про прийнятті рішень передбачається, що варіанти рішень (***альтернативи***) характеризуються різними показниками їх привабливості для особи, що приймає рішення (ОПР). Ці показники називають ознаками, факторами, атрибутами, критеріями.

Таким чином, під ***критерієм*** будемо розуміти спосіб вираження відмінностей в оцінці альтернативних варіантів з точки зору учасників процесу вибору, тобто розглядати його як показник привабливості варіантів рішень. Саме за допомогою критерію ОПР буде судити про перевагу результатів, а, отже, і способів проведення операції щодо вирішення проблеми.

У досить простих ситуаціях прийняття рішень вдається обмежитися єдиним критерієм оптимальності. Відповідні задачі прийняття рішень називаються ***одноцільовими*** (***однокритеріальними***) ***ЗПР***. Інакше мають місце ***багатоцільові*** (***багатокритеріальні***) ***ЗПР***.

<u>Для будь-якої задачі прийняття рішень повинна існувати трійка</u>:

< мета (критерії), альтернативи, результати >.

Якщо один з компонентів буде відсутнім, то проблема вважатиметься не поставленою.

1.3 Методика дослідження задач прийняття рішень

Методика дослідження задач прийняття рішень полягає в реалізації наступних трьох етапів [7, 9].

<u>Етап 1</u>. *Побудова математичної моделі ЗПР*. На даному етапі для побудови математичної моделі задачі прийняття рішення необхідно задати наступні множини:

- *множина допустимих альтернатив* (стратегій, варіантів, дій, рішень, планів і т.д.). При цьому передбачається, що множина допустимих альтернатив містить не менше двох альтернатив – інакше потреба в прийнятті рішення відпадає;
- *множина можливих станів середовища*. При цьому під ***середовищем*** розуміється те, що визначає при кожній фіксованій альтернативі появу того чи іншого результату;
- *множина можливих результатів*.

<u>Етап 2</u>. *Формування принципу оптимальності і знаходження оптимального рішення*. Реалізація даного етапу пов'язана з виведенням принципу оптимальності. Оскільки оптимального рішення для довільної ЗПР не існує, то розглядають окремі класи задач прийняття рішень і для кожного класу формують свій принцип оптимальності. Слід зазначити, що для ЗПР визначеного класу може існувати кілька оптимальних рішень. Це пояснює необхідність третього етапу.

<u>Етап 3</u>. *Аналіз отриманих результатів*. На даному етапі проводиться аналіз отриманих результатів, який полягає в співвіднесенні формально отриманих рекомендацій з вимогою ЗПР. Якщо оптимальне рішення, з якихось причин, виявляється неприйнятним, то це призводить або до вибору іншого оптимального рішення (якщо воно існує), або до зміни принципу оптимальності, або до зміни самої математичної моделі ЗПР.

1.4 «Типовий» процес прийняття рішення

Процеси прийняття рішень, що реалізуються в найрізноманітніших сферах діяльності, мають дуже багато спільного, тому необхідно мати деяку універсальну, «типову» схему процесу прийняття рішення, що встановлює найбільш доцільний набір і послідовність дій, вироблюваних при розв’язанні ЗПР.

«Типовий» процес прийняття рішення має наступну послідовність [8]:

1) попереднє формулювання проблеми;
2) визначення цілей операції і вибір відповідних критеріїв оптимальності;

3) виявлення і формулювання дисциплінуючих умов;
4) складання можливо повнішого списку альтернатив і попередній їх аналіз з метою відкидання явно неефективних;
5) збір необхідної інформації і прогнозування змін параметрів операції в майбутньому;
6) точне формулювання постановки задачі;
7) розробка математичної моделі операції, що дозволяє оцінювати ефективність кожної альтернативи;
8) аналіз і вибір методу розв'язання задачі і розробка алгоритму рішення;
9) оцінка альтернатив і визначення найбільш ефективних;
10) прийняття рішення відповідальним керівником;
11) виконання рішення і оцінка результатів.

Структурна схема процесу прийняття рішення представлена на рис. 1.1 [9, 10].

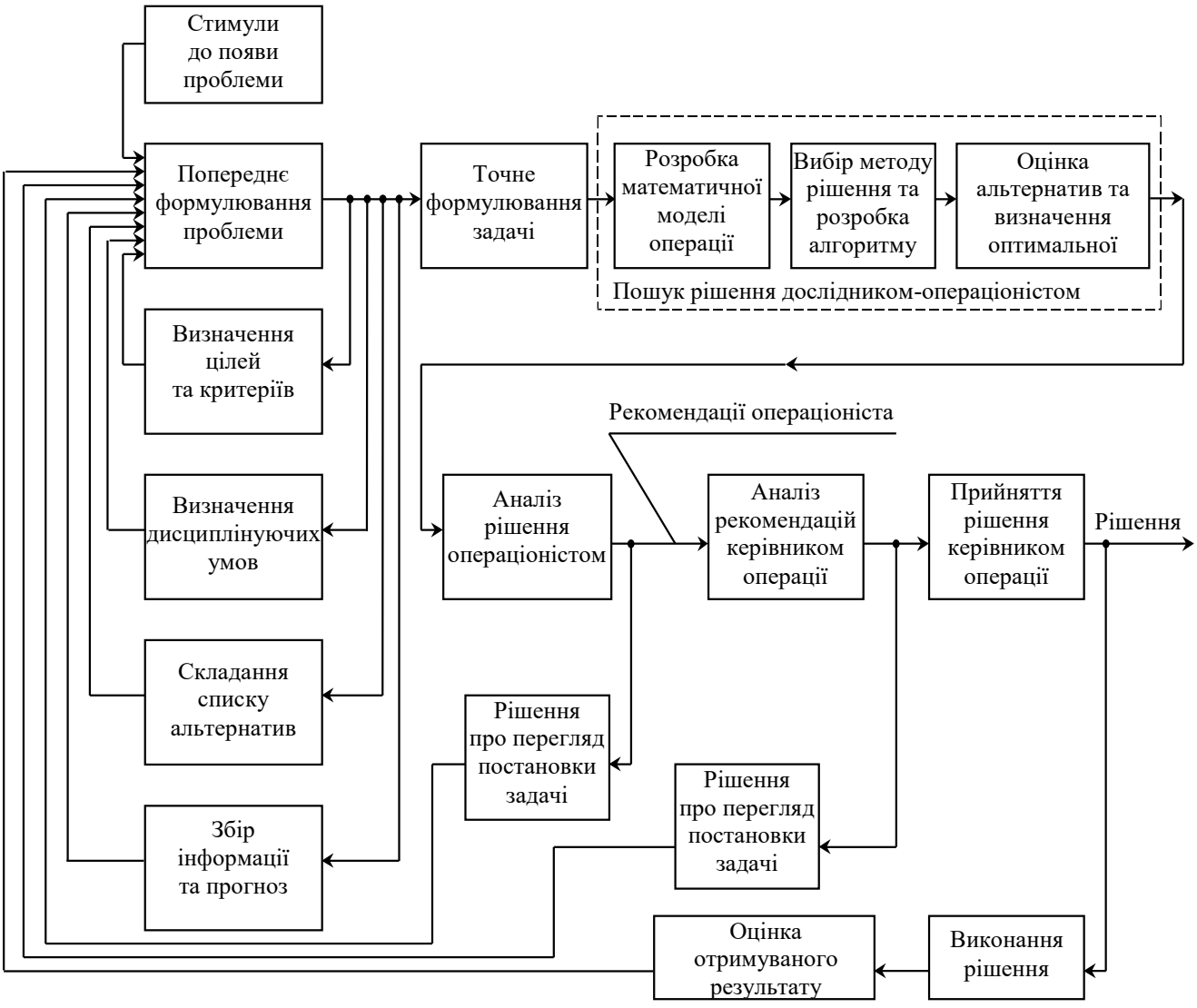


Рисунок 1.1 – Структурна схема процесу прийняття рішення

1.5 Загальна постановка однокритеріальної задачі прийняття рішень

Нехай є деяка операція, тобто керований захід, на результат якого оперуюча сторона може в якійсь мірі впливати.

Ефективність визначеного керування характеризується деяким критерієм оптимальності F, що допускає кількісне представлення. Критерій оптимальності може бути заданий або у вигляді функції (за допомогою одного із способів завдання функції), або, в складніших випадках, у вигляді функціонала, або мати лише алгоритмічне завдання.

Величина критерію оптимальності залежить від ряду чинників, які можна розбити на дві групи [9]:

1) *контрольовані (керовані) чинники*, вибір яких знаходиться у розпорядженні оперуючої сторони. Кожен конкретний вибір значень контрольованих чинників є стратегією оперуючої сторони;
2) *неконтрольовані (некеровані) чинники*, на які оперуюча сторона впливати не може. До складу неконтрольованих чинників може входити і час, якщо в операції беруть участь динамічні об'єкти, змінюючи свої властивості і поведінку в часі. Неконтрольовані чинники залежно від інформованості про них дослідника операції можна розбити на три групи:
   а) *детерміновані чинники* – невипадкові фіксовані чинники (невипадкові величини), значення яких повністю відомі оперуючій стороні до проведення операції;
   б) *стохастичні чинники* – випадкові фіксовані чинники (випадкові величини) і процеси з відомими оперуючій стороні законами розподілу;
   в) *невизначені чинники*, для кожного з яких відома тільки галузь можливих знань чинника або область, усередині якої знаходиться закон розподілу, якщо чинник випадковий. У останньому випадку має місце невизначений закон розподілу випадкового чинника. Значення невизначених чинників є невідомими оперуючій стороні у момент прийняття рішення про вибір оптимальної стратегії.

Відповідно до виділених чинників критерій оптимальності F можна представити у вигляді залежності

$$F = F(X_1, X_2, ..., X_l, A_1, A_2, ..., A_p, Y_1, Y_2, ..., Y_q, Z_1, Z_2, ..., Z_r, t), \qquad (1.1)$$

де $X_1, ..., X_l$ – контрольовані чинники; $A_1, ..., A_p$ – неконтрольовані детерміновані чинники; $Y_1, ..., Y_q$ – неконтрольовані стохастичні чинники; $Z_1, ..., Z_r$ – неконтрольовані невизначені фактори. Величини X, A, Y, Z в загальному випадку можуть бути масивами будь-якої розмірності: скалярами, векторами, матрицями і т.д.

Величини контрольованих (керованих) чинників зазвичай обмежені низкою природних причин, наприклад обмеженістю наявних для операції ресурсів.

Математично ці обмеження записуються у вигляді дисциплінуючих умов:

$$g_i = g_i(X_1,...,X_l, A_1,...,A_{p_i}, Y_1,...,Y_{q_i}, Z_1,...,Z_{r_i}, t) \{\leq, =, \geq\} b_i, \quad i \in \overline{1,m}, \quad (1.2)$$

де $A_1,...,A_{p_i}$ – неконтрольовані детерміновані чинники; $Y_1,...,Y_{q_i}$ – неконтрольовані стохастичні чинники; $Z_1,...,Z_{r_i}$ – неконтрольовані невизначені фактори.

Умови (1.2) визначають області $\Omega_{X_1},...,\Omega_{X_l}$ простору, всередині яких розташовані можливі (допустимі) значення контрольованих факторів $X_1,...,X_l$.

Аналогічним чином можуть бути обмежені і області можливих значень неконтрольованих чинників. У ЗПР зазвичай передбачається, що ці області відомі оперуючій стороні.

Оскільки критерій оптимальності є кількісною мірою ступеня досягнення мети операції, то математично мета операції виражається в прагненні до максимально можливого збільшення (або зменшення) значення критерію *F*, що можна записати в вигляді

$$F \to \max(\text{або } \min). \quad (1.3)$$

Засобом досягнення цієї мети є відповідний вибір оперуючою стороною керувань $X_1,...,X_l$ з областей $\Omega_{X_1},...,\Omega_{X_l}$ їх допустимих значень.

Отже, перед особою, відповідальною за прийняття рішення, стоїть задача яку можна сформулювати наступним чином: при заданих значеннях і характеристиках фіксованих неконтрольованих факторів $A_1,...,A_p$, $Y_1,...,Y_q$ з урахуванням невизначених факторів $Z_1,...,Z_r$ знайти оптимальні значення $\overline{X}_1,...,\overline{X}_l$ керувань $X_1,...,X_l$ з областей $\Omega_{X_1},...,\Omega_{X_l}$ їх допустимих значень, які по можливості звертали б в максимум (мінімум) критерій оптимальності *F*.

Наведене загальне формулювання задачі прийняття рішення не є строго математичним, про що свідчить обмовка «по можливості». Ця нестрогість обумовлена насамперед наявністю неконтрольованих невизначених, а також стохастичних чинників.

Питання для самоконтролю

1. Наведіть основні риси, що характеризують ситуацію, в якій відбувається прийняття рішень.
2. Що таке критерії? Наведіть приклади критеріїв.
3. Що таке альтернативи? Наведіть приклади альтернатив.
4. Сформулюйте основне призначення ТПР.
5. Що дає початкову інформацію для постановки ЗПР?
6. Що означає, що виникла ЗПР?
7. Сформулюйте послідовність «типового» процесу прийняття рішення.
8. Як математично виражається мета операції?
9. Наведіть групи на які можна розбити критерії оптимальності.
10. Що являють собою стохастичні чинники?

Лекція 2. Класифікація задач прийняття рішень

Мета лекції: ознайомити з класифікацією задач прийняття рішень за різними класифікаційними ознаками.

План лекції

2.1 Основні ознаки та класифікації задач прийняття рішень.
2.2 Класифікація задач прийняття рішень в умовах невизначеності.

Перелік ключових термінів і понять з теми: *класифікаційні ознаки задач прийняття рішень; однокритеріальні та багатокритеріальні задачі; статичні та динамічні задачі; задачі в умовах визначеності, ризику та невизначеності; класифікаційне «дерево» задач прийняття рішень; види невизначеностей; особливості впливу окремих факторів на результат операції; класифікація задач прийняття рішень в умовах невизначеності.*

2.1 Основні ознаки та класифікації задач прийняття рішень

ЗПР є вельми різноманітними. У зв'язку з цим виникає необхідність їх класифікувати.

В основі будь-якої класифікації лежать *ознаки*, за якими множина об'єктів поділяється на підмножини – класи.

Так, ЗПР можна класифікувати за різними ознаками. Розглянемо основні ознаки та класифікації ЗПР залежно від них.

1. Класифікація ЗПР за *кількістю цілей операції,* що переслідуються однією операючою стороною, і що відповідають цілям критеріїв оптимальності.

Згідно з цією класифікацією ЗПР поділяються на:

– *одноцільові* або *однокритеріальні (скалярні) ЗПР*;

– *багатоцільові* або *багатокритеріальні (векторні) ЗПР.*

2. Класифікація ЗПР за *наявністю (або відсутністю) залежності критерію оптимальності і дисциплінуючих умов від часу*.

Згідно з цією класифікацією ЗПР поділяються на:

– *статичні ЗПР*, у яких критеріальна функція і функції обмежень не залежать від часу;

– *динамічні ЗПР*, для яких характерно наступне:

а) в якості критерію оптимальності в динамічних ЗПР виступає функціонал, залежний від функцій часу, які описують поведінку деяких динамічних об'єктів, що беруть участь в операції;

б) у складі дисциплінуючих умов в динамічних ЗПР зазвичай є присутніми так звані диференціальні зв'язки, що подаються у вигляді диференціальних рівнянь, які описують поведінку динамічних об'єктів, що беруть участь в операції.

3. Класифікація ЗПР за *наявністю випадкових і невизначених чинників*, що впливають на результат операції (визначеність – ризик – невизначеність).

Згідно з цією класифікацією ЗПР поділяються на [7, 11]:

1) *ЗПР в умовах визначеності* (*детерміновані ЗПР*), які характеризуються однозначним, детермінованим зв'язком між прийнятим рішенням і його результатом. Це найбільш простий і найбільш вивчений випадок прийняття рішень, коли відносно кожної стратегії оперуючої сторони заздалегідь, до проведення операції, відомо, що вона незмінно приводить до деякого конкретного результату. У таких ЗПР критерій оптимальності і дисциплінуючі умови залежать тільки від стратегій оперуючої сторони і фіксованих детермінованих неконтрольованих чинників, повністю відомих оперуючій стороні;
2) *ЗПР в умовах ризику* (*стохастичні ЗПР*). В цьому випадку кожна стратегія оперуючої сторони може привести до одного з множини можливих результатів, причому кожен результат має певну ймовірність появи (для ОПР ця ймовірність до проведення операції є повністю відомою). У таких ЗПР критерій оптимальності залежить, окрім стратегій оперуючої сторони і детермінованих чинників, також від фіксованих стохастичних чинників. Сама назва «задача прийняття рішень в умовах ризику» пов'язана з наступними обставинами. Незважаючи на те, що усі випадкові явища і процеси, супроводжуючі операцію і впливаючи на її результат, є добре вивченими і усі їх необхідні статистичні характеристики є повністю відомими, результат кожної конкретної реалізації операції заздалегідь (до її проведення) є невідомим, випадковим. У цьому сенсі оперуюча сторона завжди ризикує (в більшій чи меншій мірі) отримати не той результат, на який вона орієнтується, обираючи свою оптимальну стратегію з розрахунку на усереднені, статистичні характеристики випадкових чинників;
3) *ЗПР в умовах невизначеності*, у яких критерій оптимальності залежить, окрім стратегій оперуючої сторони і фіксованих чинників, також від невизначених чинників, не підвладних оперуючій стороні і не відомих їй в момент прийняття рішення (або відомих з недостатньою для ухвалення рішення точністю). В результаті впливу таких чинників кожна стратегія оперуючої сторони виявляється пов'язаною з множиною можливих результатів, вірогідність яких або невідомі оперуючій стороні (або відомі з недостатньою для прийняття рішення точністю), або зовсім не мають сенсу.

На рис. 2.1 представлено класифікаційне «дерево» ЗПР, що відповідає виділеним вище класифікаційним ознакам [9].

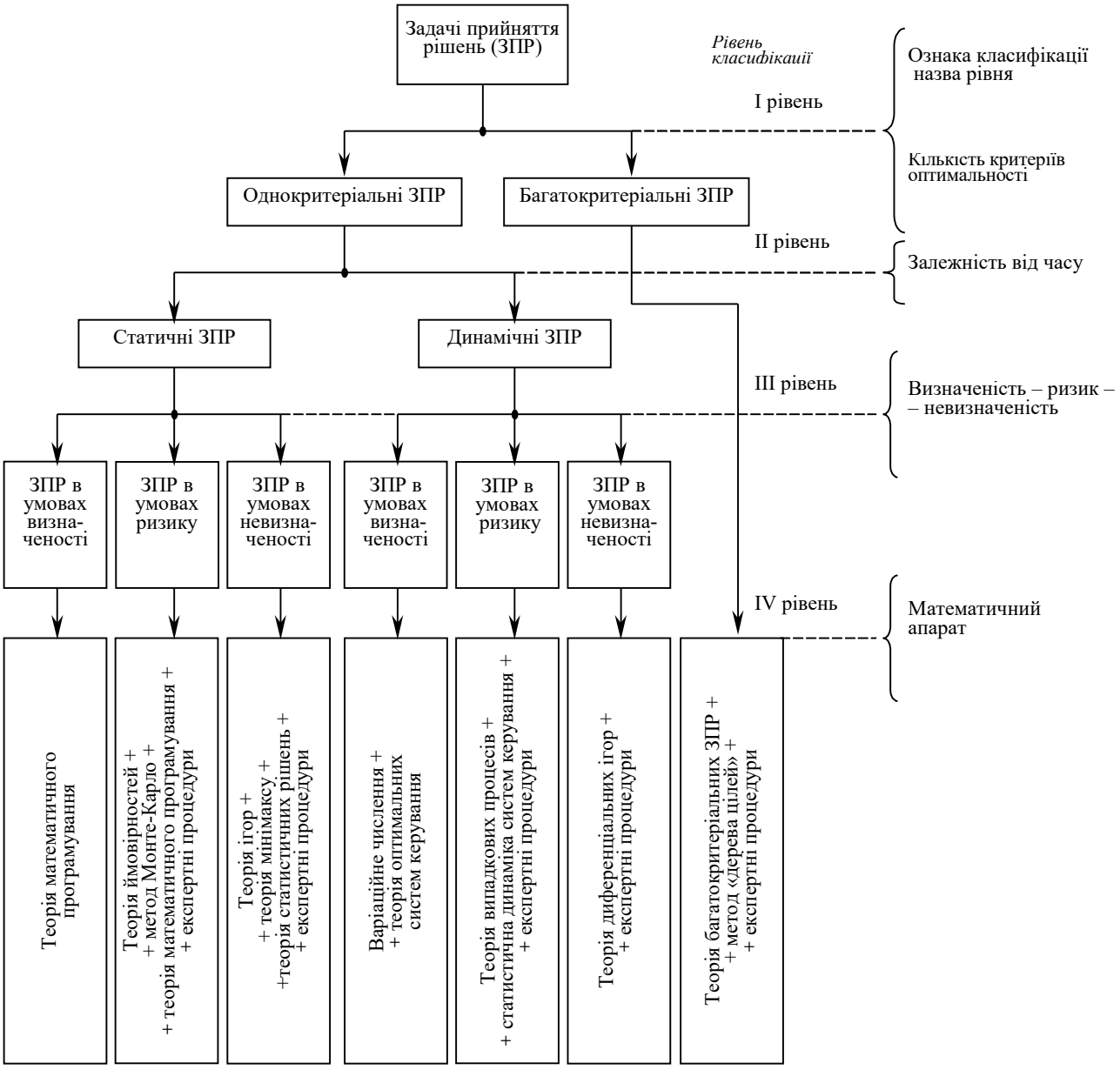


Рисунок 2.1 – Класифікаційне «дерево» ЗПР

Очевидно, що будь-яка реальна ЗПР може задовольняти одночасно декільком з перерахованих вище класифікаційних ознак, тобто являти собою комбінацію з розглянутих класів ЗПР. Віднесення реальної задачі прийняття рішення до одного з класів розглянутої класифікації завжди являє собою певну ідеалізацію реальної задачі та визначається точкою зору й інформованістю дослідника.

2.2 Класифікація задач прийняття рішень в умовах невизначеності

ЗПР в умовах невизначеності визначалася раніше як задача вибору оптимальної стратегії в операції, результат якої крім стратегій оперуючої сторони і ряду фіксованих факторів (детермінованих або стохастичних, або тих і інших разом) залежить також від деяких невизначених факторів, непідвладних оперуючій стороні і невідомих їй в момент прийняття рішення [10, 11].

Внаслідок впливу невизначених факторів кожної конкретної стратегії оперуючій стороні відповідає не єдиний, як в детермінованому випадку, а множина можливих результатів.

Конкретна реалізація результату операції для кожної стратегії оперуючої сторони визначається конкретною реалізацією невизначених факторів (а також, звичайно, конкретною реалізацією фіксованих стохастичних факторів, якщо в даній операції вони входять до складу фіксованих факторів, що впливають на результат операції).

Підкреслимо принципову *відмінність між фіксованими стохастичними факторами і невизначеними факторами*. І ті і інші чинники призводять до розкиду в можливих результатах операції при багаторазовій реалізації однієї і тієї самої стратегії оперуючої сторони в аналогічних умовах проведення операції. У цьому полягає їх *схожість між собою* на відміну від детермінованих чинників.

Різниця ж між фіксованими стохастичними факторами і невизначеними факторами полягає в тому, що відносно перших дослідник операції в своєму розпорядженні має всю повноту статистичної інформації; цієї інформації достатньо для визначення ймовірностей появи можливих результатів операції і прийняття рішення про вибір оптимальної «в середньому» стратегії.

У цьому сенсі ***фіксовані стохастичні чинники*** є факторами, повністю вивченими дослідником операції. Щодо невизначених факторів дослідник операції подібною інформацією не володіє.

У подальшому викладі для простоти і визначеності домовимося розглядати в основному ЗПР в умовах невизначеностей в спрощеному, «чистому» вигляді, тобто «очищеними» від впливу фіксованих стохастичних чинників. Це дозволить нам приділити основну увагу вивченню впливу невизначених факторів. Звичайно, подібні ЗПР являють собою певну ідеалізацію реальних операцій, результати яких зазвичай залежать від усіх видів факторів.

Далі розглядатимемо задачі вибору оптимальних стратегій в операціях, результат яких залежить від стратегій оперуючої сторони, фіксованих детермінованих чинників і невизначених факторів.

У таких ЗПР кожній стратегії оперуючої сторони відповідає множина можливих результатів, які визначаються конкретними реалізаціями невизначених факторів.

Відносно ймовірностей різних реалізацій результатів операції можливі *два випадки*:

1) ймовірності можливих результатів операції не мають фізичного сенсу;
2) ймовірності можливих результатів операції мають фізичний зміст, але або зовсім невідомі досліднику операції.

Перше відповідає невизначеним факторам нестохастичної природи, які не можуть бути описані в термінах теорії ймовірностей.

Друге відповідає факторам зі стохастичною (ймовірнісною) природою, невизначеність щодо яких обумовлена їх недостатньою вивченістю.

Відповідно до характеру причини, що викликає невизначеність нестохастичної природи, можна виділити дві групи факторів:

1) *стратегічні невизначеності* – невизначені фактори, що з'являються за рахунок участі в операції кількох оперуючих сторін, тобто розумних, активно діючих учасників операції, які переслідують різні (незбіжні) цілі. Невизначеність тут обумовлена тим, що кожна з діючих сторін змушена приймати рішення в умовах, коли їй невідомі майбутні дії (стратегії), які будуть зроблені в процесі проведення операції іншими її учасниками. Звідси випливає і назва цих факторів;
2) *концептуальні невизначеності* – невизначені фактори, супутні прийняттю особливо складних рішень, що мають довготривалі і далекосяжні наслідки, і пов'язані з нечіткими уявленнями оперуючої сторони про свої власні цілі і цілі інших учасників операції, про свої і чужі можливості щодо досягнення цілей, про майбутні шляхи розвитку і т.п., а також фактори, пов'язані з труднощами кількісної оцінки ступеня досягнення особливо складних, неформалізованих цілей, що мають лише якісний опис.

Невизначені фактори стохастичної природи мають і іншу поширену назву – природні невизначеності.

Природні невизначеності – це невизначені фактори, що з'являються із-за недостатньої вивченості оперуючою стороною «природи», пов'язаної з даної операцією.

Під словом «*природа*» в ТПР розуміють всю сукупність обставин, в умовах яких доводиться приймати рішення. Сюди можна віднести невідомі характеристики деяких процесів, пов'язаних з протіканням операції, або невідомі властивості об'єктів, що беруть участь в операції, а також невідомі зовнішні умови виконання операції.

ЗПР в умовах дії невизначених стратегічних факторів можна назвати *багатосторонніми ЗПР*, оскільки результат відповідних операцій залежить від діяльності декількох оперуючих сторін. Розбіжність цілей оперуючих сторін багатосторонньої операції створює конфлікт між її учасниками, інакше, – конфліктну ситуацію прийняття рішень. Звідси йде ще одна назва подібних ЗПР – ЗПР в умовах конфліктної ситуації (*конфліктні ЗПР*).

