МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

І.В. Красікова, Н.М. Д'яченко

ФУНКЦІОНАЛЬНИЙ АНАЛІЗ

Навчальний посібник
для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра
спеціальності «Прикладна математика»
освітньо-професійної програми «Комп'ютерне моделювання»

Затверджено
вченою радою ЗНУ
Протокол № від р.

Запоріжжя
2026

УДК 517.9 (075.8)
К78

Красікова І. В., Д’яченко Н. М. Функціональний аналіз : навчальний посібник для здобувачів вищої освіти бакалавра спеціальності «Прикладна математика» освітньо-професійної програми «Комп’ютерне моделювання». Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2026. 95 с.

Навчальний посібник охоплює всі традиційні теми функціонального аналізу: «Означення та властивості метричних просторів», «Принцип стискуючих відображень», «Міра Лебега у скінченновимірному просторі», «Вимірні функції. Інтеграл Лебега та простори Лебега», «Лінійні нормовані простори. Гільбертові простори», «Лінійні неперервні оператори», «Лінійні неперервні функціонали», «Оборотність лінійних неперервних операторів».

Видання містить теоретичний матеріал, який розкриває зміст тем курсу, приклади розв’язання задач та завдання до самоконтролю, а також список рекомендованої літератури.

Посібник призначений для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра спеціальності «Прикладна математика» освітньо-професійної програми «Комп’ютерне моделювання», але може використовуватися здобувачами інших спеціальностей, які вивчають курс функціонального аналізу.

Рецензент
С. І. Гоменюк, доктор технічних наук, професор, декан математичного факультету

Відповідальний за випуск
С. М. Гребенюк, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри фундаментальної та прикладної математики

ЗМІСТ

ВСТУП 5
1 ОЗНАЧЕННЯ ТА ВЛАСТИВОСТІ МЕТРИЧНИХ ПРОСТОРІВ 7
1.1 Поняття метрики. Метричний простір 7
1.2 Класифікація точок у метричному просторі 9
1.3 Щільні та ніде не щільні множини. Сепарабельні метричні простори 11
1.4 Відкриті та замкнені множини 12
1.5 Збіжні послідовності у метричному просторі 14
1.6 Збіжність у конкретних метричних просторах 15
1.7 Фундаментальні послідовності у метричному просторі 17
1.8 Означення та приклади повних метричних просторів 17
1.9. Теореми про повні метричні простори 19
1.10 Компактність у метричних просторах 21
1.11 Питання для самоконтролю 24
2 ПРИНЦИП СТИСКУЮЧИХ ВІДОБРАЖЕНЬ 26
2.1 Стискуюче відображення 26
2.2 Принцип стискуючих відображень та його застосування 27
2.3 Питання для самоконтролю 29
3 МІРА ЛЕБЕГА У СКІНЧЕННОВИМІРНОМУ ПРОСТОРІ 29
3.1. Системи множин 30
3.2. Міра плоских множин 31
3.3. Властивості вимірних множин та міри Лебега 34
3.4 Питання для самоконтролю 39
4 ВИМІРНІ ФУНКЦІЇ. ІНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА ТА ПРОСТОРИ ЛЕБЕГА 39
4.1 Вимірні функції 39
4.2 Збіжність послідовностей вимірних функцій 43
4.3 Інтеграл Лебега від простих функцій. 46
4.4 Інтеграл Лебега від довільної функції по множині скінченної міри 49
4.5 Граничний перехід під знаком інтеграла Лебега 55
4.6 Інтеграл Лебега по множині нескінченної міри 55
4.7 Порівняння інтеграла Лебега з інтегралом Рімана 56
4.8 Простори Лебега 57
4.9 Питання для самоконтролю: 58

5 ЛІНІЙНІ НОРМОВАНІ ПРОСТОРИ. ГІЛЬБЕРТОВІ ПРОСТОРИ 59
5.1 Норма та нормовані простори 59
5.2 Евклідові та гільбертові простори 61
5.3 Питання для самоконтролю 64
6 ЛІНІЙНІ НЕПЕРЕРВНІ ОПЕРАТОРИ 65
6.1 Означення та властивості лінійних неперервних операторів 65
6.2 Простір лінійних неперервних операторів 68
6.3 Компактні оператори в нормованих просторах 71
6.4 Вузькі оператори в просторах Лебега 72
6.5 Питання для самоконтролю 73
7 ЛІНІЙНІ НЕПЕРЕРВНІ ФУНКЦІОНАЛИ 73
7.1 Означення та властивості лінійних неперервних функціоналів 73
7.2 Спряжений простір. Загальний вигляд лінійних неперервних функціоналів у деяких просторах 76
7.3 Основні принципи функціонального аналізу 80
7.4 Слабка збіжність у нормованих просторах 82
7.5 Слабка збіжність в нормованому просторі та компактність операторів 84
7.6 Питання для самоконтролю 85
8 ОБОРОТНІСТЬ ЛІНІЙНИХ НЕПЕРЕРВНИХ ОПЕРАТОРІВ 86
8.1 Оборотність лінійних неперервних операторів 86
8.2 Теорема Банаха про обернений оператор 88
8.3 Спектр та резольвента лінійних неперервних операторів 91
8.4 Питання для самоконтролю 93
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 94
РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА 94

ВСТУП

Курс функціонального аналізу, який вивчається здобувачами ступеня вищої освіти бакалавра спеціальностей «Математика» та «Прикладна математика», є одним з найбільш абстрактних і тому найбільш складних курсів. Апарат функціонального аналізу застосовується майже у всіх галузях сучасної математики та суміжних галузях науки. Саме його абстрактність дозволяє досліджувати дуже широке коло питань, які, на перший погляд, ніяк не пов'язані між собою. Хоча основні принципи функціонального аналізу було сформульовано у 20-му сторіччі, ця галузь математики бурхливо розвивається саме в наші часи. Математики різних країн світу – Іспанії, Польщі, США, Ізраїлю та інших – продовжують цікаві дослідження питань, які прийнято відносити до функціонального аналізу. Окремо потрібно відмітити, що українські математики також істотно впливають на розвиток сучасного функціонального аналізу.

Зрозуміло, що дуже важливо допомогти здобувачам якісно засвоїти теоретичні основи функціонального аналізу, навчити застосовувати відомі принципи та методи функціонального аналізу при розв'язанні різноманітних задач. Це перший крок у підготовці майбутніх фахівців. Існує велика кількість наукової літератури та підручників, які висвітлюють різні розділи функціонального аналізу. Іноді здобувачам важко зорієнтуватися, де краще знайти потрібний матеріал. Цей посібник створено, щоб допомогти студентам ознайомитися з основними розділами функціонального аналізу, надати важливі теоретичні відомості та навчитися розв'язувати класичні типи задач.

Метою вивчення освітнього компонента «Функціональний аналіз» є засвоєння знань з основ класичного і сучасного функціонального аналізу (теорія нескінченовимірних просторів та операторів, що в них діють), основ класичної теорії міри та інтеграла включно з побудовою міри Лебега у скінченновимірному евклідовому просторі та розглядом інтеграла Лебега для вимірних за Лебегом функцій однієї та багатьох змінних, узагальнення понять математичного аналізу, алгебри, геометрії, топології.

Основні **завдання** вивчення дисципліни «Функціональний аналіз»:

- ознайомитися з узагальненням відомих математичних понять та внутрішньою логікою теорії множин, теорії неперервних відображень, лінійних просторів і операторів на них, теорії міри та інтеграла;
- отримати знання про геометричні, алгебраїчні та аналітичні витоки функціонального аналізу;
- сформувати вміння застосовувати методи функціонального аналізу та теорії міри для розв'язання класичних задач;
- розвинути здатність до узагальнення відомих понять довжини, площі, об'єму та засвоїти побудову міри Лебега на прямій, площині, у скінченновимірному просторі, а також теорію інтеграла Лебега для вимірних функцій;
- оволодіти методологією дослідження неперервних і лінійних операторів, аналізу їхніх властивостей у різних функціональних просторах;

- сформувати навички використання методів функціонального аналізу при розв’язанні як теоретичних, так і прикладних задач у математиці та суміжних науках.

Дисципліна «Функціональний аналіз» є логічним продовженням дисциплін «Математичний-аналіз-1» та «Математичний аналіз-2», «Комплексний аналіз», «Лінійна алгебра», «Диференціальна геометрія і топологія». Набуті при вивченні курсу «Функціональний аналіз» знання необхідні для подальшого вивчення курсу «Рівняння математичної фізики», написання курсової роботи з фаху та підготовки до підсумкової атестації.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен набути таких **компетентностей**:

- Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу;
- Знання й розуміння предметної області та професійної діяльності;
- Здатність учитися і оволодівати сучасними знаннями;
- Здатність до пошуку, обробки та аналізу інформації з різних джерел;
- Здатність формулювати проблеми математично та в символьній формі з метою спрощення їхнього аналізу й розв’язання;
- Здатність подавати математичні міркування та висновки з них у формі, придатній для цільової аудиторії, а також аналізувати та обговорювати математичні міркування інших осіб, залучених до розв’язання тієї самої задачі;
- Здатність здійснювати міркування та виокремлювати ланцюжки міркувань у математичних доведеннях на базі аксіоматичного підходу, а також розташовувати їх у логічну послідовність, у тому числі відрізняти основні ідеї від деталей і технічних викладок;
- Здатність конструювати формальні доведення з аксіом та постулатів і відрізняти правдоподібні аргументи від формально бездоганних;
- Здатність до аналізу математичних структур, у тому числі до оцінювання обґрунтованості й ефективності використовуваних математичних підходів.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен досягти таких **результатів навчання**:

- Знати основні етапи історичного розвитку математичних знань і парадигм, розуміти сучасні тенденції в математиці.
- Знати принципи modus ponens (правило виведення логічних висловлювань) та modus tollens (доведення від супротивного) і використовувати умови, формулювання, висновки, доведення та наслідки математичних тверджень.
- Розв’язувати конкретні математичні задачі, які сформульовано у формалізованому вигляді; здійснювати базові перетворення математичних моделей.
- Знати теоретичні основи і застосовувати методи топології, функціонального аналізу й теорії диференціальних рівнянь для дослідження динамічних систем.

1 ОЗНАЧЕННЯ ТА ВЛАСТИВОСТІ МЕТРИЧНИХ ПРОСТОРІВ

1.1 Поняття метрики. Метричний простір

Однією з найважливіших операцій у математичному аналізі є граничний перехід, який ґрунтується на понятті відстані між двома числами. Якщо узагальнити поняття відстані між числами, ми прийдемо до поняття *метричного простору* – одного з найважливіших понять сучасної математики.

🗁 **Означення 1.1.1.** Нехай X – довільна множина. Функція $\rho: X \times X \to \mathbb{R}^+$ називається *метрикою*, якщо для неї виконуються наступні аксіоми:

M1) $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

M2) $\forall\ x,y \in X\ \ \rho(x,y) = \rho(y,x)$ – аксіома симетрії;

M3) $\forall\ x,y,z \in X\ \ \rho(x,y) \le \rho(x,z) + \rho(z,y)$ – аксіома трикутника.

При цьому пара (X,ρ) називається *метричним простором*.

Відмітимо, що множина X, на якій задається метрика, може бути довільною (вона не зобов'язана бути, наприклад, лінійним простором), а метрика є функцією, яка приймає дійсні невід'ємні значення. Зрозуміло, що аксіоми метрики задовольняє поняття відстані (між точками на числовій прямій, на площині чи у тривимірному просторі), тобто метрика узагальнює це добре відоме нам поняття.

Розглянемо тепер класичні приклади метричних просторів, які будуть зустрічатися найчастіше.

1) *Простір дійсних чисел* $\mathbb{R}$. Метрика на множині дійсних чисел (числовій прямій) задається формулою $\rho(x,y) = |x-y|$. Виконання перших двох аксіом очевидне, а аксіома M3 є відомою нерівністю трикутника для модулів:

$$|x-y| = |x-z+z-y| \le |x-z| + |z-y|.$$

Зрозуміло, що на числовій прямій можна задати метрику в інший спосіб і отримати інший метричний простір.

2) *Простір послідовностей* l_p, $1 \le p < \infty$. Елементами цього простору є числові послідовності дійсних або комплексних чисел з певними умовами:

$$l_p = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_m, \dots) : \forall\ i\ \ x_i \in (\mathbb{R}, \mathbb{C}), \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty \right\}.$$

Метрика в цьому просторі задається формулою:

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}.$$

Покажемо, що для цієї функції виконуються аксіоми метрики. Достатність аксіоми M1 та аксіома M2 є очевидними. Необхідність аксіоми M1 випливає з наступних міркувань:

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p = 0 \Rightarrow \forall\ i\ \ |x_i - y_i|^p = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall\ i\ \ x_i = y_i \Rightarrow x = y.$$

Аксіома М3 є прямим наслідком нерівності Мінковського для сум

$$\forall a_i, b_i \quad \forall p: 1 \le p < \infty \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i + b_i|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |b_i|^p\right)^{1/p}:$$

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - z_i + z_i - y_i|^p\right)^{1/p} \le$$

$$\le \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - z_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |z_i - y_i|^p\right)^{1/p} = \rho(x,z) + \rho(z,y).$$

Отже, аксіоми метрики виконуються, тобто простір $l_p,\ 1 \le p < \infty$ є метричним.

✍ **Вправа 1.1.** При доведенні аксіоми М3 ми користувалися нерівністю Мінковського для сум

$$\forall a_i, b_i \quad \forall p: 1 \le p < \infty \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i + b_i|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |b_i|^p\right)^{1/p},$$

яка при $p = 1$ є звичайною нерівністю трикутника, а при $1 < p < \infty$ випливає з нерівності Гельдера:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i \cdot b_i| \le \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} |b_i|^q\right)^{1/q}, \qquad (1.1)$$

де $1/p + 1/q = 1$.

3) *Простір обмежених послідовностей* $l_\infty = m$. Елементами цього простору є обмежені числові послідовності дійсних або комплексних чисел:

$$m = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_m, \dots): \forall\, i\ \ x_i \in (\mathbb{R}, \mathbb{C}), \exists\, C_x > 0: \forall\, i\ \ |x_i| \le C_x\}.$$

Метрика у просторі m задається формулою:

$$\rho(x,y) = \sup_i |x_i - y_i|.$$

Аксіома М3 випливає з властивості супремуму, що супремум суми не перебільшує суми супремумів:

$$\rho(x,y) = \sup_i |x_i - y_i| = \sup_i |x_i - z_i + z_i - y_i| \le \sup_i (|x_i - z_i| + |z_i - y_i|) \le$$

$$\le \sup_i (|x_i - z_i|) + \sup_i (|z_i - y_i|) = \rho(x,z) + \rho(z,y).$$

4) *Арифметичний* m*-вимірний простір* $\mathbb{R}_p^m,\ 1 \le p \le \infty$. Елементами цього простору є m-вимірні вектори з дійсними координатами, де метрика задається в залежності від параметра p:

при $1 \le p < \infty$

$$\mathbb{R}_p^m = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \colon \forall\, i = \overline{1,m}\ \ x_i \in \mathbb{R}, \rho(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p} \right\},$$

$$\mathbb{R}_\infty^m = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \colon \forall\, i = \overline{1,m}\ \ x_i \in \mathbb{R}, \rho(x,y) = \max_{1 \le i \le m} |x_i - y_i| \right\}.$$

Те, що ці формули дійсно задають метрику, перевіряється аналогічно тому, як це робилося в прикладах 2,3, якщо ряди замінити на скінченні суми та супремум на максимум.

5) *Простір* $C[a,b]$. Елементами цього простору є неперервні на відрізку $[a, b]$ функції $x(t)$, а метрика задається формулою

$$\rho(x,y) = \max_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)|.$$

✍ **Вправа 1.2.** Перевірте самостійно виконання аксіом метрики у просторі $C[a,b]$.

Зауважимо, що на множині неперервних функцій метрику можна задавати іншим чином. Зупинимося ще на двох випадках.

6) *Простори неперервних функцій* $C_1[a,b], C_2[a,b]$.

У просторі $C_1[a,b]$ метрика задається формулою:

$$\rho(x,y) = \int_a^b |x(t) - y(t)|\, dt,$$

а у $C_2[a,b]$:

$$\rho(x,y) = \sqrt{\int_a^b |x(t) - y(t)|^2\, dt}.$$

Зрозуміло, що у просторі $C[a,b]$ «відстань» між неперервними функціями визначається як найбільша за модулем різниця значень цих функцій, а у просторі $C_1[a,b]$ – як площа фігури, обмеженої графіками функцій $x(t), y(t)$.

1.2 Класифікація точок у метричному просторі

Будемо розглядати довільний метричний простір (X, ρ), який для зручності будемо позначати просто X. Наведемо класифікацію точок метричного простору.

🗁 **Означення 1.2.1.** *Відкритою кулею* радіуса r з центром в точці x_0 називається множина $B_r(x_0) = \{x \in X \colon \rho(x, x_0) < r\}$. *Замкненою кулею* радіуса r з центром в точці x_0 називається множина $B_r[x_0] = \{x \in X \colon \rho(x, x_0) \le r\}$. *Сферою* радіуса r з центром в точці x_0 називається множина $S_r(x_0) = \{x \in X \colon \rho(x, x_0) = r\}$.

🗁 **Означення 1.2.2.** *ε-околом* точки x_0 називається відкрита куля радіуса ε з центром в точці x_0.

Зауважимо, що на числовій прямій зі звичайною метрикою відкритою (замкненою) кулею є інтервал (відрізок) вигляду $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ ($[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$). Сферу в цьому випадку будуть утворювати дві точки $\{x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon\}$. На двовимірній площині (у просторі $\mathbb{R}_2^2$) відкрита куля – це звичайний відкритий

круг, замкнена куля – замкнений круг, а сфера – це просто коло. У просторі $C_{[a,b]}$ відкриту кулю утворюють неперервні функції, графіки яких розташовані у так званому ε-коридорі функції $x_0(t)$, тобто відстоять від графіка $x_0(t)$ на відстань меншу за ε. А сферою є ті функції $x(t)$, які при деякому значенні аргументу $t \in [a,b]$ приймають значення $x(t) = x_0(t) + \varepsilon$.

🗁 **Означення 1.2.3.** Точка $x_0 \in X$ називається:

- *точкою дотикання* множини M, якщо в будь-якому околі цієї точки міститься принаймні один елемент множини M;
- *граничною точкою* множини M, якщо в будь-якому околі цієї точки міститься принаймні один елемент множини M, відмінний від x_0;
- *ізольованою точкою* множини M, якщо $x_0 \in M$ та існує такий окіл точки x_0, в якому немає інших елементів множини M (тобто $\exists\, \varepsilon > 0\colon\ B_\varepsilon(x_0) \cap M = \{x_0\}$);
- *внутрішньою точкою* множини M якщо $x_0 \in M$ разом з деяким своїм околом (тобто $\exists\, \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x_0) \subset M$);
- *межовою точкою* множини M, якщо в будь-якому околі цієї точки містяться як точки з множини M , так і точки з доповнення до M.

З означення 1.4.3. безпосередньо випливають наступні очевидні факти (✍ **Вправа 1.3.** Перевірте, що вони дійсно мають місце):

- внутрішні та ізольовані точки обов'язково належать множині, а всі інші точки можуть їй не належати;
- якщо деяка точка належить множині M , вона буде точкою дотикання цієї множини (вона сама буде належати будь-якому своєму околові);
- в будь-якому околі граничної точки міститься нескінченна кількість елементів множини M;
- точки дотикання множини є або ізольованими, або граничними точками.

🗁 **Означення 1.2.4.** Множина точок дотикання множини M називається *замиканням* цієї множини і позначається $\bar{M}$.

🗁 **Означення 1.2.5.** Множина внутрішніх точок множини M називається *внутрішністю* цієї множини і позначається M^0.

🗋 **Приклад 1.2.6.** Розглянемо на числовій прямій $\mathbb{R}$ множину $M = [a,b) \cup \{c\}$. Тоді точками дотикання цієї множини буде множина $[a,b] \cup \{c\}$, причому точка c буде ізольованою точкою, а точки відрізка $[a,b]$ будуть граничними. Внутрішніми точками будуть точки інтервалу (a,b), а межовими – три точки a, b, c.

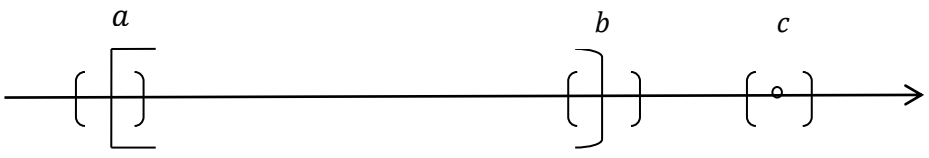


Рис.1.1 Множина $M = [a,b) \cup \{c\}$

Приклад 1.2.7. Нехай $M = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ – послідовність на числовій прямій зі звичайною метрикою. Тоді ця множина має єдину граничну точку – 0, її замикання, тобто множина точок дотикання, дорівнює $\bar{M} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} \cup \{0\}$. Це означає, що сама множина утворена ізольованими точками. Зауважимо також, що її внутрішність порожня.

Приклад 1.2.8. $\overline{\mathbb{Q} \cap [0,1]} = [0,1], (\mathbb{Q} \cap [0,1])^0 = \emptyset$.

1.3 Щільні та ніде не щільні множини. Сепарабельні метричні простори

Розглянемо тепер різні класи множин у метричних просторах.

Означення 1.3.1. Множина $M \subset X$ називається *обмеженою,* якщо вона міститься в деякій кулі.

Означення 1.3.2. Множина $M \subset X$ називається *всюди щільною* в просторі X, якщо її замикання збігається з усім простором: $\bar{M} = X$.

Означення 1.3.3. Множина $M \subset X$ називається *ніде не щільною*, якщо вона не щільна в жодній кулі, тобто якщо в кожній кулі існує інша куля, яка не має з множиною M жодної спільної точки.

Приклад 1.3.4. В якості метричного простору розглянемо числову пряму $\mathbb{R}$ зі звичайною метрикою. Множина раціональних чисел $\mathbb{Q}$ буде всюди щільною на числовій прямій, тобто будь-яке дійсне число є точкою дотикання (і навіть граничною точкою) множини раціональних чисел $\mathbb{Q}$. Це випливає з того факту, що в довільному околі будь-якого дійсного числа міститься безліч раціональних чисел.

А множина цілих чисел $\mathbb{Z}$ буде прикладом ніде не щільної множини на числовій прямій. Доведемо це. Розглянемо довільну кулю $B_r(x_0)$. Якщо в ній немає жодного цілого числа, тоді саме ця куля не має спільних точок з множиною $\mathbb{Z}$. Якщо куля містить цілі числа, та виберемо в ній не ціле число a (існування такого числа є очевидним хоча б тому, що куля – це континуальна множина, а множина цілих чисел – зліченна). Тоді в якості кулі, яка не перетинається з множиною $\mathbb{Z}$, можна взяти кулю $B_{r'}(a) \subset B_r(x_0)$, де $r' = \min\left(r, \frac{\{a\}}{2}, \frac{1-\{a\}}{2}\right)$ (тут $\{a\}$ – дробова частина числа a).

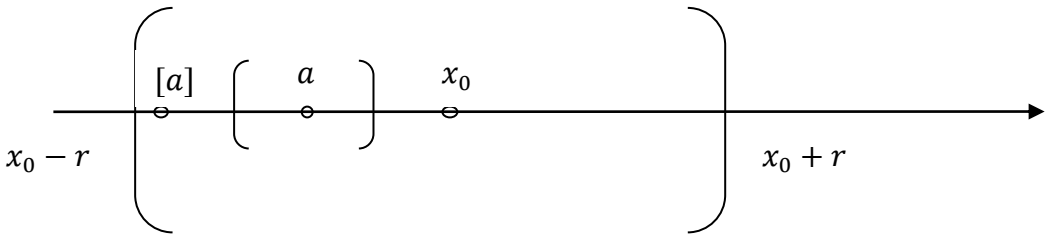


Рис. 1.2 Доведення ніде не щільності множини $\mathbb{Z}$

Зауваження 1.3.5. Існують множини, які не є всюди щільними та не є ніде не щільними. Наприклад, це довільний відрізок $[a, b]$ на числовій прямій

$\mathbb{R}$. Оскільки жодна точка, яка не належить відрізку, не може бути його точкою дотикання (її завжди можна оточити кулею, яка не перетинається з відрізком $[a, b]$), замикання відрізка збігається з самим відрізком, тобто відрізок не є всюди щільною множиною. Ніде не щільною множиною він також не буде, оскільки, якщо взяти кулю (інтервал), яка повністю міститься всередині відрізка $[a, b]$, ми не зможемо побудувати меншу кулю, яка не містить точок відрізка.

🗁 **Означення 1.3.6.** Метричний простір, в якому існує зліченна всюди щільна множина, називається *сепарабельним.*

Розглянемо приклади сеперабельних та несепарабельних метричних просторів:

1) Вище (див. приклад 1.3.4) було показано, що множина раціональних чисел є всюди щільною на числовій прямій. Оскільки ця множина є також зліченною, ми отримуємо перший приклад сепарабельного простору – $\mathbb{R}$.
2) Аналогічно $\mathbb{Q}^m$ – це всюди щільна множина у просторах $\mathbb{R}_p^m,\ 1 \le p \le \infty$. Вона зліченна як декартів добуток зліченних множин. Отже, $\mathbb{R}_p^m$ – сепарабельний простір.
3) У просторі $l_p, 1 \le p < \infty$ зліченною всюди щільною множиною буде множина послідовностей раціональних чисел, в яких тільки скінченна кількість елементів відрізняється від нуля: $M = \bigcup_{m=1}^{\infty}\{x = (x_1, x_2, \dots, x_m, 0,0, \dots 0, \dots): \forall i = \overline{1,m}\ \ x_i \in \mathbb{Q}\}$. Таким чином, $l_p, 1 \le p < \infty$ – сепарабельний простір.
4) Простір $C[a, b]$ також є сепарабельним. Зліченною всюди щільною множиною в ньому буде множина многочленів з раціональними коефіцієнтами.
5) В якості несепарабельного простору наведемо один приклад – це простір обмежених послідовностей m. В цьому просторі будь-яка всюди щільна множина має бути більше ніж зліченною. Дійсно, розглянемо в цьому просторі послідовності, утворені нулями та одиницями. Потужність множини таких послідовностей – континуум (існує бієкція між такими послідовностями і сукупністю підмножин натурального ряду, яка є континуальною). А відстань між такими послідовностями в просторі m дорівнює 1. Отже, якщо оточити кожну таку послідовність кулею радіуса $0{,}25$, такі кулі не будуть перетинатися. Нехай тепер M – всюди щільна множина в просторі m. Тоді кожна розглянута вище послідовність має бути точкою дотикання множини M, тобто в побудованій кулі радіуса $0{,}25$ має міститься принаймні один елемент множини M. Оскільки кулі не перетинаються і їх потужність – континуум, такою ж буде і потужність множини M.

1.4 Відкриті та замкнені множини

Дуже важливий клас множин у метричному просторі утворюють замкнені та відкриті множини.

🗁 **Означення 1.4.1.** Множина M називається *замкненою*, якщо вона збігається зі своїм замиканням: $\overline{M} = M$.

Оскільки завжди $\overline{M} \supset M$, множину можна називати замкненою, якщо вона містить всі свої точки дотикання.

Прикладами замкнених множин будуть: точка, відрізок, множина цілих чисел на числовій прямій, замкнена куля у довільному метричному просторі, квадрат або смуга з межею на площині тощо. Зауважимо, що порожня множина та сам простір також будуть замкненими множинами (за означенням). Основна властивість замкнених множин виражається наступною теоремою.

Теорема 1.4.2. Перетин довільної кількості та об'єднання скінченної кількості замкнених множин – це замкнені множини.

Доведення. 1) Нехай $\forall\alpha \;\; F_\alpha$ – замкнена множина, $F = \bigcap_\alpha F_\alpha$ та x_0 – точка дотикання для F. Тоді будь-який окіл цієї точки $B_\varepsilon(x_0)$ містить хоча б одну точку множини F, тобто містить хоча б одну точку з кожного F_α. Оскільки множини F_α замкнені а точка x_0 є точкою дотикання для кожної такої множини, тоді $x_0 \in F_\alpha \;\; \forall\alpha$, тобто $x_0 \in F$, що й означає, що F – замкнена множина.

2) Нехай тепер $F = \bigcup_{i=1}^n F_i$. Покажемо, що F містить усі свої точки дотикання, тобто жодна точка, яка не належить F, не може бути точкою дотикання цієї множини. Дійсно, якщо $x_0 \notin F = \bigcup_{i=1}^n F_i$, тоді $\forall i \;\; x_0 \notin F_i = \overline{F_i}$, тобто $\forall i \;\; \exists \; B_{\varepsilon_i}(x_0)$: $B_{\varepsilon_i}(x_0) \bigcap F_i = \emptyset$. Виберемо найменший з цих околів $B_\varepsilon(x_0)$ (тут $\varepsilon = \min\limits_i \varepsilon_i$), в якому не буде жодної точки з F, тобто точка x_0 не може бути точкою дотикання множини F. ■

☝ **Зауваження 1.4.3.** Умова скінченності об'єднання замкнених множин у теоремі 1.4.2. є суттєвою: об'єднання зліченної кількості замкнених множин може не бути замкненою множиною. Наприклад, $\bigcup_{n=1}^\infty \left[\frac{1}{n}, \frac{n-1}{n}\right] = (0,1)$, тобто скінченне об'єднання відрізків (замкнених множин) дорівнює інтервалу, який не є замкненою множиною, оскільки не містить точки дотикання 0 та 1.

🗁 **Означення 1.4.4.** Множина M називається *відкритою*, якщо вона збігається зі своєю внутрішністю: $M^0 = M$.

Оскільки завжди $M^0 \subset M$, множину можна називати відкритою, якщо будь-яка її точка є внутрішньою.

Прикладами відкритих множин будуть довільні інтервали на прямій, відкриті кулі у довільному метричному просторі, квадрат без межі тощо. Зв'язок між відкритими та замкненими множинами дає наступна теорема.

Теорема 1.4.5. Множина M відкрита тоді та тільки тоді, коли її доповнення CM замкнене.

Доведення. Необхідність. Нехай M – відкрита множина, тобто $M^0 = M$. Тоді $x_0 \in \overline{CM} \implies \forall\, \varepsilon > 0 \;\; B_\varepsilon(x_0) \cap CM \neq \emptyset \implies \forall \varepsilon > 0 \;\; B_\varepsilon(x_0) \not\subset M \Longrightarrow x_0 \notin M^0 = M \Longrightarrow x_0 \in CM$, тобто CM – множина замкнена.

Достатність. Нехай тепер CM – замкнена множина, тобто $CM = \overline{CM}$. Тоді $x_0 \in M \Longrightarrow x_0 \notin CM = \overline{CM} \Longrightarrow \exists \varepsilon > 0 \; B_\varepsilon(x_0) \cap CM = \emptyset \Longrightarrow \exists \varepsilon > 0 \; B_\varepsilon(x_0) \subset M$. Це означає, що $x_0 \in M^0$, тобто множина M – відкрита. ■

Безпосередньо з цієї теореми випливає, що порожня множина та сам метричний простір будуть відкритими множинами. Застосування теореми 1.4.5. та формул двоїстості дає нам можливість сформулювати основні властивості відкритих множин.

Теорема 1.4.6. Об'єднання довільної кількості та перетин скінченної кількості відкритих множин – це відкриті множини.

☝ **Зауваження 1.4.7.** Умова перетину скінченної кількості відкритих множин у теоремі 1.6.6. є суттєвою. Так, перетин зліченної кількості відкритих множин може бути множиною замкненою: $\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n};\frac{1}{n}\right)=\{0\}$.

☝ **Зауваження 1.4.8.** Існують множини, які є не відкритими та не замкненими. Наприклад, півінтервал $[a,b)$ на числовій прямій (це незамкнена множина, оскільки вона не містить свою точку дотикання b, та невідкрита множина, оскільки точка a не є внутрішньою точкою, а множині належить), множина раціональних точок $\mathbb{Q}$ на числовій прямій (замикання цієї множини збігається з $\mathbb{R}$, а внутрішність є порожньою, тому що кожній інтервал містить як раціональні так і ірраціональні точки).

1.5 Збіжні послідовності у метричному просторі

Наявність метрики у метричному просторі дає нам можливість сформулювати дуже важливе поняття збіжності.

🗁 **Означення 1.5.1.** Говорять, що послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ елементів метричного простору X *збігається* до елемента $x_0 \in X$, якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,x_0)=0$, тобто якщо $\forall\varepsilon>0\ \ \exists n_0\colon \forall\, n\geq n_0\ \ \rho(x_n,x_0)<\varepsilon$. При цьому елемент x_0 називається *границею послідовності* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, а сама послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – *збіжною*.

Твердження 1.5.2. Збіжна послідовність може мати лише одну границю.

Доведення. Припустимо, що послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ одночасно збігається до двох різних елементів x_0, y_0. Тоді $0\leq\rho(x_0,y_0)\leq\rho(x_n,x_0)+\rho(x_n,y_0)$. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,x_0)=\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,y_0)=0$, з останньої нерівності випливає, що $\rho(x_0,y_0)=0$, тобто що $x_0=y_0$ та наше припущення не є вірним.■

Якщо сформулювати означення 1.5.1. в термінах околів, збіжність послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ до елемента x_0 буде означати, що в будь-якому околі елемента x_0 містяться всі члени послідовності, починаючи з деякого номера, тобто точка x_0 є граничною точкою послідовності (а значить, і її точкою дотикання). Більш того, існує теорема, яка встановлює зв'язок між поняттями границі та точки дотикання.

Теорема 1.5.3. (критерій точки дотикання). Точка x_0 є точкою дотикання множини M тоді та тільки тоді, коли існує послідовність елементів множини M, яка збігається до x_0.

Доведення. Достатність теореми є очевидною (вона випливає з вищесказаного). Для доведення необхідності розглянемо для довільного натурального n окіл $B_{\frac{1}{n}}(x_0)$, в якому виберемо елемент $x_n\in M$ (він існує

завдяки тому, що x_0 є точкою дотикання для M). Таким чином будується послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$, яка збігається до x_0. ■

Якщо x_0 – гранична точка множини M, елементи x_n в доведенні попередньої теореми можна вибрати попарно різними, тобто має місце наступна теорема.

Теорема 1.5.4. (критерій граничної точки). Точка x_0 є граничною точкою множини M тоді та тільки тоді, коли існує послідовність попарно різних елементів множини M, яка збігається до x_0.

Необхідною умовою збіжності послідовності у метричному просторі є її обмеженість.

Твердження 1.5.5. Якщо послідовність збігається, вона обмежена.

Доведення. Нехай послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ збігається до елемента x_0. Тоді існує такий номер n_0, починаючи з якого всі члени послідовності задовольняють умову $\rho(x_n, x_0) \le 1$, тобто $\forall\, n \ge n_0 \;\; x_n \in B_1[x_0]$. Виберемо тепер число $r = \max\{1, \rho(x_1, x_0), \rho(x_2, x_0), \dots, \rho(x_{n_0-1}, x_0)\}$. Тоді $\forall\, n\, x_n \in B_r[x_0]$, тобто послідовність є обмеженою. ■

1.6 Збіжність у конкретних метричних просторах

Розглянемо зміст поняття збіжності у конкретних метричних просторах.

1) *Простір* $\mathbb{R}$. Збіжність у цьому метричному просторі добре вивчена у курсі математичного аналізу.

2) *Арифметичний* m *- вимірний простір* $\mathbb{R}_p^m$, $1 \le p \le \infty$. Нехай послідовність векторів $x_n = (x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nm})$ збігається до елемента $x_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0m})$, тобто $\rho(x_n, x_0) \to 0$:

$$p < \infty:\ \rho(x_n, x_0) = \left(\sum_{i=1}^{m} |x_{ni} - x_{0i}|^p\right)^{1/p} \to 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} |x_{ni} - x_{0i}|^p \to 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall\, i = \overline{1,m}\ \ |x_{ni} - x_{0i}|^p \to 0 \Leftrightarrow \forall\, i = \overline{1,m}\ \ x_{ni} \to x_{0i}, n \to \infty;$$

$$p = \infty:\ \rho(x_n, x_0) = \rho(x_n, x_0) = \max_{1 \le i \le m} |x_{ni} - x_{0i}| \to 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall\, i = \overline{1,m}\ \ |x_{ni} - x_{0i}| \to 0 \Leftrightarrow \forall\, i = \overline{1,m}\ \ x_{ni} \to x_{0i}, n \to \infty.$$

Таким чином, збіжність у просторі $\mathbb{R}_p^m$, $1 \le p \le \infty$ еквівалентна звичайній покоординатній збіжності послідовності.

Приклад 1.6.1. Дослідити на збіжність послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$: а) $x_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{m}{n}\right)$ в просторі $\mathbb{R}_2^m$; б) $x_n = ((-1)^n, 0, \dots, 0)$ в просторі $\mathbb{R}_1^m$.

а) Оскільки $\forall i = \overline{1,m}\ \ \frac{i}{n} \to 0$ при $n \to \infty$, послідовність $x_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{m}{n}\right)$ збігається до нульового елемента $x_0 = (0,0, \dots, 0)$ простору $\mathbb{R}_2^m$.

б) Оскільки послідовність перших координат $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ не є збіжною (вона має дві граничних точки), послідовність $x_n = ((-1)^n, 0, \dots, 0)$ не збігається за метрикою простору $\mathbb{R}_1^m$.

3) *Простір послідовностей* l_p, $1 \le p < \infty$. Нехай як і у попередньому випадку послідовність $x_n = (x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nk}, \dots)$ збігається до елемента $x_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0k}, \dots)$, тобто

$$\rho(x_n, x_0) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_{ni} - x_{0i}|^p\right)^{1/p} \to 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} |x_{ni} - x_{0i}|^p \to 0.$$

З того, що нескінченна сума невід'ємних доданків прямує до нуля при $n \to \infty$ випливає, що кожний доданок прямує до нуля, а зворотне – невірно. Отже,

$$\rho(x_n, x_0) \to 0 \Rightarrow \forall\, i \;\; |x_{ni} - x_{0i}|^p \to 0 \Rightarrow \forall\, i \;\; x_{ni} \to x_{0i}, n \to \infty,$$

що означає, що із збіжності за метрикою випливає покоординатна збіжність послідовностей, тобто покоординатна збіжність є необхідною умовою збіжності за метрикою у просторі l_p.

Приклад 1.6.2. Дослідити на збіжність послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$: а) $x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots\right)$ в просторах l_1 та l_2 ; б) $x_n = \left(\underbrace{0,0,\dots,0}_{n-1}, 1, 0, \dots, 0, \dots\right)$ в просторі l_2.

а) Дослідимо послідовність на покоординатну збіжність: $x_1 = (1,0,0,\dots)$, $x_2 = \left(1, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots\right)$, $x_3 = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 0, 0, \dots\right), \dots$. Зрозуміло, що покоординатно ця послідовність збігається до елемента $x_0 = \left(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{m}, \frac{1}{m+1}, \dots\right)$. Але оскільки ряд $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}$ розбігається, елемент x_0 не належить просторові l_1, тобто говорити про збіжність у цьому просторі немає сенсу – послідовність не збігається у l_1. А ось просторові l_2 елемент x_0 належить, оскільки $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} < \infty$. Отже, покоординатна збіжність має місце, перевіримо тепер збіжність за метрикою:

$$\rho(x_n, x_0) = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2} \to 0, n \to \infty$$

як залишок збіжного ряду. Значить, у просторі l_2 послідовність збігається за метрикою до елемента $x_0 = \left(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{m}, \frac{1}{m+1}, \dots\right)$.

б) Розглянемо елементи цієї послідовності та знайдемо покоординатну границю, якщо вона існує: $x_1 = (1,0,0,\dots)$, $x_2 = (0,1,0,0,\dots)$, $x_3 = (0,0,1,0,0,\dots), \dots$. Отже, покоординатно послідовність збігається до нульового елемента $x_0 = (0,0,0,0,\dots) \in l_2$. Перевіримо збіжність за метрикою:

$$\rho(x_n, x_0) = \sqrt{(0-0)^2 + \dots + (0-0)^2 + (1-0)^2 + (0-0)^2 + \dots} = 1 \nrightarrow 0,$$

тобто послідовність не збігається за метрикою простору l_2.

4) *Простір неперервних функцій* $C[a,b]$. Пригадуючи вигляд метрики у цьому просторі, запишемо означення збіжності послідовності неперервних на $[a,b]$ функцій $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ до неперервної функції $x_0(t)$:

$$\rho(x_n, x_0) \to 0 \Leftrightarrow \max_{t \in [a,b]} |x_n(t) - x_0(t)| \to 0.$$

Останній вираз – це критерій рівномірної збіжності функціональної послідовності, елементами якої є неперервні функції (для таких функцій максимум і супремум – це одне й те ж число), відомий з курсу математичного

аналізу [1]. Як відомо, необхідною умовою рівномірної збіжності послідовності є поточкова збіжність.

Приклад 1.6.3. У просторі $C[0,1]$ дослідити на збіжність послідовності: а) $x_n(t) = t^n$; б) $x_n(t) = t^n - t^{n+1}$.

Фактично ми будемо досліджувати послідовності на рівномірну збіжність. У випадку а) поточкова границя буде розривною функцією $x_0(t) = \begin{cases} 0, t \in [0,1) \\ 1, t = 1 \end{cases}$, тобто $x_0 \notin C[0,1]$ і говорити про збіжність за метрикою не варто. У випадку б) гранична функція є неперервною: $x_0(t) \equiv 0$. Отже, будемо перевіряти збіжність за метрикою, для чого знайдемо $\rho(x_n, x_0) = \max\limits_{t\in[0,1]} |x_n(t) - x_0(t)| = \max\limits_{t\in[0,1]} (t^n - t^{n+1})$. Оскільки на кінцях відрізка $[0,1]$ функція $t^n - t^{n+1}$ приймає значення нуль, свого максимуму вона досягає всередині відрізка. Точку екстремуму знайдемо за допомогою похідної: $(t^n - t^{n+1})' = t^{n-1}(n - (n+1)t) = 0$ при $t = \frac{n}{n+1}$. Отже, $\rho(x_n, x_0) = \max\limits_{t\in[0,1]} (t^n - t^{n+1}) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1} \to 0$ при $n \to \infty$, тобто послідовність збігається до $x_0(t) \equiv 0$ за метрикою простору $C[0,1]$.

1.7 Фундаментальні послідовності у метричному просторі

Означення 1.7.1. Послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ точок метричного простору X називається *фундаментальною*, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 : \forall\, n, m \geq n_0 \; \rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Безпосередньо з означення випливають наступні властивості фундаментальних послідовностей.

Твердження. 1.7.2. Будь-яка фундаментальна послідовність є обмеженою.

Доведення. Оскільки послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна, виберемо таке n_0, що $\forall\, n, m \geq n_0$ виконується нерівність $\rho(x_n, x_m) < 1$. Тобто $\forall\, k \geq n_0$ $\rho(x_k, x_{n_0}) < 1$. Фактично це означає, що «хвіст» послідовності, починаючи з номера n_0, розташований в кулі радіуса 1 з центром в точці x_{n_0}. Позначимо тепер $r = \max\left(1, \rho(x_1, x_{n_0}), \rho(x_2, x_{n_0}), \dots, \rho(x_{n_0-1}, x_{n_0})\right)$. Тоді $\forall\, n$ виконується нерівність $\rho(x_n, x_{n_0}) \leq r$, що означає обмеженість послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.■

Твердження 1.7.3. Будь-яка збіжна послідовність є фундаментальною.

Доведення. Нехай послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ збігається до елемента x_0, тобто $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 : \forall\, n \geq n_0 \quad \rho(x_n, x_0) < \varepsilon/2$. Тоді $\forall\, m \geq n_0$ також виконується нерівність $\rho(x_0, x_m) < \varepsilon/2$. Отже, з нерівності трикутника для метрики буде випливати, що $\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, x_0) + \rho(x_0, x_m) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, що й означає фундаментальність послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.■

1.8 Означення та приклади повних метричних просторів

З курсу математичного аналізу відомо, яку важливу роль відіграє повнота числової прямої, тобто факт, що будь-яка фундаментальна послідовність чисел має границю.

🗁 **Означення 1.8.1.** Якщо в метричному просторі збігається будь-яка фундаментальна послідовність, такий простір називається *повним*.

Наведемо приклади повних метричних просторів. Такими просторами будуть простори $\mathbb{R}, \mathbb{R}_p^m, l_p, m, C[a,b]$. Повнота просторів $\mathbb{R}, \mathbb{R}_p^m$ відома з курсу математичного аналізу [1].

⬚ **Приклад 1.8.2.** Доведемо повноту простору l_p при $1 \le p < \infty$. Нехай $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальна в l_p послідовність. Тут $x_n = (x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nk}, \dots)$. Тоді $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \colon \forall\, n, m \ge n_0 \;\; \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$, тобто

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_{nk} - x_{mk}|^p < \varepsilon^p. \qquad (1.2)$$

Це означає, що $\forall\, k$ та $\forall\, n, m \ge n_0$ вірна нерівність $|x_{nk} - x_{mk}| < \varepsilon$, тобто $\forall\, k$ числова послідовність k -тих координат є фундаментальною, а отже, збіжною. Позначимо її границю при $n \to \infty$ через x_{0k} та покажемо, що елемент $x_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0k}, \dots)$ є границею послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ за метрикою простору l_p. З нерівності (2.1) випливає, що при будь-якому фіксованому $M \in \mathbb{N}$ $\sum_{k=1}^{M} |x_{nk} - x_{mk}|^p < \varepsilon^p$. В цій скінченній сумі перейдемо до границі при $m \to \infty$: $\sum_{k=1}^{M} |x_{nk} - x_{0k}|^p \le \varepsilon^p$. Отримана нерівність є вірною при всіх M, тобто знову здійснимо перехід до границі при $M \to \infty$: $\sum_{k=1}^{\infty} |x_{nk} - x_{0k}|^p \le \varepsilon^p$.

З цієї нерівності та з нерівності Мінковського випливає, по-перше, що $x_0 \in l_p$ ($\sqrt[p]{\sum_{k=1}^{\infty} |x_{0k}|^p} \le \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{\infty} |x_{nk} - x_{0k}|^p} + \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{\infty} |x_{nk}|^p} < \infty$), а по-друге, що $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \colon \forall\, n \ge n_0 \;\; \rho(x_n, x_0) = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{\infty} |x_{nk} - x_{0k}|^p} < \varepsilon$, тобто що $x_n \to x_0$ за метрикою.

⬚ **Приклад 1.8.3.** Доведемо повноту простору $C[a,b]$. Означення фундаментальності в цьому просторі означає наступне:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \colon \forall\, n, m \ge n_0 \;\; \rho(x_n, x_m) = \max_{t \in [a,b]} |x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon.$$

Це є фактично критерій Коші рівномірної збіжності функціональної послідовності для неперервних функцій. Оскільки збіжність за метрикою простору $C[a,b]$ як раз є рівномірною збіжністю, з фундаментальності послідовності випливає її збіжність.

✍ **Вправа 1.4.** Доведіть повноту дискретного метричного простору.

Зауважимо, що якщо на множині неперервних функцій метрику задавати іншим чином, цей простір може не бути повним.

⬚ **Приклад 1.8.4.** Простір $C_1[-1,1]$, де метрика задається формулою

$$\rho(x,y) = \int_a^b |x(t) - y(t)|\, dt,$$

не буде повним. Розглянемо в цьому просторі послідовність

$$x_n(t) = \begin{cases} -1, t \in \left[-1, -\frac{1}{n}\right) \\ nt, t \in \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] \\ 1, t \in \left(\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}.$$

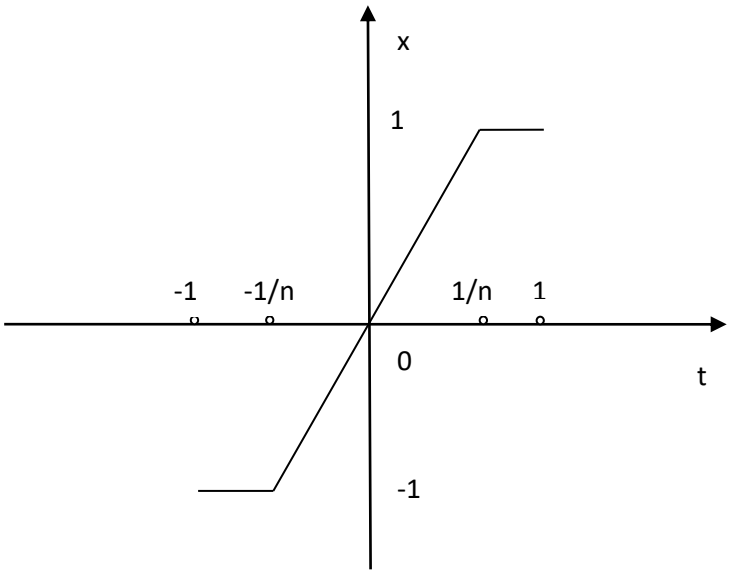


Рис.1.3 Графік функцій $x_n(t)$ з прикладу 1.8.4.

Ця послідовність є фундаментальною, оскільки при $m > n$ $\rho(x_n, x_m) =$

$$= 2\left(\int_0^{1/m} (mt - nt)dt + \int_{1/m}^{1/n} (1 - nt)dt\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n}\ .$$

Покажемо, що вона не збігається у просторі $C_1[-1,1]$. Нехай f – довільна неперервна на $[-1,1]$ функція, а $\psi(t) = \begin{cases} -1, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$. З властивостей метрики випливає, що

$$\rho(f, \psi) \leq \rho(f, x_n) + \rho(x_n, \psi) = \rho(f, x_n) + 2\int_0^{1/n} (1 - nt)dt = \rho(f, x_n) + \frac{1}{n},$$

тобто $\lim\limits_n \rho(f, x_n) \geq \rho(f, \psi) > 0$. Зауважимо, що $\rho(f, \psi) > 0$, оскільки f – неперервна функція, а ψ – розривна. Отже, побудована фундаментальна послідовність $x_n(t)$ не збігається у просторі $C_1[-1,1]$, тобто цей простір не є повним.

✍ **Вправа 1.5.** Доведіть за допомогою послідовності з прикладу 2.1.4. неповноту простору $C_2[-1,1]$.

1.9. Теореми про повні метричні простори

В аналізі значне застосування має лема про вкладені відрізки. В теорії метричних просторів аналогічну роль відіграє наступна теорема, яка фактично є критерієм повноти простору.

Теорема 1.9.1. (про вкладені кулі). Метричний простір X буде повним тоді та тільки тоді, коли будь-яка послідовність вкладених друг в друга замкнених куль, радіуси яких прямують до нуля, має непорожній перетин.

Доведення. Необхідність. Нехай простір X – повний та $B_{r_1}[x_1] \supset B_{r_2}[x_2] \supset \cdots \supset B_{r_n}[x_n] \supset \cdots$ – послідовність вкладених замкнених куль, для якої $\lim\limits_n r_n =$

0. Оскільки при $m > n$ $\rho(x_n, x_m) < r_n$, послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ центрів куль є фундаментальною, тобто збіжною. Позначимо її границю через x. Зауважимо, що куля $B_{r_n}[x_n]$ містить усі елементи послідовності $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, принаймні з n-го номеру. Тобто x є граничною точкою кожної кулі $B_{r_n}[x_n]$. Оскільки куля замкнена, $x \in B_{r_n}[x_n]$ $\forall n$, тобто $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{r_n}[x_n]$, що означає, що перетин куль не є порожнім.