Підкреслимо принципову відмінність ЗПР в умовах конфліктної ситуації від інших видів ЗПР в умовах невизначеності.

З конфліктними ЗПР зазвичай пов'язують два припущення:

1) для кожної оперуючої сторони багатосторонньої операції є відомими як цілі, так і весь набір можливих стратегій всіх інших учасників операції;
2) оскільки кожен учасник багатосторонньої операції є розумним і активно діючим, то визначальним в його поведінці є прагнення до максимально можливого досягнення власних цілей.

Конфліктні ЗПР можна поділити на:

– *однорівневі ЗПР*, у яких учасники операції не пов'язані ніякими формами підпорядкування, вони діють на одному рівні влади, а їх дії пов'язані лише тим, що вони беруть участь в одній операції і зацікавлені в тому чи іншому її кінці;
– *багаторівневі ЗПР*, що виникають в складних системах керування з ієрархічною структурою, для яких характерною є наявність декількох рівнів керування, в яких нижчі підпорядковані вищим, але в той же час володіють деякими правами щодо прийняття самостійних рішень. Цілі нижчих рівнів керування не завжди повністю відповідають цілям вищих рівнів. Це і породжує *багаторівневі ЗПР* (*ієрархічні ЗПР*).

Однорівневі конфліктні ЗПР можуть бути як антагоністичними, так і неантагоністичні. *Антагоністична ЗПР* пов'язана з операцією, в якій стикаються інтереси двох сторін, що переслідують прямо протилежні цілі. Багаторівневі ЗПР не є антагоністичними: дослідження ситуацій прямої непокори і протидії нижчестоящих керівників вищим не є предметом математичної теорії прийняття рішень.

У зазначеному сенсі *ЗПР в умовах «природних» невизначеностей* є принципово більш складними. Тут другим учасником операції є «природа». Однак природу не можна розглядати як розумного, активно діючого учасника операції; їй не можна приписати ніяких свідомо поставлених цілей, до здійснення яких вона прагне. Тим самим невизначеність виступає тут в більш «важкій» формі. Однак природа розвивається і «діє» відповідно до своїх об'єктивно існуючих законів. У людини є можливість поступово вивчати ці закони, зокрема за допомогою спеціальних експериментів, і тим самим знижувати ступінь невизначеності. У цьому – ключ до розв’язання ЗПР в умовах «природних» невизначеностей.

Найбільш складний клас ЗПР в умовах невизначеностей складають *ЗПР в умовах дії невизначених факторів концептуального характеру*. Ці задачі можна також назвати ЗПР в умовах невизначених цілей і можливостей. Тут невизначеність виступає в найбільш важкій формі.

Для розв’язання ЗПР в умовах невизначеності концептуального характеру в даний час математичний апарат розроблений слабо. Тут розв’язання задачі виливається насамперед в чисто концептуальну проблему, спрямовану на розкриття невизначеності щодо концепцій (цілей і можливостей їх досягнення). Ця проблема вирішується, з використанням експертних евристичних процедур, зокрема з використанням методу «дерева цілей».

Проведеному огляду ЗПР в умовах невизначеності відповідає класифікаційна схема, подана на рис. 2.2 [11].

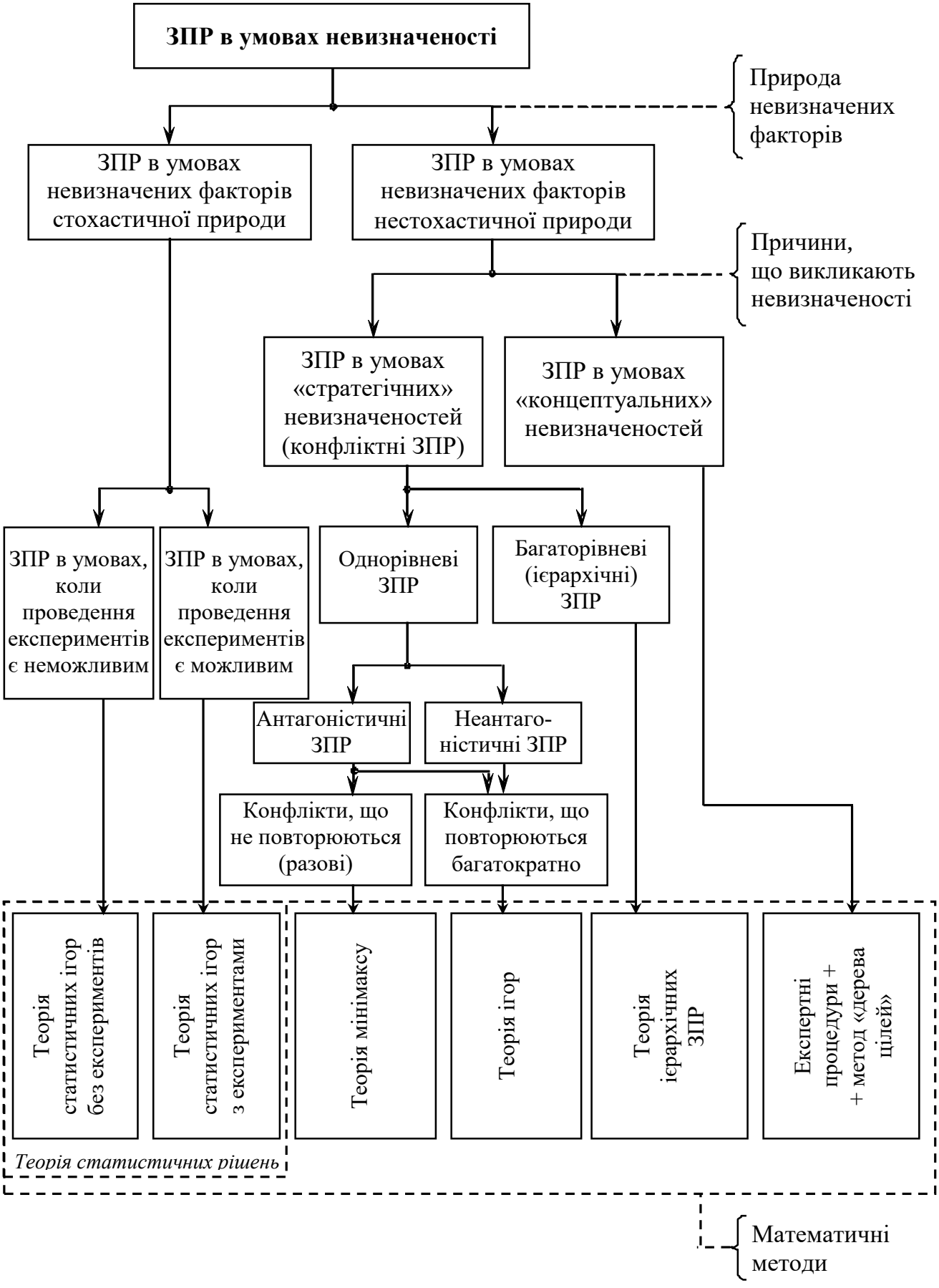


Рисунок 2.2 – Класифікаційна схема ЗПР в умовах невизначеності

Питання для самоконтролю

1. За якими ознаками можна класифікувати задачі прийняття рішень?
2. На які класи поділяються ЗПР за класифікаційною ознакою «кількість цілей операції»?
3. На які класи поділяються ЗПР за класифікаційною ознакою «наявність або відсутність залежності критерію оптимальності і дисциплінуючих умов від часу»?
4. На які класи поділяються ЗПР за класифікаційною ознакою – «визначеність – ризик – невизначеність»?
5. Охарактеризуйте задачі прийняття рішень в умовах визначеності, ризику та невизначеності.
6. Які припущення зазвичай пов'язують з конфліктними ЗПР?
7. В чому полягає антагоністична ЗПР?
8. В чому полягає неантагоністична ЗПР?
9. Вкажіть причини, що викликають невизначеність нестохастичної природи.
10. В чому полягає різниця між фіксованими стохастичними факторами і невизначеними факторами?

Лекція 3. Прийняття рішень в умовах невизначеності та ризику

Мета лекції: ознайомити з методологічними основами прийняття рішень в умовах невизначеності та ризику; засвоїти методику розв'язання задач прийняття рішень із використанням класичних, похідних й розширених критеріїв; набути навичок застосування критеріїв на практиці.

План лекції

3.1 Методологія теорії прийняття рішень в умовах невизначеності та ризику. Матриця рішень та оціночні функції.
3.2 Класичні критерії теорії прийняття рішень.
3.3 Похідні критерії теорії прийняття рішень.
3.4 Розширені критерії теорії прийняття рішень.
3.5 Алгоритм розв'язання задач прийняття рішень в умовах невизначеності та ризику із використанням критеріїв прийняття рішень

Перелік ключових термінів і понять з теми: *корисність рішення; матриця рішень; оціночна функція; позиція оптимізму; позиція песимізму; позиція нейтралітету; позиція компромісу між оптимістичним та песимістичним підходами; позиція відносного песимізму; класичні, похідні та розширені критерії прийняття рішень.*

3.1 Методологія теорії прийняття рішень в умовах невизначеності та ризику. Матриця рішень та оціночні функції

Невизначені фактори, закон розподілу яких невідомий, є найбільш характерними при розв'язанні задач прийняття рішень [7-11]. Саме на цей випадок слід орієнтуватися при виборі гнучких конструкторських рішень.

У контексті прийняття рішень можна виокремити два ключові типи задач.

По-перше, це *ЗПР в умовах ризику*, також відомі як стохастичні задачі, при яких кожна стратегія може призвести до одного з багатьох можливих результатів із відомою ймовірністю появи. Ці ймовірності визначаються заздалегідь на основі експертних оцінок або статистичних даних. Ризик у таких ситуаціях полягає в можливості отримання результату, який відрізняється від очікуваного, навіть з урахуванням статистичних характеристик. Критерій оптимальності в подібних ЗПР залежить як від стратегій оперуючої сторони і детермінованих чинників, так і від стохастичних факторів.

По-друге, існують *ЗПР в умовах повної невизначеності*, які виникають, коли обрані дії можуть призвести до будь-якого результату, а доступна інформація є неточною, неповною або некількісною (якісно виміряною). У таких випадках критерій оптимальності залежить не тільки від стратегій оперуючої сторони та фіксованих чинників, але й від невизначених факторів, на які оперуюча сторона не має впливу і про які не має інформації на момент прийняття рішення. Втім, враховуючи, що невизначені фактори з невідомим

законом розподілу є найбільш характерними для реальних ЗПР, саме на них варто орієнтуватися при пошуку гнучких рішень.

При дослідженнях в області прийняття рішень важливо розрізняти два види невизначеності: стохастичну та нестохастичну.

Невизначеність нестохастичної природи обумовлена взаємодією кількох активних учасників з різними цілями.

Натомість, невизначеності стохастичного типу зумовлені впливом так званої «природи» – неактивного учасника, який є незацікавленою стороною без свідомо поставлених цілей. Задачі такого типу розв'язуються за допомогою *теорії статистичних рішень* (*теорії ігор з природою*), де ОПР діє в умовах, коли стратегії інших учасників є невідомими. Для врахування невизначеності стохастичного типу формуються спеціальні критерії прийняття рішень, на основі яких приймаються рішення.

Перш ніж розглядати подібні критерії, зауважимо, наступні ключові припущення:

1) будь-який критерій оптимальності відповідає меті досліджуваного об’єкта;
2) критерій будується на основі оціночної функції, яка відображає позицію ОПР щодо досліджуваної проблемної ситуації.

Розглянемо, яким чином здійснюється аналіз процесу прийняття рішень в умовах невизначеності та ризику.

Всяка діяльність завжди є тісно пов’язаною з невизначеністю та ризиком щодо майбутніх результатів прийняття рішень. Припустимо, що потрібно вибрати найкращу з m альтернатив у випадку, коли остаточний результат кожної альтернативи E_i $(i=\overline{1,m})$ буде визначатися конкретним станом навколишнього середовища («природи») F_j $(j=\overline{1,n})$. Отже, альтернативами в задачі виступають варіанти, які обирає ОПР, а результатами рішення – наслідки обраних альтернатив при конкретному стані природи. У цьому контексті природа розглядається як незацікавлена сторона, а її стан – як ситуація, на яку ОПР має обмежений вплив або не може вплинути взагалі. Альтернатива ж представляє собою напрямок дій або стратегію, яку може обрати ОПР.

Під ***результатом рішення*** $e_{ij} = e(E_i ; F_j)$ будемо розуміти оцінку, яка відповідає варіанту E_i й умовам F_j та яка характеризує прибуток, корисність або надійність. Такий результат будемо називати ***корисністю рішення***.

Дані, необхідні для ухвалення рішення в умовах невизначеності та ризику, коли множини альтернатив та станів середовища є скінченними, зазвичай задаються у формі матриці, рядки якої відповідають можливим діям, а стовпці – можливим станам системи, тобто ***множина (матриця) рішень*** $\|e_{ij}\|$ має вигляд

	F_1	F_2	. . .	F_n
E_1	e_{11}	e_{12}	. . .	e_{1n}
E_2	e_{21}	e_{22}	. . .	e_{2n}
. . .	. . . . .			
E_m	e_{m1}	e_{m2}	. . .	e_{mn}

Щоб прийти до однозначного й по можливості найвигіднішого варіанту рішення, необхідно ввести ***оціночну (цільову) функцію***, яка відображає позицію ОПР за досліджуваною проблемною ситуацією.

При цьому матриця рішень $\|e_{ij}\|$ зведеться до одного стовпця виду

E_1	e_{1r}
E_2	e_{2r}
E_3	e_{3r}
…	…
E_i	e_{ir}
…	…
E_m	e_{mr}

Кожному варіанту E_i приписується деякий результат e_{ir}, що характеризує, у цілому, всі наслідки цього рішення. Такий результат ми будемо надалі позначати тим же символом e_{ir}.

Виникає, однак, проблема, який вкласти зміст у результат e_{ir}.

Якщо, наприклад, наслідки кожного з альтернативних рішень характеризувати комбінацією з його найбільшого й найменшого результатів, то можна прийняти

$$e_{ir} = \min_j e_{ij} + \max_j e_{ij}. \tag{3.1}$$

Найкращий у цьому змісті результат має вигляд

$$\max_i e_{ir} = \max_i \left(\min_j e_{ij} + \max_j e_{ij} \right). \tag{3.2}$$

Формуючи в такий спосіб бажаний результат, ОПР виходить із ***компромісу між оптимістичним та песимістичним підходами***.

Розглянемо тепер деякі інші оціночні функції, а також відповідні до них вихідні позиції.

Оптимістична позиція:

$$\max_i e_{ir} = \max_i \left(\max_j e_{ij} \right). \tag{3.3}$$

З матриці результатів рішень e_{ij} обирається варіант (рядок), що містить в якості можливого наслідку найбільший із всіх можливих результатів. ОПР стає на точку зору азартного гравця й робить ставку на те, що випаде найвигідніший випадок.

Позиція нейтралітету:

$$\max_i e_{ir} = \max_i \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} e_{ij} \right). \tag{3.4}$$

ОПР виходить з того, що всі відхилення результату рішення від «середнього» випадку, що зустрічаються, є припустимими, та приймає рішення, оптимальне з цього погляду.

Песимістична позиція:

$$\max_i e_{ir} = \max_i \left(\min_j e_{ij} \right). \qquad (3.5)$$

ОПР виходить з того, що треба орієнтуватися на найменш сприятливий випадок і приписує кожному з альтернативних варіантів найгірший з можливих результатів. Після цього він обирає найвигідніший варіант, тобто очікує найкращого результату в найгіршому випадку. Для кожного іншого зовнішнього стану результат може бути тільки рівним цьому або кращим.

Позиція відносного песимізму:

$$\min_i e_{ir} = \min_i \max_j \left(\max_i e_{ij} - e_{ij} \right). \qquad (3.6)$$

Для кожного варіанта рішення ОПР оцінює втрати в результаті в порівнянні з певним по кожному варіанту найкращим результатом, а потім із сукупності найгірших результатів обирає найкращий відповідно до представленої оціночної функції.

На основі оціночних функцій будуються критерії прийняття рішень.

3.2 Класичні критерії теорії прийняття рішень

Розглянемо найбільш поширені класичні критерії прийняття рішень, в основу яких покладено позиції ОПР [7-15]:

1) мінімаксний критерій (ґрунтується на песимістичній позиції ОПР);

2) критерій максимаксу (азартного гравця) (ґрунтується на оптимістичній позиції ОПР);

3) критерій крайнього песимізму (ґрунтується на припущенні про максимально несприятливу поведінку зовнішнього середовища щодо ОПР);

4) критерій Байєса-Лапласа (ґрунтується на позиції нейтралітету ОПР);

5) критерій Севіджа (ґрунтується на позиції компромісу між оптимістичним та песимістичним підходами ОПР).

<u>Мінімаксний критерій (Вальда)</u>

При використанні даного критерію для прийняття рішень гра з природою розглядається як гра з агресивним супротивником. Вибір такого критерію обумовлюється відсутністю в ОПР інформації про ймовірності появи різних станів природи. Важливою умовою застосування критерію є наявність чисельної оцінки результату для кожного варіанту рішення при відповідному стані F_j ($j = \overline{1,n}$) природи. Прийняття рішення в цьому випадку здійснюється в умовах невизначеності. В основі критерію Вальда лежить гіпотеза антагонізму, згідно з якою ОПР виходить із припущення, що природа поводиться по відношенню до неї найгіршим чином. Відповідно, кожний варіант оцінюється результатом, що має найгірше числове значення для нього. При виборі варіанту E_i ($i = \overline{1,m}$) ОПР знає лише про можливість настання одного з результатів, що знаходиться в *i*-му рядку таблиці, а остаточний результат визначається двома факторами: вибором варіанту та станом природи.

Якщо матриця рішень представлена у вигляді матриці виграшів, то кожний варіант оцінюється найменшим можливим виграшом. Оптимальним вважається варіант, у якого мінімальний елемент є найбільшим. Формально мінімаксний критерій можна записати як обрання такого варіанту, який максимізує мінімальний виграш серед усіх можливих станів природи:

$$Z_{\text{ММ}} = \max_i e_{ir}, \tag{3.7}$$

$$e_{ir} = \min_j e_{ij}. \tag{3.8}$$

Тоді узагальнений вигляд критерію можна представити у вигляді

$$\text{E}_0 = \left\{ E_{i0} \middle| E_{i0} \in \text{E} \wedge e_{i0} = \max_i \min_j e_{ij} \right\}, \tag{3.9}$$

де $Z_{\text{ММ}}$ – оціночна функція *ММ*-критерія.

Такий підхід характеризується принципом гарантованого результату: при виборі варіанту E_i $(i = \overline{1,m})$ жоден стан F_j $(j = \overline{1,n})$ природи не може призвести до результату гіршого, ніж мінімальний для цього варіанту. Такий критерій зазвичай застосовують ОПР, схильні до крайньої обережності, оскільки обраний за його допомогою варіант повністю виключає ризик при прийнятті рішення. Саме через орієнтацію на пошук варіанту з найменшими можливими втратами цей критерій часто називають «песимістичним».

Правило вибору рішення: матриця рішень $\left\| e_{ij} \right\|$ доповнюється ще одним стовпцем з найменших результатів e_{ir} кожного рядку; обирати належить ті варіанти E_{i0}, у рядках яких стоять найбільші значення e_{ir} цього стовпця.

<u>Критерій максимаксу (азартного гравця)</u>

Даний критерій ґрунтується на гіпотезі про сприятливу поведінку зовнішнього середовища F_j $(j = \overline{1,n})$ по відношенню до ОПР.

При застосуванні цього критерію ОПР не володіє інформацією про ймовірності виникнення різних станів зовнішнього середовища, проте кожний варіант характеризується найбільш сприятливим потенційним результатом. При використанні матриці виграшів $\left\| e_{ij} \right\|$ за критерієм максимаксу кожний варіант E_i $(i = \overline{1,m})$ оцінюється результатом, що забезпечує найбільший виграш. Оптимальним вважається той варіант, у якого максимальний елемент є найбільшим серед усіх можливих. Таким чином, ОПР робить ставку на найвигідніший сценарій розвитку подій, поводячись як азартний гравець, схильний до ризику (ігнорує можливі втрати) та демонструючи крайній оптимізм (розраховує на максимально можливий виграш). Саме тому цей критерій часто називають ***критерієм крайнього оптимізму***, а застосовуваний підхід – ***підходом азартного гравця***.

Формально максимаксний критерій можна представити як вибір варіанту з найбільшим значенням у матриці рішень $\left\| e_{ij} \right\|$, не враховуючи при цьому ризики, пов'язані з несприятливими змінами навколишнього середовища:

$$Z_{\text{MaxMax}} = \max_i e_{ir}, \tag{3.10}$$

$$e_{ir} = \max_j e_{ij}. \tag{3.11}$$

Для визначення оптимального варіанту спочатку знаходять максимальний елемент для кожного рядка матриці рішень $\|e_{ij}\|$, а потім обирають рядок (варіант) з найбільшим значенням цього максимуму:

$$\mathrm{E}_0 = \left\{ E_{i0} \middle| E_{i0} \in \mathrm{E} \wedge e_{i0} = \max_i \max_j e_{ij} \right\}. \tag{3.12}$$

Правило вибору рішення: матриця рішень $\|e_{ij}\|$ доповнюється додатковим стовпцем e_{ir}, що містить найбільші результати для кожного рядка. Оптимальним вважається той варіант $E_0 = E_{i0}$, у рядку якого стоїть найбільше значення стовпця e_{ir}.

Критерій крайнього песимізму

Даний критерій ґрунтується на припущенні про максимально несприятливу поведінку зовнішнього середовища F_j ($j = \overline{1,n}$) (природи) щодо ОПР. Важливо зазначити, що за цих умов ОПР не володіє інформацією щодо ймовірностей виникнення різних станів природи, тому кожний варіант характеризується найменш сприятливим для нього результатом. При застосуванні матриці виграшів оцінювання кожного варіанту E_i ($i = \overline{1,m}$) відбувається за результатом, що приносить мінімальний виграш. Відповідно, оптимальним вважається той варіант, у якого найменшим є елемент серед усіх мінімальних елементів. Такий підхід свідчить про те, що при використанні критерію крайнього песимізму ОПР орієнтується на найменш вигідний варіант розвитку подій. Фактично, ОПР поводиться як гравець, який категорично уникає будь-якого ризику та демонструє крайній песимізм у своїх очікуваннях.

У контексті матриці виграшів критерій песимізму передбачає вибір такого варіанта рішення, який мінімізує мінімальні виграші для кожного варіанта ситуації. Математично це можна записати наступним чином:

$$Z_{\text{MinMin}} = \min_i e_{ir}, \tag{3.13}$$

$$e_{ir} = \min_j e_{ij}. \tag{3.14}$$

Після цього обираємо оптимальний варіант E_0 відповідно до умови

$$\mathrm{E}_0 = \left\{ E_{i0} \middle| E_{i0} \in \mathrm{E} \wedge e_{i0} = \min_i \min_j e_{ij} \right\}. \tag{3.15}$$

Правило вибору рішення: матриця рішень $\|e_{ij}\|$ доповнюється додатковим стовпцем e_{ir}, що містить найменші результати для кожного рядка. Оптимальним вважається той варіант $E_0 = E_{i0}$, у рядку якого стоїть найменше значення стовпця e_{ir}.

Критерій Байєса–Лапласа

Даний критерій застосовується для ЗПР в умовах часткової невизначеності, орієнтується на максимізацію середнього очікуваного виграшу та використовується при наявності підстав думати ОПР, що деякі з станів природи більш або менш ймовірні стосовно інших. Нехай q_j – ймовірність появи зовнішнього стану F_j; тоді для *BL*-критерія

$$Z_{\mathrm{BL}} = \max_i e_{ir}, \tag{3.16}$$

$$e_{ir} = \sum_{j=1}^{n} e_{ij} q_j, \tag{3.17}$$

$$\mathrm{E}_0 = \left\{ E_{i0} \middle| E_{i0} \in \mathrm{E} \wedge e_{i0} = \max_i \sum_{j=1}^{n} e_{ij} q_j \wedge \sum_{j=1}^{n} q_j = 1 \right\}. \tag{3.18}$$

Правило вибору рішення за BL-критерієм: матриця рішень $\left\| e_{ij} \right\|$ доповнюється ще одним стовпцем, що включає математичне очікування значень кожного з рядків; обираються ті варіанти E_{i0}, в рядках яких стоїть найбільше значення e_{ir} цього стовпця.

Якщо припустити, що поведінка зовнішнього середовища (природи) є нейтральною по відношенню до ОПР, то в такому випадку всі стани зовнішнього середовища є рівно ймовірними ($q_1 = \ldots = q_n = 1/n$), а, отже стовпець результатів подаватиметься у вигляді

$$e_{ir} = 1/n \sum_{j=1}^{n} e_{ij}. \tag{3.19}$$

В такій ситуації в якості оптимального варіанту обирається такий, якому відповідає максимальне середнє значення:

$$\mathrm{E}_0 = \left\{ E_{i0} \middle| E_{i0} \in \mathrm{E} \wedge e_{i0} = \max_i \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} e_{ij} \right) \wedge q_1 = \ldots = q_n = 1/n \right\}. \tag{3.20}$$

Критерій такого типу називається ***нейтральним критерієм, критерієм Лапласа-Бернуллі*** або ***критерієм недостатньої підстави***.

Правило вибору рішення за критерієм Лапласа-Бернуллі: матриця рішень $\left\| e_{ij} \right\|$ доповнюється ще одним стовпцем, що середнє значення кожного з рядків; обираються ті варіанти E_{i0}, в рядках яких стоїть максимальне середнє значення e_{ir} цього стовпця.

При цьому критерії Байєса-Лапласа та Лапласа-Бернуллі використовуються при наступних умовах:

а) якщо є відомим розподіл ймовірностей появи станів природи;
б) якщо ймовірності появи станів природи є сталими величинами;
в) якщо передбачається, що реалізація рішень здійснюється нескінченне число разів.

Критерій Байєса-Лапласа демонструє виняткову надійність та повністю виключає ризики лише за чітко визначених умов. Проте варто зауважити, що будь-які відхилення від цих умов суттєво збільшують ризикованість застосування даного критерію. На відміну від максимінного критерію, підхід Байєса-Лапласа характеризується більш оптимістичними прогнозами, однак одночасно вимагає значно вищого рівня інформованості та передбачає множинні реалізації процесу прийняття рішень. Також необхідно підкреслити, що справжня надійність критерію Байєса-Лапласа забезпечується виключно за умови точного визначення ймовірностей виникнення різних станів зовнішнього середовища. Втім, у реальній практиці такі точні числові значення зазвичай недоступні, що істотно знижує довіру до даного критерію. Саме тому фахівці часто віддають перевагу більш надійному максимінному критерію, який гарантує певний мінімальний результат навіть за найнесприятливіших умов.