Достатність. Нехай $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – довільна фундаментальна послідовність. Покажемо, що вона має границю. Завдяки фундаментальності, виберемо таку точку x_{n_1} з послідовності, що $\forall n \geq n_1\ \rho(x_n, x_{n_1}) < \frac{1}{2}$. Побудуємо замкнену кулю $B_1[x_{n_1}]$ радіуса 1 з центром в цій точці. Серед елементів послідовності з номерами, більшими за n_1, виберемо таку точку x_{n_2}, що $\forall n \geq n_2\ \rho(x_n, x_{n_2}) < \frac{1}{2^2}$. Цю точку виберемо за центр замкненої кулі $B_{\frac{1}{2}}[x_{n_2}]$. Зрозуміло, що $B_{\frac{1}{2}}[x_{n_2}] \subset B_1[x_{n_1}]$. Продовжимо цей процес: якщо кулі $B_1[x_{n_1}] \supset B_{\frac{1}{2}}[x_{n_2}] \supset \cdots \supset B_{\frac{1}{2^{k-1}}}[x_{n_k}]$ $(n_1 < n_2 < \cdots < n_k)$ вже побудовані, серед елементів послідовності з номерами, більшими за n_k, виберемо таку точку $x_{n_{k+1}}$, що $\forall n \geq n_{k+1}\ \rho(x_n, x_{n_{k+1}}) < \frac{1}{2^{k+1}}$. Оточимо цю точку замкненою кулею $B_{\frac{1}{2^k}}[x_{n_{k+1}}]$. Продовжуючи до нескінченності, побудуємо послідовність вкладених замкнених куль $B_1[x_{n_1}] \supset B_{\frac{1}{2}}[x_{n_2}] \supset \cdots \supset B_{\frac{1}{2^{k-1}}}[x_{n_k}] \supset \cdots$, радіуси яких прямують до нуля. За умовою теореми, ці кулі мають спільну точку. Позначимо її через x. Зрозуміло, що $\rho(x, x_{n_k}) < \frac{1}{2^{k-1}}$, тобто x є границею підпослідовності $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Але оскільки фундаментальна послідовність містить збіжну підпослідовність, вона сама збігається до тієї ж границі, тобто $\lim\limits_{n} x_n = x$.■

☝ **Зауваження 1.9.2.** Перетин куль, про який йдеться в теоремі 1.9.1., містить єдину точку. Якщо б їх було принаймні дві, послідовність радіусів куль не могла б прямувати до нуля.

В теорії повних метричних просторів важливе значення має наступна теорема.

Теорема 1.9.3. (Бера). Повний метричний простір не може бути подано у вигляді зліченного об'єднання ніде не щільних множин

Доведення. Припустимо супротивне: нехай повний метричний простір X подається у вигляді $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, де кожна з множин M_n є ніде не щільною. Нехай B_0 – деяка замкнена куля радіуса 1. Оскільки множина M_1 є ніде не щільною, вона не щільна в B_0, тобто існує така замкнена куля B_1 (можемо вважати, що її радіус менше за $\frac{1}{2}$), що $B_0 \supset B_1$ та $B_1 \cap M_1 = \emptyset$. Наступна множина M_2 є ніде не щільною в B_1, тобто в B_1 існує замкнена куля B_2 (можемо вважати, що її радіус менше за $\frac{1}{3}$), яка не має спільних точок з M_2. Продовжуємо

цей процес та отримуємо послідовність вкладених замкнених куль B_n, радіуси яких прямують до нуля та при цьому $B_n \cap M_n = \emptyset$.

З теореми 1.9.1. (про вкладені кулі) випливає, що перетин куль B_n непорожній, тобто містить деяку точку x, але ця точка не може належати жодній множині M_n, тобто $x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, що заперечує припущенню $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$. ■

Наведемо тіердження, яка дає критерій повноти деякої множини (простору) у метричному просторі. Виявляється, поняття повноти пов'язане з поняттям замкненості.

Твердження 1.9.4. Підмножина повного метричного простору є повним метричним простором тоді та тільки тоді, коли вона замкнена.

Доведення. Нехай (X, ρ) — повний метричний простір та $M \subset X$. Необхідність. Нехай x_0 — точка дотикання множини M, тобто, згідно з теоремою 1.5.3., існує така послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$, яка збігається до x_0 в X. Отже, послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ є збіжною, а значить, фундаментальною в X (і в M). Оскільки M — повний простір, послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ збігається в цьому просторі, а оскільки збіжна послідовність може мати лише одну границю, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ збігається в M саме до x_0, тобто $x_0 \in M$ і множина M є замкненою.

Достатність. Нехай $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ — довільна фундаментальна послідовність. Оскільки $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ і простір X — повний, ця послідовність збігається за метрикою у просторі X, тобто існує такий $x_0 \in X$, що $\rho(x_n, x_0) \to 0$. Останній факт означає, що точка x_0 є точкою дотикання множини M, а оскільки M є замкненою множиною, то $x_0 \in M$. Отже, у множині M збігається довільна фундаментальна послідовність, значить, M є повним метричним простором. ■

З цього твердження випливає, наприклад, що на числовій прямій $\mathbb{R}$ повними просторами будуть будь-який відрізок, замкнена півпряма, множина цілих чисел $\mathbb{Z}$. А множина раціональних чисел $\mathbb{Q}$, інтервал – це приклади неповних метричних просторів.

1.10 Компактність у метричних просторах

Поняття компактності у метричних просторах тісно пов'язане з поняттям цілковитої обмеженості множини.

🗁 **Означення 1.10.1.** Нехай M – деяка множина у метричному просторі X, ε – довільне додатне число. Множина $A \subset X$ називається *ε-сіткою* для M, якщо для довільної точки $x \in M$ існує хоча б одна точка $a \in A$, для якої $\rho(x, a) \leq \varepsilon$.

Інакше кажучи, існування ε-сітки для множини M означає можливість розмістити усі елементи M у кулях радіуса ε з центрами в точках з множини A. Зрозуміло, що якщо для деякої множини існує ε-сітка, можна побудувати 2ε-сітку. На числовій прямій $\mathbb{R}$ множина цілих чисел $\mathbb{Z}$, наприклад, утворює 0,5-сітку. Причому зменшити $\varepsilon = 0{,}5$ неможливо. Множина $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ точок с цілими координатами утворює $\frac{\sqrt{2}}{2}$-сітку на площині.

🗁 **Означення 1.10.2.** Множина M називається *цілком обмеженою*, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує скінченна ε-сітка для цієї множини.

Цілком обмежену множину можна розмістити у скінченній кількості куль як завгодно малого радіуса з центрами в точках з множини A. Зрозуміло, що кожна цілком обмежена множина є обмеженою, оскільки ту скінченну кількість куль, які містять множину, можна оточити однієї кулею. Обернене твердження не є вірним. Але ж у скінченновимірному просторі $\mathbb{R}^m$ повна обмеженість збігається з обмеженістю.

Дійсно, кулю, яка містить в собі обмежену множину M , можна помістити у m-вимірний куб. Розіб'ємо цей куб на маленькі кубики з ребром ε. Тоді вершини цих кубиків будуть утворювати $\frac{\sqrt{m}}{2}\varepsilon$-сітку для M, тобто ця сітка буде скінченною при довільному ε.

⬚ **Приклад 1.10.3.** Одинична сфера у просторі l_2 є прикладом обмеженої, але не цілком обмеженої множини. Дійсно, сфера є поверхнею кулі, тобто множиною обмеженою. Виберемо на сфері послідовність точок $e_n = \left(\underbrace{0,0,\dots,0}_{n-1}, 1,0,0,\dots\right)$. Відстань між будь-якими двома точками такої послідовності дорівнює $\rho(e_n, e_m) = \sqrt{2}$. Отже, при жодному $\varepsilon < \frac{\sqrt{2}}{2}$ не існує скінченної ε -сітки, оскільки кожна куля радіуса менше за $\frac{\sqrt{2}}{2}$ може містити лише один з елементів цієї послідовності (нескінченної множини).

⬚ **Приклад 1.10.4.** Розглянемо в l_2 множину, яка називається основним паралелепіпедом або «гільбертовою цеглиною»:

$$\Pi = \left\{x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots): \forall n\ |x_n| \le \frac{1}{2^{n-1}}\right\}.$$

Покажемо, що ця множина є цілком обмеженою. Нехай задано додатне число ε. Кожній точці $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ з Π поставимо у відповідність точку $x^* = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0,0, \dots)$ з цієї ж множини. Оскільки

$$\rho(x, x^*) = \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} x_k^2} \le \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{4^{k-1}}} = \sqrt{\frac{1}{3 \cdot 4^{n-1}}} < \frac{1}{2^{n-1}},$$

можна вибрати номер n таким, щоб $\frac{1}{2^{n-1}} < \frac{\varepsilon}{2}$. Зауважимо, що $x^* \in \Pi$ та множина Π^* точок вигляду x^* є цілком обмеженою (як обмежена множина у скінченновимірному просторі). Отже, існує скінченна $\frac{\varepsilon}{2}$ -сітка для Π^* . Але $\rho(x, x^*) < \frac{\varepsilon}{2}$, тобто ця сітка буде ε-сіткою для всього Π.

🗁 **Означення 1.10.5.** Множина M називається *компактною*, якщо будь-яка її нескінченна підмножина має граничну точку.

Теорема 1.10.6. (необхідна умова компактності). Якщо метричний простір компактний, він цілком обмежений.

Доведення. Припустимо, що метричний простір X не є цілком обмеженим, тобто існує таке додатне число ε_0, при якому в X не існує скінченної ε_0-сітки. Нехай a_1 – довільна точка в X. Тоді існує така точка a_2, що $\rho(a_1, a_2) > \varepsilon_0$ (інакше б всі точки простору знаходилися від точки a_1 на відстані. не більшій за ε_0, тобто в кулі $B_{\varepsilon_0}[a_1]$, і точка a_1 сама б утворювала ε_0-сітку). Далі знайдемо таку точку a_3, для якої $\rho(a_1, a_3) > \varepsilon_0$, $\rho(a_2, a_3) > \varepsilon_0$ (вона існує, оскільки у протилежному випадку точки a_1, a_2 утворювали б ε_0-сітку). Продовжимо цей процес та отримаємо послідовність точок $a_k \in X$, для яких $\rho(a_i, a_k) > \varepsilon_0$ при всіх $i = 1,2, \dots, k-1$. Зрозуміло, що ця послідовність не буде мати жодної граничної точки, оскільки $\rho(a_i, a_j) > \varepsilon_0$ при $i \neq j$, що заперечує умові теореми.■

Цю теорему сформульовано для метричного простору. Зрозуміло, що кожна підмножина метричного простору сама утворює метричний простір, тобто її можна формулювати для деякої підмножини метричного простору.

Зауважимо, що повна обмеженість не є достатньою умовою компактності. Так, множина $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \cap [0; 1]$ є цілком обмеженою (як обмежена множина на прямій), але некомпактною, оскільки послідовність $\frac{\sqrt{2}}{n}$ чисел з цієї множини не має граничної точки (нуль множині не належить).

Теорема 1.10.7. (критерій компактності метричного простору). Метричний простір X компактний тоді та тільки тоді, коли він цілком обмежений та повний.

Доведення. Необхідність повної обмеженості доведено у теоремі 1.10.6. Необхідність повноти є очевидною, оскільки якщо фундаментальна послідовність не збігається, вона не може мати граничних точок.

Достатність. Виберемо довільну послідовність $\{x_n\}$ з X та покажемо, що вона має граничну точку.

Розглянемо скінченну 1-сітку в просторі X та побудуємо навколо кожної точки сітки замкнену кулю радіуса 1. Зрозуміло, що ці кулі покривають весь простір, тобто принаймні в одній з них міститься підпослідовність $\{x_n^1\}$ послідовності $\{x_n\}$. Позначимо цю кулю B_1. Далі розглянемо $\frac{1}{2}$-сітку в B_1 та оточимо кожну точку з цієї сітки замкненою кулею радіуса $\frac{1}{2}$. Принаймні одна з таких куль, позначимо її B_2, містить підпослідовність $\{x_n^2\}$ послідовності $\{x_n^1\}$. Таким же чином знайдемо замкнену кулю B_3 радіуса $\frac{1}{4}$, яка містить підпослідовність $\{x_n^3\}$ послідовності $\{x_n^2\}$. Продовжимо цей процес до нескінченності.

Розглянемо тепер замкнені кулі $\widetilde{B_k}$, які мають ті ж центри, що й B_k, але вдвічі більші радіуси. Це потрібно для того, щоб кулі були вкладені одна в одну. Таким чином, ми отримуємо послідовність замкнених вкладених куль, радіуси яких прямують до нуля. За теоремою 1.9.1. про вкладені кулі, їх перетин містить точку, яка є граничною для послідовності $\{x_n\}$, оскільки будь-який окіл цієї точки містить деяку кулю B_k а з нею і деяку підпослідовність $\{x_n^k\}$ послідовності $\{x_n\}$. ■

Цей загальний критерій дозволяє формулювати та доводити критерії компактності у конкретних метричних просторах. Розглянемо докладно лише два з них – у скінченновимірному просторі $\mathbb{R}_p^m$ та у просторі неперервних на відрізку функцій. У просторі $\mathbb{R}_p^m$ обмеженість та повна обмеженість збігаються. Крім того, він повний, але ж повнота підмножини цього простору рівносильна її замкненості (див. твердження 1.9.4.) Об'єднання цих фактів дає нам можливість сформулювати наступне твердження.

Теорема 1.10.8. (критерій компактності у скінченновимірному просторі). Множина у скінченновимірному просторі є компактною тоді та тільки тоді, коли вона обмежена та замкнена.

Ця корисна теорема дає приклади компактних та некомпактних множин, наприклад, на прямій. Компактними будуть відрізки, одноточкові множини. Некомпактними будуть півінтервали та інтервали (вони не є замкненими), півпрямі, множини цілих, раціональних чисел (вони необмежені).

В просторі $C[a,b]$ критерій компактності дає наступне твердження.

Теорема 1.10.9. (Арцела). Множина M є компактною в метричному просторі $C[a,b]$ тоді та тільки тоді, коли вона рівномірно обмежена та рівностепенево неперервна.

🗁 **Означення 1.10.10.** Множина M називається *рівномірно обмеженою*, якщо $\exists C > 0\colon\ \forall\, x(t) \in M\ \ \|x(t)\| \le C$.

🗁 **Означення 1.10.11.** Множина M називається *рівностепенево неперервною*, якщо

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0 \colon \forall\, t_1, t_2 \in [a,b] \colon |t_1 - t_2| < \delta\ \ \forall x(t) \in M\ |x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon.$$

Може статися так, що деяка множина у метричному просторі не є компактною за рахунок своєї незамкненості. Але її замикання вже є компактним. Такі множини утворюють окремий клас.

🗁 **Означення 1.10.12.** Множина M називається *передкомпактною* (або *відносно компактною*), якщо її замикання компактне.

Зрозуміло, що у скінченновимірному просторі передкомпактними будуть всі обмежені множини. У загальному випадку має місце наступне зрозуміле твердження.

Твердження 1.10.13. (критерій передкомпактності). Множина M у повному метричному просторі є передкомпактною тоді та тільки тоді, коли вона цілком обмежена.

1.11 Питання для самоконтролю

- Дайте означення метрики та метричного простору.
- Дайте означення дискретного метричного простору, просторів $\mathbb{R}, l_p, m\ , \mathbb{R}_p^m, C_{[a,b]}, C_1[a,b], C_2[a,b]$.
- Дайте означення точки дотикання, граничної, внутрішньої, ізольованої, межової точки множини у метричному просторі.
- Що таке замикання множини? Яка множина називається замкненою, а яка – відкритою? Наведіть приклади відкритих та замкнених множин. Сформулюйте основні властивості відкритих та замкнених множин. Яка теорема встановлює зв'язок між відкритими та замкненими множинами?

- Яка множина називається всюди щільної, ніде не щільною? Наведіть відповідні приклади.
- Дайте означення сеперабельного метричного простору та наведіть приклади сепарабельних просторів.
- Дайте означення неперервного відображення метричних просторів.
- Яка послідовність називається збіжною у метричному просторі? А фундаментальною? Встановіть зв'язок між збіжними та фундаментальними послідовностями.
- Розкрийте зміст поняття збіжності у конкретних метричних просторах.
- Сформулюйте критерії точки дотикання та граничної точки за допомогою поняття збіжності.
- Дайте означення повного метричного простору. Наведіть приклади повних та неповних метричних просторів.
- Сформулюйте теорему про вкладені кулі та теорему Бера.
- Встановіть зв'язок між замкненими та повними підпросторами повного метричного простору.
- Розкрийте поняття компактності у метричному просторі. Наведіть приклади компактних та некомпактних множин.
- Сформулюйте необхідну умову компактності.
- Сформулюйте критерій компактності у метричному просторі.
- Яка множина називається передкомпактною?
- Розкрийте поняття компактності у скінченновимірному просторі.

Задачі для самостійного розв'язання:

Задача 1.1. Перевірити, чи буде метричним простором множина двовимірних векторів $(x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2))$, якщо покласти $\rho(x,y) = \left(\sqrt{|x_1 - y_1|} + \sqrt{|x_2 - y_2|}\right)^2$.

Задача 1.2. Показати, що в довільному метричному просторі (X, ρ) виконуються нерівності: $\forall x, y, z \in X \ \ |\rho(x,z) - \rho(z,y)| \le \rho(x,y)$; $\forall x, y, z, u \in X \quad |\rho(x,z) - \rho(u,y)| \le \rho(x,y) + \rho(x,u)$.

Задача 1.3. Нехай $\rho(x,y)$ — метрика на множині X. Довести, що функції $\rho_1(x,y) = \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$; $\rho_2(x,y) = \ln\big(1 + \rho(x,y)\big)$; $\rho_3(x,y) = \min\{1, \rho(x,y)\}$ також будуть метриками.

Задача 1.4. Довести, що замикання довільної ніде не щільної множини ніде не щільне.

Задача 1.5. Нехай $x_0(t) \in C[a,b]$. Довести, що множина $\{x(t) \in C[a,b]: x(t) < x_0(t)\}$ відкрита у просторі $C[a,b]$.

Задача 1.6. Знайти замикання множини многочленів у просторі $C[a,b]$.

Задача 1.7. Довести, що множина $M = \left\{x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in l_2 : 0 \le x_n \le \frac{1}{n}\right\}$ замкнена в l_2.

Задача 1.8. Чи буде повним метричним простором дійсна пряма с метриками: $\rho(x,y) = |arctg\ x - arctg\ y|$; $\rho(x,y) = arctg|x - y|$?

Задача 1.9. Довести, що простір многочленів, визначених на $[0,1]$ з метрикою простору $C[0,1]$, не є повним метричним простором.

Задача 1.10. Дослідити послідовність $x_n(t) = t^n - t^{2n}$ на фундаментальність у просторі $C[0,1]$.

Задача 1.11. Нехай $\mathbb{Q}$ – метричний простір раціональних чисел з метрикою $\rho(p,q) = |p-q|$. Довести, що множина $M = \{p \in \mathbb{Q}: 2 < p^2 < 3\}$ замкнена та обмежена, але некомпактна.

Задача 1.12. Перевірити, що куля $B_1[0]$ не є цілком обмеженою множиною у $C[0,2\pi]$.

2 ПРИНЦИП СТИСКУЮЧИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

При розв'язанні деяких задач важливим є питання про існування та єдиність розв'язку того чи іншого рівняння. Це питання інколи можна сформулювати як питання існування нерухомої точки відображення певного метричного простору в себе. Серед різних критеріїв існування та єдиності нерухомої точки одним з найпростіших і разом з тим, найважливіших, є принцип стискуючих відображень.

2.1 Стискуюче відображення

🗁 **Означення 2.1.1.** Нехай X – метричний простір. Відображення $A: X \to X$ називається *стискуючим*, якщо $\exists \alpha \in (0;1): \forall x, y \in X \quad \rho(Ax, Ay) \leq \alpha\rho(x,y)$.

🗁**Означення 2.1.2.** Відображення $f: (X, \rho_X) \to (Y, \rho_Y)$ називається *неперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо

$$\forall\ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f): x_n \to x_0 \implies f(x_n) \to f(x_0).$$

Це означення цілком повторює означення неперервності числової функції в точці за Гейне, відоме з курсу математичного аналізу. І як в курсі математичного аналізу, існує друге означення («за Коші»).

🗁 **Означення 2.1.3.** Відображення $f: (X, \rho_X) \to (Y, \rho_Y)$ називається *неперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0: \forall x \in D(f):\ \rho_X(x, x_0) < \delta \implies \rho_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Еквівалентність цих означень доводиться аналогічно тому, як це було зроблено для означень неперервності числової функції.

Твердження 2.1.4. Будь-яке стискуюче відображення є неперервним.

Доведення. Дійсно, якщо довільна послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ збігається до точки $x_0 \in X$, тобто $\rho(x_n, x_0) \to 0$, тоді з умови стислості $\rho(Ax_n, Ax_0) \leq \alpha\rho(x_n, x_0)$ випливає, що $\rho(Ax_n, Ax_0) \to 0$, тобто $\{Ax_n\}_{n=1}^{\infty}$ збігається до Ax_0. ■

🗁 **Означення 2.1.5.** Точка x називається *нерухомою точкою* відображення A, якщо $Ax = x$.

Інакше кажучи, нерухомі точки відображення A – це розв'язки рівняння $Ax = x$.

Наведемо просту умову стислості відображення, яке задається числовою функцією.

Твердження 2.1.6. (достатня умова стислості відображення). Якщо функція $f(x)$ є диференційовною на $[a,b]$ та $sup_{x\in[a,b]}|f'(x)| = \alpha < 1$, тоді f здійснює стисле відображення.

Доведення. Цей факт випливає з теореми Лагранжа для диференційованих функцій: нехай $x, y \in [a,b]$, тоді між цими точками існує точка ξ, що виконується рівність $f(x) - f(y) = f'(\xi)(x-y)$. Зробимо відповідну оцінку:

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)(x-y)| \le sup_{x\in[a,b]}|f'(x)||x-y| = \alpha|x-y|.$$

Враховуючи вигляд метрики на числовій прямій, це означає, що $\rho(f(x), f(y)) \le \alpha\rho(x,y)$, тобто за умови $\alpha < 1$, відображення f є стискуючим.■

2.2 Принцип стискуючих відображень та його застосування

Теорема 2.2.1. (принцип стискуючих відображень). Будь-яке стискуюче відображення, визначене у повному метричному просторі, має єдину нерухому точку.

Доведення. Спочатку доведемо існування нерухомої точки. Нехай x_0 – довільна точка у повному метричному просторі X, A – стискуюче відображення у цьому просторі. Побудуємо послідовність за таким правилом: $x_1 = Ax_0$, $x_2 = Ax_1 = A^2x_0$,…, $x_n = Ax_{n-1} = A^nx_0$,… .

Покажемо, що побудована таким чином послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ є фундаментальною (для визначеності вважаємо, що $m \ge n$):

$$\begin{gathered}\rho(x_n, x_m) = \rho(Ax_{n-1}, Ax_{m-1}) \le \alpha\rho(x_{n-1}, x_{m-1}) \le \cdots \le \alpha^n\rho(x_0, x_{m-n}) \le \\ \le \alpha^n\big(\rho(x_0,x_1) + \rho(x_1,x_2) + \cdots + \rho(x_{m-n-1}, x_{m-n})\big) \le \\ \le \alpha^n\big(\rho(x_0,x_1) + \rho(Ax_0,Ax_1) + \cdots + \rho(Ax_{m-n-2}, Ax_{m-n-1})\big) \le \\ \le \alpha^n\big(\rho(x_0,x_1) + \alpha\rho(x_0,x_1) + \cdots + \alpha^{m-n-1}\rho(x_0,x_1)\big) < \\ < \alpha^n(\rho(x_0,x_1) + \alpha\rho(x_0,x_1) + \cdots + \alpha^{m-n-1}\rho(x_0,x_1) + \cdots) = \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_0,x_1).\end{gathered}$$

Оскільки $\alpha \in (0;1)$, величина $\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_0,x_1)$ може бути як завгодно малою при достатньо великих номерах n. Отже, послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ є фундаментальною, тобто збігається у просторі X.

Нехай $x = \lim\limits_n x_n$. Тоді, в силу неперервності стискуючого відображення (див. твердження 2.1.4.),

$$Ax = A\lim_n x_n = \lim_n Ax_n = \lim_n x_{n+1} = x,$$

тобто x є нерухомою точкою відображення A. Доведемо тепер єдиність цієї точки. Припустимо, що нерухомих точок дві: $Ax = x, Ay = y$. Тоді нерівність в означенні стискуючого відображення 2.1.1. приймає вигляд: $\rho(x,y) \le \alpha\rho(x,y)$. Але оскільки $\alpha < 1$, $\rho(x,y) = 0$, тобто $x = y$. ■

Розглянемо лише декілька прикладів застосування принципу стискуючих відображень до розв'язання рівнянь. ✍ **Вправа 2.1.** З іншими прикладами

застосування принципу стискуючих відображень ознайомтесь самостійно [2, с. 10-16].

Приклад 2.2.2. Нехай задано рівняння $f(x) = x$, де $f(x)$задовольняє умови твердження 2.1.6., тобто є диференційовною на $[a, b]$ та $sup_{x\in[a,b]}|f'(x)| = \alpha < 1$. Тоді f є стискуючим відображенням та послідовність $x_0, x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$,… збігається до єдиного кореня x заданого рівняння.

На рис.3.1. показано хід послідовних наближень до кореня у випадку, коли $0 < f'(x) < 1$.

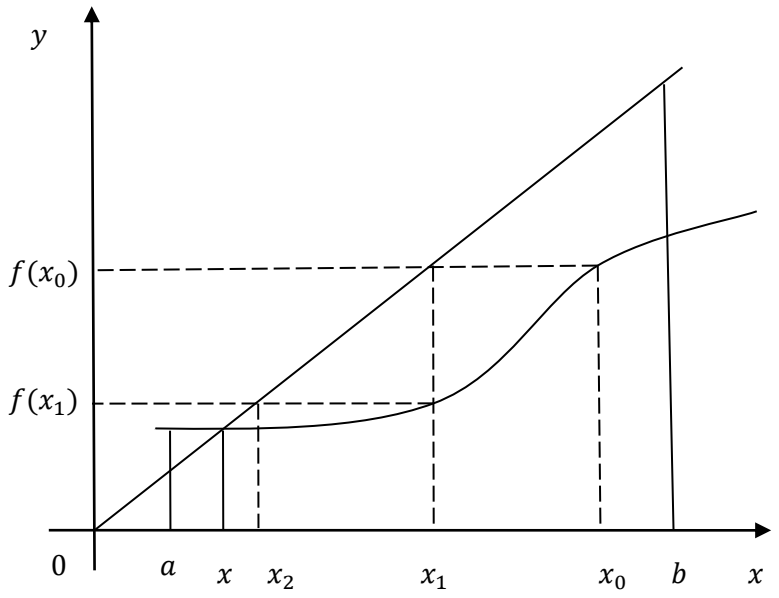


Рис.2.1 Послідовні наближення кореня

Нехай ми маємо більш загальне рівняння $F(x) = 0$, причому $F(a) < 0$, $F(b) > 0$ та на $[a, b]$ $0 < K_1 \le F(x) \le K_2$. Розглянемо допоміжну функцію $f(x) = x - \lambda F(x)$ та будемо шукати розв'язок рівняння $f(x) = x$, яке рівносильне рівнянню $F(x) = 0$ при $\lambda \neq 0$. Оскільки $f'(x) = 1 - \lambda F'(x)$, тоді $1 - \lambda K_2 \le f'(x) \le 1 - \lambda K_1$, тобто число λ можна підібрати таким чином, щоб $sup_{x\in[a,b]}|f'(x)| = \alpha < 1$ та можна було застосовувати метод послідовних наближень.

Приклад 2.2.3. Покажемо, як принцип стискуючих відображень можна застосувати для знаходження кореня неоднорідного лінійного інтегрального рівняння Фредгольма другого роду, тобто рівняння

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)f(s)ds + \varphi(x), \qquad (2.1)$$

де $K(x,s)$, $\varphi(x)$ – відомі функції, λ – довільний параметр, а $f(x)$ – шукана функція. Розглянемо випадок, коли $K(x,s) \in C[a;b] \times [a;b]$, $\varphi(x) \in C[a;b]$. Оскільки за першою теоремою Вейєрштрасса неперервна функція є обмеженою, існує таки число M, що при всіх $x, s \in [a;b]$ $|K(x,s)| \le M$.

Розглянемо відображення $g = Af$ повного метричного простору $C[a;b]$ в себе:

$$g(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)f(s)ds + \varphi(x).$$

Оскільки

$$\rho(g_1, g_2) = \max_{x\in[a;b]}|g_1(x) - g_2(x)| \le |\lambda| \int_a^b |K(x,s)f(s)|ds \le$$

$$\le |\lambda| M(b-a) \max_{x\in[a;b]}|f_1(x) - f_2(x)| = |\lambda| M(b-a)\rho(f_1, f_2),$$

при $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$ відображення A є стискуючим, тобто, згідно принципу стискуючих відображень, має єдину нерухому точку, яка є коренем рівняння (3.1). Тобто за умови $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$ рівняння Фредгольма має єдиний неперервний розв'язок, який є границею послідовності

$$f_n(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)f_{n-1}(s)ds + \varphi(x),$$

де в якості $f_0(x)$ можна вибрати довільну неперервну функцію.

2.3 Питання для самоконтролю

- Дайте означення стискуючого відображення.
- Сформулюйте достатню умову стискання для числових функцій.
- Сформулюйте та доведіть принцип стискуючих відображень.
- Поясніть, як принцип стискуючих відображень можна застосувати до знаходження границь числових послідовностей та для розв'язання функціональних рівнянь.

Задачі для самостійного розв'язання:

Задача 2.1. Перевірити, що відображення $f(x) = \frac{x^2+2}{2x}$ є стискуючим на відрізку $[1; 2]$.

Задача 2.2. Відображення f переводить кожну точку x півпрямої $(0, \infty)$ в точку $x + \frac{1}{x}$. Чи є воно стискуючим? Чи має нерухому точку?

Задача 2.3. Нехай $f \in C[a; b]$. Показати, що рівняння $x + \frac{1}{2}\sin x + f(t) = 0$ має в просторі $C[a; b]$ єдиний корінь.

Задача 2.4. Починаючи з якого наближення x_n точність наближення кореня рівняння $3x - \cos x + \sin x + arctg\, x = 0$ не перебільшує 0,01?

Задача 2.5. Застосовуючи принцип стискуючих відображень, знайти в просторі $C[0; 1]$ розв'язок інтегрального рівняння $x(t) = \frac{1}{2}\int_a^b e^{t-s}x(s)ds + 1$.

3 МІРА ЛЕБЕГА У СКІНЧЕННОВИМІРНОМУ ПРОСТОРІ

Поняття міри множини є природним узагальненням поняття довжини відрізка, площі плоскої фігури, об'єму просторового тіла, приросту неспадної функції тощо. Це поняття виникло в теорії функцій дійсної змінної, а потім перейшло у різноманітні розділи математики. Спочатку ми познайомимося з

теорією міри плоских та лінійних множин, але перед тим наведемо деякі означення, які стосуються сукупностей множин.

3.1. Системи множин

Системою множин називається будь-яка множина, елементи якої самі є довільними множинами. Якщо не зазначено протилежне, ми будемо розглядати системи таких множин, кожна з яких є підмножиною деякої фіксованої множини X.

🗁 **Означення 3.1.1.** Непорожня система множин $\mathfrak{R}$ називається *кільцем*, якщо з того, що $A, B \in \mathfrak{R}$ випливає, що $A\Delta B \in \mathfrak{R}$ та $A \cap B \in \mathfrak{R}$.

Оскільки $A \cup B = (A\Delta B)\Delta(A \cap B)$ та $A\backslash B = A\Delta(A \cap B)$, тоді з того, що $A, B \in \mathfrak{R}$, випливає також належність до $\mathfrak{R}$ множин $A \cup B$ та $A\backslash B$. Отже, кільце множин є системою множин, замкненою відносно операцій об'єднання, перетину, різниці та симетричної різниці. Очевидно, що кільце замкнене і по відношенню до утворення будь-яких скінченних об'єднань та перетинів.

Будь-яке кільце містить порожню множину $\emptyset$, оскільки завжди $A\backslash A = \emptyset$. Система, що складається тільки з порожньої множини, є найменшим можливим кільцем множин.

🗁 **Означення 3.1.2.** Множина E називається *одиницею* системи множин $\mathfrak{S}$, якщо вона належить $\mathfrak{S}$ і якщо для будь-якого $A \in \mathfrak{S}$ $A \cap E = A$.

Таким чином, одиниця системи множин $\mathfrak{S}$ є фактично максимальною множиною цієї системи, що містить всі інші множини, що входять до $\mathfrak{S}$.

🗁 **Означення 3.1.3.** Кільце множин з одиницею називається *алгеброю* множин.

Прикладом алгебри є система всіх підмножин деякої множини A, яка при цьому буде одиницею алгебри.

🗁 **Означення 3.1.4.** Система множин $\mathfrak{S}$ називається *півкільцем*, якщо вона містить порожню множину $\emptyset$, замкнена по відношенню до утворення перетинів і з належності до $\mathfrak{S}$ множин A і $A_1 \subset A$ випливає можливість подання A у вигляді $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, де A_k – множини з $\mathfrak{S}$, які попарно не перетинаються, та перша з яких є заданою множиною A_1.

Будь-яке кільце множин $\mathfrak{R}$ є півкільцем, тому що якщо A і $A_1 \subset A$ належать $\mathfrak{R}$, тоді має місце розклад $A = A_1 \cup A_2$, де $A_2 = A\backslash A_1 \in \mathfrak{R}$.

Прикладом півкільця, яка не є кільцем множин, може бути сукупність всіх інтервалів (a, b), відрізків $[a, b]$ і півінтервалів $[a, b)$ і $(a, b]$ на числовій прямій. Зрозуміло, що властивості півкільця для цієї системи виконуються, але навіть об'єднання двох інтервалів не мусить бути інтервалом, відрізком чи півінтервалом.

Відомо [3], що для кожної непорожньої системи множин $\mathfrak{S}$ існує єдине кільце, що містить $\mathfrak{S}$ і що міститься в будь-якому кільці $\mathfrak{R}$, яке містить $\mathfrak{S}$. Таке кільце називається *мінімальним кільцем над* $\mathfrak{S}$, або *кільцем, породженим* $\mathfrak{S}$, і позначається $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$. Для довільної системи $\mathfrak{S}$ побудувати кільце $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$ по $\mathfrak{S}$ досить складно. Але коли $\mathfrak{S}$ є півкільцем, породжене ним кільце описується наступним твердженням.

Твердження 3.1.5. Якщо $\mathfrak{S}$ – півкільце, тоді $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$ збігається з системою множин A, що припускають подання у вигляді $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, де $A_k \in \mathfrak{S}$.

Тобто кільце, породжене півкільцем, утворюється усілякими скінченними об'єднаннями множин з півкільця.

Інколи доводиться розглядати об'єднання і перетини не лише скінченної, а й зліченної кількості множин.

🗁 **Означення 3.1.6.** Кільце множин називається *σ-кільцем*, якщо воно разом з кожною послідовністю множин $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ містить їх об'єднання $S = \bigcup_n A_n$.

🗁 **Означення 3.1.7.** *σ –алгеброю* називається σ-кільце з одиницею.

Найпростішим прикладом σ-алгебри є сукупність всіх підмножин деякої множини A.

В аналізі важливу роль відіграють так звані борелеві множини.

🗁 **Означення 3.1.8.** Множина називається *борелевою*, якщо її можна отримати із відкритих або замкнених множин за допомогою не більш, ніж зліченної кількості операцій об'єднання, перетину та різниці.

Так, борелеві множини на числовій прямій – це множини, що належать мінімальній σ-алгебрі над сукупністю всіх сегментів $[a, b]$.

3.2. Міра плоских множин

Розглянемо на площині систему прямокутників.

🗁 **Означення 3.2.1.** *Прямокутником* будемо називати множину на площині, яка є декартовим добутком однієї з множин $a \le x \le b$, $a \le x < b$, $a < x \le b$, $a < x < b$ та однієї з множин $c \le y \le d$, $c \le y < d$, $c < y \le d$, $c < y < d$, де a, b, c та d – довільні дійсні числа.

Наприклад, множина $P = [a, b] \times [c, d]$ – це звичайний замкнений прямокутник, сторони якого паралельні осям координат, якщо $a < b$ та $c < d$; $(a, b) \times (c, d)$ – відкритий прямокутник. Прямокутником буде відрізок $[a, a] \times [c, d]$, точка $[a, a] \times [c, c]$ та порожня множина (якщо $a > b$ або $c > d$).

Клас всіх прямокутників на площині позначимо $\mathfrak{S}$. Зрозуміло, що цей клас є півкільцем. Для кожного із прямокутників визначимо його *міру* $m(P) = (b - a)(d - c)$.

Таким чином, кожному прямокутнику P поставлено у відповідність число $m(P)$ (його міра), при цьому виконуються наступні умови:

1) міра $m(P)$ приймає дійсні невід'ємні значення;
2) міра $m(P)$ *адитивна*, тобто якщо $P = \coprod_{k=1}^{n} P_k$, де $P_k \in \mathfrak{S}$, тоді

$$m(P) = \sum_{k=1}^{n} m(P_k).$$

Тут символ $\coprod_{k=1}^{n} P_k$ означає об'єднання прямокутників, що попарно не перетинаються, тобто що $P_i \cap P_k = \emptyset$ при $i \ne k$.

Зрозуміло, що міра звичайного прямокутника (з межею чи ні) – це його площа, міра відрізка, точки та порожньої множини на площині дорівнює нулю.

Наша задача – розповсюдити, із збереганням властивостей 1) та 2), міру $m(P)$, визначену для прямокутників, на більш широкий клас множин.

🗁 **Означення 3.2.2.** Назвемо плоску множину *елементарною*, якщо її можна представити хоча б в один спосіб у вигляді об'єднання скінченної кількості прямокутників, що попарно не перетинаються.

Твердження 3.2.3. Об'єднання, перетин, різниця та симетрична різниця двох елементарних множин також являються елементарними множинами.

Доведення. Зрозуміло, що перетин двох прямокутників є прямокутником. Значить, якщо $A = \coprod_k P_k$, $B = \coprod_i Q_i$ – дві елементарні множини, тоді їх перетин $A \cap B = \coprod_{k,i}(P_k \cap Q_i)$ – також елементарна множина.

Різниця двох прямокутників – це елементарна множина. Отже, віднімаючи з прямокутника деяку елементарну множину, ми знову отримуємо елементарну множину (як перетин елементарних).

Нехай тепер множини A та B – елементарні. Знайдеться, очевидно, прямокутник P, що містить кожну із них. Тоді множина $A \cup B = P\backslash[(P\backslash A) \cap (P\backslash B)]$ в силу вище сказаного буде елементарною. Звідси та з рівностей $A\backslash B = A \cap (P\backslash B)$, $A \,\Delta\, B = (A \cup B)\backslash(A \cap B)$ випливає, що різниця та симетрична різниця елементарних множин є елементарними множинами. ■

Отже, система елементарних множин є кільцем. Більше того, вона є мінімальним кільцем, породженим півкільцем прямокутників.

Визначимо *міру* $m'(A)$ *елементарних множин* наступним чином: якщо $A = \coprod_{k=1}^{n} P_k$, де P_k – прямокутники, тоді

$$m'(A) = \sum_{k=1}^{n} m(P_k).$$

Покажемо, що $m'(A)$ не залежить від способу розкладу A в суму скінченного числа прямокутників. Нехай $A = \coprod_k P_k = \coprod_i Q_i$, де P_k та Q_i – прямокутники. Оскільки перетин $P_k \cap Q_k$ двох прямокутників є прямокутником, то, в силу адитивності міри для прямокутників,

$$\sum_k m(P_k) = \sum_{k,i} m(P_k \cap Q_i) = \sum_I m(Q_i).$$

Зокрема, для прямокутників міра m' збігається з даною мірою m . Зрозуміло, що визначена таким чином міра елементарних множин невід'ємна та адитивна.

Відмітимо наступну важливу властивість міри елементарних множин.

Твердження 3.2.4. Якщо A – елементарна множина та $\{A_n\}$ – скінченна або зліченна система елементарних множин така, що $A \subset \bigcup_n A_n$, тоді

$$m'(A) \le \sum_n m'(A_n). \qquad (3.1)$$

Доведення. Для будь-якого $\varepsilon > 0$ та для даної множини A можна, очевидно, знайти таку замкнену елементарну множину $\bar{A}$, яка міститься в A та задовольняє умову $m'(\bar{A}) \ge m'(A) - \varepsilon/2$. Для цього достатньо кожний із k прямокутників P_i, які утворюють A, замінити замкненим прямокутником, що лежить в ньому та має площу, більшу, ніж $m(P_i) - \varepsilon/2k$.

Далі, для кожного A_n можна знайти відкриту елементарну множину $\widetilde{A_n}$, яка містить A_n та задовольняє умову $m'\left(\tilde{A}_n\right) \le m'(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. Очевидно, що

$\bar{A} \subset \bigcup_n \tilde{A}_n$. З системи $\{\tilde{A}_n\}$ можна (за лемою Гейне – Бореля) вибрати скінченну систему $\tilde{A}_{n_1}, \ldots\ldots, \tilde{A}_{n_S}$, що покриває $\bar{A}$. При цьому, очевидно,

$$m'(\bar{A}) \leq \sum_{i=1}^{s} m'(\tilde{A}_{n_i})$$

(інакше $\bar{A}$ виявилося би покритим скінченною кількістю прямокутників, сумарної площі меншої, ніж $m'(\bar{A})$, що неможливо). Тому

$$m'(A) \leq m'(\bar{A}) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{i=1}^{s} m'\left(\tilde{A}_{n_i}\right) + \frac{\varepsilon}{2} \leq$$

$$\leq \sum_{n} m'\left(\tilde{A}_n\right) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{n} m'(A_n) + \sum_{n} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} + \frac{\varepsilon}{2} = \sum_{n} m'(A_n) + \varepsilon,$$

звідки в силу довільності $\varepsilon > 0$ випливає (3.1). ■

Властивість міри m', встановлена твердженням 3.2.4. (міра множини не перевищує суми мір скінченної або зліченної сукупності покриваючих її множин), називається *півадитивністю*. З неї випливає властивість так званої *зліченної адитивності*, або σ *−адитивності*.

Нехай елементарну множину A подано у вигляді суми зліченної сукупності елементарних множин A_n $(n = 1, 2, \ldots)$, що попарно не перетинаються:

$$A = \coprod_{n=1}^{\infty} A_n.$$

тоді

$$m'(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m'(A_n).$$

Дійсно, в силу адитивності, при будь-якому N маємо:

$$m'(A) \geq m'\left(\coprod_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{n=1}^{N} m'(A_n).$$

Переходячи до границі при $N \to \infty$, маємо

$$m'(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} m'(A_n).$$

В силу твердження 3.2.4, має місце і протилежна нерівність. Таким чином, σ −адитивність міри m' доведено.

Елементарні множини не вичерпують всі множини, які зустрічаються в геометрії та в класичному аналізі. Тому природно намагатися поширити поняття міри, із збереженням її основних властивостей, на більш широкий клас множин, ніж скінченне об'єднання прямокутників зі сторонами, паралельними осям координат.

Нам доведеться розглядати не тільки скінченні, але і нескінченні об'єднання прямокутників. Для того, щоб при цьому не зіткнутися з множиною

«нескінченної міри», обмежимося спочатку множинами, що повністю належать квадрату $E = \{0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1\}$. На сукупності всіх таких множин визначимо функцію $\mu^*(A)$ наступним чином.

🗁 **Означення 3.2.5.** *Зовнішньою мірою* множини A називається число

$$\mu^*(A) = \inf_{A \subset \bigcup P_k} \sum_k m(P_k),$$

де нижня межа береться за всіма можливими покриттями множини A скінченними або зліченними системами прямокутників.

Якщо A – елементарна множина, для неї зовнішня множина збігається з вище означеною, тобто $\mu^*(A) = m'(A)$. Дійсно, нехай $P_1, P_2, \dots, P_n$ – прямокутники, які утворюють A. Тоді $m'(A) = \sum_{i=1}^{n} m(P_n)$. Оскільки прямокутники P_i покривають A, тоді

$$\mu^*(A) \le \sum_{i=1}^{n} m(P_i) = m'(A).$$

Але якщо $\{Q_j\}$ – довільна скінченна або зліченна система прямокутників, що покриває A, то в силу теореми 4.2.4.,

$$m'(A) \le \sum_j m\,(Q_j),$$

тому $\mu^*(A) = m'(A)$.

Твердження 3.2.6. Якщо $A \subset \bigcup_n A_n$, де A_n – скінченна або зліченна система множин, тоді

$$\mu^*(A) \le \sum_n \mu^*(A_n).$$

Зокрема, якщо $A \subset B$, тоді $\mu^*(A) \le \mu^*(B)$. Ця властивість носить назву *монотонності зовнішньої міри.*

Доведення. За означенням зовнішньої міри, для довільного $\varepsilon > 0$ та для кожного A_n знайдеться така система прямокутників $\{P_{nk}\}$, скінченна або зліченна, така що $A_n \subset \bigcup_k P_{nk}$ та $\sum_k m(P_{nk}) \le \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$.

Тоді $A \subset \bigcup_n \bigcup_k P_{nk}$ та $\mu^*(A) \le \sum_n \sum_k m(P_{nk}) \le \sum_n \mu^*(A_n) + \varepsilon$. Оскільки ε – довільне, звідси випливає твердження теореми. ■

🗁 **Означення 3.2.7.** Множина A називається *вимірною за Лебегом*, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться така елементарна множина B, що

$$\mu^*(A \Delta B) < \varepsilon.$$

Функція μ^*, яка розглядається тільки на вимірних множинах називається *мірою Лебега*. Будемо позначати її через μ.

Вимірність множини означає, що її можна «як завгодно точно наблизити» елементарними множинами.

Отже, ми визначили деякий клас $\mathfrak{M}_E$ множин, які називаються вимірними, і функцію μ, міру Лебега, на цьому класі.

3.3. Властивості вимірних множин та міри Лебега

Познайомимося з основними властивостями вимірних множин та властивостями міри Лебега.

Твердження 3.3.1. Доповнення вимірної множини є вимірною множиною.

Доведення. Це факт випливає з рівності $(E\backslash A)\Delta(E\backslash B) = A\Delta B$, яка перевіряється безпосередньо. ■

✍ **Вправа 3.1.** Самостійно перевірте цю рівність множин.

Твердження 3.3.2. Сума і перетин скінченної кількості вимірних множин є вимірною множиною.

Доведення. Достатньо, очевидно, провести доведення для двох множин. Нехай A_1 і A_2 – вимірні множини. Це означає, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдуться такі елементарні множини B_1 і B_2, що

$$\mu^*(A_1\Delta B_1) < \varepsilon/2, \mu^*(A_2\Delta B_2) < \varepsilon/2.$$

Оскільки $(A_1 \cup A_2)\Delta\,(B_1 \cup B_2) \subset (A_1\,\Delta\,B_1) \cup\,(A_2\,\Delta\,B_2)$, тоді

$$\mu^*[(A_1 \cup A_2)\Delta\,(B_1 \cup B_2)] \le \mu^*(A_1\,\Delta\,B_1) + \mu^*\,(A_2\,\Delta\,B_2) < \varepsilon.$$

Але $B_1 \cup B_2$ – елементарна множина, тому множина $A_1 \cup A_2$ вимірна.

Вимірність перетину двох вимірних множин випливає з теореми 3.3.1 і відношення $A_1 \cap A_2 = E[(E\backslash A_1) \cup (E\backslash A_2)]$. ■

Наслідок 3.3.3. Різниця і симетрична різниця двох вимірних множин вимірні.

Доведення. Результат випливає з тверджень 4.3.1. і 4.3.2. і рівності

$$A_1\backslash A_2 = A_1 \cap (E\backslash A_2),\;\; A_1\Delta\,A_2 = (A_1\backslash A_2) \cup (A_2\backslash A_1).$$■

Твердження 3.3.4. (адитивність міри). Якщо $A_1, \dots, A_n$ – вимірні множини, що попарно не перетинаються, тоді

$$\mu\left(\coprod_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu\,(A_k).$$

Для доведення цієї теореми нам знадобиться наступна лема.

Лема 3.3.5. Для будь-яких двох множин A і B $|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \le \mu^*(A\Delta B)$.

Доведення леми. Оскільки $A \subset B \cup (A\Delta B)$, тоді в силу твердження 3.2.6.,

$$\mu^*(A) \le \mu^*(B) + \mu^*(A\Delta B).$$

Звідси випливає твердження леми у випадку $\mu^*(A) \ge \mu^*(B)$. Якщо ж $\mu^*(A) \le \mu^*(B)$, тоді твердження леми випливає з нерівності $\mu^*(B) \le \mu^*(A) + \mu^*(A\Delta B)$, яка встановлюється аналогічно. ■

Доведення твердження 3.3.4. Як і в твердженні 3.3.2., достатньо розглянути випадок двох множин. Виберемо довільне $\varepsilon > 0$ і такі елементарні множини B_1 і B_2, що

$$\mu^*(A_1\Delta B_1) < \varepsilon, \mu^*(A_2\Delta B_2) < \varepsilon. \qquad (3.2)$$

Покладемо $A = A_1 \cup A_2$ і $B = B_1 \cup B_2$. Множина A вимірна в силу твердження 3.3.2. Оскільки множини A_1 і A_2 не перетинаються, тоді $B_1 \cap B_2 \subset (A_1\Delta B_1) \cup (A_2\Delta B_2)$ і, відповідно, $m'(B_1 \cap B_2) \le 2\varepsilon$.

В силу леми 4.3.5. з нерівностей (3.2) випливає, що

$$|m'(B_1) - \mu^*(A_1)|, |m'(B_2) - \mu^*(A_2)| < \varepsilon.$$

Оскільки на сукупності елементарних множин міра адитивна, отримуємо

$$m'(B) = m'(B_1) + m'(B_2) - m'(B_1 \cap B_2) \ge \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - 4\varepsilon.$$

Зауважимо також, що $A\Delta B \subset (A_1 \Delta\, B_1) \cup (A_2 \Delta\, B_2)$ та отримаємо остаточну оцінку $\mu^*(A) \geq m'(B) - \mu^*(A\Delta B) \geq m'(B) - 2\varepsilon \geq \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - 6\varepsilon$.

Оскільки $\varepsilon > 0$ може бути вибрано як завгодно малим, тоді $\mu^*(A) \geq \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$.

Оскільки протилежна нерівність $\mu^*(A) \leq \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$ виконується завжди (в силу твердження 4.2.6.), остаточно отримуємо $\mu^*(A) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$. Оскільки A_1 , A_2 і A вимірні, тоді μ^* можна замінити на μ . ■

З цієї теореми, зокрема, випливає, що для будь-якої вимірної множини A $\mu(E\backslash A) = 1 - \mu(A)$.

Твердження 3.3.6. Сума і перетин зліченної кількості вимірних множин є вимірними множинами.

Доведення. Нехай $A_1, A_2 \ldots, A_n, \ldots$ – злічена система вимірних множин і $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Покладемо $A'_n = A_n \backslash \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$. Зрозуміло, що $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n$ причому множини A'_n попарно не перетинаються. В силу твердження 3.3.2 і наслідку 3.3.3., всі множини A'_n вимірні. В силу твердження 3.3.4 і означення зовнішньої міри, при будь-якому скінченному n

$$\sum_{k=1}^{n} \mu\,(A'_k) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A'_k\right) \leq \mu^*(A),$$

тому ряд $\sum_{k=1}^{n} \mu\,(A'_n)$ збігається і, відповідно, для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке N, що

$$\sum_{n>N} \mu(A'_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Оскільки множина $C = \bigcup_{n=1}^{N} A'_n$ вимірна (як сума скінченної кількості вимірних множин), тоді для неї знайдеться така елементарна множина B, що $\mu^*(C\Delta B) < \varepsilon/2$. Оскільки

$$A\Delta B \subset\ (C\Delta B) \cup \left(\bigcup_{n>N} A'_n\right),$$

тоді $\mu^*(A\Delta B) < \varepsilon$, тобто A – вимірна.