Критерій мінімаксних шкодувань або критерій Севіджа

Даний критерій базується на концепції відносного песимізму ОПР. Такий підхід являє собою методику прийняття рішень в умовах невизначеності, спрямовану на мінімізацію максимально можливого ризику. Методологія застосування критерію передбачає послідовне виконання кількох аналітичних етапів. Спочатку для кожної потенційного варіанту ОПР здійснюється розрахування очікуваного значення втрати (ризику). Надалі для кожного з розглянутих варіантів визначається максимальний ризик з урахуванням усіх можливих сценаріїв розвитку ситуації. Раціональний вибір ОПР відповідно до даного критерію полягає у виборі варіанту, який мінімізує максимально можливий ризик серед усіх доступних стратегічних варіантів. Суттєвою перевагою критерію Севіджа є можливість для ОПР враховувати не лише очікувані втрати, але й імовірність реалізації найгіршого сценарію розвитку подій. Такий комплексний підхід дозволяє обрати оптимальний варіант, який мінімізує ймовірність отримання найменш сприятливого результату. Математично оптимальне рішення за критерієм Севіджа визначається через низку формалізованих виразів. Спочатку обчислюється значення ризику як різниця між максимально можливим виграшом при певному стані природи та виграшом при застосуванні конкретного варіанту рішення:

$$a_{ij} = \max_i e_{ij} - e_{ij}, \tag{3.21}$$

далі для кожного варіанту визначається максимальний ризик

$$e_{ir} = \max_j a_{ij} = \max_j \left(\max_i e_{ij} - e_{ij} \right). \tag{3.22}$$

На основі цих обчислень формується оціночна функція

$$Z_{\mathrm{S}} = \min_i e_{ir} = \min_i \left[\max_j \left(\max_i e_{ij} - e_{ij} \right) \right], \tag{3.23}$$

яка дозволяє побудувати множину оптимальних варіантів рішення та визначити оптимальний варіант, при якому максимальне значення ризику набуває найменшого значення:

$$\mathrm{E}_0 = \left\{ E_{i0} \middle| E_{i0} \in \mathrm{E} \wedge e_{i0} = \min_i e_{ir} \right\}. \tag{3.24}$$

Правило вибору рішення: кожний елемент матриці рішень $\|e_{ij}\|$ віднімається з найбільшого результату $\max\limits_{i} e_{ij}$ відповідного стовпця; різниці a_{ij} утворюють матрицю залишків $\|a_{ij}\|$; ця матриця поповнюється стовпцем найбільших різниць e_{ir}; обираються ті варіанти E_{i0}, в рядках яких стоїть найменше для цього стовпця значення.

Важливо при цьому зауважити, що умови застосування критерію Севіджа є аналогічними до умов, які застосовуються до критерію Вальда, що підкреслює їхню концептуальну спорідненість у сфері прийняття рішень в умовах невизначеності. Варто також підкреслити, що вибір оптимальних варіантів за критерієм Севіджа має узагальнюючий характер відносно виборів за критеріями Вальда та максимаксу, що сприяє уникненню значних ризиків у процесі прийняття управлінських рішень.

При розв'язанні задач прийняття рішень в умовах невизначеності та ризику досить часто виникають ситуації, коли класичних критеріїв прийняття рішень стає не достатньо. Визвано це тим, що обраний критерій прийняття рішень має бути таким, щоб відповідати найкращим чином системі переваг ОПР, тобто щоб повністю відповідати його позиції відносно досліджуваної проблемної ситуації. Фактично вибір критерію прийняття рішень означає й вибір найкращого рішення, оскільки реалізація алгоритму (правила) використання конкретного критерію повністю визначає оптимальне рішення.

Все це призвело до необхідності використання спеціальних груп критеріїв, які дозволяють більш точно врахувати позицію ОПР та інформацію відносно досліджуваної проблемної ситуації та забезпечують здійснення такого вибору альтернативного рішення в умовах невизначеності та ризику, який найкращим чином відповідає перевагам й вимогам особи, що приймає рішення. До таких груп критеріїв прийняття рішень відносять похідні та розширені критерії.

3.3 Похідні критерії теорії прийняття рішень

Розглянемо наступні основні похідні критерії прийняття рішень в умовах невизначеності та ризику [7, 11, 13, 14]:

а) критерій Гурвиця;
б) критерій Ходжа-Лемана;
в) критерій Гермейєра.

<u>Критерій Гурвиця</u>

$$Z_{\mathrm{HW}} = \max_{i} e_{ir}, \tag{3.25}$$

$$e_{ir} = c \min_{j} e_{ij} + (1-c)\max_{j} e_{ij}. \tag{3.26}$$

Тоді

$$\mathrm{E}_0 = \left\{ Ei_0 | E_{i0} \in \mathrm{E} \wedge e_{i0} = \max_{i} \left[c \min_{j} e_{ij} + (1-c)\max_{j} e_{ij} \right] \wedge 0 \le c \le 1 \right\}, \tag{3.27}$$

де c – ваговий множник.

Правило вибору рішення: матриця рішень $\|e_{ij}\|$ доповнюється стовпцем, що містить середні зважені найменшого й найбільшого результатів для кожного рядка (3.26); обираються ті варіанти E_{i0}, у рядках яких стоять найбільші елементи e_{ir} цього стовпця.

Для $c=1$ HW-критерій перетворюється на *MM*-критерій.

Для $c=0$ він перетворюється на критерій азартного гравця.

Критерій Ходжа–Лемана

Оціночна функція визначається рівністю

$$Z_{\mathrm{HL}} = \max_i e_{ir}, \tag{3.28}$$

$$e_{ir} = \nu \sum_{i=1}^{n} e_{ij} q_j + (1-\nu) \min_j e_{ij}, \quad 0 \le \nu \le 1, \tag{3.29}$$

а множина *HL*-оптимальних рішень записується у вигляді

$$\mathrm{E}_0 = \left\{ E_{i0} \middle| E_{i0} \in \mathrm{E} \wedge e_{i0} = \max_i \left[\nu \sum_{j=1}^{n} e_{ij} q_j + (1-\nu) \min_j e_{ij} \right] \wedge 0 \le \nu \le 1 \right\}. \tag{3.30}$$

Правило вибору рішення: матриця рішень $\|e_{ij}\|$ доповнюється стовпцем, складеним з середніх зважених (з постійними вагами) математичного очікування та найменшого результату кожного рядка (3.29); обираються ті варіанти рішень E_{i0}, у рядках яких стоїть найбільше значення цього стовпця.

Для $\nu=1$ *HL*-критерій перетворюється на *BL*-критерій.

Для $\nu=0$ перетворюється на *MM*-критерій.

Критерій Гермейєра

Цей критерій є орієнтованим на величини втрат, тобто на від'ємні значення усіх e_{ij}, тобто $e_{ij} < 0$. У випадку, коли серед величин e_{ij} зустрічаються й додатні значення, можна перейти до строго від'ємних значень за допомогою перетворення $e_{ij} - a$ при підходячим чином підібраному $a > 0$. Так, наприклад, для обрання константи a можна застосувати наступний вираз: $a = \left| \max_{i,j} e_{ij} \right| + 1$.

В якості оціночної функції критерію Гермейєра виступає

$$Z_{\mathrm{G}} = \max_i e_{ir}, \tag{3.31}$$

$$e_{ir} = \min_j e_{ij} q_j. \tag{3.32}$$

За критерієм Гермейєра

$$\mathrm{E}_0 = \left\{ E_{i0} \middle| E_{i0} \in \mathrm{E} \wedge e_{i0} = \max_i \min_j e_{ij} q_j \wedge e_{ij} < 0 \right\}. \tag{3.33}$$

Правило вибору рішення: матриця рішень $\|e_{ij}\|$ доповнюється ще одним стовпцем, що містить у кожному рядку найменший добуток наявного у неї результату на ймовірність відповідного стану F_j; обираються ті варіанти E_{i0}, у рядках яких знаходиться найбільше значення e_{ir} цього стовпця.

У випадку рівномірного розподілу $q_j = 1/n$, $j = 1,...,n$, *G*-критерій стає ідентичним до *ММ*-критерію.

3.4 Розширені критерії теорії прийняття рішень

Розглянемо наступні найбільш поширені розширені критерії прийняття рішень в умовах невизначеності та ризику [11, 13-15]:

а) *BL (MM)* – критерій;
б) *BL (S)* – критерій;
в) критерій добутків.

<u>*BL (MM)* – критерій</u>

Вихідним для побудови *BL(MM)*-критерію є *BL*-критерій.

Внаслідок того, що розподіл ймовірностей $q = (q_1,...,q_n)$ встановлюється емпірично та тому є відомим не точно, отже, відбувається, з одного боку, ослаблення критерію, а з іншого, напроти, за допомогою заданих границь для ризику й за допомогою *ММ*-критерію забезпечується відповідна свобода дій.

Визначення оптимального варіанту за *BL(MM)*-критерієм включає наступні етапи:

<u>*1 етап*</u>: *Зафіксуємо опорне значення, що задається ММ-критерієм*:

$$Z_{\text{ММ}} = \max_i \min_i e_{ij} = e_{i_0 j_0},$$

де i_0 и j_0 – індекси, які є оптимальними для варіантів рішень та, відповідно, станів, що розглядаються за *ММ*-критерієм.

<u>*2 етап*</u>: *Визначення першої індексної множини* I_1.

2.1. Для цього визначається $\varepsilon_i := e_{i_0 j_0} - \min_i e_{ij}$ для всіх $i \in \{1,..m\}$.

2.2. За допомогою деякого заданого або обраного рівня допустимого ризику $\varepsilon_{\text{доп}} > 0$ визначимо деяку множину згоди, що є підмножиною множини індексів $\{1,...,m\}$:

$$I_1 := \left\{ i \mid i \in \{1,...,m\} \wedge e_{i_0 j_0} - \min_j e_{ij} \le \varepsilon_{\text{доп}} \right\}. \qquad (3.34)$$

Величина $\varepsilon_i := e_{i_0 j_0} - \min_j e_{ij}$ для всіх $i \in I_1$ характеризує найбільші можливі втрати в порівнянні зі значенням $e_{i_0 j_0}$, що задається *ММ*-критерієм. З іншого боку, в результаті такого зниження відкриваються й можливості для збільшення виграшу в порівнянні з тим, що забезпечується *ММ*-критерієм.

<u>*3 етап*</u>: *Визначення другої індексної множини* I_2.

$$I_2 := \left\{ i \middle| i \in \{1,...,m\} \wedge \max_j e_{ij} - \max_j e_{i_0 j} \ge e_{i_0 j_0} - \min_j e_{ij} = \varepsilon_i \right\}. \qquad (3.35)$$

Величина $\max_j e_{i_0 j}$ – це максимальне число, яке зафіксоване в тому рядку, де визначено опорне значення за *ММ*-критерієм.

4 етап: *Визначення оптимального варіанту за BL(MM)-критерієм*.

Для цього на множині-перетинання $I_1 \cap I_2$ ми обираємо тільки такі варіанти рішень, для яких, з одного боку, у певних станах можуть мати місце втрати в порівнянні зі станом, що задається *MM*-критерієм, але в інших станах мається хоча б такий самий приріст виграшу.

Отже, оптимальними в смислі *BL(MM)*-критерію будуть рішення з множини

$$\mathrm{E}_0 := \left\{ E_{i0} \middle| E_{i0} \in \mathrm{E} \wedge e_{i0} = \max_{i \in I_1 \cap I_2} \sum_{j=1}^{n} e_{ij} q_j \right\}. \qquad (3.36)$$

Правило вибору рішення: матриця рішень $\left\| e_{ij} \right\|$ доповнюється ще трьома стовпцями: у першому з них записуються математичні очікування кожного з рядків, у другому – різниці поміж опорним значенням $e_{i_0 j_0} = Z_{\mathrm{MM}}$ та найменшим значенням $\min\limits_j e_{ij}$ відповідного рядка, в третьому стовпці містяться різниці між найбільшим значенням $\max\limits_j e_{ij}$ кожного рядка й найбільшим значенням $\max\limits_j e_{i_0 j}$ того рядка, у якому знаходиться значення $e_{i_0 j_0}$. Обираються ті варіанти E_{i_0}, рядки яких дають найбільше математичне очікування. А саме, відповідне значення $e_{i_0 j_0} - \min\limits_j e_{ij}$ з другого стовпця має бути меншим або рівним деякому заздалегідь заданому рівню ризику $\varepsilon_{\text{доп}}$. Значення ж з третього стовпця має бути більшим за значення з другого стовпця.

***BL(S)*-критерій**

Розглянемо комбінацію критерію Байєса-Лапласа з критерієм Севіджа, що називається *BL(S)*-критерієм.

За опорну величину приймемо

$$Z_{\mathrm{S}} = \min_i \max_j a_{ij} = a_{i_0 j_0},$$

де $a_{ij} = \max\limits_i e_{ij} - e_{ij}$.

Через $\varepsilon_{\text{доп}} > 0$ знову визначимо припустиму границю ризику.

Тоді

$$I_1 := \left\{ i \;\middle|\; i \in \{1,\ldots,m\} \;\wedge\; \max_j a_{ij} - a_{i_0 j_0} \le \varepsilon_{\text{доп}} \right\},$$

$$\max_j a_{ij} - a_{i_0 j_0} = \varepsilon_i,$$

$$I_2 := \left\{ i \middle| i \in \{1,\ldots,m\} \wedge \min_j a_{i_0 j} - \min_j a_{ij} \ge \varepsilon_i \right\},$$

де $\varepsilon_{\text{доп}} > 0$ – припустима границя ризику. Для E_0 маємо:

$$\mathrm{E}_0 := \left\{ E_{i0} \middle| E_{i0} \in \mathrm{E} \wedge e_{i0} = \min_{i \in I_1 \cap I_2} \sum_j a_{ij} q_j \right\}.$$

Критерій добутків

Цей критерій орієнтований на величини виграшів, тобто на додатні значення e_{ij}. У випадку, коли серед величин e_{ij} зустрічаються й від'ємні значення, можна перейти до строго додатних значень за допомогою перетворення $e_{ij}+a$ при підходячим чином підібраному $a>0$. Так, наприклад, для обрання константи a можна застосувати наступний вираз: $a=\left|\min\limits_{i,j} e_{ij}\right|+1$.

Визначимо оціночну функцію:

$$Z_{\mathrm{P}}=\max_i e_{ir}, \tag{3.37}$$

$$e_{ir}=\prod_i e_{ij}. \tag{3.38}$$

Тоді

$$\mathrm{E}_0 := \left\{ E_{i0} \middle| E_{i0}\in \mathrm{E} \wedge e_{i0}=\max_i \prod_j e_{ij} \wedge e_{ij}>0 \right\}. \tag{3.39}$$

Правило вибору рішення: матриця рішень $\left\|e_{ij}\right\|$ доповнюється новим стовпцем, що містить добуток всіх результатів кожного рядку; обираються ті варіанти E_{i0}, у рядках яких знаходяться найбільші значення цього стовпця.

3.5 Алгоритм розв'язання задач прийняття рішень в умовах невизначеності та ризику із використанням критеріїв прийняття рішень

Розв'язання задач прийняття рішень в умовах невизначеності та ризику із використанням критеріїв прийняття рішень проводиться **за наступними етапами**:

1 *етап*: За досліджуваною проблемою складається матриця рішень $\left\|e_{ij}\right\|$ виду

	F_1	F_2	. . .	F_n
E_1	e_{11}	e_{12}	. . .	e_{1n}
E_2	e_{21}	e_{22}	. . .	e_{2n}
. . .	. . . . .			
E_m	e_{m1}	e_{m2}	. . .	e_{mn}

2 *етап:* В залежності від обраного критерію прийняття рішення кожному варіанту E_i приписується деякий результат e_{ir}, що характеризує наслідки цього рішення. При цьому матриця рішень $\left\|e_{ij}\right\|$ зводиться до одного стовпця виду

E_1	e_{1r}
E_2	e_{2r}
…	…
E_i	e_{ir}
…	…
E_m	e_{mr}

Примітка: Попередньо матриця рішень $\|e_{ij}\|$, якщо цього вимагає застосування обраного критерію, має бути приведена до певного виду (наприклад, з додатними, від'ємними і т.д. елементами).

3 *етап:* В залежності від обраного критерію прийняття рішення за використанням відповідного правила вибору обирається оптимальний варіант рішення E_0.

Питання для самоконтролю

1. Що називається корисністю рішення?
2. Охарактеризуйте оціночну функцію за оптимістичною позицією ОПР.
3. Опишіть критерій мінімакса (Вальда).
4. Опишіть критерій Севіджа.
5. Опишіть критерій Байєса–Лапласа.
6. Що таке коефіцієнт песимізму в критерії Гурвіца?
7. Опишіть критерій Ходжа-Лемана.
8. Опишіть критерій Гермейєра.
9. З яким критерієм становиться ідентичним критерій Гермейєра у випадку рівномірного розподілу ймовірностей станів середовища?
10. Що визначає ваговий множник критерію Ходжа-Лемана?
11. Що таке опорне значення в критерії *BL* (*MM*)?
12. Як обирається перша індексна множина за критерієм *BL*(*MM*)?
13. Як обирається перша індексна множина за критерієм *BL*(*S*)?
14. Опишіть критерій добутків.
15. Який з критеріїв орієнтований на додатні елементи матриці рішень?

Лекція 4. Експертні методи в теорії прийняття рішень. Розв'язання задач прийняття рішень із використанням методу Дельфі

Мета лекції: опанувати основні проблеми експертного оцінювання, види експертних оцінок та основні етапи підготовки й проведення експертизи; засвоїти та набути навичок застосування методології експертного оцінювання в задачах прийняття рішень; опанувати особливості експертних методів.

План лекції

4.1 Основні поняття та визначення. Проблеми експертного оцінювання, види експертних оцінок та основні етапи підготовки й проведення експертизи.
4.2 Загальні методи експертного оцінювання.
4.3 Методи обробки експертних оцінювань.
4.4 Розв'язання задач прийняття рішень із використанням методу Дельфі.

Перелік ключових термінів і понять з теми: *експертне оцінювання; експертна оцінка; проблеми експертного оцінювання; експертиза; види експертних оцінок; етапи підготовки й проведення експертизи; критерії підбору експертів; загальні методи експертного оцінювання; статистичні характеристики анкетованих даних експертного опитування; математико-статистичні методи обробки експертних оцінювань; сутність та етапи реалізації методу Дельфі.*

Частиною великої області теорії прийняття рішень є **методи експертного оцінювання (**або **експертні методи)**.

Експертні методи в теорії прийняття рішень застосовуються у випадках, коли для прийняття рішень не є можливим використовувати кількісні методи.

Відомо, що інформація в поєднанні з інтуїцією та досвідом допомагають фахівцям точніше обирати найбільш важливі цілі і напрямки розвитку, знаходити найкращі варіанти вирішення складних науково-технічних, соціально-економічних задач та інших задач в умовах, коли немає інформації про вирішення аналогічних проблем у минулому.

Експертні методи безупинно розвиваються і удосконалюються. Основні напрямки цього розвитку визначаються цілою низкою чинників, в числі яких можна вказати на прагнення підвищити ступінь використання математичних методів і електронно-обчислювальної техніки, розширити області застосування, а також знайти шляхи усунення недоліків, що виявляються. Незважаючи на практичне використання методу експертних оцінок та успіхи, досягнуті в розробці, є ряд проблем і задач, що вимагають подальших методологічних досліджень і практичної перевірки.

4.1 Основні поняття та визначення. Проблеми експертного оцінювання, види експертних оцінок та основні етапи підготовки й проведення експертизи

Розглянемо основні поняття та визначення, що використовуються при роботі з експертними методами розв'язання ЗПР [1, 6].

Під ***експертним (суб'єктивним) оцінюванням*** розумітимемо процедуру отримання оцінки проблеми на основі судження експертів (фахівців) з метою подальшого прийняття рішення.

Судження експерта або експертної групи відносно поставленої задачі прогнозу називатимемо ***експертною (суб'єктивною) оцінкою***.

У випадках розгляду нової проблеми, її надзвичайної складності, неможливості математичної формалізації процесу розв'язання, недостатності наявної інформації, доводиться звертатися до рекомендацій компетентних експертів, які досконало знають проблему, – до фахівців.

Експерт – це особа, яка володіє знаннями і здатна виказати аргументовану думку з явища, яке вивчається. Їх аргументація, формування кількісних оцінок, обробка останніх формальними методами дістали назву методів експертних оцінок.

Метод експертних оцінок – процес аналізу експертами, аргументування, формування кількісних оцінок, обробка оцінок формальними методами.

Експертиза – процедура отримання суб'єктивних оцінок від експертів.

Якість одержуваних експертних оцінок значною мірою визначається підготовкою експертизи, а також вживаними методами оброблення інформації, одержуваної від експертів.

Можна виокремити ***основні етапи підготовки і проведення експертизи***:

- формулювання мети дослідження;
- вибір форми дослідження, визначення бюджету експертизи;
- підготовка інформаційних матеріалів, анкет, модераторів;
- підбір експертів;
- проведення експертизи;
- опрацювання експертних даних;
- підготовку звіту з результатами експертизи.

Перед початком експертного дослідження необхідно чітко визначити його проблему (мету) і сформулювати відповідне питання для експертів.

Класифікувати існуючі види експертних оцінок, за якими формується і форма проведення експертизи, можна за наступними ознаками:

- ***за формою участі експертів***:
  а) очні оцінки;
  б) заочні оцінки.
  Очний метод оцінювання дає змогу зосередити увагу експертів на розв'язуваній проблемі, це підвищує якість результату. В той самий час *заочний метод* може бути дешевшим;
- ***за кількістю ітерацій*** (повторів процедури для підвищення точності):
  а) однокрокові;
  б) ітераційні;

– ***за задачами***:
  а) генеруючі рішення,
  б) оцінюючі варіанти;
– ***за типом відповіді***:
  а) ідейні,
  б) ранжуючі,
  в) оцінюючі об’єкт за відносною чи абсолютною (чисельною) шкалою;
– ***за способом обробки думок експертів***:
  а) безпосередні,
  б) аналітичні;
– ***за кількістю залучених експертів***:
  а) без обмеження,
  б) обмежені (зазвичай використовується 5-12 осіб експертів).

Після визначення форми проведення експертизи, обирають ***метод експертного опитування*** (інтерв’ювання, анкетування) й подальшого оцінювання.

Найвідомішими методами експертного оцінювання є наступні:
– мозковий штурм;
– метод Дельфи;
– колективної генерації ідей.

Кожному методу відповідають свої терміни проведення і кожен з них потребує експертів.

Після вибору методу експертного опитування **визначаються витрати на процедуру опитування**, які включають оплату експертів, оренду приміщення, придбання канцтоварів, оплату фахівця з проведення та аналізу результатів експертизи.

Для проведення процедури опитування необхідно підготувати інформаційні матеріали з описом проблеми, наявні статистичні дані, довідкові матеріали, бланки анкет, інвентар.

При цьому варто уникати наступних помилок:
– висловлювати ставлення керівництва до очікуваних результатів;
– згадувати розробників матеріалів;
– виділяти той чи інший варіант рішення.

Крім того, всі доступні для експертів дані мають бути нейтральними і різнобічними. Заздалегідь необхідно розробити анкети та бланки для експертів. Залежно від методу вони можуть бути з відкритими та закритими питаннями, відповідь може даватися у вигляді парного порівняння, рангового ряду, судження, у вигляді абсолютної оцінки або в балах.

У вирішенні задачі вибору експертів істотно значимими є:
– персональний підбір експертів;
– формування представницької групи експертів.

Критерії підбору експертів:
– *компетентність* (наявність знань і досвіду з розв’язуваної проблеми);
– *антиконформізм* (несхильність до впливу авторитетів);
– *креативність* (здатність вирішувати творчі завдання);

– *колективізм* (здатність працювати в колективі згідно із загальновизнаними етичними нормами поведінки);
– *конструктивність мислення* (здатність давати практично значущі рішення);
– *самокритичність* (здатність критично ставитися до власної компетенції та своїх суджень);
– *наявність часу для роботи в експертних групах*;
– *зацікавленість* – наявність бажання у вирішенні проблеми, що розглядається.

Процедуру підбору експертів проводить незалежний ***модератор***, який контролює дотримання регламенту, роздає анкети та матеріали, але не висловлює свою думку.

При обробці результатів опитування, залежно від цілей експертного оцінювання і обраного методу вимірювання, виникають наступні ***задачі***:

– побудова узагальненої оцінки об'єктів на основі індивідуальних оцінок експертів або на основі парного порівняння об'єктів кожним експертом;
– визначення відносних ваг об'єктів;
– визначення узгодженості думок експертів;
– визначення залежностей між результатами оцінювання різних експертів;
– оцінка надійності результатів обробки.

За результатами експертного оцінювання оформлюється звіт, у якому вказуються: мета дослідження; склад експертів; отримана оцінка; аналіз результатів.

4.2 Загальні методи експертного оцінювання

Залежно від форм роботи з експертами експертні методи оцінювання для розв'язання неструктурованих проблем можна розподілити на ***дві групи***:

а) *методи індивідуальної експертної оцінки* (засновані на використанні думки окремих, незалежних один від одного експертів);

б) *методи колективної експертної оцінки* (засновані на використанні колективної думки експертів).

При цьому більшою точністю володіє спільна думка, у відмінності від індивідуальної думки кожного із спеціалістів. Тому, якщо це можливо, використання колективної експертної оцінки є більш затребуваним.

До ***індивідуальних методів*** найчастіше відносять:

– *метод інтерв'ю* – передбачає бесіду ОПР з експертом, в ході якої ОПР відповідно до заздалегідь розробленої програми ставить перед експертом питання щодо перспектив розвитку об'єкта дослідження. Схема бесіди: питання-відповідь. При цьому експерт керується в основному тільки апріорними уявленнями щодо об'єкта дослідження. Успіх отриманої в такий спосіб експертної оцінки значною мірою залежить від здібності експерта експромтом давати відповіді на питання, експертиза яких проводиться.

– *метод аналітичних експертних оцінок* – заснований на отриманні інформації оцінок щодо досліджуваного об’єкта шляхом логічного аналізу. Цей метод припускає тривалу і старанну самостійну роботу експерта над аналізом тенденцій, оцінкою стану і шляхів розвитку об’єкта дослідження, а також дає можливість експерту використовувати всю необхідну йому інформацію про досліджуваний об’єкт. Свої висновки експерт оформлює у вигляді доповідної записки.

Основною перевагою індивідуальних методів є можливість максимального використання індивідуальних здібностей експерта, а також незначний психологічний тиск на експерта. Однак ці методи можуть бути мало придатними через обмеженість знань одного спеціаліста-експерта.

З метою підвищення обґрунтованості рішень для їх розроблення залучаються декілька експертів, оцінки яких зіставляються й об’єднуються між собою, створюючи колективну експертну оцінку.

Методи колективної експертної оцінки засновані на виявленні узагальненої оцінки експертної групи шляхом аналізу та обробки індивідуальних незалежних оцінок експертів, що входять до складу групи.

В основі застосування методів колективної експертної оцінки лежить гіпотеза щодо наявності у експертів умінь оцінити з достатнім ступенем вірогідності: важливість і знання проблеми фактора, параметра, напряму розвитку, ознаки тощо ;час здійснення тієї чи іншої події; значення параметрів, які прогнозуються; доцільність вибору одного з альтернативних шляхів розвитку об’єкта прогнозування і т. ін.

Методи колективної експертної оцінки за ознакою способу отримання інформації від експертів умовно можна розподілити на ***дві великі групи***:

1. *методи групової експертизи* – найчастіше використовуються: метод дискусій (експертних комісій, нарад, суду, колективної генерації ідей (метод «мозкової атаки»)), метод сценарію, метод оперативних ігор;

2. *методи анкетування* – найчастіше використовується метод Дельфи.

До найбільш поширених методів колективної експертної оцінки відносять:

– ***метод експертних комісій*** – відкрита дискусія, у ході якої обговорюються проблеми, для вироблення єдиної думки фахівців. Колективна думка визначається за результатами відкритого чи таємного голосування;
– ***метод нарад*** – метод прийняття рішення керівником шляхом проведення наради зі своїми підлеглими, в рамках якого кожний з підлеглих висловлює свою позицію з даного питання. Після цього керівник зважує виказані аргументи та ухвалює рішення;
– ***метод суду*** – експерти діляться на три групи: 1) противники альтернативи – намагаються виявити її негативні сторони; 2) прихильники альтернативи рішення – виступають в якості її захисту; 3) регулює хід експертизи і виносить остаточне рішення;
– ***метод сценаріїв*** – сукупність правил щодо письмового викладу пропозицій фахівців з вирішуваної проблеми.

Сценарій – документ, що містить аналіз проблеми та пропозиції для її реалізації. Спочатку пропозиції пишуть експерти індивідуально, після чого вони узгоджуються і висловлюються у формі єдиного документа;

– ***метод мозкового штурму*** – спільне очне обговорення проблеми групою фахівців. Метод реалізується у два етапи:
  - 1 етап («конференція ідей») триває приблизно 1-1,5 години. У ході проведення експерти висувають різні ідеї, що стосуються трактування аналізованої ситуації чи прогнозу розвитку явища. Ідеї протоколюються, але не критикуються та не обговорюються. При цьому ідеї можуть бути самими різними, в т.ч. і «нісенітними». Головний принцип: чим більше, тим краще;
  - на 2 етапі, ідеї оцінюються, обговорюються та з них обираються найвірніші. Прийматися остаточний вердикт з проблеми може шляхом явного / неявного голосування. Процедури генерації та обговорення ідей можуть бути більшою чи меншою мірою формалізовані;
– ***метод оперативних ігор*** – проходить у вигляді навчань, коли експерти не тільки дають оцінку обстановки, але й приймають рішення, виконуючи роль керівників. У грі, як правило, присутні обидві сторони, що беруть участь у конфлікті. Рішення приймаються за певними правилами, які регламентуються статутами і настановами. Формальна структура ігор побудована так, що основні рішення, висновки, пропозиції підлягають критичному аналізу і розбору. При цьому важливо, що в ході ігор перевіряється доцільність і правильність рішень, які приймаються в певних умовах. Досвід навчань за участю кваліфікованих експертів показує, що експертне оцінювання за допомогою таких натурних моделей сприяє системному охопленню суттєвих елементів об’єктів й процесів дослідження, дозволяє отримати узагальнені рекомендації поточного та прогнозованого характеру.

Методи анкетування – методи колективної експертної оцінки, в яких для опитування експертів використовуються анкети.

Анкети можуть містити:

– питання, коли від експертів потрібно дати однозначну відповідь щодо стану прогнозованого об’єкта;
– виклад припустимої майбутньої картини деяких подій, а від експерта вимагається тільки підтвердити або відкинути їх;
– прохання оцінити важливість факторів (ознак, параметрів, напрямів розвитку тощо), кількісне значення прогнозованого параметра або границі, у яких він може знаходитись в певний момент у майбутньому.

До найбільш поширених методів анкетування відносять:

– ***метод бальних оцінок*** – передбачає використання бальної шкали, межі якої є визначеними та відомими експертам;
– ***метод парних порівнянь*** – передбачає проведення зіставлення певного досліджуваного фактору (ознаки, параметра, напряму розвитку) з усіма іншими та дає уявлення про загальну досліджувану картину або ситуацію;

– ***метод Дельфі*** – сутність методу полягає в тому, щоб за допомогою серії послідовних дій (опитувань) прийти до максимального консенсусу при визначенні правильного рішення. Аналіз проводиться в кілька етапів, а отриманні результати обробляються статистичними методами.

Для отримання кількісних оцінок якісних властивостей і характеристик (для отримання як індивідуальних, так і колективних експертних оцінок) застосовують наступні методи:

– *метод асоціацій* заснований на вивченні схожого за властивостями об'єкта з іншим об'єктом;
– *метод бінарних (парних) порівнянь* заснований на зіставленні експертом альтернативних варіантів, з яких обираються найкращі;
– *метод векторів переваг* засновано на аналізі експертом всього набору альтернативних варіантів і вибору найкращих;
– *метод фокальних об'єктів* – перенесення ознак випадково відібраних аналогів на досліджуваний об'єкт;
– *метод середньої точки* – формулюються два альтернативних варіанти вирішення, один з яких є менш привабливим. Далі експерт підбирає третій альтернативний варіант, оцінка якого розташована між значеннями першої та другої альтернатив.

Для кількісного аналізу суб'єктивних оцінок експертів існують ***спеціальні шкали вимірювання***: бальна, рангова, парних порівнянь, числова, вербально-числова (зі змістовними найменуваннями певних градацій і відповідними їм числовими значеннями або діапазонами числових значень) шкали.

За характером постановки питань і формою відповідей можна виділити ***основні підходи до проведення обробки експертних оцінювань***:

– *метод бальних оцінок* – використовує бальну шкалу, межі якої є визначеними та відомими експертам;
– *метод абсолютних оцінок* – використовує числову шкалу абсолютних оцінок, межі якої визначено технічними характеристиками об'єкта;
– *методи ранжирування* – експерти оцінюють якість об'єктів за допомогою встановлення їхнього рангу (порядкового номера об'єкта, якщо всі об'єкти розташовують у порядку зростання їх якості). Чим меншу/більшу суму рангів отримає об'єкт від усіх фахівців, тим нижчою/вищою є його якість;
– *метод відносних оцінок* – передбачає отримання від експерта відносної оцінки якості об'єкта. Цей метод використовує числову або бальну шкалу відношень і може застосовуватись, наприклад, в оцінці відносної важливості критеріїв або коефіцієнтів відносної важливості цілей стратегії. При цьому для отримання групової оцінки об'єкта використовуються формули розрахунку середньоарифметичної та середньозваженої групових бальних оцінок. Сума відносних оцінок має дорівнювати 1;
– *методи обробки ранжируваних рядів* – парних порівнянь та безпосереднього ранжирування та ін. – застосовуються для отримання узагальненої думки експертів.

4.3 Методи обробки експертних оцінювань

4.3.1 Статистична обробка анкетованих даних експертного опитування

Опитування експертів при використанні методів анкетування здійснюється за допомогою анкет.

В анкеті пропонується дати кількісну оцінку кожному фактору (ознаці, параметру, напряму розвитку тощо), які входять до задачі дослідження.

Позначимо, наприклад, ці фактори через Y_1, Y_2, …Y_j,…Y_n. Кожний з цих факторів Y_j може мати тільки якісну визначеність або може мати кількісний вираз (наприклад, величини досліджуваного параметра). В обох випадках експерт зобов'язаний дати кількісну оцінку.

Для факторів якісної визначеності така оцінка має характер кількісного порівняння важливості цих факторів, яка являє собою ранг або бал певної шкали. Для факторів (параметрів) кількісної визначеності оцінка дається числом, яке відповідає запропонованому значенню цього фактора (параметра).

За результатами обробки даних, отриманих від експертів, визначаються статистичні оцінки прогнозованих характеристик та їх довірчі інтервали, а також статистичні оцінки узгодженості думок експертів.

При цьому обробка результатів експертного опитування залежить від виду інформації, яка отримується від експертів.

Якщо кожен із m експертів, які беруть участь в опитуванні, дає на запитання анкети одне значення C_{ij} (i – номер експерта) досліджуваної величини j, то за результатами обробки m значень C_{ij} можуть розраховуватися такі основні показники:

- середнє значення експертних оцінок (***точковий прогноз***), яке характеризує узагальнену думку експертів:

$$\tilde{M}[Y_j] = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} C_{ij}\ ; \tag{4.1}$$

- дисперсію оцінок, яка характеризує розкидання думок (***точкового прогнозу***) експертів відносно середнього значення:

$$\tilde{D}[Y_j] = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(C_{ij} - \tilde{M}[Y_j]); \tag{4.2}$$

- середнє квадратичне відхилення:

$$\tilde{\sigma}[Y_j] = \sqrt{\tilde{D}[Y_j]}\,; \tag{4.3}$$

- коефіцієнт варіації, який характеризує ступінь однодушності експертів щодо оцінки j фактора (параметра):

$$V_j = \frac{\tilde{\sigma}[Y_j]}{\tilde{M}[Y_j]}. \tag{4.4}$$

Чим більший коефіцієнт V, тим більш є однаковою думка експертів.

Показники M_j та σ_j дозволяють визначити ***інтервальний прогноз***.

Для цього визначаються розміри області, в яку із заданою імовірністю попадає майбутнє значення прогнозованої величини:

$$\tilde{M}[Y_j] - \varepsilon_1 \le C_j \le \tilde{M}[Y_j] + \varepsilon_2. \qquad (4.5)$$

Величини, що визначають довірчий інтервал ε_1 та ε_2, залежать від значення довірчої імовірності β і закону розподілу суми величин C_j і розраховуються за певними правилами. Так, якщо закон розподілу C_j можна вважати нормальним, то для *j*-ї прогнозованої величини маємо:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = t_\beta \frac{\tilde{\sigma}[Y_j]}{\sqrt{m}} \ ; \qquad (4.6)$$

де $t_\beta = \arg \Phi^* \left(\frac{1+\beta}{2} \right)$ – величина, яка обернена нормальній функції розподілу $\Phi^*(x)$, обчислюється для заданого значення імовірності β.

При обробці експертних даних здійснюється також ***оцінка суперечності думок експертів***.

Розглянемо поняття «суперечність» думки колективного експерта щодо узагальненої думки всіх експертів. Припустимо, що думка *k*-го експерта C_{kj} є крайньою серед думок *m* експертів.

У зв'язку з тим, що дійсне значення дисперсії D_j, як правило, є невідомим, а відомою є лише її оцінка $\tilde{D}_j$, то для математичної оцінки суперечності думки *k*-го експерта обчислимо ймовірність того, що величина $t = \frac{C_k - \tilde{M}[Y_j]}{\tilde{\sigma}[Y_j]}$ буде більшою за деяке число γ:

$$\alpha = P\left(\frac{C_k - \tilde{M}[Y_j]}{\tilde{\sigma}[Y_j]} > \gamma \right). \qquad (4.7)$$

Якщо ця імовірність є достатньо великою (наприклад, більшою за 0,05 – 0,10), то гіпотеза щодо анормальності C_{kj} може бути відкинута, у протилежному випадку – прийнята. У зв'язку з цим суперечною вважається така оцінка C_{kj}, при якій виконується нерівність

$$C_{kj} - \tilde{M}_j[Y_j] > \gamma \tilde{\sigma}[Y_j] \qquad (4.8)$$

з імовірністю, меншою деякого значення α'. Значення α' береться таким, що дорівнює 0,1-0,05. Значення коефіцієнта γ, який задовольняє умові (4.8), наведено в табл. 4.1.

Виконання умови (4.6) при $\alpha < \alpha'$ є математичною ознакою наявності суперечної думки серед групи експертів. Ця ознака може використовуватися тільки тоді, коли розподіл оцінок експертів можна вважати нормальним. Якщо крайнє значення (точковий прогноз колективного експерта) буде суперечним, то здійснюється перевірка наступного найближчого до нього значення доти, доки не буде показана несуперечність чергового значення.

Таблиця 4.1 – Значення коефіцієнта γ

m	α		
	0,10	0,05	0,01
6	1,73	1,82	1,94
8	1,91	2,03	2,22
10	2,04	2,18	2,41
12	2,13	2,28	2,55
14	2,21	2,37	2,66
16	2,28	2,44	2,75
18	2,34	2,30	2,82
20	2,38	2,56	2,88

Виконання умови суперечності (або несуперечності) залежить від величини імовірності α', тому ця ознака є умовною і повинна доповнюватися логічним аналізом при врахуванні вимог до точності прогнозу. При обробці результатів експертного опитування необхідно мати на увазі також те, що колективний експерт краще за інших уявляє розвиток прогнозованого об'єкта (процесу) у майбутньому і тому «випадає» із області, що характеризує думки його колег. Тому до крайніх значень експертних оцінок необхідно відноситись дуже уважно.

Отже, послідовність оцінки результатів експертизи щодо майбутнього значення величини C_j є наступною:

- визначається узагальнена думка експертів (точковий прогноз);
- визначається дисперсія і середнє квадратичне відхилення думок експертів;
- здійснюється оцінка суперечності крайніх оцінок за допомогою логічного аналізу й умови (4.5);
- при несуперечності думок експертів результати опитування оформлюються як точковий (4.4) і інтервальний (4.6) прогнози;
- при суперечних думках проводиться другий тур опитувань (з обговоренням результатів думок першого туру).

Часто використовується така форма оцінок, коли кожний з m експертів дає два (мінімальне C і максимальне C_{ij}) значення, між якими, за думкою експерта, буде знаходитись майбутнє значення досліджуваної величини.

Для обробки результатів опитування, насамперед, необхідно прийняти вид закону розподілу прогнозованої величини між крайніми оцінками кожного експерта. В якості такого апріорного закону розподілу, наприклад, може вибиратися закон рівномірного розподілу:

$$f(C_{ij}) = \frac{1}{C_{ij}^{\max} - C_{ij}^{\min}}, C_j^{\max} \le C_j \le C_j^{\min}.$$

При цьому середнє значення (точковий прогноз), що дається i-м експертом, визначається за співвідношенням

$$\overline{C}_{ij} = \frac{1}{2} * \left(C_{ij}^{\max} + C_{ij}^{\min} \right). \quad (4.9)$$

Точковий прогноз за результатами узагальнення думок всіх експертів визначається за формулою

$$\tilde{M}_j = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \overline{C}_{ij} \ . \quad (4.10)$$

Дисперсія прогнозу і коефіцієнт варіації визначаються за формулами (4.2) (4.3) відповідно.

4.3.2 Математико-статистичні методи обробки експертних оцінювань

За характером постановки питань і формою відповідей можна виділити основні підходи до проведення обробки експертних оцінювань:

- метод бальних оцінок;
- метод абсолютних оцінок;
- метод ранжирування;
- метод відносних оцінок;
- методи обробки ранжируваних рядів – попарних порівнянь та безпосереднього ранжирування.

Метод бальних оцінок передбачає використання бальної шкали, межі якої є визначеними та відомими експертам.

Якщо експерти мають однакову вагу (є рівноправними), то використовують найпростішу групову оцінку (x_i), яка обчислюється як середньоарифметична бальних оцінок експерта для кожного i-го об'єкта експертизи за співвідношенням:

$$x_i^{ca} = \frac{1}{l} \sum_{j=1}^{l} x_{ij},$$

де x_{ij} – бальна оцінка i-го об'єкта j-м експертом, m – кількість об'єктів, l – кількість експертів.

У випадку, коли кожний фахівець має різну вагу (згідно з досвідом, компетентністю, ефективністю проведення експертиз тощо), групова бальна оцінка об'єкта може бути обчислена як середньозважена

$$x_i^{сз} = \sum_{j=1}^{l} q_j x_{ij} \, ; \quad i = \overline{1,m}; \quad \sum_{j=1}^{l} q_j = 1,$$

де q_j $\left(x_{ij} = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{p} x_{ijk}\right)$ – вагові коефіцієнти компетентності експертів (визначені суб'єктивно).

За умови різної важливості частин (ознак) досліджуваного об'єкта й різної ваги експертів групова бальна оцінка об'єкта обчислюється у вигляді

$$x_i^{\text{рв}} = \frac{1}{l} \sum_{j=1}^{l} q_j x_{ij} = \frac{1}{lp} \sum_{j=1}^{l} q_j \sum_{k=1}^{p} \alpha_k x_{ijk} \, ; \quad i = \overline{1,m},$$

де $x_{ij}^{\text{рв}} = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} \alpha_k x_{ijk}$ $\left(\sum_{k=1}^{p} \alpha_k = 1\right)$, α_k – вагові коефіцієнти ознак (частин) об'єкта.

Величини q_j та α_k найзручніше визначати або задавати так, щоб їхні числові значення містилися в межах від 0 до 1.

Вагові коефіцієнти компетентності експертів q_j та частин (ознак) об'єкта α_k можна визначати за взаємним оцінюванням і диференціальним самооцінюванням.

При *диференціальному самооцінюванні* оцінку дають за двома групами критеріїв: за критеріями, які характеризують ознайомленість з об'єктами експертизи, та за критеріями, що характеризують ознайомленість експерта з основними джерелами інформації в досліджуваній галузі.

Метод взаємооцінювання – побудова матриці, елементами якої є числа – взаємні оцінки експертів (наприклад, це може бути кількість фахівців, які вважають i-го експерта компетентнішим, ніж j-го).

Основні переваги методу: можливість враховувати компетентність експертів; простота визначення групових оцінок об'єктів після проведення експертизи; можливість аналізу за допомогою як кількісних, так і якісних методів, що, безумовно, дає змогу порівняти результати.

Якщо висновки збігаються, то можна констатувати, що вони достовірні та базуються на матеріалі експертизи, а не на методах оброблення даних.

Недоліки методу пов'язані з труднощами отримання об'єктивних початкових оцінок x_{ij}, q_j, x_{ijk}. Та не треба забувати, що це дуже трудомістка робота.

Метод абсолютних оцінок – використання числової шкали оцінок, межі якої визначено технічними характеристиками об'єкта. Оцінка – фізична величина в певних одиницях вимірювання, тобто у наведених вище формулах використовують абсолютні оцінки замість бальних оцінок (x_{ij}).

Метод відносних оцінок передбачає отримання від експерта відносної оцінки якості об'єкта. Цей метод використовує числову або бальну шкалу відношень і може застосовуватись, наприклад, в оцінці відносної важливості критеріїв або коефіцієнтів відносної важливості цілей стратегії. При цьому для отримання групової оцінки об'єкта використовуються формули розрахунку середньоарифметичної та середньозваженої групових бальних оцінок. Сума відносних оцінок має дорівнювати 1.

Метод ранжування. Експерти оцінюють якість об'єктів за допомогою встановлення їхнього рангу (порядкового номера об'єкта, якщо всі об'єкти розташовують у порядку зростання їхньої якості). Чим меншу (більшу) суму рангів отримає об'єкт від усіх фахівців, тим нижчою (вищою) є його якість.

Методи обробки ранжируваних рядів – парних порівнянь та безпосереднього ранжирування – застосовуються для отримання узагальненої думки експертів. При цьому метод безпосереднього ранжирування застосовується тільки у випадку, коли кількість факторів ранжирування не перевищує 20, метод парних порівнянь використовується при будь-якій кількості розглядуваних факторів.

4.4 Розв’язання задач прийняття рішень із використанням методу Дельфі

Розглянемо проведення експертизи, формалізації та обробки якісної інформації, отриманої за використанням зібраних експертних суджень методом Дельфі, який є найбільш ефективним методом для розв’язання складних, маловивчених, унікальних проблем, що характеризуються великою невизначеністю вихідної ситуації й потребуючих залучення фахівців різного профілю. Цей метод вимагає значних витрат часу й чіткої організації процедури його реалізації.

Метод Дельфі є одним з методів групової (колективної) експертної оцінки й не вимагає спільної роботи членів групи. Більше того, членам групи не дозволяється зустрічатися й обмінюватися думками із приводу розв'язуваної проблеми, тобто забезпечується незалежність думок членів групи. Зібрання експертних суджень за методом Дельфі передбачає здійснення аналізу й вибору рішень шляхом виконання наступної багатокрокової циклічної процедури:

1 *крок*: членам групи надається інформація про проблемну ситуацію й пропонується оцінити можливі варіанти рішення за сукупністю показників;

2 *крок*: кожний член групи анонімно й незалежно надає оцінки й обґрунтування варіантів рішення або пропонує свої варіанти;

3 *крок*: всі оцінки й думки членів групи збираються й узагальнюються у зведеному документі;

4 *крок*: кожний член групи одержує копію зведеного документа. Ознайомлення з думкою інших учасників може змінити його думку із приводу можливих варіантів рішення проблеми.

3 *та* 4 *кроки* повторюються стільки разів, скільки необхідно для досягнення погодженого рішення.

Етапи проведення експертизи, формалізації та обробки якісної інформації, отриманої за використанням зібраних експертних суджень методом Дельфі:

1 *етап*: уточнення проблем або об'єктів для експертизи;

2 *етап*: розробка анкети для опитування експертів;

3 *етап*: формування групи експертів;

4 *етап*: індивідуальне анкетне опитування експертів за методом Дельфі;

5 *етап*: математичне опрацювання результатів опитування;

6 *етап*: уточнення експертами своїх оцінок.

На 6 *етапі* всі отримані результати пропонуються на розгляд експертам. Якщо експерти вважають за доцільне відкоригувати свою думку, то вони передають свої корективи аналітичній групі. На їх основі аналітична група розраховує нові результати за *етапами* 4, 5. Загалом, для формування стійкої узагальненої оцінки, *етапи* 4, 5, 6 можуть проводитися 3-4 рази. Підсумкова узагальнена думка, отримана в результаті реалізації всіх етапів експертизи буде основою для визначення остаточного результату дослідження.

При проведенні дослідження конкретний склад і чисельність групи експертів визначається характером аналізовуваних проблем, можливістю залучення до експертизи компетентних спеціалістів.

Ступінь компетентності K_k^i *i*-го експерту $(i=\overline{1,m})$ визначається за співвідношенням:

$$K_k^i = \frac{K_З^i + K_a^i}{2}, \tag{4.11}$$

де $K_З^i$ $(i=\overline{1,m})$ – коефіцієнт ступеня знайомства *i*-го експерту з проблемою: $K_З^i \le 1$; K_a^i $(i=\overline{1,m})$ – коефіцієнт аргументованості рішень *i*-го експерту: $K_a^i \le 1$; $m-$ загальна кількість експертів.

Коефіцієнт $K_З^i$ $(i=\overline{1,m})$ ступеня знайомства *i*-го експерту з проблемою визначається самим *i*-м експертом за десятибальною шкалою (табл. 4.2) з подальшим множенням оцінки на 0,1.

Таблиця 4.2 – Шкала оцінки ступеня знайомства експерта з проблемою

Бали	**Ступінь знайомства експерта з проблемою**
0	експерт не знайомий із проблемою;
1-3	погано знайомий, але проблема входить до кола його інтересів
4-6	задовільно знайомий, але практично не займається;
7-9	добре знайомий і займається практично;
10	вузький фахівець із проблеми.

Для одержання значення коефіцієнту K_a^i $(i=\overline{1,m})$ аргументованості рішень *i*-го експерта використовується шкала аргументованості (табл. 4.3). Експерт проставляє самооцінку у відповідну графу за кожним джерелом з подальшим підсумовуванням в рядку.

Таблиця 4.3 – Шкала аргументованості

Джерело аргументів	Ступінь впливу аргументів		
	високий	середній	низький
Теоретичний аналіз	0,3	0,2	0,1
Досвід	0,5	0,4	0,2
Література	0,1	0,08	0,04
Інтуїція	0,05	0,04	0,02

При впорядкуванні анкети додержуються таких наступних вимог: анкета містить не дуже багато питань (10-20); відповіді на питання не займають багато часу (*так, ні*, або *вибір зі списку*); відповіді подаються в заданій шкалі оцінок; анкета, як правило, є анонімною.

Доцільно застосовувати 10 або 100 – бальні шкали оцінок із невеличким числом градацій, кожна градація повинна бути однозначно описаною.

Всі оцінки, отримані в ході опитування групи експертів, подаються у вигляді матриці:

$$C = \left[c_{ij} \right],\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}, \tag{4.12}$$

де $m-$ загальна кількість експертів; $n-$ кількість досліджуваних експертами напрямків дослідження (критеріїв, чинників). При цьому припустимою є відсутність відповідей на питання, якщо *i*-й експерт утримався від оцінки якогось *j*-го напрямку дослідження.

Узагальнена оцінка M_j ($j=\overline{1,n}$) важливості *j*-го напрямку обчислюється у вигляді

$$M_j=\frac{\sum_{i=1}^{m}c_{ij}}{m_j},\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}. \tag{4.13}$$

де M_j – узагальнена оцінка важливості *j*-го напрямку; m_j – кількість експертів, що оцінили *j*-ий напрямок: $m_j\le m$; c_{ij} – оцінка в балах, надана *i*-м експертом *j*-му напрямку.

З урахуванням коефіцієнту K_k^i ($i=\overline{1,m}$) компетентності *i*-го експерту маємо узагальнену оцінку важливості *j*-го напрямку:

$$M_j=\frac{\sum_{i=1}^{m}K_k^i c_{ij}}{m_j},\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}. \tag{4.14}$$

Після того, як усі узагальнені оцінки M_j ($j=\overline{1,n}$) важливості кожного *j*-го напрямку є розрахованими, можна їх упорядковувати (ранжирувати) за важливістю (впливовістю, суттєвістю).

Чим вищою є узагальнена оцінка M_j ($j=\overline{1,n}$) важливості *j*-го напрямку, тим старшим є його ранг (місце в упорядкуванні) R_j ($j=\overline{1,n}$). На перше місце ставимо *j*-й напрямок з найвищою оцінкою з M_j, на останнє – із найменшою оцінкою.

Таким чином, отримуємо послідовність рангів $R_j,\ j=1,n$ для кожного з досліджуваних напрямків $F_j,\ j=1,n$.

Наостанок, додатково, для визначення відносних коефіцієнтів значимості $\lambda_j,\ j=1,n$ досліджуваних напрямків $F_j,\ j=1,n$, використовується проста функція ранжирування виду

$$\lambda_j=2\frac{(n+1)-R_j}{n(n+1)},\quad \sum_{j=1}^{n}\lambda_j=1,\quad j=1,n, \tag{4.15}$$

де *n* – кількість рангів; R_j – ранг *j*-го напрямку $F_j,\ j=1,n$.

За результатами проведення математичного опрацювання оцінок визначається остаточний результат дослідження (встановлення впорядкування за важливістю (суттєвістю) напрямів дослідження). На 1 місце ставиться *j*-й напрям $F_j,\ j=\overline{1,n}$, з найвищою величиною рангу $R_j,\ j=1,n$. На 2 місце – напрям з величиною рангу, яка є найвищою серед залишившихся, і т.д.

При цьому для визначення впорядкування застосовуються:

– ***відношення переважності*** ($\succ$), за яким $F_q \succ F_s$ означає, що напрям F_q є більш важливим (впливовим, суттєвим), ніж напрямок F_s.

– ***відношення еквівалентності*** (~), за яким $F_q \sim F_s$ означає, що напрям F_q є еквівалентним (з таким самим ступенем важливості) напрямку F_s.

В такому випадку буде отримане ***ітогове (результуюче) впорядкування*** напрямків дослідження за їх важливістю (впливовістю, суттєвістю).