Оскільки доповнення вимірних множин вимірні, тоді твердження теореми стосовно перетину випливає з рівності

$$\bigcap_n A_n = E \backslash \bigcup_n (E\backslash A_n). \blacksquare$$

Твердження 3.3.6. підсилює твердження 3.3.2. і означає, що система вимірних множин утворює σ – алгебру. Наступне твердження є аналогічним підсиленням твердження 3.3.4.

Твердження 3.3.7. Якщо $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ – послідовність вимірних множин, що попарно не перетинаються і $A = \coprod_n A_n$, тоді

$$\mu(A) = \sum_n \mu\,(A_n).$$

Доведення. В силу твердження 3.3.4., при будь-якому N

$$\mu\left(\coprod_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n) < \mu(A).$$

Переходячи до границі при $N \to \infty$, отримуємо

$$\mu(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) . \tag{3.3}$$

З іншого боку, згідно твердження 3.2.6.,

$$\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) . \tag{3.4}$$

З (3.3) і (3.4) випливає твердження теореми. ■

Встановлена в твердженні 3.3.7. властивість міри називається її *зліченною адитивністю*, або σ – *адитивністю*. З σ –адитивності випливає наступна властивість міри, названа її *неперервністю*.

Твердження 3.3.8. (неперервність міри). Якщо $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$ – послідовність вкладених одна в одну вимірних множин і $A = \bigcap_n A_n$, тоді

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Доведення. Достатньо розглянути випадок $A = \emptyset$; загальний випадок зводиться до цього заміною A_n на $A_n \backslash A$ (якщо $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$, тоді $A_1 \backslash A \supset A_2 \backslash A \supset \cdots \supset A_n \backslash A \supset \cdots$ та $\bigcap_n A_n \backslash A = \emptyset$).

Запишемо кожну множину у вигляді об'єднань множин, які не перетинаються:

$$A_1 = (A_1 \backslash A_2) \cup (A_2 \backslash A_3) \cup (A_3 \backslash A_4) \cup \ldots,$$
$$A_n = (A_n \backslash A_{n+1}) \cup (A_{n+1} \backslash A_{n+2}) \cup (A_{n+2} \backslash A_{n+3}) \cup \ldots.$$

Тоді, в силу σ–адитивності μ,

$$\mu(A_1) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu\,(A_k \backslash A_{k+1}) \tag{3.5}$$

$$\mu(A_n) = \sum_{k=n}^{\infty} \mu\,(A_k \backslash A_{k+1}) \tag{3.6}$$

Оскільки ряд (3.5) збігається, то його залишок (3.6) прямує до 0 при $n \to \infty$. Таким чином, $\mu(A_n) \to 0$ при $n \to \infty$, що й потрібно було довести. ■

Наслідок 3.3.9. Якщо $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$ – зростаюча послідовність вимірних множин і

$$A = \bigcup_n A_n,$$

тоді

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Доведення. Оскільки $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$, для вимірних доповнень цих множин буде виконуватися протилежне включення: $CA_1 \supset CA_2 \supset \cdots \supset CA_n \supset \cdots$. Тоді, за твердженням 4.3.8., $\mu(\bigcap_n CA_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(CA_n)$. З формул двоїстості випливає, що $\bigcap_n CA_n = C(\bigcup_n A_n)$. Але $\mu(C(\bigcup_n A_n)) = 1 - \mu(\bigcup_n A_n)$, $\mu(CA_n) = 1 - \mu(A_n)$, звідки й випливає, що $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$. ■

☝ **Зауваження 3.3.10.** Будь-яка множина A, зовнішня міра якої рівна 0, вимірна. В означенні вимірності достатньо вибрати $B = \emptyset$, тоді

$$\mu^*(A \Delta B) = \mu^*(A \Delta \emptyset) = \mu^*(A) = 0 < \varepsilon.$$

Отже, ми розповсюдили міру з елементарних множин на більш широкий клас $\mathfrak{M}_E$, замкнений відносно операцій знаходження зліченних об'єднань та

перетинів, тобто представляє собою σ–алгебру з одиницею E. Побудована міра σ–адитивна на цьому класі. Встановлені вище теореми дозволяють описати сукупність вимірних за Лебегом множин.

Будь-яку відкриту множину, яка належить E, можна подати у вигляді об'єднання скінченної або зліченної кількості відкритих прямокутників, тобто вимірних множин, і в силу твердження 3.3.6., всі відкриті множини вимірні. Замкнені множини є доповненнями відкритих, а значить, вони також вимірні. Згідно твердження 3.3.6., вимірними мають бути і всі ті множини, які можуть бути отримані з відкритих і замкнутих за допомогою скінченної або зліченної кількості операцій об'єднання і перетину, тобто будь-яка борелева множина є вимірною.

□ **Приклад 3.3.11.** Покажемо, що множина $A = \{x \in \mathbb{R}: e^x \in \mathbb{Q}\} \times [0;2]$ є борелевою та знайдемо її міру. Нехай $\mathbb{Q}^+ = \coprod_{n=1}^{\infty}\{r_n\}$, тоді $\{x \in \mathbb{R}: e^x \in \mathbb{Q}\} = \coprod_{n=1}^{\infty}\{\ln r_n\}$ та $A = (\coprod_{n=1}^{\infty}\{\ln r_n\}) \times [0;2] = \coprod_{n=1}^{\infty}(\{\ln r_n\} \times [0;2])$, тобто множина A подається у вигляді зліченного об'єднання відрізків, які є замкненими множинами на площині. Отже, A – борелева множина. Оскільки $\mu(\{\ln r_n\} \times [0;2]) = 0$, $\mu(A) = 0$.

Вище ми розглядали лише ті множини, які містяться в одиничному квадраті $E = \{0 \le x, y \le 1\}$. Позбавимося тепер цього обмеження. Подамо всю площину як суму напіввідкритих квадратів $E_{nm} = \{n < x \le n+1, m < y \le m+1\}$ $(n, m$ – цілі) та будемо говорити, що плоска множина A *вимірна*, якщо її перетин $A_{nm} = A \cap E_{nm}$ з кожним з цих квадратів вимірний. При цьому ми покладемо, за означенням,

$$\mu(A) = \sum_{n,m} \mu(A_{nm}).$$

Ряд, який стоїть праворуч, або збігається до деякого числа, або розбігається до $+\infty$. Тому міра може приймати й нескінченні значення. Всі властивості міри і вимірних множин, встановлені вище, очевидним чином переносяться на цей випадок. Потрібно відмітити лише те, що сума зліченної кількості вимірних множин скінченної міри може мати нескінченну міру. Клас вимірних множин на всій площині позначимо $\mathfrak{A}$.

Ми докладно розглянули побудову міри Лебега для плоских множин. Аналогічно може бути побудована лебегова міра на прямій, в трьохвимірному просторі або, взагалі, в скінченновимірному просторі. В кожному з цих випадків міра будується за одним зразком: виходячи з міри, визначеної заздалегідь для деякої системи найпростіших множин (прямокутників у випадку площини, інтервалів (a, b), відрізків $[a, b]$ та півінтервалів $(a, b], [a, b)$ у випадку прямої тощо), ми визначаємо міру спочатку для скінченних об'єднань таких множин, а потім розповсюджуємо її на більш широкий клас множин – на множини, вимірні за Лебегом. При цьому означення вимірності переноситься на множини в просторі будь-якої вимірності.

Уводячи поняття міри Лебега, ми виходили із звичайного означення площини. Аналогічна побудова для одновимірного випадку спирається на поняття довжини інтервалу (відрізка, півінтервалу).

3.4 Питання для самоконтролю

- Дайте означення та наведіть приклади різних систем множин (півкільце, кільце, алгебра, σ-алгебра).
- Дайте означення вимірної за Лебегом множини.
- Наведіть приклад необмеженої множини нульової міри.
- Сформулюйте основні властивості вимірних множин.
- Яка міра називається σ-адитивною?
- Які множини називаються борелевими?
- Що означає, що сукупність вимірних за Лебегом множин утворює σ-алгебру?

Задачі для самостійного розв'язання:

Задача 3.1. Довести, що множина $A = \bigcup_{n=1}^{\infty}(-10, arctg\ n) \setminus \mathbb{Q}$ є борелевою та знайти її міру.

Задача 3.2. Довести, що множина $A = (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) \times (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$ є борелевою та знайти її міру.

Задача 3.3. Навести приклад півкільця підмножин множини $A = \{1,2,3\}$, яке не є кільцем.

4 ВИМІРНІ ФУНКЦІЇ. ІНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА ТА ПРОСТОРИ ЛЕБЕГА

4.1 Вимірні функції

Ми будемо розглядати числові функції однієї змінної, але усі поняття легко переносяться на випадок функції m змінних. Домовимося, що функція f задана на вимірній за Лебегом множині A та будемо скорочено позначати множину $\{x \in A: f(x) < c\}$ символом $\{f < c\}$. Аналогічно уводяться символи $\{f \geq c\}, \{f = c\}, \{f \leq c\}, \{f > c\}$. μ – міра Лебега на прямій.

🗁 **Означення 4.1.1.** Числова функція $f(x)$, яка задана на вимірній множині A, називається *вимірною,* якщо $\forall c \in \mathbb{R}$ вимірною буде множина $\{x: f(x) < c\}$.

Знак $<$ в цьому означенні можна замінити на інший, а саме, мають місце наступні результати.

Твердження 4.1.2. *Якщо f – вимірна функція, яка задана на множині A,* то при будь-якому дійсному c вимірними будуть множини $\{f \leq c\}, \{f \geq c\}$, $\{f = c\}, \{f > c\}$.

Доведення. Легко перевірити, що $\{f \leq c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{f < c + \frac{1}{n}\right\}$. Дійсно, якщо $x \in \{f \leq c\}$, тоді $f(x) \leq c < c + \frac{1}{n}$ для всіх натуральних n, тобто $\forall\, n\ x \in \left\{f < c + \frac{1}{n}\right\}$ або $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{f < c + \frac{1}{n}\right\}$ і $\{f \leq c\} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{f < c + \frac{1}{n}\right\}$. Нехай тепер $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{f < c + \frac{1}{n}\right\}$, тобто $\forall\, n \quad x \in \left\{f < c + \frac{1}{n}\right\}$ або $\forall\, n \quad f(x) < c + \frac{1}{n}$. Перейдемо в цій нерівності до границі за n та отримаємо $f(x) \leq c$, тобто $x \in \{f \leq c\}$ та $\{f \leq c\} \supset \bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{f < c + \frac{1}{n}\right\}$. Таким чином, рівність $\{f \leq c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{f < c + \frac{1}{n}\right\}$ має місце. З неї випливає вимірність множини $\{f \leq c\}$ як зліченного перетину вимірних множин.

Вимірність інших множин випливає з відношень:

$\{f = c\} = \{f \le c\} \backslash \{f < c\}, \{f \ge c\} = A \backslash \{f < c\}, \{f > c\} = A \backslash \{f \le c\}$. ■

Твердження 4.1.3. Якщо хоча б одна з множин $\{f \le c\}, \{f \ge c\}, \{f > c\}$ виявиться вимірною при довільному дійсному c, тоді функція f вимірна на множині A (яка також є вимірною).

Доведення. Дійсно, тотожність $\{f < c\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{f \le c - \frac{1}{n}\right\}$ (✍ **Вправа 4.1.** Перевірте її самостійно) показує, що f вимірна, якщо вимірні всі множини $\left\{f \le c - \frac{1}{n}\right\}$. Оскільки $\{f < c\} = A \backslash \{f \ge c\}$, з вимірності множини $\{f \ge c\}$ випливає вимірність функції f. З рівності $\{f < c\} = A \backslash \{f \ge c\} = A \backslash \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{f > c - \frac{1}{n}\right\}$ (✍ **Вправа 4.2.** Перевірте її самостійно – вона доводиться аналогічно доведенню рівності в твердженні 4.1.2.) випливає, що якщо множини $\left\{f > c - \frac{1}{n}\right\}$ вимірні, вимірною буде і функція f. ■

Отже, в означенні 4.1.1. вимірної функції можна замінити множину $\{f < c\}$ будь-якою з множин $\{f \le c\}, \{f \ge c\}, \{f > c\}$.

Розглянемо докладно властивості вимірних функцій.

Теорема 4.1.4. Довільна функція, задана на множині міри нуль, вимірна.

Це твердження випливає з умови повноти міри Лебега.

Теорема 4.1.5. Вимірна функція f, задана на множині A, буде вимірною на будь-якій вимірній підмножині $B \subset A$.

Доведення. Це твердження випливає з рівності $\{x \in B : f(x) < c\} = B \cap \{f < c\}$ та вимірності перетину двох вимірних множин. ■

Терема 4.1.6. Нехай f задана на вимірній множині A, яка подається у вигляді об'єднання скінченної або зліченної сукупності вимірних множин A_κ: $A = \bigcup_\kappa A_\kappa$. Якщо f вимірна на кожній із множин A_κ, тоді вона вимірна й на A.

Доведення. Дійсно, $\{f < c\} = \bigcup_\kappa \{x \in A_\kappa : f(x) < c\}$. ■

Теорема 4.1.7. Якщо для всіх точок вимірної множини A $f(x) = k = const$, тоді функція f вимірна.

Доведення. Вимірність сталої функції випливає із очевидної рівності

$$\{f < c\} = \begin{cases} A, & \text{якщо } k < c \\ \emptyset, & \text{якщо } k \ge c \end{cases}.$$ ■

Теорема 4.1.8. Неперервна на множині A функція $f(x)$ вимірна.

Доведення. Перше за все встановимо, що для довільного дійсного c множина $\{f \ge c\}$ замкнена. Дійсно, якщо x_0 є граничною точкою цієї множини та $x_n \to x_0$ $(x_n \in \{f \ge c\})$, тоді $f(x_n) \ge c$ та, в силу неперервності f, буде $f(x_0) \ge c$, тобто $x_0 \in \{f \ge c\}$, що й означає замкненість (а отже й вимірність) множини $\{f \ge c\}$. Але тоді множина $\{f < c\} = A \backslash \{f \ge c\}$ – вимірна, що й доводить теорему. ■

🗁 **Означення 4.1.9.** *Характеристичною функцією* множини M називається функція $\chi_M(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in M \\ 0, & \text{якщо } x \notin M \end{cases}$.

Теорема 4.1.10. Множина M і її характеристична функція $\chi_M(x)$ одночасно вимірні або ні.

Доведення. Якщо функція $\chi_M(x)$ вимірна, тоді вимірність множини M випливає із співвідношення $M = \{\chi_M > 0\}$.

Навпаки, якщо M є вимірною множиною, тоді співвідношення

$$\{\chi_M < c\} = \begin{cases} A, & \text{якщо } c > 1 \\ A \backslash M, & \text{якщо } 0 < c \le 1 \\ \emptyset, & \text{якщо } c \le 0 \end{cases}$$

встановлюють вимірність характеристичної функції. ■

З цієї теореми дуже просто отримуються приклади розривних вимірних функцій.

Теорема 4.1.11. Якщо функція f, яка задана на множині A, вимірна, а $k = const \neq 0$, тоді вимірними будуть функції 1) $f + k$, 2) kf, 3) $|f|$, 4)f^2, і якщо $f(x) \neq 0$, тоді вимірна й функція 5) $\frac{1}{f}$.

Доведення. 1) Вимірність функції $f + k$ випливає із співвідношення $\{f + k < c\} = \{f < c - k\}$.

2) Вимірність функції kf випливає зі співвідношень

$$\{kf < c\} = \begin{cases} \left\{f < \frac{c}{k}\right\}, & \text{якщо } k > 0 \\ \left\{f > \frac{c}{k}\right\}, & \text{якщо } k < 0 \end{cases}.$$

3) Функція $|f|$ вимірна тому, що

$$\{|f| < c\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{якщо } c < 0 \\ \{f < c\} \cap \{f > -c\}, & \text{якщо } c \ge 0 \end{cases}.$$

4) Аналогічно, з того, що

$$\{f^2 < c\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{якщо } c \le 0 \\ \{|f| < \sqrt{c}\}, & \text{якщо } c > 0 \end{cases}.$$

випливає вимірність функції f^2.

5) При $f(x) \neq 0$ маємо

$$\left\{\frac{1}{f} < c\right\} = \begin{cases} \{f < 0\}, & \text{якщо } c = 0 \\ \{f < 0\} \cup (f > 1/c), & \text{якщо } c > 0 \\ \{f < 0\} \cap (f > 1/c), & \text{якщо } c < 0 \end{cases},$$

звідки випливає вимірність $\frac{1}{f(x)}$. ■

Лема 4.1.12. Якщо f та g – вимірні функції, тоді множина $\{f < g\}$ – вимірна.

Доведення. Занумеруємо в довільному порядку всі раціональні числа $r_1, r_2, r_3, \ldots$, тоді легко перевірити співвідношення:

$$\{f < g\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\{f < r_k\} \bigcap \{g > r_k\}\right),$$

звідки і випливає твердження леми. ■

✍ **Вправа 4.3.** Доведіть самостійно співвідношення, яке використовувалося при доведенні леми 4.1.12. Слід скористатися лемою про наближення дійсних чисел раціональними.

Теорема 4.1.13. Нехай f та g – вимірні функції. Тоді вимірна кожна з функцій 1)$f(x)-g(x)$, 2) $f(x)+g(x)$, 3)$f(x)\cdot g(x)$, і якщо $g(x)\neq 0$, тоді вимірна також функція 4) $\frac{f(x)}{g(x)}$.

Доведення. 1) З теореми 4.1.11. випливає, що функція $g(x)+c$ вимірна при довільному c. Згідно леми 4.1.12., множина $\{f<g+c\}$ – вимірна. Але тоді вимірною буде множина $\{f-g<c\}=\{f<g+c\}$, тоді функція $f(x)-g(x)$ – вимірна.

2) Вимірність суми $f(x)+g(x)$ випливає з того, що $f(x)+g(x)=f(x)-[-g(x)]$.

3) Вимірність добутку $f(x)\cdot g(x)$ випливає з тотожності

$$f(x)\cdot g(x)=1/4\{[f(x)+g(x)]^2-[f(x)-g(x)]^2\}$$

і теореми 4.1.11.

4) Вимірність частки $\frac{f(x)}{g(x)}$ є наслідком тотожності $\frac{f(x)}{g(x)}=f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}$ та вимірності добутку двох вимірних функцій. ■

Отже, ми показали, що арифметичні дії над вимірними функціями знову приводять до вимірних функцій. Тепер покажемо, що сукупність вимірних функцій замкнена по відношенню не тільки до арифметичних операцій, але і до операції граничного переходу.

Теорема 4.1.14. Границя збіжної при кожному $x\in A$ послідовності вимірних функцій вимірна.

Доведення. Нехай $f_n(x)\to f(x)$, тоді вимірність функції f буде випливати з рівності

$$\{f<c\}=\bigcup_k\bigcup_n\bigcap_{m\geq n}\left\{x\colon f_m(x)<c-\frac{1}{k}\right\}. \qquad (4.1)$$

Дійсно, якщо $f(x)<c$, тоді існує таке k, що $f(x)<c-\frac{1}{k}$; далі, при такому k можна знайти настільки велике n, що при $m\geq n$ виконується нерівність $f_m(x)<c-\frac{1}{k}$, тобто x належить правій частині співвідношення (4.1).

Навпаки, якщо $x\in\bigcup_k\bigcup_n\bigcap_{m\geq n}\left\{x\colon f_m(x)<c-\frac{1}{k}\right\}$, тоді існує таке k, що при всіх достатньо великих m $f_m(x)<c-\frac{1}{k}$, але тоді $f(x)<c$, тобто $x\in\{f<c\}$. Отже, співвідношення (4.7) доведено.

Якщо функції $f_m(x)$ вимірні, тоді множини $\left\{x\colon f_m(x)<c-\frac{1}{k}\right\}$ – вимірні. Оскільки сукупність вимірних множин утворює σ-алгебру, тоді множина $\{f<c\}$ також вимірна, що й доводить вимірність функції f. ■

При вивчені вимірних функцій часто можна знехтувати їхніми значеннями на множині міри нуль. У зв'язку з цим виникає наступне означення.

🗁 **Означення 4.1.15.** Дві функції, f та g, задані на одній і тій ж вимірній множині A, називаються *еквівалентними* (позначення: $f\sim g$), якщо

$$\mu\{x\colon f(x)\neq g(x)\}=0.$$

🗁 **Означення 4.1.16.** Говорять, що деяка властивість виконана *майже скрізь* на A, якщо вона виконана всюди на A, окрім точок, які утворюють множину міри нуль. Таким чином, дві функції називають еквівалентними, якщо вони збігаються майже скрізь (м.с.).

🗋 **Приклад 4.1.17.** Нехай $f(x)=\begin{cases}1, x\in\mathbb{Q}\\0, x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\end{cases}$. Оскільки $\mu(\mathbb{Q})=0$, $f(x)=0$ майже скрізь.

Теорема 4.1.18. Функція f, визначена на деякій вимірній множині A та еквівалентна деякій вимірній функції g, також вимірна.

Доведення. Зрозуміло, що при довільному дійсному c $\{f<c\}=(\{f<c\}\cap\{f=g\})\cup(\{f<c\}\cap\{f\neq g\})=\{g<c\}\cup(\{f<c\}\cap\{f\neq g\})$. В цьому об'єднанні перша множина $\{g<c\}$ є вимірною за рахунок вимірності функції g, а друга множина $\{f<c\}\cap\{f\neq g\}\subset\{f\neq g\}$ є вимірною, оскільки вона є підмножиною множини нульової міри. Отже, множина $\{f<c\}$ – вимірна, що означає вимірність функції f. ■

☝ **Зауваження 4.1.19.** У класичному аналізі поняття еквівалентності функції не відіграє суттєвої ролі, оскільки там переважно розглядаються неперервні функції однієї або декількох змінних, а для них еквівалентність рівносильна тотожності. Точніше, якщо дві функції, f та g, неперервні на деякому сегменті, еквівалентні (відносно міри Лебеґа), тоді вони збігаються. Дійсно, якщо $f(x_0)\neq g(x_0)$ у будь-якій точці x_0, тоді у силу неперервності f та g знайдеться окіл точки x_0, в межах якого $f(x)\neq g(x)$. Міра такого околу додатна, тому неперервні функції не можуть бути еквівалентними, якщо вони не збігаються.

4.2 Збіжність послідовностей вимірних функцій

Оскільки у багатьох випадках поведінка вимірної функції на той або іншій множині міри нуль для нас несуттєва, буде природно ввести наступне узагальнення поняття поточкової збіжності.

🗁 **Означення 4.2.1.** Послідовність $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ функцій, визначених на деякій множині A, називається *збіжною майже скрізь* до функції $f(x)$, якщо $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ для майже всіх $x\in A$ (тобто $\mu\{f_n\nrightarrow f\}=0$).

🗋 **Приклад 4.2.2.** Послідовність функції $f_n(x)=(-x)^n$, визначених на відрізку $[0;1]$, при $n\to\infty$ збігається до функції $f(x)=0$ майже скрізь (а саме, крім точки $x=1$).

Уведене поняття дає нам можливість узагальнити теорему 4.1.14.

Теорема 4.2.3. Якщо послідовність вимірних функцій $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$збігається до функції $f(x)$ майже скрізь на A, тоді f також вимірна.

Доведення. Нехай A_0 – та множина, на якій $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$. За теоремою 4.1.14., f вимірна на A_0. За умовою, $\mu(A\backslash A_0)=0$, тобто f вимірна на $A\backslash A_0$ як будь-яка функція на множині міри нуль. Отже, за теоремою 4.1.6., f вимірна на $A=A_0\cup(A\backslash A_0)$. ■

Нагадаємо відоме з математичного аналізу означення рівномірної збіжності послідовності.

🗁 **Означення 4.2.4.** Послідовність $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ функцій називається *рівномірно збіжною* на множині A до функції $f(x)$, якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\sup_{x\in A}|f_n(x)-f(x)|=0$.

Зрозуміло, що з рівномірної збіжності випливає поточкова збіжність. Наведемо теорему, яка дає умови, за яких зі збіжності майже скрізь може випливати рівномірна збіжність.

Теорема 4.2.5. (Єгорова). Нехай $A-$ множина скінченної міри та послідовність вимірних функцій $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ збігається на A майже скрізь до $f(x)$. Тоді для будь-якого $\delta>0$ існує така

вимірна множина $A_\delta\subset A$, що

1) $\mu(A_\delta)>\mu(A)-\delta$;

2) на множині A_δ послідовність $f_n(x)$ збігається до $f(x)$ рівномірно.

Доведення. Згідно теореми 4.2.3., функція f – вимірна. Покладемо

$$A_n^m=\bigcap_{i\geq n}\left\{x:|\,f_i(x)-f(x)|<\frac{1}{m}\right\}.$$

Тобто при фіксованих m та n A_n^m – це множина всіх тих точок x, для яких $|\,f_i(x)-f(x)|<\frac{1}{m}$ при всіх $i\geq n$.

Нехай $A^m=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n^m$. З означення множин A_n^m зрозуміло, що при фіксованому m $A_1^m\subset A_2^m\subset\cdots\subset A_n^m\subset\cdots$. У силу того, що σ-адитивна міра неперервна, для будь-якого m та довільного $\delta>0$ знайдеться такий номер n_0, що $\mu\left(A^m\backslash A_{n_0}^m\right)<\frac{\delta}{2^m}$.

Покладемо $A_\delta=\bigcap_{m=1}^{\infty}A_{n_0}^m$ і покажемо, що таким чином побудована множина A_δ задовольняє умови теореми.

Доведемо спочатку, що на A_δ послідовність $\{f_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ збігається рівномірно до функції $f(x)$. Це випливає з того, що якщо $x\in A_\delta$, тоді для будь-якого m $|f_i(x)-f(x)|<\frac{1}{m}$ при $i\geq n_0$.

Оцінимо тепер міру множини $A\backslash A_\delta$. Для цього зауважимо, що при будь-якому m маємо $\mu(A\backslash A^m)=0$. Дійсно, якщо $x_0\in A\backslash A^m$, тоді існують як завгодно великі значення i, при яких $|f_i(x_0)-f(x_0)|\geq\frac{1}{m}$, тобто послідовність $\{f_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ у точці x_0 не збігається до $f(x)$. Оскільки за умовою $\{f_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ збігається до $f(x)$ майже скрізь, тоді $\mu(A\backslash A^m)=0$.

Звідси випливає, що

$$\mu\left(A\backslash A_{n_0}^m\right)=\mu(A\backslash A^m)+\mu\left(A^m\backslash A_{n_0}^m\right)=\mu\left(A^m\backslash A_{n_0}^m\right)<\frac{\delta}{2^m}.$$

Тому $\mu(A\backslash A_\delta)=\mu\left(A\backslash\bigcap_{m=1}^{\infty}A_{n_0}^m\right)=\mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}\left(A\backslash A_{n_0}^m\right)\right)\leq$

$$\leq\sum_{m=1}^{\infty}\mu\left(A\backslash A_{n_0}^m\right)<\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\delta}{2^m}=\delta.\blacksquare$$

🗁 **Означення 4.2.6.** Говорять, що послідовність вимірних функцій $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *збігається за мірою* на множині A до функції $f(x)$, якщо для будь-якого $c>0$ $\lim\limits_{n\to\infty}\mu\{x:|f_n(x)-f(x)|\geq c\}=0$.

Встановимо зв'язок між поняттями збіжності майже скрізь та збіжності за мірою. Знову міру множини A вважаємо скінченною.

Теорема 4.2.7. (Лебега). Якщо послідовність вимірних функцій $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ збігається майже скрізь на множині скінченної міри A до деякої функції $f(x)$, тоді вона збігається до тієї ж граничної функції $f(x)$ за мірою.

Доведення. З теореми 4.2.3. випливає, що гранична функція $f(x)$ вимірна. Нехай A_0 – та множина нульової міри, на якій $f_n(x)$ не прямує до $f(x)$. Покладемо

$A_k(c) = \{x: |f_k(x) - f(x)| \geq c\}$, $R_n(c) = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k(c)$, $M = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n(c)$.

Зрозуміло, що всі ці множини вимірні. Оскільки $R_1(c) \supset R_2(c) \supset \ldots$, тоді, виходячи з властивості неперервності міри, $\mu\big(R_n(c)\big) \to \mu(M)$ при $n \to \infty$.

Покажемо тепер, що $M \subset A_0$. Дійсно, якщо $x_0 \notin A_0$, тобто якщо $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$, тоді для даного $c > 0$ знайдеться таке n, що $|f_k(x_0) - f(x_0)| < c$, при $k \geq n$, тобто $x_0 \notin R_n(c)$ і, тим більш, $x_0 \notin M$. Але $\mu(A_0) = 0$, і тому з включення $M \subset A_0$ випливає, що $\mu(M) = 0$, та, отже, $\mu\big(R_n(\sigma)\big) \to 0$ при $n \to \infty$. Оскільки $A_n(c) \subset R_n(c)$, тоді $\mu\big(A_n(c)\big) \to 0$, що означає збіжність послідовності $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ за мірою. ■

Приклад 4.2.8. Покажемо, що із збіжності послідовності функцій за мірою, взагалі не випливає її збіжність майже скрізь. Означимо для кожного натурального k на півінтервалі $(0, 1]$ функції $f_1^{(k)}, f_2^{(k)}, \ldots, f_k^{(k)}, \ldots$ наступним чином:

$$f_i^{(k)}(x) = \begin{cases} 1, \text{при } \dfrac{i-1}{k} < x \leq \dfrac{i}{k} \\ 0, \text{при інших значеннях } x \end{cases}.$$

Пронумерувавши всі ці функції поспіль, ми отримаємо послідовність, яка збігається за мірою до нуля: $\left\{\left|f_i^{(k)}\right| \geq c\right\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{якщо } \sigma > 1 \\ \left(\frac{i-1}{k}; \frac{i}{k}\right], & \text{якщо } \sigma \leq 1 \end{cases}$,

$$\mu\left\{\left|f_i^{(k)}\right| \geq c\right\} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \sigma > 1 \\ \dfrac{1}{k}, & \text{якщо } \sigma \leq 1 \end{cases}.$$

Отже, при довільному $c > 0$ $\lim\limits_{k\to\infty} \mu\left\{x: \left|f_i^{(k)}(x)\right| \geq c\right\} = 0$, тобто послідовність збігається до нуля за мірою. І у той же час вона не збігається в жодній точці, оскільки послідовність значень функцій в будь-якій точці з $(0, 1]$ містить нескінченну кількість нулів та нескінченну кількість одиниць, тобто не є збіжною.

Але існує зв'язок між збіжністю за мірою та збіжністю майже скрізь. Він встановлюється наступною теоремою.

Теорема 4.2.9. (Ріcca). Нехай послідовність вимірних функцій $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ на множині скінченної міри A збігається за мірою до функції $f(x)$. Тоді з цієї послідовності можна вилучити підпослідовність $\{f_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$, яка збігається до $f(x)$ маже скрізь на A.

Доведення. Нехай $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \dots$– деяка послідовність додатних чисел, яка прямує до нуля: $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. Нехай додатні числа $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k, \dots$ такі, що ряд $\sum_k \eta_k$ збігається.

Побудуємо послідовність індексів $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$ наступним чином: виберемо n_1 так, щоб $\mu\{x: |f_{n_1}(x) - f(x)| \geq \varepsilon_1\} < \eta_1$ (таке n_1 обов'язково існує); далі виберемо $n_2 > n_1$ так, щоб $\mu\{x: |f_{n_2}(x) - f(x)| \geq \varepsilon_2\} < \eta_2$. Взагалі, виберемо $n_k > n_{k-1}$ так, щоб $\mu\{x: |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \varepsilon_k\} < \eta_k$.

Покажемо, що побудована послідовність збігається до $f(x)$ майже скрізь. Дійсно, нехай $R_i = \bigcup_{k=i}^{\infty}\{x: |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \varepsilon_k\}$, $D = \bigcap_{i=1}^{\infty} R_i$.

Оскільки $R_1 \supset R_2 \supset R_3 \supset \cdots \supset R_n \supset \cdots$, тоді в силу неперервності міри $\mu(R_i) \to \mu(D)$.

З іншого боку, зрозуміло, що $\mu(R_i) < \sum_{k=i}^{\infty} \eta_k$, звідки $\mu(R_i) \to 0$ при $i \to \infty$, тобто $\mu(D) = 0$. Залишається перевірити, що у всіх точках множини $A\backslash D$ має місце збіжність $f_{n_k}(x) \to f(x)$.

Нехай $x_0 \in A\backslash D$. Тоді знайдеться таке i_0 , що $x_0 \notin R_{i_0}$, це означає , що для всіх $k \geq i_0$ $x_0 \notin \{x: |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \varepsilon_k\}$, тобто $|f_{n_k}(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon_k$. Оскільки за умовою, $\varepsilon_k \to 0$, тоді $\lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(x_0) = f(x_0)$, що й треба довести. ■

Отже, якщо розглядати послідовності вимірних функцій на множинах скінченної міри, найсильнішою з розглянутих збіжностей виявляється рівномірна збіжність. З неї випливає поточкова (або збіжність майже скрізь), з якої в свою чергу випливає найслабкіша збіжність за мірою. Але при виконанні певних умов можна «піднятися» від найслабкішої збіжності за мірою до рівномірної. Спочатку з послідовності, що збігається за мірою, треба вилучити підпослідовність, збіжну майже скрізь. А потім «зменшити» множину, на якій має місце збіжність майже скрізь, щоб на отриманій підмножині отримати рівномірну збіжність.

Вище було показано (теорема 4.1.8.), що будь-яка неперервна функція є вимірною. Але відомо, що існують розривні вимірні функції. Виявляється, що між неперервними та вимірними функціями, заданими на відрізку, існує тісний зв'язок.

Теорема 4.2.10. (Лузіна). Для того, щоб функція $f(x)$, задана на відрізку $[a, b]$, була вимірною, необхідно та достатньо, щоб для будь-якого $\varepsilon > 0$ існувала така неперервна на $[a, b]$ функція $\varphi(x)$, що $\mu\{x: f(x) \neq \varphi(x)\} < \varepsilon$.

Інакше кажучи, вимірна функція може бути зроблена неперервною на відрізку $[a, b]$, якщо її змінити на множині скільки завгодно малої міри. Про функцію на відрізку, яка може бути зроблена неперервною за допомогою такої «малої деформації», говорять, що вона володіє *С-властивістю*.

4.3 Інтеграл Лебега від простих функцій.

Поняття інтеграла Рімана, відоме з курсу математичного аналізу, застосовується лише для функцій, які мають «не дуже багато» точок розриву. Конструкція інтеграла Лебега дозволяє значно розширити клас інтегровних функцій. Ми будемо докладно розглядати інтеграл від числових функцій,

заданих на вимірних множинах, але слід зауважити, що ця конструкція без змін переноситься на абстрактні функції, задані на деякій множині та вимірні відносно повної σ-адитивної міри, визначеної на σ-алгебрі множин з одиницею.

Спочатку означимо інтеграл на простих функціях.

🗁 **Означення 4.3.1.** Функція $f(x)$, визначена на деякій множині X із заданою на ній мірою, називається *простою*, якщо вона вимірна і приймає не більше, ніж зліченне число значень.

Структура простих функцій характеризується наступним твердженням.

Твердження 4.3.2. Функція $f(x)$, яка має не більше ніж зліченну сукупність різних значень $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ вимірна тоді та тільки тоді, коли всі множини $A_n = \{x: f(x) = y_n\}$ вимірні.

Доведення. Необхідність умови випливає з твердження 4.1.2. Достатність випливає з того, що множину $\{f < c\}$ в умовах теореми можна подати у вигляді об'єднання не більше ніж зліченної сукупності вимірних множин вигляду $\{f = y_n\}$, де $y_n < c$: $\{f < c\} = \bigcup_{y_n<c} A_n$, тобто при будь-якому дійсному c множина $\{f < c\}$ – вимірна. ■

Використання простих функцій у побудові інтеграла Лебега ґрунтується на наступному твердженні.

Твердження 4.3.3. Для вимірності функції $f(x)$ необхідно та достатньо, щоб вона могла бути подана у вигляді границі рівномірно збіжної послідовності простих вимірних функцій.

Доведення. Достатність зрозуміла з теореми 4.1.14. Для доведення необхідності розглянемо довільну вимірну функцію $f(x)$ і покладемо $f_n(x) = m/n$, якщо $m/n \le f(x) < (m+1)/n$ (тут $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$). Зрозуміло, що функції $f_n(x)$ прості та при $n \to \infty$ вони рівномірно збігаються до $f(x)$, оскільки $|f(x) - f_n(x)| \le 1/n$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| = 0$. ■

Нехай f – деяка проста функція, яка приймає значення $y_1, y_2, \dots, y_n \dots$; $y_i \ne y_j$ при $i \ne j$, і нехай A – деяка вимірна підмножина множини X скінченної міри. Природно визначити інтеграл від функції f по множині A рівністю

$$\int_A f(x)\, d\mu = \sum_n y_n\, \mu(A_n), \text{ де } A_n = \{x \in A, f(x) = y_n\}, \qquad (4.2)$$

якщо ряд справа збігається.

🗁 **Означення 4.3.4.** Проста функція f називається *інтегровною або сумовною* (за мірою μ) на множині A, якщо ряд (4.2) абсолютно збігається. Якщо f інтегровна, тоді сума ряду (4.2) називається *інтегралом від f по множині A*.

В цьому означенні припускається, що всі y_n різні. Можна, проте, представити значення інтеграла від простої функції у вигляді суми добутків вигляду $C_k\mu(B_k)$ і не припускаючи, що всі C_k різні. Це дозволяє зробити наступна лема.

Лема 4.3.5. Нехай $A = \coprod_k B_k$, та нехай на кожній множині B_k функція f приймає лише одне значення C_k; тоді $\int_A f(x)\, d\mu = \sum_k C_k \mu(B_k)$, причому

функція f інтегровна на A в тому і тільки в тому випадку, коли ряд абсолютно збігається.

Доведення. Легко побачити, що кожна множина $A_n = \{x \in A, f(x) = y_n\}$ є об'єднанням тих B_k, для яких $C_k = y_n$. Тому

$$\sum_n y_n\, \mu(A_n) = \sum_n y_n \sum_{C_k = y_n} \mu(B_k) = \sum_k C_k \mu(B_k).$$

Оскільки міра невід'ємна, тоді

$$\sum_n |y_n\, |\mu(A_n) = \sum_n |y_n| \sum_{C_k = y_n} \mu(B_k) = \sum_k |C_k| \mu(B_k),$$

тобто ряди $\sum_n y_n \mu(A_n)$ та $\sum_k C_k \mu(B_k)$ абсолютно збігаються або розбігаються одночасно. ■

Встановимо деякі властивості інтеграла Лебега від простих функцій:

Л1) $\int_A [f(x) + g(x)]\, d\mu = \int_A f(x)\, d\mu + \int_A g(x) d\mu,$

причому з існування інтегралів в правій частині рівності випливає існування інтеграла в лівій.

Для доведення припустимо, що f приймає значення f_i на множинах $F_i \subset A$, а g – значення g_j на множинах $G_j \subset A$, тобто

$$J_1 = \int_A f(x) d\mu = \sum_i f_i \mu(F_i), \tag{4.3}$$

$$J_2 = \int_A g(x)\, d\mu = \sum_j g_j \mu(G_j). \tag{4.4}$$

тоді в силу леми 4.3.5.,

$$J = \int_A [f(x) + g(x)] d\mu = \sum_i \sum_j (f_i + g_j) \mu(F_i \cap G_j) \tag{4.5}$$

Але $\mu(F_i) = \sum_j \mu\, F_i \cap G_j$, $\mu(G_j) = \sum_i \mu\,(F_i \cap G_j)$, тому з абсолютної збіжності рядів (4.3) та (4.4) випливає і абсолютна збіжність ряду (4.5); при цьому $J = J_1 + J_2$.

Л2) Для будь-якого сталої k $\int_A kf(x)\, dx = k \int_A f(x) dx$, причому з існування інтеграла в правій частині випливає існування інтеграла в лівій частині.

Дійсно, якщо в термінах властивості Л1 ряд (4.3) абсолютно збігається, тоді буде абсолютно збігатися ряд $\sum_i k f_i \mu(F_i) = k \sum_i f_i \mu(F_i) = k \int_A f(x) d\mu$.

Л3) Обмежена на множині A проста функція f інтегровна на A, причому якщо $|f(x)| \le M$ на A, тоді $|\int_A f(x) d\mu| \le M\mu(A)$.

Дійсно, якщо $|f(x)| \le M$ на A, тоді $\forall\, i\ \ |f_i| \le M$, тобто $\sum_i |f_i| \mu(F_i) \le M \sum_i \mu(F_i) = M\mu(A)$, що означає абсолютну збіжність ряду та оцінку $|\int_A f(x) d\mu| \le M\mu(A)$.

4.4 Інтеграл Лебега від довільної функції по множині скінченної міри

🗁 **Означення 4.4.1.** Назвемо функцію f *інтегровною (сумовною) на множині* A, якщо існує послідовність простих інтегровних на A функцій $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, яка збігається рівномірно до f. Границю

$$I = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)d\mu \tag{4.6}$$

позначимо

$$\int_A f_n(x)d\mu$$

і назвемо *інтегралом від функції* f по множині А.

Це означення коректне, якщо виконано наступні умови:

1. Границя (4.6) існує для будь-якої послідовності простих інтегровних на A функцій, що рівномірно збігається до f.
2. Ця границя при заданій функції f не залежить від вибору послідовності $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$.
3. Для простих функцій означення інтегровності та інтеграла рівносильне даному в означенні 4.3.4.

Покажемо, що ці умови дійсно виконані. Для доведення першої умови достатньо помітити, що в силу властивостей Л1-Л3) інтеграла від простих функцій,

$$\left|\int_A f_n(x)\,d\mu - \int_A f_m(x)d\mu\right| \le \mu(A)\sup_{x\in A}|f_n(x) - f_m(x)|,$$

тобто послідовність інтегралів від простих функцій фундаментальна, отже, збігається. Для доведення другої умови розглянемо дві послідовності, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ та $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$, які збігаються до f. Якби границя (4.6) для цих двох послідовностей приймала різні значення, то для послідовності, яка отримана об'єднанням цих двох послідовностей, границі (4.6) не існувало би, а це суперечить першій умові, оскільки ця «змішана» послідовність також збігається до f. Нарешті, для доведення третьої умови достатньо розглянути послідовність, у якій f_n дорівнює f для усіх n.

Встановимо основні властивості інтеграла Лебега. Безпосередньо з означення випливає, що $\int_A 1\cdot d\mu = \mu(A)$.

Твердження 4.4.2. Для будь-якого постійної k

$$\int_A kf(x)d\mu = k\int_A f(x)d\mu,$$

причому з існування інтеграла в правій частині випливає існування інтеграла в лівій.

Доведення. Ця властивість виконується для інтегралів від простих функцій. Нехай $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ – послідовність простих інтегровних функцій, яка

рівномірно збігається до f, тоді $\int_A kf_n(x)d\mu = k\int_A f_n(x)d\mu$. Перейдемо до границі:

$$\int_A kf(x)d\mu = \lim_n \int_A kf_n(x)d\mu = k\lim_n \int_A f_n(x)d\mu = k\int_A f(x)d\mu,$$

що й потрібно було довести. ■

Твердження 4.4.3. (адитивність інтеграла).

$$\int_A [f(x)+g(x)]d\mu = \int_A f(x)d\mu + \int_A g(x)d\mu,$$

причому з існування інтегралів у правій частині випливає існування інтеграла в лівій.

Доведення. Ця властивість виконується для інтегралів від простих функцій. Нехай $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ – послідовність простих інтегровних функцій, яка рівномірно збігається до f, $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ – послідовність простих інтегровних функцій, яка рівномірно збігається до g, тоді

$$\int_A (f_n(x)+g_n(x))d\mu = \int_A f_n(x)d\mu + \int_A g_n(x)d\mu.$$

Перейдемо до границі:

$$\int_A [f(x)+g(x)]d\mu = \lim_n \int_A \big(f_n(x)+g_n(x)\big)d\mu =$$

$$= \lim_n \int_A f_n(x)d\mu + \lim_n \int_A g_n(x)d\mu = \int_A f(x)d\mu + \int_A g(x)d\mu,$$

що й потрібно було довести. ■

Твердження 4.4.4. Обмежена на множині скінченної міри A функція f інтегровна на A.

Доведення. З твердження 4.3.3. випливає, що функцію f можна подати у вигляді рівномірної границі простих обмежених вимірних функцій. Оскільки кожна проста обмежена вимірна функція є інтегровною (властивість ЛЗ), f подається у вигляді рівномірної границі простих інтегровних функцій, тобто є функцією інтегровною.■

Твердження 4.4.5. (монотонність інтеграла). Якщо f – інтегровна на A та для всіх $x \in A$ $f(x) \geq 0$, тоді $\int_A f(x)\,d\mu \geq 0$.

Доведення. Для простих функцій це твердження випливає із означення. У загальному випадку оскільки f – вимірна, її, згідно твердження 4.3.3., знайдеться рівномірно збіжна до неї послідовність $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ простих невід'ємних функцій. Оскільки $\int_A f_n(x)\,d\mu \geq 0$,

$$\int_A f(x)\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)d\mu \geq 0. \blacksquare$$

З останньої властивості одразу випливає, що якщо для двох інтегровних функцій виконується нерівність $f(x) \geq g(x)$, тоді $\int_A f(x)d\mu \geq \int_A g(x)d\mu$, а тому, якщо $m \leq f(x) \leq M$ для всіх (або майже всіх) $x \in A$, тоді

$$m\mu(A) \le \int\limits_A f(x)d\mu \le M\mu(A).$$

Твердження 4.4.6. Якщо $\mu(A) = 0$, тоді $\int_A f(x)d\mu = 0$.

Це твердження безпосередньо випливає з означення інтеграла Лебега.

Твердження 4.4.7. Якщо $f(x) = g(x)$ майже скрізь на A, тоді

$$\int\limits_A f(x)d\mu = \int\limits_A g(x)d\mu,$$

причому обидва інтеграли існують або не існують одночасно.

Доведення. Позначимо $A' = \{f \ne g\}$, тоді $f = f \cdot \chi_{A\setminus A'}(x) + f \cdot \chi_{A'}(x)$. Обчислимо інтеграл:

$$\int\limits_A f(x)d\mu = \int\limits_A f\chi_{A\setminus A'}(x)d\mu + \int\limits_A f\chi_{A'}(x)d\mu = \int\limits_{A\setminus A'} fd\mu + \int\limits_{A'} fd\mu = \int\limits_{A\setminus A'} fd\mu =$$

$$= \int\limits_{A\setminus A'} gd\mu = \int\limits_{A\setminus A'} gd\mu + \int\limits_{A'} gd\mu = \int\limits_A g \cdot \chi_{A\setminus A'}(x)d\mu + \int\limits_A g \cdot \chi_{A'}(x)d\mu = \int\limits_A gd\mu,$$

що й потрібно було довести. ■

☝ **Зауваження 4.4.8.** В процесі доведення твердження 4.4.7. було показано, що $\int_A f(x)d\mu = \int_{A\setminus A'} fd\mu$, тобто при обчисленні інтеграла можна знехтувати множиною нульової міри.

Твердження 4.4.9. Якщо функція φ інтегровна на A і майже скрізь $|f(x)| \le \varphi(x)$, тоді f також інтегровна на A.

Доведення. Спочатку покажемо, що твердження вірно для простих функцій. Дійсно, якщо f та φ – прості функції, то видаливши з множини A деяку множину міри нуль, на якій задана нерівність не виконується, множину A', яка залишилася, можна подати у вигляді об'єднання скінченної або зліченної кількості множин, на кожній з яких f та φ сталі: $f(x) = a_n, \varphi(x) = b_n$, причому $|a_n| \le b_n$. З інтегровності φ випливає, що

$$\sum_n |a_n|\mu(A_n) \le \sum_n b_n\mu(A_n) = \int\limits_{A'} \varphi(x)d\mu = \int\limits_A \varphi(x)d\mu.$$

Тому f також інтегровна, і $\left|\int_A f(x)d\mu\right| = \left|\int_{A'} f(x)d\mu\right| = |\sum_n a_n\mu(A_n)| \le$

$\le \sum_n |a_n|\mu(A_n) = \int_{A'} |f(x)|d\mu \le \int_A \varphi(x)d\mu.$

У загальному випадку це твердження доводиться граничним переходом із застосуванням твердження 4.3.3. ■

Твердження 4.4.10. Інтеграли $I_1 = \int_A f(x)d\mu$, $I_2 = \int_A |f(x)|d\mu$ існують або не існують одночасно.

Доведення. Справді, з існування інтеграла I_2 випливає існування I_1 в силу твердження 4.4.9.

Нехай тепер існує інтеграл I_1, тобто функцію f можна подати у вигляді рівномірної границі послідовності простих інтегровних функцій $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$. Оскільки $|f_n| - |f| \le |f_n - f|$, $|f_n| \Longrightarrow |f|$, тобто функція $|f|$ також інтегровна (інтеграл I_2 існує).■

Ця властивість істотно відрізняє інтеграл Лебега від інтеграла Рімана, оскільки для інтегралів Рімана лише з існування інтеграла від модуля функції випливає інтегровність самої функції, але не навпаки.

Зауважимо, що з твердження 4.4.10. та монотонності інтеграла випливає корисна нерівність: $\left|\int_A f(x)d\mu\right| \le \int_A |f(x)|d\mu$.

✍ **Вправа 4.4.** Доведіть цю нерівність самостійно.

Ми сформулювали властивості інтеграла Лебега по фіксованій множині. Тепер будемо розглядати інтеграл Лебега як функцію множини

$$F(A) = \int\limits_A f(x)d\mu,$$

яка визначена на сукупності вимірних множин при фіксованій функції $f(x)$. Виявляється (це буде доведено у наступних твердженнях), що ця функція є σ-адитивною.

Твердження 4.4.11. Якщо $A = \coprod_n A_n$, тоді

$$\int\limits_A f(x)d\mu = \sum_n \int\limits_{A_n} f(x)d\mu,$$

причому з існування інтеграла в лівій частині випливає існування інтегралів та абсолютна збіжність ряду у правій частині.

Доведення. Спочатку перевіримо твердження для простої функції f, яка приймає значення $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$.

Нехай $B_k = \{x: x \in A, f(x) = y_k\}$, $B_{nk} = \{x: x \in A_n, f(x) = y_k\}$. Тоді $\int_A f(x)d\mu = \sum_k y_k\mu(B_k) = \sum_k y_k \sum_n \mu(B_{nk}) = \sum_n \sum_k y_k\mu(B_{nk}) = \sum_n \int_{A_n} f(x)d\mu$.

Оскільки ряд $\sum y_k\mu(B_k)$, в припущенні інтегровності функції f на A, абсолютно збігається, а міри усіх множин невід'ємні, тоді абсолютно збігаються і усі інші ряди у цьому ланцюжку рівностей. Тобто для простої функції твердження доведено.

Нехай тепер f – довільна інтегровна функція. Тоді $\forall \varepsilon > 0$ існує проста інтегровна на A функція g, яка задовольняє умову $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$.