Алгоритм проведення дослідження за наданою проблемною ситуацією із використанням методу Дельфі складається з наступних етапів**:**

1 *етап*. *Формулювання проблемної ситуації та розробка анкети для опитування експертів*. На даному етапі:

а) наводиться змістовий опис проблемної ситуації із зазначенням мети дослідження, за яким визначаються основні напрямки дослідження – величини F_j ($j = \overline{1,n}$);

б) складається анкета для проведення опитування експертів за досліджуваною проблемною ситуацією, у якій експертам пропонується оцінити ступінь важливості (пріоритетності) виділених напрямків (критеріїв, факторів, чинників) дослідження F_j ($j = \overline{1,n}$) у формі табл. 4.4. за, наприклад, 10-ти бальною шкалою, поданій у табл. 4.5.

Таблиця 4.4

№ з/п	Назва напрямку дослідження	Оцінка в балах
1.	(перелік можливих напрямків F_j ($j = \overline{1,n}$))	проставляється експертом за, наприклад, 10-ти бальною шкалою з табл.4.4
…	…	…

Таблиця 4.5

Бали	Ступінь впливу напряму F_j ($j = \overline{1,n}$)
0	не впливає;
1-2	впливає незначно, але це варто враховувати в майбутньому;
3-5	впливає середньою мірою, складно реалізується;
6-7	має значний вплив;
8-10	має визначальний вплив, що враховується насамперед.

2 етап. *Формування групи експертів, індивідуальне анкетне опитування експертів та оцінка їх компетентності*.

На даному етапі:

а) формується група експертів з 3-5 осіб;

б) проводиться індивідуальне анкетне опитування експертів.

Для цього кожному експерту необхідно:

– заповнити складену анкету із наведенням оцінок відносної важливості заданих напрямків дослідження F_j $(j=1,2,...,n)$ (заповнити табл. 4.4 з урахуванням бальної шкали, наведеної в табл. 4.5);
– здійснити самоаналіз ступені знайомства експерта з проблемою та оцінок аргументованості його думок (заповнити табл. 4.2 та табл. 4.3). Результати самоаналізу експертів заносяться до табл. виду 4.6;

Таблиця 4.6 – Результати самоаналізу та оцінки компетентності експертів

Експерти	$K_з^i$	Джерела аргументів				K_k^i
		теоретичний аналіз	досвід	література	інтуїція	
1						
2						
…						

в) за отриманими даними заповнених табл. 4.2, 4.3 проводиться оцінка компетентності експертів шляхом визначення коефіцієнтів компетентності K_k^i $(i=\overline{1,m})$ за виразом (4.11). Визначені оцінки компетентностей експертів заносяться до табл. 4.6.

3 етап. *Математичне опрацювання результатів опитування*.

На даному етапі:

а) всі оцінки експертів, отримані за досліджуваною проблемою в ході опитування групи експертів подаються у вигляді узагальненої таблиці (табл. 4.7), стовпці якої відповідають напрямкам досліджень, а рядки – експертам;

Таблиця 4.7 – Матриця оцінки важливості напрямків досліджень

Експерти (i)	Напрямки досліджень (F_j, $j=1,2,...,n$)			
	F_1	F_2	…	F_n
1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}
2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}
...	…	…	…	
m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}

б) за табл. 4.7 для кожного напрямку F_j $(j=\overline{1,n})$ за співвідношенням (4.14) розраховується узагальнена оцінка M_j $(j=\overline{1,n})$ його важливості з урахуванням компетентності експертів K_k^i $(i=\overline{1,m})$. Результати вписуються до табл. 4.7 окремим рядком;

в) за отриманими узагальненими оцінками M_j ($j=\overline{1,n}$) здійснюється впорядкування (ранжирування) за важливістю досліджуваних напрямків. Чим вищою є M_j ($j=\overline{1,n}$), тим старшим є ранг (місце в упорядкуванні) R_j ($j=\overline{1,n}$) напрямку дослідження. На перше місце ставимо *j*-й напрямок з найвищою оцінкою з M_j, на останнє – із найменшою оцінкою. Результати вписуються до табл. 4.7 окремим рядком;

г) за співвідношенням (4.15) визначаються відносні коефіцієнти значимості λ_j, $j=1,n$ досліджуваних напрямків F_j, $j=1,n$. Результати вписуються до табл. 4.7 окремим рядком.

4 етап. *Встановлення ітогового впорядкування за важливістю (впливовістю, суттєвістю) напрямків дослідження*.

На даному етапі знаходиться ітогове впорядкування за важливістю напрямків дослідження F_j, $j=1,n$, з урахуванням відношень переважності та еквівалентності. На перше місце ставиться *j*-й напрямок F_j, $j=\overline{1,n}$, з найвищою величиною рангу R_j, $j=1,n$. На друге місце – напрямок з величиною рангу, яка є найвищою серед залишившихся, і т.д. Таким чином, визначається остаточний результат дослідження.

Питання для самоконтролю

1. Що розуміється під експертним оцінюванням?
2. Що називається методом експертних оцінок? Що таке експертна оцінка?
3. Кого являє собою експерт? Охарактеризуйте критерії підбору експертів.
4. Що розуміється під поняттям експертизи? Сформулюйте основні етапи підготовки і проведення експертизи.
5. Наведіть класифікацію експертних оцінок.
6. Що є потрібним для проведення процедури опитування?
7. Що являють собою методи індивідуальної експертної оцінки? Охарактеризуйте основні з них.
8. Що являють собою методи колективної експертної оцінки? Охарактеризуйте основні з них.
9. Охарактеризуйте сутність та основні етапи реалізації методу Дельфі.
10. Охарактеризуйте основні методи обробки експертних оцінювань.

Лекція 5. Метод безпосереднього ранжирування та його застосування для розв'язання задач прийняття рішень

Мета лекції: ознайомити з поняттям та способами побудови ранжируваних рядів; засвоїти та набути навичок застосування методології експертного оцінювання за методом безпосереднього ранжирування; опанувати особливості застосування методу безпосереднього ранжирування.

План лекції

5.1 Поняття про ранжування. Основні види представлення ранжируваного ряду. Побудова ранжируваного ряду.
5.2 Сутність та методологія експертного оцінювання за методом безпосереднього ранжирування. Визначення узгодженості суджень експертів.
5.3 Особливості та умови використання методу безпосереднього ранжирування.

Перелік ключових термінів і понять з теми: *ранг; ранжування; способи побудови ранжируваного ряду; відношення переважності та еквівалентності; метод безпосереднього ранжирування; матриця рангових суджень експертів; ітогове (результуюче) ранжування; узгодженість.*

5.1 Поняття про ранжування. Основні види представлення ранжируваного ряду. Побудова ранжируваного ряду

У процесі здійснення експертизи, під час проведення експертного опитування, одержувані від експертів думки (судження) часто виражені *порядковою шкалою*, тобто експерт може сказати (та обґрунтувати), наприклад, що певний тип продукції буде привабливішим для споживачів, ніж інші; що один показник якості продукції є важливішим за інший; що перший технологічний об'єкт є небезпечнішим, ніж другий, і т.д.

Але при цьому експерт не в змозі сказати, *у скільки разів* або *на скільки* важливішою, або, відповідно, небезпечнішою є та чи інша досліджувана характеристика (показник, фактор).

У цьому зв'язку постає питання: як проводити аналіз відповідей, зібраних робочою групою експертів?

Для вирішення такої проблеми експертів часто просять надати ранжування (упорядкування) об'єктів експертизи, тобто розташувати їх у порядку зростання (або, точніше, неспадання) важливості характеристики, яка цікавить організаторів експертизи.

Під ***ранжуванням*** розуміється процес визначення ***рангів***, під якими, в свою чергу, розуміються відносні кількісні оцінки ступенів відмінностей за якісними ознаками (наприклад, розташування факторів у порядку їх суттєвості, значимості в даному дослідницькому контексті).

Іншими словами, під ***ранжуванням*** розуміють розташування досліджуваних факторів у порядку їх істотності або в порядку рангів, поставлених у відповідність кожному фактору.

Отже, ранжування визначаються та вивчаються за допомогою рангів, які за своєю сутністю являють собою номери (об'єкту експертизи) у впорядкованому (ранжируваному) ряді.

Формально ранги виражаються числами 1, 2, 3, ..., але при цьому важливим є те, що над цими числами не можна проводити звичні арифметичні операції.

> *Наприклад, хоча* $1+2=3$*, не можна стверджувати, що для об'єкта, що стоїть на третьому місці в упорядкуванні (в іншій термінології – ранжуванні), важливість характеристики дорівнює сумі важливостей об'єктів з рангами* 1 *та* 2*. Так, наприклад, розглядаючи оцінки досягнень спортсменів, можна поставити питання: чи можна сказати, що спортсмен, який посів третє місце, досяг того ж результату, що й спортсмени, які посіли перше і друге місця, разом узяті?*

Тому очевидно, що для аналізу подібних якісних даних необхідна не звичайна арифметика, а підхід, що дає базу для розробки, вивчення та застосування конкретних методів розрахунку. Одним із таких підходів виступає підхід, в основі якого лежить методологія ранжування.

Ранжування застосовується у випадках, коли є неможливою або недоцільною безпосередня оцінка.

При цьому ранжування об'єктів містить лише інформацію про те, який з об'єктів є кращим, та не містить інформацію про те, наскільки або у скільки разів один об'єкт переважає інший.

Розглянемо більш детально ***процедуру ранжування***.

Нехай експерту пред'являється набір факторів (альтернатив, критеріїв, напрямків дослідження, розвитку), які підлягають оцінюванню, і пропонується впорядкувати їх за уподобаннями та приписати їм числа натурального ряду – ранги. Найкращий фактор отримує ранг, що дорівнює 1, наступний за ним фактор – ранг, що дорівнює 2 і т.д.

В такій постановці формалізуємо процес ранжування (тобто розташування факторів у порядку їх суттєвості) факторів x_i $(i=1,2,\ldots,n)$.

Ранжируваний ряд може будуватися двома способами:

1) на перше місце ставиться найсуттєвіший фактор, слідом за ним менш суттєвий фактор, але найважливіший з решти, і т.д.

   Отриманий таким чином ранжируваний ряд має вигляд

$$x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in}, \tag{5.1}$$

   де i_1 – номер найсуттєвішого фактору; i_2 – номер менш суттєвого фактору; …; i_n – номер найбільш несуттєвого фактору в цьому ряді;

2) кожному фактору x_i ставиться у відповідність деяке число – його ранг k_i, тобто номер фактору в ранжируваному ряді (5.1):

$$\begin{matrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_n, \\ k_1, & k_2, & \ldots, & k_n. \end{matrix} \tag{5.2}$$

Очевидно, що перший ранг ($k_i = 1$) має фактор x_i, який найбільш впливає на реалізацію мети на об'єкті дослідження. Другий і наступні ранги (до $k_i = 2$ і т.д.) ставляться у порядку спадання їх суттєвості (важливості). Наприклад, якщо ранги (5.2) виявилися такими, що відповідають представленню

$$\begin{aligned} x_i &= x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5, \\ k_i &= 3,\ \ 1,\ \ \ 5,\ \ 4,\ \ \ 2, \end{aligned} \tag{5.3}$$

то ранжируваний ряд має вигляд x_2, x_5, x_1, x_4, x_3. Дійсно, з (4.8) видно, що перший ранг ($k_i = 1$) має другий фактор x_2, другий ранг ($k_i = 2$) – п'ятий фактор і т.д. Тепер, якщо доведеться створювати, наприклад, математичну модель з трьома факторами ($n = 3$), вибір істотних чинників з (5.3) є очевидним. Це x_2, x_5, x_1. Четвертим і третім факторами при цьому нехтуємо, причому очевидно, що збиток від цього рішення буде мінімальним, оскільки відкинуто найбільш несуттєві фактори.

Зауваження: при описі ранжируваних рядів застосовуються:

- ***відношення переважності*** ($\succ$), за яким $x_q \succ x_s$ означає, що фактор x_q є більш переважним, ніж фактор x_s. Наприклад, ранжируваний ряд x_2, x_5, x_1, x_4, x_3 з різними за своєю важливістю факторами буде мати вигляд $x_2 \succ x_5 \succ x_1 \succ x_4 \succ x_3$;
- ***відношення еквівалентності*** ($\sim$), за яким $x_q \sim x_s$ означає, що фактор x_q є еквівалентним (з таким самим ступенем важливості) фактору x_s. Наприклад, ранжируваний ряд x_2, x_5, x_1, x_4, x_3 у випадку еквівалентності факторів x_1, x_4 буде мати вигляд $x_2 \succ x_5 \succ x_1 \sim x_4 \succ x_3$.

Задача побудови ранжируваного ряду (5.1) або еквівалентна до неї задача визначення рангів (5.2) вирішується експертами та зводиться до організації експертного опитування й обробки результатів цього опитування з тим, щоб отримати шукані ранги та оцінити їх достовірність, тобто визначити узгодженість суджень експертів.

Найчастіше на практиці застосовують **наступні методи експертного ранжування**:

1. ***безпосереднього ранжування*** (в даному методі експерти відразу привласнюють ранги факторам, які їм представлені для ранжування);
2. ***парних порівнянь*** (в даному методі використовується парне порівняння факторів, яке спрошує задачу експерту, але потребує подальшого оброблення результатів для отримання ранжируваного ряду).

5.2 Сутність та методологія експертного оцінювання за методом безпосереднього ранжирування. Визначення узгодженості суджень експертів

Нехай N експертів ранжують n факторів $x_1,...,x_n$. Кожному фактору кожен експерт присвоює ранг – число від 1 до n. Так, i-му фактору (x_i, $i=\overline{1,n}$) j-й експерт (E_j, $j=\overline{1,N}$) присвоює ранг k_{ij}.

В результаті складається ***матриця*** $K=\left(k_{ij}\right)$ ***рангових суджень експертів:***

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & ... & x_n \end{array} \\ \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ ... \\ E_N \end{array} & \left\| \begin{array}{cccc} k_{11} & k_{21} & ... & k_{n1} \\ k_{12} & k_{22} & ... & k_{n2} \\ ... & ... & ... & ... \\ k_{1N} & k_{2N} & ... & k_{nN} \end{array} \right\| \end{array}, \qquad (5.4)$$

де k_{ij} – ранг i-го фактору ($i=\overline{1,n}$), визначений j-м експертом ($j=\overline{1,N}$); номери рядків відповідають номерам експертів, а номери стовпців – номерам факторів; j-й рядок являє собою думку j-го експерта про усі фактори; i-й стовпець – думка усіх експертів з приводу i-го фактору.

При призначенні рангів експертами потрібно дотримуватися таких умов:

1) сума рангів, призначених всім факторам кожним експертом, має бути

$$\sum_{i=1}^{n} k_{ij} = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \quad j=1,2,...,N;$$

2) якщо експерт якісь з q факторів вважає еквівалентними (однаковими за важливістю), то він надає їм один й той самий ранг, який дорівнює середньому арифметичному з q цілих рангів, таких, які б були отримані за умови, що експерту вдалося їх проранжувати.

Для остаточного визначення шуканих рангів слід обчислити середні ранги кожного i-го фактора:

$$\bar{k}_i = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} k_{ij}, \quad i=\overline{1,n},$$

де на 1 місце ставиться фактор з мінімальним середнім рангом $\bar{k}_l = \min\limits_{i=1,\dots,n}\left\{\bar{k}_i\right\}$, тобто фактор x_l, на 2 місце – фактор, що має мінімальний з решти ранг тощо.

Отримані ранги дозволяють побудувати ранжируваний ряд факторів, який і буде відповідати усередненій оцінці колективу з N експертів. В такому випадку буде отримане ***ітогове (результуюче) ранжування***.

Зауважимо, що, оскільки в процесі ранжування досліджуваних факторів кожним експертом, що входить до експертної групи, встановлюваний ранг присвоюється самостійно, а, отже, можливим є вплив суб'єктивного фактору експерту, виникає необхідність обробки цих даних з метою визначення ступеня довіри ОПР отримуваному ітоговому ранжуванню, в якості міри якого виступає

узгодженість суджень експертів. Ця оцінка є необхідною, в першу чергу, тому, що думки експертів можуть сильно розходитися за оцінюваними параметрами. Неузгоджене ранжування призводить до того, що дані коефіцієнти будуть статистично недостовірними.

В такому формулюванні узгодженість ранжування, здійсненого експертами, необхідно визначати для підтвердження правильності гіпотези про те, що експерти виробляють відносно точні вимірювання, що дозволяє формувати різні угруповання в експертних групах, які обумовлюються багато в чому людськими факторами, насамперед такими, як відмінність поглядів, концепцій, різними науковими школами, характером професійної діяльності тощо.

Узгодженість суджень експертів визначається за допомогою ***коефіцієнта конкордації*** **(*критерію узгодженості*)**

$$W = \frac{12}{n(n^2-1)} \sum_{i=1}^{n} \left(\bar{k}_i - \frac{n+1}{2} \right)^2 ,$$

причому $0 \le W \le 1$.

При $W = 0$ судження експертів повністю розходяться; при $W = 1$ судження експертів висловлюються одноголосно (повністю співпадають), що на практиці являє собою неможливий випадок. Якщо значення коефіцієнта конкордації є невеликим ($0 \le W < 0{,}75$ – для технічних об’єктів та задач технічної спрямованості; $0 \le W < 0{,}5$ – для економічних об’єктів та задач економічної спрямованості; $0 \le W < 0{,}4$ – для екологічних й соціальних об’єктів та задач), то це означає, що ступінь довіри є достатньо низькою, а узгодженість думок експертів – досить слабкою.

Причиною низької узгодженості експертів може бути або дійсно відсутня спільність думок експертів, або ситуація, коли серед експертів існують групи з високою узгодженістю думок, однак спільні думки їх при цьому є протилежними. В таких випадках для підвищення ступінь довіри можна застосувати наступне:

1) надати експертам досліджувані фактори для повторного ранжування;
2) змінити кількість експертів, що входять в експертну групу;
3) замінити групу експертів.

5.3 Особливості та умови використання методу безпосереднього ранжирування

Сформулюємо ***основні переваги та недоліки методу безпосереднього ранжування***, які формують особливості та умови використання методу.

До *недоліків методу* слід віднести:

– обмеженість кількості факторів, які підлягають ранжуванню. Їх кількість може становити не більше 20. Пов’язано це виключно із можливостями експертів. По суті це призводить до виникнення неточностей (похибок) при використанні методу при великому числі обробок, оскільки зі збільшенням кількості досліджуваних факторів експертам стає важко присвоїти об'єктивні рангові оцінки;

– високий вплив суб’єктивного фактору експерту (оскільки ранжируваний ряд не є результатом кількісних оцінок факторів, а є результатом суб’єктивної думки відповідного експерту);
– залишається відкритим питання про те, наскільки далеко за значимістю знаходяться досліджувані об'єкти один від одного.

До *переваг методу* відносяться:

– низька трудомісткість методу при здійснюванні математичних обчислень;
– зручність для програмування та потреба в мінімальному обсязі використовуваних ресурсів обчислювальної техніки;
– низький рівень використовуваних ресурсів часу для проведення досліджень.

Питання для самоконтролю

1. Що таке ранг? Яким чином його визначають?
2. Сформулюйте поняття ранжування.
3. Які існують способи побудови ранжируваного ряду?
4. Яким методом можна побудувати ітогове (результуюче) ранжирування?
5. У чому полягає метод безпосереднього ранжирування?
6. Яким чином будується матриця рангових суджень експертів?
7. Які умови висуваються до матриці рангових суджень експертів?
8. Що таке коефіцієнт конкордації та як він визначається?
9. Які є границі змінення коефіцієнта конкордації для методу безпосереднього ранжування? Що вони означають для об’єктів різної спрямованості?
10. Сформулюйте основні недоліки методу безпосереднього ранжирування та способи їх усунення.

Лекція 6. Метод парних порівнянь та його застосування для розв'язання задач прийняття рішень

Мета лекції: засвоїти та набути навичок застосування методології експертного оцінювання за методом парних порівнянь; опанувати особливості застосування методу парних порівнянь.

План лекції

6.1 Сутність та методологія експертного оцінювання за методом парних порівнянь.
6.2 Визначення узгодженості суджень експертів.
6.3 Особливості та умови використання методу парних порівнянь.

Перелік ключових термінів і понять з теми: *метод парних порівнянь: сутність та основні етапи; матриці парних порівнянь; матриця середніх парних порівнянь; середні ранги за кожним і-м фактором; ітогове ранжування; узгодженість; переваги й недоліки методу парних порівнянь*.

6.1 Сутність та методологія експертного оцінювання за методом парних порівнянь

Серед методів обробки експертних суджень, застосовуваних для одержання коефіцієнтів відносної важливості факторів (параметрів, ознак, напрямків розвитку і т. ін.), метод парних порівнянь вважається дуже ефективним, оскільки дозволяє визначити відносну важливість факторів, коли безпосереднє ранжування стає важким.

Згідно з цим методом усі фактори порівнюються між собою послідовно, причому кожна наступна оцінка не зв'язана з попередньою.

Нехай N експертів ранжирують n факторів $x_1,...,x_n$ та отримують ранжирувані ряди.

Необхідно визначити ітогове ранжування методом парних порівнянь, яке буде узагальнювати судження всіх експертів.

Для цього здійснюються наступні **етапи методу парних порівнянь**:

1) складаються матриці парних порівнянь для кожного експерта;

2) визначається матриця середніх парних порівнянь;

3) визначається середнє значення середнього парного порівняння i-го фактора з l-м для кожного фактору;

4) визначається ітогове ранжування факторів.

Розглянемо кожний з наведених етапів реалізації методу докладно.

1 *етап*. ***Складання матриці парних порівнянь для кожного експерта***.

На цьому етапі здійснюється полегшення процедури порівняння наявних факторів, для чого звичайно використовується спеціальна матриця (таблиця) парних порівнянь (табл. 6.1), в якій фактори (параметри, ознаки, напрями розвитку) розміщуються за горизонталями та за вертикалями (у верхньому рядку та в лівому крайньому стовпці).

Таблиця 6.1 – Матриця парних порівнянь

Фактори	x_1	x_2	…	x_l	…	x_n
x_1	$x_1 : x_1$	$x_1 : x_2$	…	$x_1 : x_l$	…	$x_1 : x_n$
x_2	$x_2 : x_1$	$x_2 : x_2$	…	$x_2 : x_l$	…	$x_2 : x_n$
…	…	…	…	…	…	…
x_n	$x_n : x_1$	$x_n : x_2$	…	$x_n : x_l$	…	$x_n : x_n$

За даною таблицею попарно порівнюються фактори x_i з x_l з метою визначення у кожній парі найбільш важливого (значущого) фактору. В результаті таких попарних порівнянь факторів x_i з x_l заповнюється наступна таблиця (матриця), у комірки якої вписуються результати (оцінки) q_{il} здійснених порівнянь.

При цьому ранжування в такій постановці відбувається за правилом: якщо фактор *i* (у рядку) є більш значущим, ніж фактор *l* (у стовпці), то елементу q_{il} (у комірці *il*) приписується «+1», в противному випадку – ставиться «–1». У комірках головної діагоналі (q_{il}, $i = l$) проставляються «0», оскільки порівнювальні елементи на головній діагоналі є еквівалентними самі до себе.

Отже, досліднику пропонується попарно проранжирувати фактори, що формально означає, що кожній парі факторів x_i та x_l поставлено у відповідність число

$$q_{il} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x_i \succ x_l ; \\ 0, & \text{якщо } x_i \sim x_l ; \\ -1, & \text{якщо } x_i \prec x_l . \end{cases}$$

При цьому $q_{il} = -q_{li}$.

Таким чином, судження кожного *j*-го експерту представляється у вигляді матриці парних порівнянь виду

$$Q^j = \left\| q_{il}^j \right\|, \quad i,l = 1,2,...,n; \quad j = 1,2,...,N,$$

де q_{il}^j визначає оцінки q_{il}, отримані за судженням j-го експерта; кількість матриць Q^j відповідає кількості експертів, тобто N.

2 *етап*. ***Визначення матриці середніх парних порівнянь.***

На даному етапі отримані на попередньому етапі матриці $Q^j = \left\| q_{il}^j \right\|$ для усереднення суджень експертів зводяться до однієї загальної матриці – матриці середніх парних порівнянь розмірності $n \times n$ виду

$$\overline{Q} = \left\| \overline{q}_{il} \right\|,$$

де $\overline{q}_{il}$ – середнє парне порівняння *i*-го фактора з *l*-м, отримане від усіх N експертів: $\overline{q}_{il} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} q_{il}^j$, $\quad i, l = 1, 2, ..., n$.

3 *етап*. ***Визначення середніх рангів за кожним i-м фактором.***

На даному етапі для остаточного визначення шуканих рангів обчислюються середні ранги за кожним *i*-м фактором

$$\overline{q}_i = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} \overline{q}_{il}, \quad i = 1, ..., n.$$

Такі середні ранги $\overline{q}_i$ виступають в якості *показників узагальненого судження щодо важливості факторів*: чим більшою є сума *i*-го рядка, тим більш важливе значення має *i*-й фактор.

4 *етап*. ***Визначення ітогового ранжування факторів.***

На даному етапі за обчисленими середніми рангами $\overline{q}_i$ будується ранжируваний ряд, в якому на перше місце ставиться фактор з максимальним середнім рангом

$$\overline{q}_v = \max_{i=1,...,n} \{ \overline{q}_i \},$$

тобто фактор x_v (цей фактор є найсуттєвішим), на друге місце ставиться фактор, який має максимальний з решти середній ранг, і т.д.

Отримані ранги дозволяють побудувати ранжируваний ряд факторів, який і буде відповідати усередненій оцінці колективу з N експертів. В такому випадку буде отримане ***ітогове (результуюче) ранжування***.

6.2 Визначення узгодженості суджень експертів

З метою оцінки ступеня довіри ОПР отримуваному ітоговому ранжуванню надалі проводиться перевірка ***узгодженості суджень експертів***, яка встановлюється за коефіцієнтом конкордації $0 \le W \le 1$ вигляду

$$W = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,l=1}^{n} \left(\overline{q}_{il} \right)^2.$$

При $W = 1$ судження експертів є повністю узгодженими, а при $W = 0$ вони суперечать один одному. Якщо значення коефіцієнта конкордації є невеликим ($0 \le W < 0{,}75$ – для технічних об'єктів та задач технічної спрямованості; $0 \le W < 0{,}5$ – для економічних об'єктів та задач економічної спрямованості; $0 \le W < 0{,}4$ – для екологічних й соціальних об'єктів та задач), то це означає, що ступінь довіри є достатньо низькою, а узгодженість думок експертів – досить слабкою.

6.3 Особливості та умови використання методу парних порівнянь

Сформулюємо ***основні переваги та недоліки методу парних порівнянь***, які формують особливості та умови використання методу.

До *недоліків методу* слід віднести наступні:

– має місце невеликий вплив суб'єктивного фактору експерту (оскільки ранжируваний ряд не є результатом кількісних оцінок факторів, а є результатом суб'єктивної думки відповідного експерту);
– залишається відкритим питання про те, наскільки далеко за значимістю знаходяться досліджувані фактори один від одного.