Для простої функції g маємо $\int_A g(x)d\mu = \sum_n \int_{A_n} g(x)d\mu$, причому g інтегровна на кожній множині A_n і ряд з інтегралів абсолютно збігається. З цієї останньою обставини та з оцінки $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ випливає, що f також інтегровна на кожній A_n та $\sum_n \left|\int_{A_n} f(x)d\mu - \int_{A_n} g(x)d\mu\right| \le \sum_n \varepsilon\mu(A_n) = \varepsilon\mu(A)$,

$\left|\int_A f(x)d\mu - \int_A g(x)d\mu\right| \le \varepsilon\mu(A)$, що, по-перше, призводить до абсолютної збіжності ряду $\sum_n \int_{A_n} f(x)d\mu$, а по-друге, дає оцінку

$$\left|\sum_n \int\limits_{A_n} f(x)d\mu - \int\limits_A f(x)d\mu\right| \le \left|\sum_n \int\limits_{A_n} f(x)d\mu - \sum_n \int\limits_{A_n} g(x)d\mu\right| +$$

$$+ \left|\int\limits_{A_n} g(x)d\mu - \int\limits_A f(x)d\mu\right| \le 2\varepsilon\mu(A).$$

Оскільки $\varepsilon > 0$ – довільне, отримана оцінка означає, що

$$\sum_n \int_{A_n} f(x)d\mu = \int_A f(x)d\mu. \blacksquare$$

Наслідок 4.4.12. Якщо f інтегровна на A, тоді f інтегровна і на будь-якій вимірній множині $A' \subset A$.

Ми показали, що з інтегровності функції f на множині A випливає, що за умови $A = \coprod_n A_n$ f інтегровна на кожній множині A_n та інтеграл по A дорівнює сумі інтегралів по множинам A_n. Це твердження можна в деякому сенсі обернути.

Твердження 4.4.13. Якщо $A = \coprod_n A_n$, та ряд $\sum_n \int_{A_n} |f(x)|d\mu$ збігається, тоді функція f інтегровна на A та

$$\int\limits_A f(x)d\mu = \sum_n \int\limits_{A_n} f(x)d\mu. \qquad (4.7)$$

Доведення. Порівняно з попередньою теоремою, новим є твердження, що із збіжності ряду випливає інтегровність f на множині A.

Спочатку проведемо доведення для випадку простої функції f, яка приймає значення f_i. Покладемо $B_i = \{x: x \in A, f(x) = f_i\}$, $A_{ni} = A_n \cap B_i$, тоді маємо $\bigcup_n A_{ni} = B_i$ та $\int_{A_n} |f(x)|d\mu = \sum_i |f_i|\mu(A_{ni})$.

Із збіжності ряду (4.7) випливає, що збігаються ряди $\sum_n \sum_i |f_i|\mu(A_{ni}) = \sum_i |f_i|\mu(B_i)$. Збіжність останнього ряду й означає, що існує інтеграл $\int_A f(x)d\mu = \sum_i f_i\mu(B_i)$.

У загальному випадку апроксимуємо f простою функцією $\tilde{f}$ так, що при довільному $\varepsilon > 0$ $\left|f(x) - \tilde{f}(x)\right| < \varepsilon$. Тоді $\left|\tilde{f}(x)\right| \le |f(x)| + \varepsilon$, тобто $\int_{A_n} \left|\tilde{f}(x)\right| d\mu \le \int_{A_n} |f(x)|d\mu + \varepsilon\mu(A_n)$, і оскільки ряд $\sum_n \mu(A_n) = \mu(A)$ збігається, із збіжності ряду (5.6) випливає збіжність ряду $\sum_n \int_{A_n} \left|\tilde{f}(x)\right| d\mu$, тобто за доведеним вище, інтегровність на A простої функції $\tilde{f}$. Але тоді в силу апроксимації функція f також інтегровна на A. ■

Твердження 4.4.14. (нерівність Чебишева). Якщо $\varphi(x) \ge 0$ на A та $c > 0$, тоді

$$\mu\{x: x \in A, \varphi(x) \geq c\} \leq \frac{1}{c}\int\limits_A \varphi(x)d\mu.$$

Доведення. Дійсно, нехай $A' = \{x: x \in A,\ \varphi(x) \geq c\}$. Тоді

$$\int\limits_A \varphi(x)d\mu = \int\limits_{A'} \varphi(x)d\mu + \int\limits_{A\setminus A'} \varphi(x)d\mu \geq \int\limits_{A'} \varphi(x)d\mu \geq c\mu(A')$$

або $\mu(A') \leq \frac{1}{c}\int_A \varphi(x)d\mu$. ■

З нерівності Чебишева випливає дуже корисний наслідок, який стверджує, що якщо інтеграл від деякої невід'ємної функції дорівнює нулю, тоді сама функція майже скрізь дорівнює нулю.

Наслідок 4.4.15. Якщо $\int_A |f(x)|d\mu = 0$, тоді $f(x) = 0$ майже скрізь.

Доведення. Справді, в силу нерівності Чебишева, маємо

$$\mu\left\{x: x \in A, |f(x)| \geq \frac{1}{n}\right\} \leq n\int\limits_A |f(x)|d\mu = 0$$

для всіх n. Тому

$$\mu\{x: x \in A, f(x) \neq 0\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left\{x: x \in A,\ |f(x)| \geq \frac{1}{n}\right\} = 0.\blacksquare$$

Доведемо ще одну властивість інтеграла Лебега як функції множини.

Твердження 4.4.16. (абсолютна неперервність інтеграла Лебега). Якщо $f(x)$ – інтегровна на множині A функція, тоді для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для кожної вимірної множини $e \subset A$ такого, що $\mu(e) < \delta$

$$\left|\int\limits_e f(x)\,d\mu\right| < \varepsilon.$$

Доведення. Насамперед зазначимо, наше твердження очевидне, якщо f обмежена: якщо $|f(x)| \leq M$, тоді $\left|\int_e f(x)\,d\mu\right| \leq \int_e |f(x)|\,d\mu \leq M\mu(e)$. Тобто в якості множини $e \subset A$ можна вибрати довільну множину з мірою $\mu(e) < 1/M$.

Нехай тепер f – довільна інтегровна функція. Покладемо $A_n = \{x: x \in A, n \leq |f(x)| < n+1\}$ і $B_N = \bigcup_{n=0}^{N} A_n, C_N = A\setminus B_N$.

Тоді, за твердженням 4.4.11.,

$$\int_A |f(x)|d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{A_n} |f(x)|d\mu.$$

Виберемо N так, щоб $\sum_{n=N+1}^{\infty} \int_{A_n} |f(x)|d\mu = \int_{C_N} |f(x)|d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$ і нехай $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2(N+1)}$.

Якщо тепер $\mu(e) < \delta$, тоді

$$\left|\int_e f(x)d\mu\right| \leq \int_e |f(x)|d\mu = \int_{e\cap B_N} |f(x)|d\mu + \int_{e\cap C_N} |f(x)|d\mu.$$

Оцінимо кожний з інтегралів справа:

$$\int_{e\cap B_N}|f(x)|d\mu=\int_{e\cap(\bigcup_{n=0}^{N}A_n)}|f(x)|d\mu\le(N+1)\mu(e)<\frac{\varepsilon}{2},$$

$$\int_{e\cap C_N}|f(x)|d\mu\le\int_{C_N}|f(x)|d\mu<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким чином, отримуємо $\int_e|f(x)|d\mu<\varepsilon$, що й потрібно було довести. ■

Доведені властивості інтеграла як функції множини призводять до висновку, що інтеграл Лебега від невід'ємної функції можна розглядати як деяку σ-адитивну міру, визначену на вимірних підмножинах множини A.

4.5 Граничний перехід під знаком інтеграла Лебега

В деяких задачах виникає потреба почленно інтегрувати збіжний ряд. Це питання безпосередньо пов'язане з можливістю граничного переходу під знаком інтеграла. Наведемо без доведення основні результати, які стосуються цього питання.

Теорема 4.5.1. (Лебега). Якщо послідовність $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ на множині A збігається до f і при всіх n $|f(x)|\le\varphi(x)$, де φ інтегровна на A, тоді гранична функція f інтегровна на A і

$$\int_A f_n(x)d\mu\to\int_A f(x)d\mu.$$

Теорема 4.5.2. (Б. Леві). Нехай на множині A

$$f_1(x)\le f_2(x)\le\cdots\le f_n(x)\le\ldots,$$

причому функції f_n інтегровні та їх інтеграли обмежені в сукупності $\int_A f_n(x)d\mu\le K$. Тоді майже скрізь на A існує (скінченна) границя $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$, функція f інтегровна на A та

$$\int\limits_A f_n(x)d\mu\to\int\limits_A f(x)d\mu.$$

При цьому на множині, на якій границя послідовності не існує, функцію f можна задати довільно, наприклад, прийнявши на цій множині $f(x)=0$.

Умову монотонного неспадання послідовності функцій $f_n(x)$ можна замінити умовою її монотонного незростання.

Наслідок 4.5.3. Якщо $\psi_n(x)\ge0$ і $\sum_{n=1}^{\infty}\int_A\psi_n(x)d\mu<\infty$, тоді майже скрізь на A ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(x)$ збігається і його можна почленно інтегрувати: $\int_A(\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(x))\,d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int_A\psi_n(x)d\mu$.

Теорема 4.5.4. (Фату). Якщо послідовність вимірних невід'ємних функцій $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ збігається майже скрізь на A до функції f і $\int_A f_n(x)d\mu\le K$, тоді f інтегровна на A і $\int_A f(x)d\mu\le K$.

4.6 Інтеграл Лебега по множині нескінченної міри

Розповсюдимо тепер поняття інтеграла Лебега на множини нескінченної міри. Припустимо, що множину X можна подати у вигляді об'єднання зліченної сукупності вимірних множин скінченної міри $X=\bigcup_n X_n$, $\mu(X_n)<\infty$ (в такому випадку міра називається σ *-скінченною*). Якщо послідовність $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонно зростає, назвемо її *вичерпною* послідовністю. Наприклад, якщо в

якості X вибрати множину дійсних чисел, тоді вичерпну послідовність будуть утворювати вкладені інтервали $(-n; n)$.

🗁 **Означення 4.6.1.** Вимірна функція f, визначена на множині X з σ-скінченною мірою μ, називається *сумовною* на X, якщо вона сумовна на кожній вимірній підмножині $A \subset X$ скінченної міри і якщо для кожної вичерпної послідовності $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ границя $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{X_n} f(x)d\mu$ існує і не залежить від вибору цієї послідовності. Ця границя називається *інтегралом від f на множині X* і позначається символом

$$\int\limits_{X} f(x)d\mu.$$

Зрозуміло, що якщо функція f дорівнює нулю за межами деякої множини скінченної міри, то для неї сформульоване означення інтеграла рівносильне тому, яке було розглянуто у п. 4.4.

Означення інтеграла від простої функції, що дано у п. 4.3, можна перенести на випадок нескінченної міри. Зрозуміло, що для сумування простої функції необхідно, щоб кожне відмінне від нуля значення вона приймала тільки на множині скінченної міри. Означення інтегровності, що розглядалось у п. 4.4., істотно пов'язане з припущенням скінченності міри множини. Якщо $\mu(X) = \infty$, то із рівномірної збіжності послідовності простих інтегровних функцій не випливає збіжність послідовності їх інтегралів.

Результати, викладені в п. 4.4. для випадку скінченної міри, в основному переносяться на інтеграли по множині нескінченної міри. Істотна відмінність полягає в тому, що у випадку $\mu(X) = \infty$ обмежена вимірна функція не зобов'язана бути інтегровною. Зокрема, якщо $\mu(X) = \infty$, то жодна відмінна від нуля стала не інтегровна на X.

4.7 Порівняння інтеграла Лебега з інтегралом Рімана

З'ясуємо зв'язок між інтегралами Лебега та Рімана. При цьому обмежимося найпростішим випадком міри Лебега на прямій.

Теорема 4.7.1. Якщо існує інтеграл Рімана

$$I = (R)\int\limits_{a}^{b} f(x)dx,$$

тоді f інтегровна на $[a, b]$ за Лебегом і

$$\int\limits_{[a,b]} f(x)d\mu = I.$$

Доведення. Розглянемо розбиття відрізка $[a\,, b]$ на 2^n частин точками $x_k = a + \frac{k}{2^n}(b-a)$ та відповідні суми Дарбу:

$$\Omega_n = \frac{b-a}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n} M_{nk},\ \omega_n = \frac{b-a}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n} m_{nk},$$

де M_{nk} – верхня межа f на відрізку $x_{k-1} \le x \le x_k$, а m_{nk} – нижня межа f на цьому ж відрізку. За означенням інтеграла Рімана,

$$I = \lim_{n\to\infty} \Omega_n = \lim_{n\to\infty} \omega_n.$$

Нехай $\overline{f_n}(x) = M_{nk}$ якщо $x_{k-1} \le x < x_k$, $\underline{f_n}(x) = m_{nk}$ якщо $x_{k-1} \le x < x_k$. В точці $x = b$ функції $\overline{f_n}$ та $\underline{f_n}$ можна довизначити довільно. Легко обчислити, що

$$\int_{[a,b]} \overline{f_n}(x)d\mu = \Omega_n, \int_{[a,b]} \underline{f_n}(x)d\mu = \omega_n.$$

Оскільки послідовність $\{\overline{f_n}\}$ не зростає, послідовність $\{\underline{f_n}\}$ не спадає, тоді майже скрізь $\overline{f_n}(x) \to \overline{f}(x) \ge f(x)$, $\underline{f_n}(x) \to \underline{f(x)} \le f(x)$.

За теоремою 4.5.2. Леві

$$\int_{|a,b|} \overline{f}(x)d\mu = \lim_{n\to\infty} \Omega_n = I = \lim_{n\to\infty} \omega_n = \int_{|a,b|} \underline{f_n}(x)d\mu.$$

Звідси,

$$\int_{[a,b]} \left|\overline{f_n}(x) - \underline{f_n}(x)\right| d\mu = \int_{[a,b]} \left(\overline{f_n}(x) - \underline{f_n}(x)\right) d\mu = 0.$$

Отже, майже скрізь $\overline{f}(x) - \underline{f}(x) = 0$, тобто $\overline{f}(x) - \underline{f}(x) = f(x)$ і

$$\int_{|a,b|} f(x)d\mu = I. \blacksquare$$

Приклад 4.7.2. Оскільки обмеженість є достатньою умовою інтегровності за Лебегом на довільному відрізку та лише необхідною умовою інтегровності за Ріманом, легко навести приклади функцій, що інтегруються за Лебегом, але не інтегруються за Ріманом. Такою буде функція Діріхле на відрізку $[0,1]$: $\varphi(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$.

Довільна функція $f(x) \ge 0$, для якої інтеграл Рімана $\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$ існує для кожного $\varepsilon > 0$ і має скінченну границю I при $\varepsilon \to 0$ (тобто для функції f існує невласний інтеграл другого роду) інтегрується за Лебегом на $[a,b]$ причому $\int_{[a,b]} f(x)d\mu = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon} f(x)dx$.

Інтеграл $\int_{[a,b]} f(x)d\mu$ у випадку коли $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon} |f(x)|\,dx = \infty$, не існує за Лебегом, оскільки, згідно з твердженням 4.4.10., функції $f(x)$ та $|f(x)|$ інтегровні одночасно.

4.8 Простори Лебега

Нехай на відрізку $[a,b]$ задано σ – алгебру вимірних підмножин цього відрізка та μ – це міра Лебега.

Означення 4.8.1. *Простором* $L_p[a,b]$ *при* $1 \le p < \infty$ називається сукупність класів еквівалентних функцій, для яких існує інтеграл $\int_{[a,b]} |f(x)|^p\, d\mu$ (такі функції називаються сумовними з p-м степенем).

Зауважимо, що елементами цього простору є не окремі функції, а саме класи функцій, які майже скрізь рівні. Це пояснюється тим, що інтеграли від функцій одного класу дорівнюють одному й тому ж числу.

Метрика в просторі $L_p[a,b]$ уводиться таким чином: $\rho(f,g) = \sqrt[p]{\int_{[a,b]}|f(x)-g(x)|^p\,d\mu}$. Покажемо, що аксіоми метрики дійсно виконуються. Очевидно, що $\forall\ f,g \in L_p[a,b]\ \rho(f,g) = \rho(g,f)$. Нерівність трикутника фактично є інтегральною нерівністю Мінковського: $\forall\ f,g,\varphi \in L_p[a,b]$

$$\sqrt[p]{\int\limits_{[a,b]}|f(x)-g(x)|^p\,d\mu} \le \sqrt[p]{\int\limits_{[a,b]}|f(x)-\varphi(x)|^p\,d\mu} + \sqrt[p]{\int\limits_{[a,b]}|\varphi(x)-g(x)|^p\,d\mu},$$

тобто $\rho(f,g) \le \rho(f,\varphi) + \rho(\varphi,g)$.

А для виконання аксіоми М1 як раз і потрібно ототожнити функції, які мають однакові інтеграли:

$\rho(f,g) = \sqrt[p]{\int_{[a,b]}|f(x)-g(x)|^p\,d\mu} = 0 \Leftrightarrow \int_{[a,b]}|f(x)-g(x)|^p\,d\mu = 0 \Leftrightarrow$ $f(x) = g(x)$ м. с. на $[a,b]$ (це випливає з наслідку 5.2.15.)

Отже, простір сумовних функцій є метричним.

Твердження 4.8.2. Простори $L_p[a,b]$ *при* $1 \le p < \infty$ – повні метричні простори.

4.9 Питання для самоконтролю:

- Дайте різні означення вимірної числової функції.
- Який зв'язок існує між вимірними та неперервними функціями?
- Наведіть приклад розривної вимірної функції.
- Які дії можна виконувати з вимірними функціями, щоб не втратити вимірність?
- Наведіть приклад еквівалентних функцій.
- Дайте означення рівномірної збіжності, збіжності майже скрізь та збіжності за мірою послідовності вимірних функцій та встановіть зв'язок між ними.
- Дайте означення інтеграла Лебега від простої функції.
- Сформулюйте означення інтегровної за Лебегом функції.
- Сформулюйте основні властивості інтеграла Лебега.
- Сформулюйте властивості інтеграла Лебега як функції множини.
- Встановіть зв'язок між інтегралами Рімана та Лебега.
- Як визначається інтеграл Лебега на множині нескінченної міри?
- Дайте означення та опишіть основні властивості простору $L_p[a,b]$ при $1 \le p < \infty$.

Задачі для самостійного розв'язання:

Задача 4.1. Довести вимірність функції $f(x) = e^{[3\sin x]}$ на числовій прямій.

Задача 4.2. Чи випливає з вимірності функції $|f|$ вимірність функції f?

Задача 4.3. Довести, що числова функція $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{|x|+n}$ є вимірною на числовій прямій.

Задача 4.4. Дослідити послідовність функцій $f_n(x)=e^{-n|x^2-1|}$ на збіжність майже скрізь та за мірою на числовій прямій $\mathbb{R}$.

Задача 4.5. Довести, що послідовність функцій $\chi_{[0,\frac{1}{n}]}(x)\to 0$ майже скрізь на $\mathbb{R}$.

Задача 4.6. Обчислити інтеграли Лебега від простої функції: $\int_{[0,\sqrt{6}]}(-1)^{[x^2]}\,d\mu$; $\int_{[-2,2]}[x|x|]\,d\mu$.

Задача 4.7. Обчислити інтеграл Лебега $\int_{[0,1]}f(x)\,d\mu$, якщо $f(x)=\begin{cases} x^2, \sin x\in\mathbb{Q} \\ \sin^2 x, \sin x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$.

Задача 4.8. Обчислити інтеграл Лебега $\int_{[0,+\infty)}2^{-x}\,d\mu$.

Задача 4.9. З'ясувати, чи належить функція $f(x)=\frac{\cos x}{x}$ просторові $L_1[0,1]$? $L_2[0,1]$?

5 ЛІНІЙНІ НОРМОВАНІ ПРОСТОРИ. ГІЛЬБЕРТОВІ ПРОСТОРИ

5.1 Норма та нормовані простори

На відміну від метрики, поняття норми вводиться лише на лінійних просторах, тобто на множинах, на яких задано операції додавання елементів та множення їх на скаляри. В залежності від того, на дійсні чи комплексні скаляри відбувається множення, розглядають дійсні або комплексні лінійні простори. Домовимося у подальшому розглядати лише дійсні простори.

🗁 **Означення 5.1.1.** Нехай X – дійсний лінійний простір. Функція $\|\cdot\|: X\to\mathbb{R}^+$ називається *нормою*, якщо для неї виконуються наступні аксіоми:

Н1) $\|x\|=0\Leftrightarrow x=0$;

Н2) $\forall\ x\in X\ \forall\ \lambda\in\mathbb{R}\ \ \|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$;

Н3) $\forall\ x,y\in X\ \ \|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$ – аксіома трикутника.

При цьому пара $(X,\|\cdot\|)$ називається *лінійним нормованим простором* або просто *нормованим простором*.

Зрозуміло, що норма є функцією, яка приймає дійсні невід'ємні значення, і фактично є узагальненням поняття довжини вектора. Зауважимо, що метричні та нормовані простори тісно пов'язані між собою.

Твердження 5.1.2. Кожний лінійний нормований простір є метричним, метрика в якому задається формулою $\rho(x,y)=\|x-y\|$.

Доведення. Перевіримо, що функція $\rho(x,y)=\|x-y\|$ дійсно задає метрику. Зрозуміло, що значення функції ρ дійсні та невід'ємні. Покажемо виконання аксіом метрики:

Аксіома М1: $\rho(x,y)=\|x-y\|=0\Leftrightarrow x-y=0\Leftrightarrow x=y$.

Аксіома М2: $\rho(x,y)=\|x-y\|=\|-(y-x)\|=|-1|\|y-x\|=\rho(y,x)$.

Аксіома М3: $\rho(x,y) = \|x-y\| = \|x-z+z-y\| \le \|x-z\| + \|z-y\| \le \rho(x,z) + \rho(z,y)$. ■

Отже, кожний нормований простір є метричним простором, тобто в нормованих просторах можна розглядати всі поняття та об'єкти, які уведені у метричних просторах. Зокрема, це поняття збіжності послідовності.

🗁 **Означення 5.1.3.** Послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ елементів нормованого простору X *збігається* до елемента $x_0 \in X$, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = 0$. При цьому елемент x_0 називається *границею послідовності* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Твердження 5.1.4. Норма є неперервною функцією, тобто якщо $x_n \to x_0$ в просторі X, тоді $\|x_n\| \to \|x_0\|$.

Доведення. Спочатку отримаємо другу нерівність трикутника у нормованому просторі. Нехай $x, y \in X$, тоді $\|x\| = \|x-y+y\| \le \|x-y\| + \|y\|$, тобто $\|x\| - \|y\| \le \|x-y\|$. Навпаки, $\|y\| = \|y-x+x\| \le \|x-y\| + \|x\|$, тобто $\|y\| - \|x\| \le \|x-y\|$. З цих двох нерівностей випливає друга нерівність трикутника:

$$|\|x\| - \|y\|| \le \|x-y\|.$$

З цієї нерівності й випливає неперервність норми: якщо $x_n \to x_0$, тоді $\|x_n - x_0\| \to 0$, але $|\|x_n\| - \|x_0\|| \le \|x_n - x_0\|$, тобто $\|x_n\| \to \|x_0\|$. ■

☝ **Зауваження 5.1.5.** Не кожний метричний простір є нормованим (для метрики лінійність простору не є необхідною). Але якщо у метричному просторі можна задати норму, з метрикою вона буде пов'язана співвідношенням $\|x\| = \rho(x,0)$.

В якості прикладів нормованих просторів ми можемо розглядати відомі нам метричні простори. Зауважимо, що в кожному з цих просторів числові значення $\rho(x,y)$ та $\|x-y\|$ будуть однаковими.

1) *Простір дійсних чисел* $\mathbb{R}$, де норма задається формулою $\|x\| = |x|$.

2) *Простір послідовностей* l_p, $1 \le p < \infty$ з нормою елемента $x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)$

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{1/p}.$$

3) *Простір обмежених послідовностей* $l_\infty = m < \infty$ з нормою елемента $x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)$

$$\|x\| = \sup_i |x_i|.$$

4) *Арифметичний* m *-вимірний простір* $\mathbb{R}_p^m$, $1 \le p \le \infty$ з нормою елемента $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ в залежності від параметра p:

$$\text{при } 1 \le p < \infty \qquad \|x\| = \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p\right)^{1/p},$$

$$\text{при } p = \infty \qquad \|x\| = \max_{1\le i\le m} |x_i|.$$

5) *Простір* $C[a,b]$ з нормою функції $x(t)$

$$\|x\| = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|.$$

6) *Простори неперервних функцій* $C_1[a,b], C_2[a,b]$ з нормами

$$\|x\| = \int_a^b |x(t)|\,dt, \|x\| = \sqrt{\int_a^b |x(t)|^2\,dt},$$

відповідно.

7) *Простори сумовних функцій* $L_p[a,b], 1 \le p < \infty$ з нормою

$$\|x\| = \left(\int_{[a,b]} |x(t)|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

Зупинимося окремо на понятті підпростору нормованого простору. Підпростором метричного простору ми називали будь-яку підмножину метричного простору з тією ж метрикою. В нормованих просторах цього замало. Підпростір має не лише сам утворювати лінійний простір, але й бути замкненим.

🗁 **Означення 5.1.6.** *Лінійним підпростором нормованого простору* називається підмножина, яка сама утворює лінійний простір, тобто разом з двома елементами містить також їх лінійну комбінацію.

🗁 **Означення 5.1.7.** *Підпростором нормованого простору* називається замкнений лінійний підпростір.

Серед нормованих просторів виділимо клас повних нормованих просторів, тобто таких, в яких будь-яка фундаментальна послідовність збігається.

✍ **Вправа 5.1.** Запишіть означення фундаментальної послідовності у нормованому просторі.

🗁 **Означення 5.1.8.** Повний лінійний нормований простір називається *банаховим* простором.