До *переваг методу* відносяться наступні:

– немає обмеженості кількості факторів, які підлягають ранжуванню;
– експерт у процесі експертизи зосереджує свою увагу не на всіх факторах відразу, а тільки на двох, які порівнюються в даний момент (це полегшує роботу і сприяє підвищенню якості експертизи).
– здійснюється велика кількість порівнянь кожного фактору з іншими, за рахунок чого підвищується точність та відкривається можливість вивчення великої кількості ознак);
– метод дозволяє одержати не тільки середню оцінку фактору, надану кожним експертом, а й дисперсію цієї оцінки, що дає можливість проведення більш глибокого статистичного аналізу;
– допускається вимірювання нерівномірно змінюваних важливостей показників.

Питання для самоконтролю

1. Розкрийте сутність методу парних порівнянь.
2. Охарактеризуйте основні етапи використання методу парних порівнянь.
3. Яким чином будуються матриці парних порівнянь?
4. Як будується матриця середніх парних порівнянь?
5. Як обчислюються середні ранги за кожним *i*-м фактором?
6. Як знайти ітогове ранжування методом парних порівнянь?
7. Яким чином в методі парних порівнянь перевіряється узгодженість суджень експертів?
8. Які є границі змінення коефіцієнта конкордації для методу парних порівнянь? Що вони означають для об'єктів різної спрямованості?
9. Сформулюйте основні переваги методу парних порівнянь.
10. Сформулюйте основні недоліки методу безпосереднього ранжирування та способи їх усунення.

Лекція 7. Формалізація конфліктних ситуацій за допомогою теорії ігор

Мета лекції: опанувати сутність, основні риси та передумови виникнення конфліктних ситуацій; ознайомитись з основними поняттями теорії ігор; засвоїти основні види ігор за різними класифікаційними ознаками.

План лекції

7.1 Сутність конфліктних ситуацій та передумови їх виникнення.
7.2 Основні поняття й визначення теорії ігор.
7.3 Класифікація ігор.

Перелік ключових термінів і понять з теми: *конфліктна ситуація; характерні риси конфліктної ситуації; гра; гравець; партія; хід; стратегія; функція виграшу; ситуація; ситуація рівноваги; наслідки конфлікту; ціна гри; розв'язок гри; класифікація ігор.*

7.1 Сутність конфліктних ситуацій та передумови їх виникнення

Багато практичних ситуацій, у яких розглядається питання про вибір розв'язку, володіють тією властивістю, що в них зустрічаються не менш двох сторін з різними (іноді, протилежними) інтересами, кожна з яких для досягнення своєї мети має можливість діяти різними способами, вибір яких при деяких умовах може здійснюватися залежно від дій протиборчої сторони. Такі ситуації називаються ***конфліктними*** [16-18].

Отже, зіткнення протилежних інтересів призводить до виникнення конфліктних ситуацій.

Конфліктною ситуацією в такому формулюванні називається ситуація, у якій стикаються інтереси двох чи більше сторін, що мають суперечливі цілі, причому виграш кожної зі сторін залежить від того, як поводитимуться інші.

Конфліктні ситуації характеризуються *наступними рисами*:

1. наявність зацікавлених сторін (споживачі, фірми, країни й т.ін.);
2. існування можливих дій кожної зі сторін;
3. інтереси сторін (задоволення потреб сторін).

Наприклад, конфліктні ситуації виникають в процесі конкурентної боротьби, коли через дії окремих господарюючих суб'єктів інші суб'єкти зазнають збитків, але ці суб'єкти можуть здійснювати відповідні дії, спрямовані на покращення своїх конкурентних позицій, завдаючи втрат іншим суб'єктам. Крім того, конфліктні ситуації виникають при дослідженні широкого діапазону військових проблем – від тактики одиночних боїв-дуелів між танками та бойовими літаками до стратегічних питань проведення великих операцій та воєн у цілому. В таких постановках виникають задачі вибору оптимальних видів озброєння, оптимальних угруповань збройних сил та оптимальних методів проведення тактичних боїв та операцій. Конфліктні ситуації можуть виникати й у одного суб'єкта господарювання, наприклад, через суперечності між окремими цілями діяльності та способами їх досягнення.

Так, можуть виявитися суперечливими цілі максимізації прибутку підприємства у найближчій та довгостроковій перспективах. Мета збільшення обсягу виробництва продукції підприємства може суперечити меті зменшення шкідливого впливу на довкілля. Можливе застосування диференційованого ціноутворення, що сприятиме збільшенню прибутку підприємства. Дія чинників зовнішнього оточення, яку неможливо спрогнозувати, також може призвести до виникнення конфліктних ситуацій.

Конфліктні ситуації можуть виникати з різних причин, що зумовлює необхідність розв'язання цих ситуацій за допомогою спеціальних методів. Якщо потрібно знайти найкраще рішення в умовах конфлікту, доцільно скористатися положеннями теорії ігор.

7.2 Основні поняття й визначення теорії ігор

Апаратом розв'язання зазначених задач є ***теорія ігор***, яка представляє собою теорію побудови математичних моделей прийняття оптимальних рішень в умовах конфлікту [6, 16, 18]. Оскільки сторони, що беруть участь у вирішенні конфліктів, зацікавлені у прихованні своїх намірів від супротивника, прийняття рішень в умовах конфлікту виявляється переважно прийняттям рішень в умовах невизначеності. Фактор невизначеності в даній ситуації можна інтерпретувати як супротивника ОПР.

Щоб виключити труднощі, які виникають при аналізі конфліктних практичних ситуацій у результаті наявності багатьох несуттєвих факторів, будується спрощена модель ситуації.

Математична модель конфліктної ситуації називається ***грою***.

Від реальної конфліктної ситуації гра відрізняється тим, що не включає другорядні, несуттєві для ситуації фактори й ведеться за певними правилами, які в реальній ситуації можуть порушуватися.

Отже, ***теорія ігор*** – це теорія математичного моделювання умов конфлікту й пошук на цій основі оптимальних компромісів.

Предметом дослідження теорії ігор є такі ситуації, у яких важливу роль відіграють конфлікти та спільні дії.

Природною базою для аналізу конфліктних ситуацій виступають широко розповсюджені ігри – шахи, шашки, карткові ігри. Тому теорії ігор властива наступна термінологія.

Гравці – сторони, що беруть участь у конфлікті.

Гравці, які мають протилежні по відношенню один до одного інтереси, називаються ***супротивниками***.

Партія – одне здійснення гри.

Стратегії – доступні (з деякого набору правил) для гравців дії, у загальному випадку – це набір правил і обмежень.

Правила гри – це допустимі дії кожного з гравців, спрямовані на досягнення деякої мети.

На множині всіх можливих стратегій задається ***функція виграшу*** або ***платіжна функція***.

Якщо стратегії гравців є визначеними, то платіжна функція для цього конкретного набору стратегій визначає розмір виграшу або програшу кожної зі сторін.

Ситуації – це можливі наслідки конфлікту. Кожна ситуація – результат вибору кожним гравцем своєї стратегії.

Ситуація називається ***прийнятною*** для гравця, якщо цей гравець, змінюючи в ситуації свою стратегію, не може збільшити свого виграшу.

Ситуація рівноваги – ситуація, прийнятна для всіх гравців.

Процес розв'язання гри – процес знаходження ситуації рівноваги.

Виграш (програш, нічия) – наслідки конфлікту, результати гри.

Виграші (програші, нічиї) учасників мають кількісне вираження (якщо це не так, то завжди можна їм його приписати, наприклад, у шахах вважати «виграш» за 1, «програш» – за (-1), «нічию» – за 0).

Розвиток гри в часі можна представляти як ряд послідовних «ходів» учасників.

Ходом називається вибір гравцем одного з передбачених правилами гри дій та його здійснення.

Ходи бувають:

- *особисті* **–** гравець свідомо обирає та здійснює той або інший варіант дій (приклад – будь-який хід у шахах).
- *випадкові* – вибір здійснюється не волею гравця, а якимось механізмом випадкового вибору (кидання монети, грального кістки, виймання карти з колоди і т.ін.).

Усяка гра містить у собі ***три елементи***: учасників гри – гравців, правила гри, оцінку результатів дій гравців:

$$\Gamma = < I,\ \{x\},\ \{H\} > = <\text{ гравці, стратегії, виграші } >.$$

Невизначеність результату гри викликається **різними причинами**, які розбиваються на 3 групи:

1. *особливості правил гри*, які викликають величезну різноманітність у її розвитку таким чином, що результат гри неможливо передбачити заздалегідь – комбінаторні ігри (шахи, шашки);
2. *вплив випадкових факторів* – азартні ігри (кістки, карти);
3. *відсутність інформації* про дії супротивника.

Основною метою розв'язування задач цього класу є розробка рекомендацій щодо вибору оптимальних стратегій дії конфліктуючих сторін із застосуванням методичних підходів теорії ігор, що дає змогу ефективно спланувати принципи поведінки та стратегії вибору дій в різних ситуаціях.

Отже, ***основною метою та задачею теорії ігор*** є вироблення рекомендацій для гравців, тобто визначення для них оптимальних стратегій.

Оптимальною стратегією гравця називається стратегія, яка забезпечує йому найкраще положення в даній грі, тобто отримання максимального виграшу. Якщо гра повторюється неодноразово й містить, крім особистих, ще й випадкові ходи, оптимальна стратегія забезпечує максимальний середній виграш.

7.3 Класифікація ігор

На сьогоднішній день існує багато підходів до класифікацій ігор [6, 18]. Розглянемо основні з них.

1. Залежно від кількості гравців розрізняють:
   - *ігри двох гравців (парні ігри)* – ігри, у яких можуть зустрічатися інтереси двох супротивників (такі ігри є найбільш вивченими);
   - *ігри n гравців (множинні)* – ігри, у яких можуть зустрічатися інтереси трьох і більше супротивників (такі ігри є менш дослідженими через виникаючі принципові труднощі й технічні можливості одержання розв'язку. Чим більше гравців, тим більше проблем).
2. За кількістю стратегій ігри діляться на:
   - *кінцеві ігри* – ігри, у яких усі гравці мають кінцеве число можливих стратегій;
   - *нескінченні ігри* – ігри, у яких хоча б один з гравців має нескінченну кількість можливих стратегій.
3. За доступністю інформації ігри діляться на:
   - *ігри з повною інформацією* – гра, у якій кожний гравець при кожному особистому ході знає всю передісторію її розвитку, тобто результати всіх попередніх ходів, як особистих, так і випадкових (шахи, шашки, «хрестики й нулики»);
   - *ігри з неповною інформацією* (карти).
4. За характером взаємодії ігри діляться на:
   - *безкоаліційні ігри* – ігри, при яких гравці не мають права вступати в угоди, утворювати коаліції;
   - *коаліційні ігри* – ігри, при яких гравці можуть вступати в коаліції;
   - *кооперативні гри* – ігри, при яких коаліції є визначеними наперед.
5. За характером виграшів ігри діляться на:
   - *ігри з нульовою сумою* (загальний капітал усіх гравців не змінюється, а перерозподіляється між гравцями, тобто один гравець отримує виграш за рахунок програшу інших гравців; сума виграшів усіх гравців дорівнює нулю).
     Ігри двох гравців з нульовою сумою відносяться до класу *антагоністичних ігор* (при цьому виграш одного гравця дорівнює, природно, програшу іншого гравця);
   - *ігри з ненульовою (фіксованої) сумою* (ігри, в яких потрібно здійснювати внесок за право участі в них).
6. За кількістю ходів ігри діляться на:
   - *однокрокові ігри* – ігри, у яких після кожного ходу гра закінчується й відбувається перерозподіл виграшів;
   - *багатокрокові ігри* (шахи).

7. За видом функцій виграшу ігри діляться на:
   - *матричні ігри*. Під *матричною грою* розуміється кінцева гра двох гравців з нульовою сумою, у якій задається виграш гравця 1 у вигляді матриці (рядок матриці відповідає номеру застосовуваної стратегії гравця 2, стовпець – номеру застосовуваної стратегії гравця 2; на перетині рядка й стовпця матриці перебуває виграш гравця 1, що відповідає застосовуваним стратегіям). Для матричних ігор доведено, що кожна з них має розв'язок і він може бути легко знайдений аналітичними та чисельними методами;
   - *біматричні ігри*. Під *біматричною грою* розуміється кінцева гра двох гравців з ненульовою сумою, у якій виграші кожного гравця задаються матрицями окремо для відповідного гравця (у кожній матриці рядок відповідає стратегії гравця 1, стовпець – стратегії гравця 2, на перетинанні рядка й стовпця в першій матриці перебуває виграш гравця 1, у другій матриці – виграш гравця 2.). Для біматричних ігор також розроблена теорія оптимальної поведінки гравців, однак розв’язувати такі ігри складніше, ніж звичайні матричні;
   - *неперервні ігри* – ігри, у яких функція виграшів кожного гравця є неперервно залежною від стратегій. Ігри цього класу мають розв'язки, однак не розроблено практично прийнятних методів їх знаходження;
   - *опуклі ігри* – ігри, у яких функція виграшів є опуклою. Для них розроблено прийнятні методи розв'язання, що полягають у відшуканні чистої оптимальної стратегії (певного числа) для одного гравця та ймовірностей застосування чистих оптимальних стратегій іншого гравця. Така задача розв’язується порівняно легко.

Питання для самоконтролю

1. Що таке конфліктна ситуація?
2. Наведіть основні риси конфліктної ситуації.
3. У чому полягає задача теорії ігор?
4. Що називається грою?
5. Що таке партія?
6. Що називають виграшем?
7. Які елементи містить у собі будь яка гра?
8. Яка стратегія називається оптимальною стратегією?
9. Які ігри розрізняють в залежності від характеру взаємодії?
10. Які ігри розрізняють в залежності від доступності інформації?
11. Які ігри розрізняють в залежності від виду функцій виграшу?
12. Надайте визначення гри двох осіб з нульовою сумою виграшу.

Лекція 8. Матричні ігри. Гра двох осіб з нульовою сумою виграшу. Розв'язання матричних ігор у чистих стратегіях

Мета лекції: ознайомити з поняттям матричної гри двох осіб з нульовою сумою виграшу; опанувати алгоритм формалізації конфліктної ситуації та побудови її математичної моделі; засвоїти принципи вибору стратегій гравцями; вивчити метод розв'язання матричних ігор у чистих стратегіях.

План лекції

8.1 Гра двох осіб з нульовою сумою виграшу.
8.2 Принципи вибору стратегій гравцями в матричній грі з нульовою сумою виграшу. Розв'язання матричних ігор у чистих стратегіях.

Перелік ключових термінів і понять з теми: *гра з нульовою сумою; матрична форма гри; антагоністична гра двох осіб; матриця гри; чиста стратегія;* алгоритм формалізації конфліктної ситуації*; сідлова точка; верхня та нижня ціни гри; розв'язок гри в чистих стратегіях.*

Як вже відомо, будь-яка гра містить у собі **три елементи**: учасників гри – гравців, правила гри, оцінку результатів дій гравців:

$$\Gamma = < I, \{x\}, \{H\} > = <\text{ гравці, стратегії, виграші } >.$$

Таким чином, будь-яка гра передбачає наступне:

- *наявність деякого числа n осіб, які беруть у ній участь (гравців)*. За кількістю гравців ігри класифікуються на ігри двох осіб, трьох осіб тощо;
- *наявність правил гри*, які визначають можливі варіанти дій гравців, обсяг інформації кожної сторони про дії іншої, результат гри, до якого приводить відповідна послідовність ходів. У більшості ігор передбачається, що інтереси учасників піддаються кількісному опису, тобто результат гри (виграш) визначається певним числом;
- *наявність кінцевого виграшу (або програшу) кожного гравця*. Коли гра закінчується, кожен гравець отримує дохід p_i (якщо $p_i < 0$, то це означає, що гравець програв), що залежить від його поведінки та поведінки інших гравців.

Найбільш вивченим класом ігор є так звані ***ігри з нульовою сумою*** [6, 16-19], коли у будь-якій партії має місце умова

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 0,$$

виконання якої означає, що, якщо хтось виграє, то хтось обов'язково програє. Особливо це проявляється в іграх двох осіб з нульовою сумою, коли $p_1 + p_2 = 0$, тобто $p_2 = -p_1$ (інтереси гравців є суворо протилежними, оскільки виграш одного гравця є одночасно програшем іншого). Такі ігри називають *антагоністичними*.

Інші ігри – ***з ненульовою сумою*** – виникають як за умов конфліктної поведінки гравців, так і за їх узгоджених дій.

Будь-яка гра складається з *партій*, які починаються та закінчуються, після чого гравцям виплачуються їх виграші.

У свою чергу кожна партія складається з *ходів*, які одночасно чи послідовно роблять гравці.

Опис гри як послідовності ходів зветься ***позиційною формою гри***. Теорія ігор у позиційній формі розроблена дуже слабо.

Основний зміст сучасної теорії ігор – це так звана ***матрична форма гри***. У цьому випадку вважається, що кожен гравець робить лише один хід, причому всі ходи робляться одночасно. Після цього кожному гравцеві виплачується виграш (або береться програш) в залежності від того, які ходи були зроблені ним та іншими гравцями.

Взагалі кажучи, гра в позиційній формі може бути зведена до гри в матричній формі, проте для реальних ігор це зведення є настільки складним, що практично є неможливим навіть для сучасних ЕОМ. Однак цілком можливо, що в майбутньому така інформація матиме і практичний зміст.

8.1 Гра двох осіб з нульовою сумою виграшу

Кінцева парна гра двох осіб з нульовою сумою (***антагоністична гра двох осіб*** або ***двох коаліцій***) в матричній формі займає центральне місце у сучасній теорії ігор, оскільки теорія таких ігор розроблена майже остаточно. Для такої гри характерним є те, що в ній виграш однієї сторони дорівнює програшу іншої, а сума виграшів обох сторін дорівнює нулю.

Подібна ситуація є типовою у практичній діяльності ОПР, які щоденно приймають рішення за умов гострої конкуренції, неповноти інформації тощо. Основною метою розв'язування задач цього класу є розроблення рекомендацій щодо вибору оптимальних стратегій конфліктуючих сторін на основі застосування методичних підходів теорії ігор.

Розглянемо таку гру. Нехай у грі беруть участь два гравці A та B з протилежними інтересами (виграш одного гравця дорівнює програшу іншого).

У розпорядженні гравця A є лише m можливих ходів $i = 1,2,...,m$ (m можливих стратегій $A_1, A_2,..., A_m$); у розпорядженні гравця B (супротивника) є n можливих ходів $j = 1,2,...,n$ (n можливих стратегій $B_1, B_2,..., B_n$). Натуральні числа m та n ніяким чином не пов'язані.

Можливі такі ходи (стратегії) гравців A та B називаються ***чистими стратегіями***.

Обидва гравці роблять одночасно по одному ходу, після чого партія вважається закінченою. Отже, парна гра складається із двох ходів:

1. гравець A робить хід i та обирає одну зі своїх можливих чистих стратегій A_i $(i = \overline{1,m})$;
2. гравець B робить хід j та обирає свою чисту стратегію із B_j $(j = \overline{1,n})$ при повному незнанні обраної стратегії гравцем A.

Введемо наступні позначення: $\varphi_1(A_i, B_j)$ – виграш гравця A;

$\varphi_2(A_i, B_j)$– виграш гравця B.

Виграші повинні задовольняти умові:

$$\varphi_1(A_i, B_j) + \varphi_2(A_i, B_j) = 0. \qquad (8.1)$$

Якщо позначимо, що

$$\varphi_1(A_i, B_j) = \varphi(A_i, B_j),$$

то, отже,

$$\varphi_2(A_i, B_j) = -\varphi(A_i, B_j).$$

Оскільки виграш гравця A дорівнює виграшу гравця B зі зворотним знаком, ми можемо цікавитися тільки виграшем $\varphi(A_i, B_j)$ гравця A. Природно, A прагне максимізувати, а B – мінімізувати $\varphi(A_i, B_j)$.

Якщо гравець A обирає деяку стратегію A_i, то це само по собі не може впливати на значення функції $\varphi(A_i, B_j)$, тобто вплив A_i на величину значення $\varphi(A_i, B_j)$ є невизначеним. Визначити j можна тільки після вибору своєї стратегії B_j гравцем B.

Наслідки гри $m \times n$ повністю визначаються матрицею (***платіжною матрицею*** або ***матрицею гри***) виду

$$A = (a_{ij})_{m \times n},$$

де $a_{ij} = \varphi(A_i, B_j)$.

Наприклад, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}_{2 \times 4}$.

Матриця гри – це таблиця, у яку зведені правила гри в такий спосіб:

а) кількість рядків у матриці A відповідає кількості стратегій гравця A, а кількість стовпців – кількості стратегій гравця B;

б) номер рядка матриці A відповідає номеру стратегії A_i гравця A, а номер стовпця – номеру застосовуваної стратегії B_j гравця B;

в) на перетині рядка A_i й стовпця B_j перебуває елемент a_{ij}, тобто виграш гравця A (відповідний до застосовуваних стратегій) або програш гравця B. Таким чином, елементи a_{ij} матриці A є платою гравця B гравцю A у випадку вибору гравцем A стратегії A_i (i-го рядка), а гравцем B – стратегії B_j (j-го стовпця). Кількість таких ситуацій дорівнюватиме $(m \times n)$.

Елементи a_{ij} матриці A можуть бути додатними, від'ємними або рівними нулю:

– якщо елемент a_{ij} матриці є додатним $(a_{ij} > 0)$, то це означає, що гравець B в певній ситуації повинен сплатити гравцю A суму, яка дорівнює значенню цього елемента a_{ij};

– якщо елемент a_{ij} – від'ємний ($a_{ij} < 0$), то це означає, що гравець A сплачує гравцю B суму, яка дорівнює абсолютному значенню цього елемента a_{ij};

– якщо елемент $a_{ij} = 0$, то це означає, що ніякої виплати не проводиться.

Отже, в грі двох осіб з нульовою сумою один гравець виграє стільки ж, скільки програє інший (всі виплати проводяться з «кишень» супротивників). Це і пояснює назву – гра з нульовою сумою.

При складанні моделі гри платіжну матрицю зручно попередньо подати у табличній формі виду

	B_1	B_2	…	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}

З метою формалізації конфліктної ситуації та подання її у вигляді математичної моделі задач теорії ігор, тобто гри, здійснюються наступні етапи:

1 етап: визначення гравців (учасників гри) та всіх можливих дії кожного гравця;

2 етап: складання платіжної функції кожного гравця (якщо вона є уявною в аналітичному вигляді);

3 етап: обчислення виграшів кожного гравця в залежності від одночасних дій гравця та його противника;

4 етап: заповнення платіжної матриці гри.

Зведення гри до матричної форми є досить складним, а іноді і нездійсненним завданням через незнання стратегій, їх значну кількість та складність оцінки виграшу, що свідчить про обмеженість можливостей теорії ігор при розв'язанні задач.

Оскільки скінченну парну гру з нульовою сумою можна представити у вигляді матриці, таку гру називають ***матричною***.

За загальним виглядом платіжні матриці (в умовах конфлікту) та матриці рішень (в умовах невизначеності й ризику) є подібними. Відмінність між ними полягає в тому, що:

– *в умовах конфлікту* в якості розумних суперників (гравців) виступають свідомі суб'єкти керування, які будують свою стратегію відповідно до дій один одного;

– *в умовах невизначеності та ризику* «супротивником» суб'єкта керування є середовище (природа), протидія якого не є свідомою та яке не може реагувати на дії суб'єкта керування.

Тому ігри, які відповідають конфліктним ситуаціям, називаються ***стратегічними***, а ігри, що відповідають умовам невизначеності та ризику – ***статистичними***.

Аналіз платіжної матриці дозволяє розробити рекомендації щодо вибору оптимальних рішень гравців.

Отже, після побудови матриці гри необхідно обрати оптимальну (ефективну) стратегію, тобто вирішити гру, для чого, в першу чергу, потрібно ознайомитися з принципами, на які спираються гравці *A* та *B* при виборі своїх стратегій A_i $(i=\overline{1,m})$ та B_j $(j=\overline{1,n})$.

8.2 Принципи вибору стратегій гравцями в матричній грі з нульовою сумою виграшу. Розв'язання матричних ігор у чистих стратегіях

Нехай гравець *A* обирає деяку стратегію A_i.

Тоді *в найгіршому випадку* (коли його вибір стане відомим супротивникові) він одержить виграш, що дорівнює

$$\alpha_i = \min_j a_{ij}.$$

Передбачаючи таку можливість, гравець *A* повинен обрати таку стратегію A_{i0}, щоб максимізувати свій мінімальний виграш, тобто

$$\alpha = \alpha_{i0} = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j a_{ij}. \qquad (8.2)$$

Величина α гарантує виграш гравця *A* та називається **нижньою ціною гри**, яка показує, який мінімальний виграш може гарантувати собі гравець *A*, застосовуючи свої стратегії при будь-яких діях гравця *B*.

Стратегія A_{i0}, що забезпечує одержання α називається **максимінною стратегією**, ідея якої полягає в тому, що гравець *A* не розраховує на можливі помилки гравця *B* та одержує **гарантований виграш** α.

Гравець *B*, обираючи стратегію виходить із наступного принципу: при виборі деякої стратегії B_j його програш не перевищить максимального зі значень елементів *j*-го стовпця матриці, тобто

$$\beta_j = \max_i a_{ij}.$$

Розглядаючи всі значення β_j, гравець *B* обирає таке значення β_{j0}, при якому його максимальний програш буде мінімальним, тобто

$$\beta = \beta_{j0} = \min_j \beta_j = \min_j \max_i a_{ij}. \qquad (8.3)$$

Величина β називається **верхньою ціною гри** та показує, який максимальний виграш за рахунок своїх стратегій може гарантувати собі гравець *A*.

Відповідна до виграшу β стратегія B_{j0} називається **мінімаксною стратегією.**

Ситуація (i, j), яка відповідає парі стратегій (A_i, B_j) та якій поставлено у відповідність число a_{ij}, визначає результат вибору кожним гравцем своєї стратегії.

Якщо гравці *A* та *B* прийняли відповідно стратегії A_{i0} й B_{j0}, то говорять, що вони використовують **принцип мінімаксу (принцип гарантованого результату)**: *поступай таким чином, щоб при найгіршій для тебе поведінці супротивника одержати максимальний виграш.*

У випадку, коли $\alpha = \beta$, ми маємо справу з ***сідловою точкою*** або ***точкою рівноваги***.

Сідлова точка – це такий елемент $a_{i_0 j_0}$ матриці A, який одночасно є мінімальним у рядку й максимальним у стовпці.

Стратегії (i_0, j_0), які є відповідними до сідлової точки $a_{i_0 j_0}$, називаються ***оптимальними чистими стратегіями***.

Ознака наявності сідлової точки й урівноваженої пари стратегій (пари стратегій A_{i_0}, B_{j_0}, які володіють властивістю рівноваги) – це рівність нижньої й верхньої цін гри

$$V = \alpha = \beta.$$

Значення $V = \alpha = \beta$ називається ***чистою ціною гри***.

Ціна гри V й набір стратегій (i_0, j_0) утворюють ***розв'язок гри в чистих стратегіях***, тобто набір

$$\{(i_0, j_0), V\}.$$

Твердження 8.1. Ситуація (i_0, j_0) в матричній $m \times n$ - грі є ***рівноважною (сідловою точкою)***, якщо для будь-якого $i = 1,...,m$ й кожного $j = 1,...,n$ виконується нерівність

$$a_{ij_0} \le a_{i_0 j_0} \le a_{i_0 j}.$$

У грі може існувати не одна сідлова точка, наприклад

$$(i_0, j_0), (i_{10}, j_{10}), (i_{20}, j_{20}).$$

Зокрема, наприклад, матриця $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \\ -2 & 7 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ має 4 сідлові точки, що дорівнюють 2, які розташовані в першому рядку й першому стовпці, у першому рядку й четвертому стовпці, у другому рядку й першому стовпці, у другому рядку й четвертому стовпці матриці, відповідно.

Дійсно, визначаючи нижню та верхню ціни гри, маємо:

$$\begin{array}{lcccc} & & & & \min\limits_j a_{ij} \\ & & & & \| \\ \mathrm{A} = & \begin{pmatrix} \textcircled{2} & 3 & 5 & \textcircled{2} \\ \textcircled{2} & 4 & 6 & \textcircled{2} \\ -2 & 7 & 2 & 0 \end{pmatrix} & & & \begin{matrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{matrix} \Big\} \alpha = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = 2 \\ \max\limits_i a_{ij} = & 2 & 7 & 6 & 2 \end{array}$$

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij} = 2$$

Даний приклад показує, що матриця може мати кілька (більше однієї) сідлових точок.

Проте, якщо матриця має кілька сідлових точок, всі їх значення є рівними.

Так, у матриці, всі елементи якої дорівнюють один одному, всі елементи є сідловими точками. Максимальна кількість сідлових точок у такій грі дорівнює $(m \times n)$, m – кількість рядків, n – кількість стовпців матриці.

Твердження 8.2. У випадку існування сідлової точки платіжної матриці говорять, що гра має розв'язок у чистих стратегіях.

Вірним є й *зворотне твердження*: гра має розв'язок у чистих стратегіях тоді й тільки тоді, коли платіжна матриця гри має сідлову точку.

Теорема 8.1. У матричній грі нижня ціна гри α не перевершує верхньої ціни гри β, тобто $\alpha \le \beta$.

Доведення. За визначенням маємо:

$$\alpha_i = \min_j a_{ij} \le a_{ij} \ \left(\forall i = \overline{1,m}, \ \ j = \overline{1,n}\right); \ \beta_j = \max_i a_{ij} \ge a_{ij} \ \left(\forall i = \overline{1,m}, \ \ j = \overline{1,n}\right).$$

Тоді

$$\alpha_i \le a_{ij} \le \beta_j \ \left(\forall i = \overline{1,m}, \ \ j = \overline{1,n}\right),$$

звідки $\alpha_i \le \beta_j$.

Оскільки отримана нерівність виконується для довільних α_i та β_j, то вона виконується й для α та β, тобто:

$$\max_i \alpha_i = \alpha \le \beta = \min_j \beta_j.$$

Отже, доведено, що $\alpha \le \beta$.

Теорему доведено.

Питання для самоконтролю

1. Надайте визначення гри двох осіб з нульовою сумою виграшу.
2. Якій умові повинні задовольняти виграші у гри двох осіб з нульовою сумою виграшу?
3. Що таке матриця гри?
4. Яка величина називається верхньою ціною гри? Що називають нижньою ціною гри?
5. У чому полягає принцип мінімакса (принцип гарантованого результату?
6. Що означає поняття гарантований виграш?
7. Чому гра називається парною грою?
8. Яку стратегію називається максимінною стратегією?
9. Що означає поняття сідлова точка? Що це за елемент?
10. Які стратегії називаються чистими стратегіями?
11. Що означає знайти розв'язок гри в чистих стратегіях?
12. Яке значення називається чистою ціною гри?

Лекція 9. Гра двох осіб з нульовою сумою виграшу. Розв'язання матричної гри з матрицею гри (2×2) в змішаних стратегіях. Властивості розв'язків матричних ігор

Мета лекції: ознайомити з поняттями змішаної стратегії та розв'язку гри в змішаних стратегіях; розглянути критерії оптимальності змішаних стратегій; засвоїти властивості розв'язків матричних ігор; опанувати алгебраїчний метод розв'язання матричної гри з матрицею гри (2×2) в змішаних стратегіях; набути навичок застосування процедури розв'язання гри в загальному вигляді.

План лекції

9.1 Розв'язання матричної гри в змішаних стратегіях.
9.2 Властивості розв'язків матричних ігор.

Перелік ключових термінів і понять з теми: *змішана стратегія; розв'язок гри в змішаних стратегіях; теорема фон Неймана; критерій оптимальності змішаних стратегій; активна стратегія; домінування чистих стратегій; строго детерміновані й не строго детерміновані ігри з матрицею* (2×2)*; алгебраїчний метод розв'язання матричної гри з матрицею гри* (2×2) *в змішаних стратегіях; процедура розв'язання гри в загальному вигляді*.

9.1 Розв'язання матричної гри в змішаних стратегіях

Дослідження в матричних іграх починається зі знаходження її сідлової точки в чистих стратегіях. Якщо матрична гра має сідлову точку в чистих стратегіях, тобто

$$\alpha = \beta,$$

то знаходженням цієї сідлової точки закінчується дослідження гри, оскільки, як відомо, у випадку існування сідлової точки платіжної матриці, ***гра має розв'язок у чистих стратегіях***.

Якщо ж у грі немає сідлової точки в чистих стратегіях, тобто

$$\alpha < \beta,$$

то ***гра має розв'язок у змішаних стратегіях***.

При цьому умова $\alpha < \beta$ означає, що гравець A не має сподіватися на виграш більший, ніж верхня ціна гри β, та може бути впевнений в отриманні виграшу, не меншого, ніж нижня ціна гри α.

Визначимо, що називається змішаною стратегією для кожного з гравців та яким чином вони обираються.

Змішаною стратегією першого гравця називається вектор

$$p = (p_1, p_2, \ldots, p_m),$$

де $p_i \geq 0, i = \overline{1,m}$, $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1.$

Змішаною стратегією другого гравця називається вектор

$$q = (q_1, q_2, ..., q_n),$$

де $q_j \geq 0$, $j = \overline{1,n}$, $\sum_{j=1}^{n} q_i = 1$.

Вектор p є вектором ймовірності застосування $i-$ої стратегії першим гравцем. Аналогічно, вектор q є вектором ймовірності застосування $j-$ої стратегії другим гравцем.

Частинним випадком змішаної стратегії виступає ***чиста стратегія***. Наприклад, застосування чистої стратегії A_3 буде відповідати вектору $p^{(3)} = (0,0,1,0,...,0)$, а застосування чистої стратегії B_2 буде відповідати вектору $q^{(2)} = (0,1,0,0,...,0)$. Тобто, якщо в змішаній стратегії яка-небудь $i-$та чиста стратегія застосовується з ймовірністю, що дорівнює 1, то всі інші чисті стратегії не застосовуються. Ця $i-$та чиста стратегія є частинним випадком змішаної стратегії.

Оскільки гравці обирають свої чисті стратегії випадково й незалежно один від одного, то *гра має випадковий характер*. Тому випадковою стає й величина виграшу (програшу).

У цьому випадку ***середня величина виграшу гравця A*** виражається у вигляді математичного очікування його виграшів та є функцією від двох змішаних стратегій, яку ми будемо визначати в такий спосіб:

$$f(p,q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j , \qquad (9.1)$$

де $f(p,q)-$ це ***платіжна функція гри*** з матрицею $(a_{ij})_{m \times n}$.

Стратегії $p^* = (p_1^*, p_2^*, ..., p_m^*)$, $q^* = (q_1^*, q_2^*, ..., q_n^*)$ називаються ***оптимальними***, якщо для довільних стратегій p $(\forall p = (p_1, p_2, ..., p_m))$ та q $(\forall q = (q_1, q_2, ..., q_n))$ виконується умова:

$$f(p, q^*) \leq f(p^*, q^*) \leq f(p^*, q). \qquad (9.2)$$

Це означає, що використання у грі оптимальних змішаних стратегій забезпечує:

- гравцю A виграш, не менший, ніж той, що він отримає при використанні ним будь-якої іншої стратегії p;
- гравцю B програш, не більший, ніж той, що він отримає при використанні ним будь-якої іншої стратегії q.

Сукупність оптимальних стратегій та ціни гри становить ***розв'язок гри***.

Значення платіжної функції при оптимальних стратегіях визначає ***ціну гри***, яка подається у вигляді

$$V = f(p^*, q^*).$$

Тоді фактично ***розв'язком гри в змішаних стратегіях*** є набір (трійка):

$$(p^*, q^*, V).$$

Справедливою є наступна *основна теорема теорії матричних ігор*.

Теорема 9.1 (фон Неймана). У змішаних стратегіях будь-яка кінцева матрична гра має розв'язок.

Нехай маємо матричну гру з матрицею $(a_{ij})_{m\times n}$ й деякі оптимальні змішані стратегії p^* й q^* гравців *A* та *B*, що забезпечують суму виграшу *V*. Виникає питання: як перевірити, що набір (p^*, q^*, V) є розв'язком гри? Для цього необхідно перевірити справедливість нерівності (9.2) для довільних змішаних стратегій, у тому числі й для стратегій p^* та q^*. Однак різних змішаних стратегій, серед яких є і оптимальні стратегії – нескінченна множина. І в цьому випадку неможливо перевірити справедливість нерівності (9.2).

На це питання дозволяє відповісти наступна теорема.

Теорема 9.2 (критерій оптимальності змішаних стратегій). Для того, щоб змішані стратегії $p^* = (p_1^*, p_2^*, ..., p_m^*)$ й $q^* = (q_1^*, q_2^*, ..., q_n^*)$ були оптимальними для гравців *A* та *B* у грі з матрицею $(a_{ij})_{m\times n}$ й виграшем V, необхідно й достатньо виконання наступних нерівностей:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^* \geq V, \tag{9.3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^* \leq V. \tag{9.4}$$

Доведення

Необхідність.

Нехай p^*, q^* – оптимальні змішані стратегії. Доведемо, що для них виконуються співвідношення (9.3) та (9.4).

Оскільки p^*, q^* – це оптимальні стратегії, то вони за визначеннями задовольняють співвідношенню (9.2).

Використовуючи (9.1) та нерівність (9.2) ми можемо записати:

$$f(p, q^*) \leq f(p^*, q^*) \leq f(p^*, q),$$

звідки маємо

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j^* \leq V \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i^* q_j, \tag{9.5}$$

де нерівність (9.5) одержуємо з нерівності (9.2) шляхом явного опису функцій $f(p, q^*)$, $f(p^*, q^*)$ та $f(p^*, q)$.

Розглянемо праву частину співвідношення (9.5). Значення $V \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i^* q_j$ – виконується для будь-яких змішаних стратегій q, де $q = (q_1, ..., q_j, ..., q_n) = \left(0, ..., \overset{(j)}{1}, ..., 0\right)$ – виконується для будь-яких змішаних стратегій, у тому числі й для чистої стратегії.

Тоді $V \le \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^*$, що свідчить про виконання нерівності (9.3).

Співвідношення (9.4) перевіряється аналогічно: шляхом підстановки до лівої частини нерівності (9.5) вектору стратегії q^*:

$$V \ge \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j^* = \sum_{i=1}^{m} p_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^* \right) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^*,$$

у тому числі $p = (p_1,...,p_i,...,p_m) = \left(0,...,\overset{(i)}{1},...,0\right)$.

У такий спосіб доведено співвідношення (9.4): $V \ge \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^*$.

Достатність.

Нехай виконуються умови (9.3) та (9.4). Покажемо, що p^*, q^* – оптимальні змішані стратегії. З урахуванням співвідношення (9.3) перетворимо праву частину співвідношення (9.4), а з урахуванням співвідношення (9.3) – ліву частину співвідношення (9.4).

Нехай $q-$ довільний вектор. Тоді:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i^* q_j = \sum_{j=1}^{n} q_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^* \right) \underset{\text{на основі}(9.3)}{\ge} \sum_{j=1}^{n} q_j V = V \sum_{j=1}^{n} q_j = V.$$

Аналогічно, для лівої частини співвідношення (4.8). Нехай $p-$ довільний вектор. Тоді:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j^* = \sum_{i=1}^{m} p_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^* \right) \underset{\text{на основі}(9.3)}{\le} \sum_{i=1}^{m} p_i V = V \sum_{i=1}^{m} p_i = V$$

Теорему доведено.

Зауваження до Теореми 9.2. На підставі теореми 9.2 можна зробити висновок: якщо гравець *A* ухвалює оптимальну змішану стратегію p^*, а гравець *B* – будь-яку чисту стратегію B_j, то виграш гравця *A* буде не меншим ціни гри V. Аналогічне твердження справедливе й для другого гравця: якщо гравець *B* ухвалює оптимальну змішану стратегію q^*, а гравець *A* – будь-яку чисту стратегію A_i, то виграш гравця *B* буде не більшим ціни гри V.

Чисті стратегії, що входять до оптимальної змішаної стратегії будь-якого гравця з ймовірностями, відмінними від нуля, називаються ***активними стратегіями***.

Для активних стратегій справедливою є наступна теорема.

Теорема 9.3 (про активні стратегії). Якщо один з гравців дотримується своєї оптимальної змішаної стратегії, то його виграш залишається незмінним та рівним ціні гри не залежно від того, яку стратегію приймає інший гравець, якщо тільки той (другий гравець) не виходить за межі своїх активних стратегій.

Для практичного розв'язання задач теорії ігор досить корисною є наступна теорема.

Теорема 9.4 (про афінні перетворення). Оптимальні змішані стратегії p^* й q^* відповідно гравців *A* та *B* у матричній грі з матрицею $(a_{ij})_{m\times n}$ з ціною гри V будуть оптимальними й у матричній грі з матрицею $(ba_{ij}+c)_{m\times n}$ з ціною гри $V'=bV+c$, де $b>0$.

На підставі теореми 9.4 платіжну матрицю, що містить від'ємні числа, можна перетворити в матрицю з додатними числами.

9.2 Властивості розв'язків матричних ігор

9.2.1 Домінування чистих стратегій

Застосування принципу домінування [6, 18] дозволяє іноді зменшити кількість стратегій гравців, тобто зменшити розмірність матриці *A*. Це випливає з того факту, що домінована стратегії можуть бути виключені, при цьому ціна гри не змінюється.

Рядок з номером i домінує рядок з номером k, якщо виконується умова, що

$$a_{ij}\ge a_{kj} \quad \text{для } j=\overline{1,n}.$$

Причому існує хоча б один стовпець із номером m, для якого виконується умова:

$$a_{im}>a_{km}.$$

Домінований рядок k можна викреслити з матриці, оскільки цією стратегією перший гравець ніколи не скористається, оскільки його виграш при виборі стратегії i завжди буде не меншим, ніж при виборі ним домінованої стратегії k.

Стовпець j домінує стовпець із номером k, якщо виконується умова, що

$$a_{ij}\le a_{ik} \quad \text{для } i=\overline{1,m}.$$

Причому існує хоча б один рядок з номером p, для якого виконується умова:

$$a_{pj}<a_{pk}.$$

Домінований стовпець k також може бути викресленим з матриці, оскільки другий гравець не буде обирати цю стратегію, оскільки його програш при такому виборі стратегії j буде не меншим, ніж при виборі ним домінованої стратегії k.

Стратегії вважаються ***еквівалентними (дубльованими)***, якщо всі виграші цих стратегій є однаковими. Еквівалентні стратегії також можуть бути викресленими з матриці. Викреслення проводиться при цьому таким чином, щоб з числа еквівалентних стратегій залишилась лише одна.

Теорема 9.5. Якщо елементи одного рядка (стовпця) не всі є меншими (більшими) або рівними відповідним елементам інших рядків (стовпців), але усі є меншими (більшими) або рівними деяким опуклим лінійним комбінаціям відповідних елементів інших рядків (стовпців), то цю стратегію можна виключити, замінивши її змішаною стратегією з відповідними частотами використання чистих стратегій.

Аналогічно, якщо кожний елемент деякого стовпця більше або дорівнює деякій опуклій лінійній комбінації відповідних елементів деяких інших стовпців, то цей стовпець можна виключити з розгляду.

Як видно, можливості домінування змішаними стратегіями на відміну від чистих є значно менш прозорими (потрібно належним чином підібрати частоти застосування чистих стратегій), але такі можливості існують, ними корисно вміти користуватися.

З урахуванням принципу домінування чистих стратегій ***процедура розв'язання гри в загальному вигляді включає наступні кроки***:

1 етап: для визначеної платіжної матриці гри проводиться її спрощення за допомогою використання принципу домінування (виключаючи доміновані та дублюючі стратегії);

2 етап: для спрощеної матриці гри проводиться розрахунок нижньої та верхньої цін гри;

3 етап: проводиться перевірка наявності сідлової точки та визначається метод розв'язання гри:

3.1. якщо сідлова точка існує ($\alpha = \beta$), то, отже, гра має розв'язок у чистих стратегіях;

3.2. якщо сідлова точка відсутня ($\alpha < \beta$), то, отже, гра має розв'язок у змішаних стратегіях;

4 етап: проводиться розв'язання гри.

9.2.2 Строго детерміновані й не строго детерміновані ігри з матрицею (2×2). Принципи розв'язання

Розглянемо матричні ігри з (2×2)-матрицею, які часто зустрічаються в теорії ігор або зводяться до них у результаті застосування властивості домінування.

Будемо говорити, що гра з (2×2)-матрицею є ***строго детермінованою***, якщо ця матриця містить елемент, скажемо V, який одночасно є мінімальним елементом в утримуючому його рядку й максимальним елементом в утримуючому його стовпці.

Тоді оптимальні стратегії гравців полягають у наступному:

- для гравця *A*: «обрати рядок, що містить V»;
- для гравця *B*: «обрати стовпець, що містить V».

Ціною гри й буде число V.

Матрична гра називається ***необразливою***, якщо її ціна дорівнює нулю ($V = 0$).

Властивість: матрична гра з матрицею A, у якій в одному рядку або в одному стовпці стоять однакові елементи, є ***строго детермінованою***.

Деякі матричні ігри не є строго детермінованими, тобто відповідна їм матриця не містить елемента, який був би одночасно мінімальним у своєму рядку й максимальним у своєму стовпці.

Не строго детерміновані матричні ігри з (2×2)-матрицею можна охарактеризувати в такий спосіб.

Теорема 9.6 (*про строгу недетермінованість гри*). Гра з матрицею

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

не є строго детермінованою тоді й тільки тоді, коли виконано одне з наступних двох умов:

а) $a<b, a<c$, $d<b$ та $d<c$;

б) $a>b, a>c$, $d>b$ та $d>c$.

Ці співвідношення означають, що елементи головної діагоналі матриці мають бути меншими (більшими) кожного з двох елементів іншої діагоналі матриці.

Доведення

Якщо виконується будь-яка з умов (а) або (б), то, як неважко перевірити, жоден елемент матриці не може бути одночасно мінімальним у тому рядку, якому він належить, і максимальним у тому стовпці, якому він належить; отже, гра не буде строго детермінованою.

Щоб довести другу частину теореми, згадаємо, що гра є строго детермінованою, якщо у відповідній їй матриці є рівними два елементи якого-небудь рядка або стовпця. Отже, можна припустити, що ніякі два елементи одного й того самого рядка або того самого стовпця не є рівними.

Припустимо тепер, що $a<b$. Тоді $a<c$, інакше елемент a буде мінімальним елементом свого рядка й максимальним елементом свого стовпця. Крім того, $c>d$, інакше, елемент c буде мінімальним елементом свого рядка й максимальним елементом свого стовпця. Нарешті, $d<b$, інакше елемент d буде мінімальним елементом рядка й максимальним елементом стовпця. Отже, припущення $a<b$ приводить до відзначеного вище випадку (а).

Аналогічне припущення $a>b$ приводить до випадку (б).

Теорему доведено.

Вирішимо питання про те, <u>яким чином обирати оптимальну змішану стратегію гравців зі всіх доступних для них змішаних стратегій</u>.

Розглянемо не строго детерміновану гру з матрицею

$$G=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Для не строго детермінованої гри з введеною матрицею G число V називається ***ціною*** цієї ***гри***, а вектори $p^* = (p_1^*, p_2^*)$ й $q^* = \begin{pmatrix} q_1^* \\ q_2^* \end{pmatrix}$ – ***оптимальні стратегії*** гравців A та B, якщо мають місце наступні нерівності:

$$p^* G = (p_1^*, p_2^*) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \geq (V, V); \tag{9.6}$$

$$Gq^* = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1^* \\ q_2^* \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} V \\ V \end{pmatrix}. \tag{9.7}$$

Нехай гравець A обирає змішану стратегію $p = (p_1, p_2)$ й (незалежно) гравець B обирає змішану стратегію $q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$. Тоді гравець A виграє суму a з ймовірністю $p_1 q_1$, суму b з ймовірністю $p_1 q_2$, суму c з ймовірністю $p_2 q_1$ та суму d з ймовірністю $p_2 q_2$.

В такому випадку середнє значення виграшу (математичне очікування) гравця A обчислиться у вигляді

$$ap_1 q_1 + bp_1 q_2 + cp_2 q_1 + dp_2 q_2 = pGq.$$

Аналогічно, знаходиться й середнє значення виграшу гравця B. Воно дорівнює цьому ж виразу, але зі зворотним знаком.

Щоб виправдати дане вище визначення, потрібно показати, що, якщо для матриці G існують V, p^*, q^* із зазначеними властивостями, то гравець A може зробити середнє значення свого виграшу рівним або більшим V, а гравець B може зробити це середнє значення рівним або меншим V.

Нехай q – будь-яка стратегія для гравця B. Помноживши (9.6) праворуч на q, ми одержимо співвідношення $p^* Gq \geq (V,V)q = V$, яке показує, що при будь-якій грі гравця B гравець A може забезпечити собі виграш, середнє значення якого щонайменше дорівнює V.

Аналогічно, нехай p – будь-який вектор стратегії для гравця A. Помноживши (9.7) ліворуч на p, ми одержимо співвідношення $pGq^* \leq p\begin{pmatrix} V \\ V \end{pmatrix} = V$, яке показує, що при будь-якій грі гравця A гравець В може зробити середнє значення виграшу A рівним максимально V.

Саме в цьому полягає *тлумачення оптимальних стратегій* p^* та q^*.

Якщо обидва гравця грають оптимальним чином, то для гравця A середнє значення виграшу дорівнює V, а для гравця B середнє значення виграшу дорівнює $(-V)$.

Вирішимо питання про *існування стратегій* p^* *та* q^* *в не строго детермінованій грі*.

Тоді як при більш складних іграх знаходження оптимальних стратегій виявляється важкою задачею, вирішення цього питання у випадку не строго детермінованої гри з (2×2)-матрицею може бути отримане ***алгебраїчним методом*** за наступними співвідношеннями:

$$p_1^* = \frac{d-c}{(a+d)-(b+c)}, \tag{9.8}$$

$$p_2^* = \frac{a-b}{(a+d)-(b+c)}, \tag{9.9}$$

$$q_1^* = \frac{d-b}{(a+d)-(b+c)}, \tag{9.10}$$

$$q_2^* = \frac{a-c}{(a+d)-(b+c)}, \tag{9.11}$$

$$V = \frac{ad-bc}{(a+d)-(b+c)}. \tag{9.12}$$

Легко перевірити, що знайдені по формулах (9.8)-(9.12) вектори p,q й число V задовольняють умовам (9.6), (9.7). У дійсності нерівності (9.6) та (9.7) у цьому простому випадку переходять у рівності. Цей факт не має місця в загальному випадку не строго детермінованих ігор, матриця яких має більше число рядків або стовпців.

Знаменник кожної з формул (9.8)-(9.12) являє собою різницю між сумами елементів по двом діагоналям.

Оскільки для не строго детермінованої гри елементи по одній діагоналі мають перевершувати елементи по іншій діагоналі, то знаменник не може звернутися в нуль.

У чисельнику дробу для V стоїть визначник

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc.$$

Якщо для не строго детермінованої гри з матрицею $G=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ визначник

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc = 0,$$

то така не строго детермінована гра буде ***необразливою***.

З урахуванням принципу домінування чистих стратегій, а також понять строгої детермінованості й строгої не детермінованості ігор, ***процедура розв'язання гри в загальному вигляді включає наступні кроки***:

1 етап: для визначеної платіжної матриці гри проводиться її спрощення за допомогою використання принципу домінування (виключаючи доміновані та дублюючі стратегії);

2 етап: для спрощеної матриці гри проводиться дослідження не строгої детермінованості гри за теоремою 9.6 та визначається метод розв’язання гри:

2.1. якщо умови теореми 9.6 порушуються, то гра визначається строго детермінованою; для такої гри існує розв’язок у чистих стратегіях;

2.2. якщо умови теореми 9.6 виконуються, то гра визначається не строго детермінованою; для такої гри розв’язку у чистих стратегіях не існує, але при цьому гра має розв’язок у змішаних стратегіях;

3 етап: проводиться розрахунок нижньої та верхньої цін гри;

4 етап: проводиться розв’язання гри.

Примітка: якщо на 1 етапі розв’язання гри проводилось спрощення матриці гри та викреслювались окремі домінновані рядки та/або стовпці матриці, то при розв’язанні гри у змішаних стратегіях потрібно неактивні стратегії з нульовою ймовірністю застосування внести до остаточної відповіді у відповідні вектори p^* та q^*.

Питання для самоконтролю

1. Які стратегії називаються змішаними?
2. Що визначає та яким чином обчислюється платіжна функція гри у змішаних стратегіях?
3. Як визначається оптимальність змішаних стратегій гравців?
4. Що являє собою розв'язок гри у змішаних стратегіях?
5. Сформулюйте теорему фон Неймана.
6. Сформулюйте теорему про критерій оптимальності змішаних стратегій.
7. Які стратегії називаються активними?
8. Яким чином платіжну матрицю, що містить від’ємні числа, можна перетворити у матрицю з додатними числами?
9. Сформулюйте умови домінування чистих стратегій гравця *A*.
10. Сформулюйте умови домінування чистих стратегій гравця *B*.
11. Надайте визначення строго детермінованої гри двох осіб.
12. Надайте визначення не строго детермінованої гри з матрицею (2×2). Умови строгої не детермінованості гри.
13. Яка матрична гра називається необразливою?
14. Наведіть умови необразливості гри.
15. Яким чином знаходиться розв'язок гри у змішаних стратегіях для не строго детермінованої гри з матрицею (2×2)?

Лекція 10. Методи розв'язання задач теорії ігор в змішаних стратегіях. Графоаналітичний метод розв'язання ігор з платіжною матрицею розмірністю $(2 \times n)$ та $(m \times 2)$

Мета лекції: опанувати методологію розв'язання матричних ігор у змішаних стратегіях за використанням графоаналітичного методу; засвоїти умови використання та основні етапи реалізації графоаналітичного методу; опанувати алгоритм розв'язання матричної гри з матрицею $(2\times n)$ або $(m\times 2)$ графоаналітичним методом; набути навичок застосування графоаналітичного методу на практиці.

План лекції

10.1 Умови використання графоаналітичного (графічного) методу розв'язання матричних ігор у змішаних стратегіях.

10.2 Основні етапи реалізації графоаналітичного методу. Розв'язання матричних ігор з платіжною матрицею розмірністю $(2\times n)$ та $(m\times 2)$ графоаналітичним методом.

Перелік ключових термінів і понять з теми: *умови використання графоаналітичного методу; очікувані виграші гравців; основні етапи реалізації графоаналітичного методу;побудова графічного зображення розв'язання матричної гри на площині; знаходження оптимальних стратегій гравців та ціни гри графоаналітичним методом; алгоритм розв'язання матричної гри з матрицею* $(2\times n)$ *або* $(m\times 2)$.

10.1 Умови використання графоаналітичного (графічного) методу розв'язання матричних ігор у змішаних стратегіях

Графоаналітичний (графічний) метод застосовується тільки до ігор, у яких хоча б один гравець має тільки 2 стратегії, тобто до ігор з матрицею гри розмірності $(2\times n)$ виду

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{pmatrix}_{2\times n};$$

або до ігор з матрицею гри розмірності $(m\times 2)$ виду

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} \end{pmatrix}_{m\times 2}.$$

Передбачається, що цей метод застосовується у випадках відсутності у грі сідлової точки.

10.2 Основні етапи реалізації графоаналітичного методу. Розв'язання матричних ігор з платіжною матрицею розмірністю $(2\times n)$ та $(m\times 2)$ графоаналітичним методом

Розглянемо гру з матрицею розмірності $(2\times n)$

	q_1	q_2	$\cdots$	q_n
p_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}
$p_2=1-p_1$	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}

Оскільки гравець A має тільки 2 стратегії, то, отже, $p_2=1-p_1$ (це витікає з властивості, що $\sum_{i=1}^{2} p_i=1$). При цьому $p_1\ge 0$, $p_2\ge 0$.

Очікувані виграші гравця A, що відповідають чистим стратегіям гравця B, представляються у табл. 4.1. Очевидно з табл. 4.1, що очікуваний виграш гравця A лінійно залежить від p_1.

Таблиця 4.1 – Очікувані виграші гравця A, відповідні чистим стратегіям гравця B

Чисті стратегії гравця B	Очікувані виграші гравця A
1	$p_1a_{11}+(1-p_1)a_{21}=(a_{11}-a_{21})p_1+a_{21}$
2	$p_1a_{12}+(1-p_1)a_{22}=(a_{12}-a_{22})p_1+a_{22}$
…	……
n	$p_1a_{1n}+(1-p_1)a_{2n}=(a_{1n}-a_{2n})p_1+a_{2n}$

Відповідно до критерію мінімаксу для ігор в змішаних стратегіях гравець A повинен обирати p_1 таким чином, щоб максимізувати свій мінімальний виграш. Аналогічно, для гравця B: гравець B повинен обирати свою змішану стратегію q_1 таким чином, щоб мінімізувати свій максимальний програш.

Ця задача може бути розв'язана графічно побудовою прямих ліній, що відповідають лінійним функціям від змінної p_1 (для гравця A) або від змінної q_1 (для гравця B).

Сформулюємо ***алгоритм розв'язання матричної гри з матрицею*** $(2\times n)$ ***або*** $(m\times 2)$ ***графоаналітичним методом:***

1 *етап*. Визначення гравця, який має дві чисті стратегії.

2 *етап*. Знаходження оптимальних стратегій для гравця A та ціни гри V (якщо гравець A має 2 чисті стратегії):

2.1) Відміряємо горизонтальний відрізок [0, 1]. Через кінці відрізка проводимо два перпендикуляри. На лівому перпендикулярі як на числовій осі відкладаємо елементи першого рядка платіжної матриці. На правому перпендикулярі аналогічно відкладаємо всі елементи другого рядка платіжної матриці. Масштаб на лівому та правому перпендикулярах однаковий, хоча може не співпадати із масштабом горизонтального одиничного відрізка.

2.2) З'єднуємо відрізками кожну пару точок, що відповідають стратегії гравця *B*, тобто в платіжній матриці відображені у стовпцях.

2.3) Виділяємо нижню частину сімейства відрізків, яка в загальному випадку буде мати вигляд ламаної, а у частковому випадку може бути прямою.

2.4) Знаходимо на цій ламаній максимальну (найвищу) точку (точки). Абсциса цієї точки є ймовірністю p^* вибору гравцем *A* чистої стратегії A_2 в оптимальній змішаній стратегії $P^* = (1 - p^*, p^*)$.

3 *етап*. Знаходження оптимальних стратегій для гравця *B* та ціни гри *V* :

3.1) Відміряємо горизонтальний відрізок [0,1]. Через кінці відрізка проводимо два перпендикуляри. На лівому перпендикулярі як на числовій осі відкладаємо елементи першого стовпця платіжної матриці. На правому перпендикулярі аналогічно відкладаємо всі елементи другого стовпця платіжної матриці. Масштаб по обох перпендикулярах, знову ж таки, однаковий.

3.2) З'єднуємо відрізками кожну пару точок, що відповідають стратегії гравця *A*, тобто в платіжній матриці відображені у рядках. Отримуємо *m* відрізків.

3.3) Виділяємо верхню частину сімейства відрізків, яка в загальному випадку буде мати вигляд ламаної, а у частковому випадку може бути прямою.

3.4) Знаходимо на цій ламаній мінімальну (найнижчу) точку (точки). Абсциса мінімальної точки вказує ймовірністю q^* вибору гравцем *B* чистої стратегії B_2 в оптимальній змішаній стратегії $Q^* = (1 - q^*, q^*)$.

Зауваження: Якщо на початку розв'язання гри гравець *B* має 2 чисті стратегії, то для розв'язання гри спочатку реалізується етап 3 (будується графік для гравця *B*), а потім – етап 2 (будується графік для гравця *A*).

Питання для самоконтролю

1. Для якої розмірності платіжної матриці застосовується графоаналітичний метод?
2. Чи застосовується графоаналітичний метод у випадках коли у грі є сідлова точка?
3. Розкрийте основні етапи реалізації графоаналітичного методу.
4. Як гравець *B* повинен обирати свою змішану стратегію q_1?
5. Як залежить від p_1 очікуваний виграш гравця *A*?
6. Розв'язання матричних ігор з матрицею гри розмірністю $(2 \times n)$.
7. Розв'язання матричних ігор з матрицею гри розмірністю $(m \times 2)$.
8. Сформулюйте алгоритм розв'язання матричної гри з матрицею $(2 \times n)$ або $(m \times 2)$ графоаналітичним методом.

Лекція 11. Чисельний метод розв’язання задач теорії ігор в змішаних стратегіях

Мета лекції: опанувати сутність та етапи реалізації чисельного методу розв'язання матричних ігор у змішаних стратегіях; набути навичок застосування чисельного методу на практиці.

План лекції

11.1 Сутність чисельного методу розв'язання матричних ігор у змішаних стратегіях.
11.2 Основна ідея та етапи реалізації чисельного методу розв'язання матричних ігор у змішаних стратегіях.

Перелік ключових термінів і понять з теми: *чисельний метод розв'язання матричних ігор; ітеративний метод; основна ідея чисельного методу; етапи реалізації чисельного методу; нижня та верхня оцінки ціни гри; накопичений виграш гравців за k партій; наближена оцінка гри.*

11.1 Сутність чисельного методу розв'язання матричних ігор у змішаних стратегіях

Спосіб відшукання наближеного рішення прямокутних ігор був сформульований в роботі Г.В. Брауна, а збіжність процесу була доведена Джулією Робінсон в 1951 році.

Цей метод, званий ще ***ітеративним (методом ітерацій)***, є одним з найпростіших чисельних методів розв'язання ігор та спирається на традиційний статистичний принцип: засновувати майбутні рішення на відповідній передісторії.

Полягає він в послідовній процедурі «зближення» верхньої і нижньої ціни гри із заданою точністю.

11.2 Основна ідея та етапи реалізації чисельного методу розв'язання матричних ігор у змішаних стратегіях

Ідея методу полягає в наступному.

Розігрується «уявний експеримент», у якому сторони A і B по черзі застосовують один проти одного свої стратегії

$$A:\ A_1, A_2, \ldots, A_m \quad \Rightarrow \quad A_i \quad \left(i = \overline{1, m}\right),$$
$$B:\ B_1, B_2, \ldots, B_n \quad \Rightarrow \quad B_j \quad \left(j = \overline{1, n}\right),$$

прагнучи виграти побільше (для гравця A) і програти поменше (для гравця B).

Експеримент складається з ряду «партій» гри.

Починається він з того, що один з гравців (скажімо, A) вибирає довільно одну зі своїх стратегій A_i. Противник (B) відповідає йому тією зі своїх стратегій B_j, яка є найгіршою для A, тобто звертає його виграш при стратегії A_i в мінімум.

Далі знову черга гравця A – він відповідає B тією своєю стратегією A_k, яка дає йому максимальний виграш при стратегії B_j противника.

Далі – знову черга противника. Він відповідає гравцю A тією своєю стратегією, яка є найгіршою не для останньої, застосованої гравцем A, стратегії A_k, а для *змішаної стратегії*, в якій досі застосовані стратегії A_i, A_k зустрічаються з рівними ймовірностями.

І так далі: на кожному кроці ітераційного процесу кожен гравець відповідає на черговий хід іншого *тією своєю стратегією, яка є оптимальною для нього щодо змішаної стратегії іншого, в яку всі застосовані до сих пір стратегії входять пропорційно частотам їх застосування.*

Замість того, щоб обчислювати кожен раз середній виграш, можна користуватися просто «накопиченим» за попередні ходи виграшем та вибирати ту свою стратегію, при якій цей накопичений виграш є максимальним (мінімальним).

Результати застосування чисельного методу заносяться до таблиці виду 11.1, де прийняті наступні позначення: k – номер партії (пари виборів); i – номер обраної в даній партії стратегії гравця A; j – номер обраної в даній партії стратегії гравця B; $\underline{v}$ – нижня оцінка ціни гри; $\overline{v}$ – верхня оцінка ціни гри; v^* – наближена оцінка гри (середнє арифметичне між $\underline{v}$ та $\overline{v}$); $A_1,\ldots,A_m$ та $B_1,\ldots,B_n$ – накопичений виграш гравця B та A відповідно за k партій.

Таблиця 11.1

k	i	Виграш гравця A, який платить йому гравець B			j	Виграш гравця B, який платить йому гравець A			$\underline{v}$	$\overline{v}$	Наближена оцінка гри v^*
		B_1	…	B_n		A_1	…	A_m			
1 2 … k											

Згідно табл. 11.1, в першому стовпці надається номер партії (пари виборів) k, у другому – номер i обраної в даній партії стратегії гравця A. У наступних трьох стовпцях – «накопичений виграш» за перші k партій при тих стратегіях, які застосовували гравці в попередніх партіях та при стратегіях B_1, …, B_n гравця B в даній партії (виходить додаванням елементів відповідного рядка A_i матриці гри до того, що було отримано в табл. 11.1 рядком вище).

З цих накопичених виграшів в табл. 11.1 підкреслюють мінімальний (якщо їх декілька, підкреслюються всі). Підкреслене число визначає відповідний вибір гравця *B* в даній партії – він обирає ту стратегію, яка відповідає підкресленому числу (якщо їх декілька, береться будь-яка). Таким чином, визначається номер *j* оптимальної (в даній партії) стратегії *B* (ставиться в наступному стовпці). У наступних трьох стовпцях подається накопичений виграш за *k* партій відповідно при стратегіях $A_1, \ldots, A_m$ гравця *A* (виходить додаванням елементів стовпця B_j до того, що було рядком вище). З цих значень в табл. 11.1 «надкреслюється» максимальне значення. Воно визначає вибір стратегії гравця *A* в наступній партії (рядком нижче). В останніх трьох стовпцях табл. 11.1 подані: $\underline{v}$ – нижня оцінка ціни гри, що дорівнює мінімальному накопиченому виграшу гравця *A*, поділеному на число партій *k*; $\overline{v}$ – верхня оцінка ціни гри, що дорівнює максимальному накопиченому виграшу гравця *B*, поділеному на *k*; v^* – середнє арифметичне між ними (воно слугує кращою, ніж нижня та верхня, наближеною оцінкою ціни гри).

Доведено, що такий метод сходиться: при збільшенні числа «партій» середній виграш на одну партію буде наближатися до ціни гри, а частоти застосування стратегій – до їх ймовірностей в оптимальних змішаних стратегіях гравців, тобто

$$p_i = \frac{N(i)}{K}, \quad q_j = \frac{N(j)}{K}.$$

де $N(i), N(j)-$ число номерів i або j, які співпали та були обрані в даній партії стратегій гравців *A* і *B* відповідно; $K-$ загальне число ходів (партій).

Дуже важливою перевагою ітераційного методу розв'язання ігор є те, що його трудомісткість порівняно повільно зростає зі збільшенням розмірності гри $m \times n$, тоді як трудомісткість методів лінійного програмування зростає при збільшенні розмірності задачі набагато швидше.

Питання для самоконтролю

1. Чому чисельний метод Брауна-Робінсон називають ітеративним?
2. В чому полягає статистичний принцип, на який спирається метод Брауна-Робінсон?
3. Для матриць гри якої розмірності застосовується чисельний метод?
4. Розв’язок матричної гри, отриманий за допомогою методу Брауна-Робінсон, є точним (аналітичним) або наближеним (чисельним)?
5. В чому полягає ідея методу Брауна-Робінсон?
6. Наведіть основні етапи реалізації методу Брауна-Робінсон.
7. Як визначається накопичений виграш за *k* партій гравця?
8. Яким чином визначаються нижня та верхня оцінки ціни гри?
9. Як визначається наближена оцінка ціни гри?
10. Яким чином визначаються оптимальні змішані стратегії гравців за методом Брауна-Робінсон?

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Бескровний О. І., Павленко В. І., Тимошенко А. Г. Дослідження операцій і методи прийняття технічних рішень. Київ : Університет «Україна», 2019. 420 с.
2. Бутко М. П. та ін. Теорія прийняття рішень: підручник. Київ : Центр навчальної літератури, 2018. 360 с.
3. Василевич Д. Ф., Юртин І. І. Прийняття рішень за умов конфлікту та невизначеності. Київ : Київський ун-т ім. Б. Грінченка, 2013. 128 с.
4. Катренко А. В. Дослідження операцій : підручник. 3-тє вид., стер. Львів : «Магнолія – 2006», 2024. 350 с.
5. Катренко А. В., Пасічник В. В. Прийняття рішень: теорія та практика : підручник. Львів : Новий Світ – 2000, 2020. 447 с.
6. Нестеренко О. В., Савенков О. І., Фаловський О. О. Інтелектуальні системи підтримки прийняття рішень : навч. посіб. Київ : Національна академія управління, 2016. 188 с.
7. Нікіфорова Л. О., Шиян А. А. Управління процесами прийняття інноваційних рішень в сфері high tehnologies : навч. посіб. Вінниця : ВНТУ, 2018. 85 с.
8. Петруня Ю. Є. та ін. Прийняття управлінських рішень : навч. посіб. Дніпропетровськ : Університет митної справи та фінансів, 2015. 209 с.
9. Саричева Л. В., Сергєєва К. Л. Комп'ютерна підтримка прийняття рішень : навч. посіб. Дніпро : НГУ, 2016. 98 с.
10. Тоценко В. Г. Методи та системи підтримки прийняття рішень. Алгоритмічний аспект. Київ : Наук. думка, 2012. 381 с.
11. Ус С. А., Коряшкіна Л. С. Моделі й методи прийняття рішень : навч. посіб. Дніпро : НТУ «ДП», 2018. 299 с.
12. Ушакова І. О. Теорія прийняття рішень : практикум. Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2015. 234 с.
13. Бедрик Б. О., Леонтьєва В. В., Кондрат’єва Н. О. Розв’язання слабо структурованих проблем в сфері цивільної безпеки засобами теорії статистичних рішень. *Актуальні проблеми математики та інформатики* : збірка тез доповідей Шістнадцятої Всеукраїнської, двадцять третьої регіональної наукової конференції молодих дослідників (м. Запоріжжя, 26 квітня 2025 р.). Запоріжжя : Видавничий дім «Гельветика», 2025. С. 151-153.
14. Леонтьєва В. В., Кондрат'єва Н. О., Голуб О. О., Усатенко Г. Г., Потемкин А. П., Булин І. С. Проблема вибору оптимальних рішень в умовах неповної інформації в сфері цивільної безпеки та її розв’язання із застосуванням методології статистичних рішень. Розвиток сучасної науки та освіти: реалії, проблеми якості, інновації: матеріали VI Міжнародної наук.-практ. інтернет-конф. (м. Запоріжжя, 28-30 травня 2025 р.) / [ред. колегія: С. В. Кюрчев, В. О. Радкевич, В. М. Кюрчев та ін.]. Запоріжжя : ТДАТУ, 2025. С. 29-33.

15. Леонтьєва В. В., Кондрат'єва Н. О. Комплексна методика аналізу та розв’язання неструктурованих багатооб’єктних проблем : теоретичні засади та практична апробація. *Методи та прилади контролю якості*. 2025. № 1(54). С. 132–155.
16. Пазинич К. А., Кондрат’єва Н. О., Леонтьєва В. В. Алгоритмізація розв’язання задач теорії ігор в змішаних стратегіях методом зведення їх до задач лінійного програмування. *Актуальні проблеми математики та інформатики* : збірка тез доповідей Шістнадцятої Всеукраїнської, двадцять третьої регіональної наукової конференції молодих дослідників (м. Запоріжжя, 26 квітня 2025 р.). Запоріжжя : Видавничий дім «Гельветика», 2025. С. 167-167.
17. Сіренко Ю. В., Чепіжний А. В., Кучмистенко О. В., Леонтьєва В. В., Кондрат’єва Н. О., Вольвач Т. С., Савойський О. Ю. Підвищення показників ефективності та якості моніторингу електропостачання молокозаводу. *Механіка та автоматика агропромислового виробництва* : загальнодержавний збірник / ІМА АПВ НААН; за заг. ред. В. В. Адамчука. Глеваха, 2025. Вип. 6 (120). С. 190-202.
18. Федотов Є. Є., Кондрат’єва Н. О., Леонтьєва В. В. Автоматизація розв’язання задач колективного вибору із використанням методів та правил теорії голосування. *Актуальні проблеми математики та інформатики* : збірка тез доповідей Шістнадцятої Всеукраїнської, двадцять третьої регіональної наукової конференції молодих дослідників (м. Запоріжжя, 26 квітня 2025 р.). Запоріжжя : Видавничий дім «Гельветика», 2025. С. 175-176.
19. Kondratieva N. O., Leontieva V. V., Pazinich K. A., Zhelobetskiy A. P., Usatenko G. G., Gorbachov O. A. Automation of the process of studying conflict situations and solving game theory problems with linear programming methods. *International scientific journal SWorldJournal*. 2025. Т. 31. № 2. С. 26-37.
20. Topalov A., Makhnov A., Humeniuk T., Lukashova V., Leontieva V., Kondratieva N. Specialized Computer Control System for Hybrid Power Supply of Small Electric-Powered Vessel. in Proc. *15th International Conference on Advanced Computer Information Technologies (ACIT),* Sibenik, Croatia. 2025, Vol.1. P. 605-608.
21. Topalov A., Kondratenko Y., Leontieva V., Kondratieva N. Simulation Modeling of the Hall Electromagnetic Transducer for Measuring the Thickness of a Ferromagnetic Film. Eds : L. David, Y. Kondratenko, V. Vychuzhanin, H. Yin, N. Rudnichenko. *Information Control Systems and Technologies* : 13th International Scientific and Practical Conference (ICST 2025). CEUR Workshop Proceedings, 24–26 Sept. 2025. Odesa. Vol. 4048. P. 385–396.
22. Dennis A., Wixom B. H., Roth R. M. Systems analysis and design. New York : John Wiley & Sons. 2019. 594 p.
23. McNamara J. M., Leimar O. Game Theory in Biology. Oxford : Oxford University Press, 2020. 352 p.
24. Samuel G. O., Ekoko P. O. Formulation of game model as a linear programming problem using various models. *African Journal of Mathematics and Statistics Studies*. 2024. Issue 2, Vol. 7. P. 79–95.

ІНФОРМАЦІЙНІ РЕСУРСИ

1. Електронні ресурси з математики. *Бібліотека TWIRPX*. URL : https://www.twirpx.com/files/#files_mathematics.
2. Наукові ресурси. *Національна бібліотека України імені В. І. Вернадського*. URL : http://www.nbuv.gov.ua/node/1539.
3. Підручники для вузів онлайн. URL : https://pidru4niki.com/.
4. Links for Game Theory. *The Economics Network*. URL : https://www.economicsnetwork.ac.uk/subjects/gametheory.
5. Mathematics. *UMass Boston Open Courseware*. URL : http://ocw.umb.edu/mathematics.html.
6. Maths Resources Index. *The Economics Network*. URL : https://www.economicsnetwork.ac.uk/subjects/mathsforeconomists.
7. Science, Maths & Technology. *Learning Space. The Open University*. URL : https://www.open.edu/openlearn/science-maths-technology.

ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Topalov A., Makhnov A., Humeniuk T., Lukashova V., Leontieva V., Kondratieva N. Specialized Computer Control System for Hybrid Power Supply of Small Electric-Powered Vessel. in Proc. *15th International Conference on Advanced Computer Information Technologies (ACIT)*, Sibenik, Croatia. 2025, Vol.1. P. 605-608.
2. Topalov A., Kondratenko Y., Leontieva V., Kondratieva N. Simulation Modeling of the Hall Electromagnetic Transducer for Measuring the Thickness of a Ferromagnetic Film. Eds : L. David, Y. Kondratenko, V. Vychuzhanin, H. Yin, N. Rudnichenko. *Information Control Systems and Technologies* : 13th International Scientific and Practical Conference (ICST 2025). CEUR Workshop Proceedings, 24–26 Sept. 2025. Odesa. Vol. 4048. P. 385–396.
3. Леонтьєва В. В., Кондрат'єва Н. О. Комплексна методика аналізу та розв’язання неструктурованих багатооб’єктних проблем : теоретичні засади та практична апробація. *Методи та прилади контролю якості*. 2025. № 1(54). С. 132–155.
4. Сіренко Ю. В., Чепіжний А. В., Кучмистенко О. В., Леонтьєва В. В., Кондрат’єва Н. О., Вольвач Т. С., Савойський О. Ю. Підвищення показників ефективності та якості моніторингу електропостачання молокозаводу. *Механіка та автоматика агропромислового виробництва* : загальнодержавний збірник / ІМА АПВ НААН; за заг. ред. В. В. Адамчука. Глеваха, 2025. Вип. 6 (120). С. 190-202.
5. Рудаков Д. В., Сдвижкова О. О. Математичне моделювання природничих систем : навч. посіб.; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». Дніпро : НТУ «ДП», 2022. 178 с.
6. Frahm G. Rational Choice and Strategic Conflict: The Subjectivistic Approach to Game and Decision Theory. Berlin : De Gruyter, 2019. 340 p.

7. Бескровний О. І., Павленко В. І., Тимошенко А. Г. Дослідження операцій і методи прийняття технічних рішень. Київ : Університет «Україна», 2019. 420 с.
8. Бутко М. П. та ін. Теорія прийняття рішень : підручник. Київ : Центр навчальної літератури, 2018. 360 с.
9. Катренко А. В., Пасічник В. В. Прийняття рішень : теорія та практика : підручник Львів : Новий Світ – 2000, 2020. 447 с.
10. Ус С. А., Коряшкіна Л. С. Моделі й методи прийняття рішень : навч. посіб. Дніпро : НТУ «ДП», 2018. 299 с.
11. Василевич Д. Ф., Юртин І. І. Прийняття рішень за умов конфлікту та невизначеності. Київ : Київський ун-т ім. Б. Грінченка, 2013. 128 с.
12. Файнзільберг Л. С., Жуковська О. А., Якимчук В. С. Теорія прийняття рішень : підручник. Київ : Освіта України, 2018. 246 с.
13. Бедрик Б. О., Леонтьєва В. В., Кондрат'єва Н. О. Розв'язання слабо структурованих проблем в сфері цивільної безпеки засобами теорії статистичних рішень. *Актуальні проблеми математики та інформатики* : збірка тез доповідей Шістнадцятої Всеукраїнської, двадцять третьої регіональної наукової конференції молодих дослідників (м. Запоріжжя, 26 квітня 2025 р.). Запоріжжя : Видавничий дім «Гельветика», 2025. С. 151-153.
14. Леонтьєва В. В., Кондрат'єва Н. О., Голуб О. О., Усатенко Г. Г., Потемкин А. П., Булин І. С. Проблема вибору оптимальних рішень в умовах неповної інформації в сфері цивільної безпеки та її розв'язання із застосуванням методології статистичних рішень. Розвиток сучасної науки та освіти: реалії, проблеми якості, інновації: матеріали VI Міжнародної наук.-практ. інтернет-конф. (м. Запоріжжя, 28-30 травня 2025 р.) / [ред. колегія: С. В. Кюрчев, В. О. Радкевич, В. М. Кюрчев та ін.]. – Запоріжжя : ТДАТУ, 2025. С. 29-33.
15. Петруня Ю. Є. та ін. Прийняття управлінських рішень : навч. посіб. Дніпропетровськ : Університет митної справи та фінансів, 2015. 209 с.
16. Kondratieva N. O., Leontieva V. V., Pazinich K. A., Zhelobetskiy A. P., Usatenko G. G., Gorbachov O. A. Automation of the process of studying conflict situations and solving game theory problems with linear programming methods. *International scientific journal SWorldJournal*. 2025. Т. 31. № 2. С. 26-37.
17. Пазинич К. А., Кондрат'єва Н. О., Леонтьєва В. В. Алгоритмізація розв'язання задач теорії ігор в змішаних стратегіях методом зведення їх до задач лінійного програмування. *Актуальні проблеми математики та інформатики* : збірка тез доповідей Шістнадцятої Всеукраїнської, двадцять третьої регіональної наукової конференції молодих дослідників (м. Запоріжжя, 26 квітня 2025 р.). Запоріжжя : Видавничий дім «Гельветика», 2025. С. 167-167.
18. Itchhaporia D. (2022). Game Theory, Health Care, and Economics. Journal of the American College of Cardiology, issue 15, vol. 79, pp. 1542–1543.
19. Samuel G. O., Ekoko P. O. Formulation of game model as a linear programming problem using various models. *African Journal of Mathematics and Statistics Studies*. 2024. Issue 2, Vol. 7. P. 79–95.

Навчальне видання
(*українською мовою*)

Леонтьєва Вікторія Володимирівна
Кондрат'єва Наталія Олександрівна

ІГРОВІ ТА ЕКСПЕРТНІ МЕТОДИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

Курс лекцій
з навчальної дисципліни
блоку вибіркових дисциплін в межах університету
підготовки бакалавра
денної та заочної форм здобуття освіти

Рецензент *С.І. Гоменюк*
Відповідальний за випуск *С.М. Гребенюк*
Коректор *В.В. Леонтьєва*