Ця назва – на честь видатного математика Стефана Банаха, який започаткував дослідження таких просторів та, без перебільшення, став одним із засновників сучасного функціонального аналізу.

Зрозуміло, що прикладами банахових просторів будуть простори $\mathbb{R}, \mathbb{R}_p^m, l_p, m, C[a,b], L_p[a,b]$.

5.2 Евклідові та гільбертові простори

На лінійному просторі можна також задати операцію скалярного добутку, що надасть можливість розглянути ще один клас просторів.

🗁 **Означення 5.2.1.** Нехай X – дійсний лінійний простір. Функція $(\cdot,\cdot): X \times X \to \mathbb{R}$ називається *скалярним добутком*, якщо для неї виконуються наступні аксіоми:

С1) $(x,x) \ge 0; (x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0;$

С2) $\forall\ x, y \in X\ \ (x,y) = (y,x)$ – аксіома симетрії;

С3) $\forall\ x \in X\ \forall\ \lambda \in \mathbb{R}\ \ (\lambda x, y) = \lambda(x, y)$;

С4) $\forall\ x, y, z \in X\ \ (x + y, z) = (x, z) + \rho(y, z)$.

При цьому простір с заданим на ньому скалярним добутком, називається *евклідовим простором.*

Поняття скалярного добутку та евклідового простору вивчалося у курсі лінійної алгебри та геометрії, тому зупинимося лише на основних результатах.

Твердження 5.2.2. Кожний евклідів простір є нормованим простором, в якому норма задається формулою $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.

✍ **Вправа 5.2.** Доведіть твердження 5.2.2. самостійно. Для цього знадобиться відома нерівність Коші-Буняковського $|(x, y)| \leq \sqrt{(x, x)} \cdot \sqrt{(y, y)}$.

Зрозуміло, що зворотне твердження не є вірним, тобто не на кожному нормованому просторі можна задати скалярний добуток, який би узгоджувався з нормою за формулою $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$. Критерієм такої можливості є тотожність паралелограма, а саме наступне твердження.

Теорема 5.2.3. (характеристична властивість евклідових просторів). Для того, щоб нормований простір був евклідовим, необхідно та достатньо, щоб для довільних елементів x, y з цього простору виконувалася тотожність паралелограма:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \qquad (5.1)$$

При цьому скалярний добуток буде задаватися формулою

$$(x, y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2). \qquad (5.2)$$

Ця теорема дає можливість перевірити, в якому просторі можна задати скалярний добуток.

□ **Приклад 5.2.4.** Розглянемо простори $l_p,\ 1 \leq p < \infty$ та з'ясуємо, при яких значеннях p норма задовольняє тотожність (5.1). Нехай $x = (1,0,0, \dots, 0, \dots), y = (0,1,0,0, \dots, 0, \dots)$, тоді $x + y = (1,1,0, \dots, 0, \dots), y = (1, -1,0,0, \dots, 0, \dots)$, тобто

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2^{\frac{2}{p}} + 2^{\frac{2}{p}} = 2 \cdot 2^{\frac{2}{p}}; \|x\|^2 + \|y\|^2 = 2.$$

Отже, рівність (5.1) перетворюється на $2 \cdot 2^{\frac{2}{p}} = 2 \cdot 2$, яка виконується лише при $p = 2$. Це означає, що жодний простір класу l_p при $p \neq 2$ не може бути евклідовим. Перевіримо, що у l_2 можна задати скалярний добуток. Нехай $x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots), y = (y_1, y_2, \dots, y_i, \dots)$, тоді

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^2 + \sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^2 = 2\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 + \sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2\right) =$$

$$= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Тотожність (5.1) виконується, отже, скалярний добуток у просторі l_2 можна задати формулою (5.2):

$$(x,y)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2)=\frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i+y_i|^2-\sum_{i=1}^{\infty}|x_i-y_i|^2\right)=\sum_{i=1}^{\infty}x_i\cdot y_i$$

Записуючи замість рядів скінченні суми, легко показати, що серед просторів $\mathbb{R}_p^m$, $1\le p<\infty$ евклідовим буде лише простір $\mathbb{R}_2^m$ зі скалярним добутком елементів $x=(x_1,x_2,\dots,x_m), y=(y_1,y_2,\dots,y_m)$

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{m}x_i\cdot y_i.$$

Приклад 5.2.5. Розглянемо простір неперервних функцій $C[0,1]$. Нехай $x(t)=t, y(t)=t^2$. Тоді $\|x\|=\max\limits_{t\in[0,1]}t=1$, $\|y\|=\max\limits_{t\in[0,1]}t^2=1$, $\|x+y\|=\max\limits_{t\in[0,1]}|t+t^2|=2, \|x+y\|=\max\limits_{t\in[0,1]}|t-t^2|=\frac{1}{4}$. Це означає, що $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=\frac{65}{16}\neq 4=2(\|x\|^2+\|y\|^2)$, тобто простір $C[0,1]$ не є евклідовим.

Приклад 5.2.6. Розглянемо простір $C_2[a,b]$ та покажемо, що для довільних неперервних функцій $x(t), y(t)$ виконується тотожність (5.1):

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=\int_a^b|x(t)+y(t)|^2\,dt+\int_a^b|x(t)-y(t)|^2dt=$$

$$=2\left(\int_a^b|x(t)|^2\,dt+\int_a^b|y(t)|^2\,dt\right)=2(\|x\|^2+\|y\|^2).$$

Отже, простір $C_2[a,b]$ є евклідовим зі скалярним добутком

$$(x,y)=\frac{1}{4}\left(\int_a^b|x(t)+y(t)|^2\,dt-\int_a^b|x(t)-y(t)|^2dt\right)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2)$$

Вправа 5.3. Перевірити, що серед просторів $L_p[a,b], 1\le p<\infty$ евклідовим буде лише $L_2[a,b]$ зі скалярним добутком

$$(x,y)=\int_{[a,b]}x(t)\cdot y(t)d\mu.$$

Означення 5.2.7. Лінійний простір називається *нескінченновимірним*, якщо в ньому для довільного $n\in\mathbb{N}$ існують n лінійно незалежних елементів.

В протилежному випадку простір називається *скінченновимірним*. Зауважимо, що серед розглянутих у п.5.1. нормованих просторів скінченновимірним буде лише простір $\mathbb{R}_p^m$ (цей факт добре відомий з курсу лінійної алгебри). Решта просторів мають нескінченну вимірність. Так, у просторах l_p, $1\le p<\infty$ систему лінійно незалежних елементів будуть утворювати послідовності $e_n=\left(\underbrace{0,\dots,0}_{n-1},1,0,0,\dots,0,\dots\right)$. А у просторах неперервних функцій та $L_p[a,b], 1\le p<\infty$ лінійно незалежними будуть степеневі функції $x_n(t)=t^n$.

🗁 **Означення 5.2.8.** Повний нескінченновимірний евклідів простір називається *гільбертовим* простором.

Серед розглянутих вище евклідових просторів $l_2, \mathbb{R}_2^m, C_2[a,b], L_2[a,b]$ простір $\mathbb{R}_2^m$ не є нескінченновимірним, а простір $C_2[a,b]$ не є повним, отже прикладами гільбертових просторі є простори $l_2, \mathbb{R}_2^m, L_2[a,b]$. Насправді, існує теорема про те, що будь-які сепарабельні гільбертові простори ізоморфні між собою, тобто між ними можна встановити таку бієкцію, яка буде зберігати операції додавання, множення на скаляр та скалярного добутку. Фактично, це означає, що с точністю до ізоморфізму існує лише один сеперабельний гільбертів простір. В якості такого простору найчастіше розглядають саме простір l_2 як «координатну» реалізацію гільбертового простору.

В гільбертових просторах особливого значення набуває поняття ортогональності.

🗁 **Означення 5.2.9.** Нехай H – гільбертів простір. Два елемента $x, y \in H$ називаються *ортогональними* $(x \perp y)$, якщо $(x,y) = 0$.

🗁 **Означення 5.2.10.** Елемент $x \in H$ називається *ортогональним* множині $M \subset H$, якщо $(x,y) = 0$ для всіх $y \in M$.

🗁 **Означення 5.2.11.** *Ортогональним доповненням* до множини M називається множина елементів простору, ортогональних множині M:

$$M^{\perp} = \{x \in H : (x,y) = 0 \ \ \forall\, y \in M\}.$$

Без доведення наведемо корисну теорему, яка стосується ортогональних доповнень.

Теорема 5.2.12. Якщо M – (замкнений!) лінійний підпростір гільбертового простору H, тоді будь-який елемент $h \in H$ однозначно подається у вигляді $h = y + x$, де $y \in M$, $x \in M^{\perp}$.

Це означає можливість подання $H = M \oplus M^{\perp}$.

5.3 Питання для самоконтролю

- Дайте означення норми.
- Встановіть зв’язок між метричними та нормованими просторами.
- Дайте означення збіжної послідовності у нормованому просторі.
- Дайте означення та наведіть приклади банахових просторів.
- Дайте означення евклідових та гільбертових просторів.
- Встановіть зв’язок між різними класами просторів.
- Наведіть приклади гільбертових просторів.

Задачі для самостійного розв’язання:

Задача 5.1. Чи буде нормою на множині неперервних функцій $C[a,b]$ функція $\varphi(x) = \max_{a \le t \le \frac{a+b}{2}} |x(t)|$?

Задача 5.2. Дослідити послідовність $x_n(t) = \begin{cases} 1 - nt, t \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ 0, t \in \left(\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$ на збіжність у просторі $L_2[0,1]$.

Задача 5.3 . Нехай H – гільбертів простір, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$, $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$. Довести, що з умови $(x_n, y_n) \to 1$ випливає умова $\|x_n - y_n\| \to 0$, і з умови $\|x_n + y_n\| \to 2$ випливає умова $\|x_n - y_n\| \to 0$.

6 ЛІНІЙНІ НЕПЕРЕРВНІ ОПЕРАТОРИ

6.1 Означення та властивості лінійних неперервних операторів

Одним із найважливіших класів відображень нормованих просторів є клас лінійних неперервних операторів. Оператором будемо називати будь-яке відображення двох нормованих просторів. Областю визначення опертора буде називатися множина $D(A) = \{x \in X: \exists y \in Y: y = Ax\}$, а областю значень – множина $R(A) = \{y \in Y: \exists x \in X: y = Ax\}$.

🗁 **Означення 6.1.1.** Нехай X, Y – лінійні нормовані простори. Відображення $A: X \to Y$ називається *лінійним оператором*, якщо $\forall\, x, y \in X$ та $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ виконується умова $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$.

Прикладами лінійних операторів є наступні відображення:

1. $A: l_2 \to l_2$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)$, $Ax = (a_1 x_1, a_2 x_2, \dots, a_i x_i, \dots)$, де $\lim\limits_n a_n = 0$.
2. $A: C[a;b] \to C[a;b]$, $(Ax)(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds$, де $K(t,s) \in C[a;b] \times [a;b]$. Лінійність такого відображення випливає з властивостей визначеного інтеграла.

Нелінійними будуть, наприклад, наступні відображення $A: l_2 \to l_2$, $Ax = \left(x_1^2, x_2^2, \dots, x_i^2, \dots\right)$, або $A: C[a;b] \to C[a;b]$, $(Ax)(t) = x(t) + 1$.

Якщо не сказано протилежне, будемо вважати, що $D(A) = X$, тобто що оператор задано на всьому просторі.

Зауважимо, що з лінійності оператора випливає, що $A0 = A(x - x) = Ax - Ax = 0$. Цю умову можна вважати необхідною умовою лінійності оператора.

🗁 **Означення 6.1.2.** Оператор A називається *неперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо він є неперервним відображенням, тобто якщо

$$\forall\ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X: x_n \to x_0 \implies Ax_n \to Ax_0.$$

Твердження 6.1.3. Якщо лінійний оператор A неперервний в одній точці, він буде неперервним на всьому просторі.

Доведення. Нехай A неперервний в деякій точці $x_0 \in X$. Покажемо, що він буде неперервним у довільній точці $x \neq x_0$. Візьмемо довільну послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X: x_n \to x$. Тоді $x_n - x + x_0 \to x_0$, тобто $A(x_n - x + x_0) \to A(x_0)$. Але в силу лінійності оператора, з умови $Ax_n - Ax + Ax_0 \to A(x_0)$ випливає, що $Ax_n \to Ax$, тобто що оператор неперервний в точці x. ■

Якщо оператор неперервний на всьому просторі, будемо називати його просто *неперервним*.

Зрозуміло, що для неперервних операторів виконується умова

$$A\left(\lim_n x_n\right) = \lim_n Ax_n.$$

🗁 **Означення 6.1.4.** Лінійний оператор A називається *обмеженим*, якщо $\exists c > 0 \ \ \forall x \in X \ \ \|Ax\| \le c\|x\|$.

Теорема 6.1.5. Лінійний оператор є неперервним тоді та тільки тоді, коли він обмежений.

Доведення. Необхідність. Припустимо супротивне: оператор неперервним, але не є обмеженим. Це означає, що $\forall c > 0 \ \ \exists x \in X: \ \ \|Ax\| > c\|x\|$. В якості c будемо вибирати натуральні числа n, тобто $\forall n \in \mathbb{N} \ \exists x_n \in X: \|Ax_n\| > n\|x_n\|$. Побудуємо тепер послідовність $y_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|}$. Зрозуміло, що $\|y_n\| = \left\|\frac{x_n}{n\|x_n\|}\right\| = \frac{1}{n}$, тобто $y_n \to 0$. Оскільки оператор A неперервний, $Ay_n \to A0 = 0$, тобто $\|Ay_n\| \to 0$. Але це заперечує тому, що $\|Ay_n\| = \left\|A\frac{x_n}{n\|x_n\|}\right\| = \frac{\|Ax_n\|}{n\|x_n\|} > \frac{n\|x_n\|}{n\|x_n\|} = 1$.

Достатність. Нехай лінійний оператор обмежений, тобто $\exists c > 0 \ \ \forall x \in X \ \|Ax\| \le c\|x\|$. Це означає, що якщо $x_n \to 0$, тоді $\|Ax_n\| \le c\|x_n\|$, тобто $Ax_n \to 0 = A0$. Отже, оператор A неперервний в нулі, а значить, і на всьому просторі. ■

Ця теорема дає можливість перевірять обмеженість лінійного оператора замість його неперервності, що інколи буває значно простіше.

🗁 **Означення 6.1.6.** *Нормою* лінійного неперервного оператора $A: X \to Y$ називається число

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}. \tag{6.1}$$

З цього означення випливає, що

$$\forall x \in X \ \ \|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|. \tag{6.2}$$

Більше того, $\|A\|$ – це інфімум констант c, для яких нерівність $\|Ax\| \le c\|x\|$ виконується при всіх $x \in X$. Дійсно, якщо припустити, що існує таке число $\varepsilon > 0$, що нерівність $\|Ax\| \le (\|A\| - \varepsilon) \cdot \|x\|$ виконується при всіх $x \in X$, тоді при $x \neq 0$ $\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \le \|A\| - \varepsilon$, що б заперечувало тому, що $\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$. Таким чином, можна дати інше означення норми лінійного неперервного оператора.

🗁 **Означення 6.1.7.** *Нормою* лінійного неперервного оператора $A: X \to Y$ називається число

$$\|A\| = \inf\{c > 0: \forall x \in X \ \ \|Ax\| \le c \cdot \|x\|\}.$$

🗋 **Приклад 6.1.8.** Перевірити лінійність, неперервність оператора $A: X \to X$ та знайти його норму.

а) $A: l_2 \to l_2, x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots), Ax = \left(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2^2}, \dots, \frac{x_i}{2^i}, \dots\right)$.

По-перше, доведемо, що $A: l_2 \to l_2$, тобто, якщо $x \in l_2$, тоді $Ax \in l_2$. Для цього треба показати, що ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \left|\frac{x_i}{2^i}\right|^2$ збігається. Дійсно,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left|\frac{x_i}{2^i}\right|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \cdot \frac{1}{4^i} \le \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty,$$

тому що $x \in l_2$. Отже, $\forall x \in l_2 \ Ax \in l_2$.

Перевіримо тепер лінійність цього оператора за означенням: нехай $x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots) \in l_2,\ y = (y_1, y_2, \dots, y_i, \dots) \in l_2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
тоді

$$A(\alpha x + \beta y) = \left(\frac{\alpha x_1 + \beta y_1}{2}, \frac{\alpha x_2 + \beta y_2}{2^2}, \dots, \frac{\alpha x_i + \beta y_i}{2^i}, \dots\right) = \alpha\left(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2^2}, \dots, \frac{x_i}{2^i}, \dots\right) +$$
$$+\beta\left(\frac{y_1}{2}, \frac{y_2}{2^2}, \dots, \frac{y_i}{2^i}, \dots\right) = \alpha Ax + \beta Ay,$$

тобто оператор A – лінійний, отже, замість неперервності можна перевіряти його обмеженість. Нехай $x \in l_2$, тоді

$$\|Ax\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}\left|\frac{x_i}{2^i}\right|^2} \le \frac{1}{2}\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2} = \frac{1}{2}\|x\|,$$

тобто$\|Ax\| \le \frac{1}{2}\|x\|$, що означає обмеженість оператора та дає оцінку для його норми : $\|A\| \le \frac{1}{2}$ (ця оцінка випливає з означення 6.1.7.).

Для лінійного обмеженого оператора A вірна нерівність

$$\forall x \in l_2 \quad \|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|.$$

Виберемо $x_0 = (1,0, \dots ,0, \dots)$. Для нього також

$$\|Ax_0\| \le \|A\| \cdot \|x_0\|.$$

Але $\|x_0\| = 1$, $Ax_0 = \left(\frac{1}{2}, 0, \dots ,0, \dots\right)$ тобто $\|Ax_0\| = \frac{1}{2}$, значить, $\frac{1}{2} \le \|A\| \cdot 1$.

Таким чином, одночасно виконуються дві нерівності: $\frac{1}{2} \le \|A\|$ та $\frac{1}{2} \ge \|A\|$, тобто $\|A\| = \frac{1}{2}$.

б) $A: C[0,1] \to C[0,1], (Ax)(t) = \int_0^1 t \cdot s \cdot x(s)ds$.

Якщо $x(s)$ – неперервна на $[0,1]$ функція, тоді $s \cdot x(s)$ також неперервна, тобто інтегровна на відрізку $[0,1]$. Значить, функція $(Ax)(t) = t \cdot \int_0^1 s \cdot x(s)ds$ також неперервна на $[0,1]$, тобто належить $C[0,1]$. Отже, оператор A дійсно діє у просторі $C[0,1]$. Перевіримо його лінійність: нехай $x(t), y(t) \in C[0,1]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, тоді

$$A(\alpha x + \beta y) = \int_0^1 t \cdot s \cdot (\alpha x(s) + \beta y(s))ds = \alpha\int_0^1 tsx(s)ds + \beta\int_0^1 tsy(s)ds =$$

$$= \alpha Ax + \beta Ay,$$

тобто оператор A – лінійний.

Замість доведення неперервності оператора A доведемо його обмеженість: нехай $x(t) \in C[0,1]$, тоді

$$\|Ax(t)\| = \max_{t\in[0,1]}\left|\int_0^1 t \cdot s \cdot x(s)ds\right| = \left|\int_0^1 s \cdot x(s)ds\right| \le \int_0^1 s \max_{t\in[0,1]}|x(t)|ds =$$

$$= \|x\| \int_0^1 sds = \frac{1}{2}\|x\|,$$

тобто оператор A обмежений, та $\|A\| \le \frac{1}{2}$.

Для оператора A виконується умова $\forall x \in C[0,1] \quad \|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|$. Виберемо $x_0(t) \equiv 1 \in C[0,1]$, тоді $\|(Ax_0)(t)\| \le \|A\| \cdot \|x_0(t)\|$. Але $\|x_0(t)\| = \max\limits_{t\in[0,1]} |x_0(t)| = 1$, $(Ax_0)(t) = \int_0^1 t \cdot sds = t \cdot \int_0^1 sds = \frac{1}{2}t$, $\|Ax_0(t)\| = \max\limits_{t\in[0,1]} \frac{1}{2}t = \frac{1}{2}$. Отже, $\frac{1}{2} \le \|A\| \cdot 1$.

З цієї нерівності та з того, що $\|A\| \le \frac{1}{2}$, випливає що $\|A\| = \frac{1}{2}$.

6.2 Простір лінійних неперервних операторів

Сукупність лінійних неперервних (обмежених) операторів, що діють між просторами X, Y, будемо позначати символом $\mathcal{L}(X,Y)$. Якщо $X = Y$, тоді $\mathcal{L}(X,X) = \mathcal{L}(X)$. На цій множині задамо лінійні операції додавання та множення на дійсний скаляр. Для довільних $x \in X$ та $\alpha \in \mathbb{R}$ покладемо

$$(A+B)x = Ax + Bx, (\alpha A)x = \alpha Ax.$$

Зрозуміло, що оскільки Y – лінійний простір, аксіоми лінійного простору будуть виконуватися і для заданих операцій. В якості нульового елемента множини $\mathcal{L}(X,Y)$ виберемо нульовий оператор $0: x \to 0$, а в якості протилежного елемента – оператор $(-A)x = -Ax$. Отже, множина $\mathcal{L}(X,Y)$ буде утворювати лінійний простір.

✍ **Вправа 6.1.** Перевірити виконання аксіом лінійного простору для заданих операцій додавання та множення на скаляр.

Твердження 6.2.1. Норма лінійного оператора (6.1) є нормою на множині $\mathcal{L}(X,Y)$, тобто множина $\mathcal{L}(X,Y)$ є лінійним нормованим простором.

Доведення. Перевіримо виконання аксіом норми.

Аксіома Н1:

$$\|A\| = 0 \Leftrightarrow \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = 0 \Leftrightarrow \forall x \neq 0 \ \|Ax\| = 0 \Leftrightarrow \forall x \ Ax = 0 \Leftrightarrow A = 0;$$

Аксіома Н2: $\forall A \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \ \|\lambda A\| = \sup\limits_{x\neq 0} \frac{\|\lambda Ax\|}{\|x\|} = |\lambda| \sup\limits_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = |\lambda|\|A\|;$

Аксіома Н3: $\forall A, B \quad \|A+B\| = \sup\limits_{x\neq 0} \frac{\|(A+B)x\|}{\|x\|} \le \sup\limits_{x\neq 0} \left(\frac{\|Ax\|+\|Bx\|}{\|x\|}\right) \le$

$$\le \sup_{x\neq 0} \left(\frac{\|Ax\|}{\|x\|}\right) + \sup_{x\neq 0} \left(\frac{\|Bx\|}{\|x\|}\right) = \|A\| + \|B\|.$$

Отже, аксіоми Н1-Н3 виконуються, і формула (6.1) перетворює множину $\mathcal{L}(X,Y)$ на лінійний простір. ■

Зауважимо, що простір $\mathcal{L}(X,Y)$ при виконанні певних умов буде повним. А саме, має місце місце наступний результат.

Теорема 6.2.2. Якщо простір Y – банаховий, тоді простір $\mathcal{L}(X,Y)$ також банаховий.

Доведення. Нехай $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ – фундаментальна послідовність. Зафіксуємо довільний елемент $x \in X$ та покажемо, що послідовність $\{A_n x\}_{n=1}^{\infty}$ буде фундаментальною у просторі Y. Дійсно, фундаментальність послідовності операторів означає, що $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \forall\, n,m \geq n_0 \ \|A_n - A_m\| < \varepsilon$. Тоді з нерівності (6.2) випливає, що $\|A_n x - A_m x\| \leq \|A_n - A_m\|\|x\| < \varepsilon\|x\|$, тобто послідовність $\{A_n x\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна, а, отже, і збігається у просторі Y. Тобто для довільного $x \in X$ існує границя $\lim\limits_n A_n x$, яку ми позначимо через Ax. Таким чином, ми визначили оператор $A: X \to Y$, що діє за правилом $Ax = \lim\limits_n A_n x$.

Завдяки єдності границі, оператор задано коректно. Покажемо, що він лінійний. Нехай $x, y \in X$ та $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, тоді

$$A(\alpha x + \beta y) = \lim_n A_n(\alpha x + \beta y) = \lim_n(\alpha\, A_n x + \beta A_n y) = \alpha \lim_n A_n x + \\ + \beta \lim_n A_n y = \alpha Ax + \beta Ay.$$

Перевіримо тепер обмеженість оператора A. Оскільки послідовність $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ є фундаментальною, вона обмежена (див. твердження 1.7.2.), тобто існує така константа $c > 0$, що для довільного n $\|A_n\| \leq c$. Це означає, що при будь-якому $x \in X$ та всіх n виконується нерівність $\|A_n x\| \leq c\|x\|$. Завдяки неперервності норми (див. твердження 5.1.4.), можемо перейти в останній нерівності до границі за n : $\lim\limits_n \|A_n x\| = \|Ax\| \leq c\|x\|$. Ця умова означає обмеженість (неперервність) побудованого оператора, тобто ми можем стверджувати, що $A \in \mathcal{L}(X,Y)$.

Покажемо тепер, що $A_n \to A$ в просторі $\mathcal{L}(X,Y)$, тобто що $\|A_n - A\| \to 0$. В умові фундаментальності послідовності $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \forall\, n,m \geq n_0 \ \|A_n - A_m\| < \varepsilon$ перейдемо до границі за n:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_0 : \forall\, n \geq n_0 \ \ \|A_n - A\| < \varepsilon,$$

що й означає збіжність $A_n \to A$. Отже, будь-яка фундаментальна послідовність операторів з $\mathcal{L}(X,Y)$ збігається, тобто простір $\mathcal{L}(X,Y)$ повний. ■

Оскільки простір $\mathcal{L}(X,Y)$ – нормований, в ньому можна розглянути поняття збіжності послідовності лінійних неперервних операторів. Збіжність за нормою цього простору називають рівномірною.

🗁 **Означення 6.2.3.** Говорять, що послідовність $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ *рівномірно збігається* до оператора $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \|A_n - A\| = 0$.

🗋 **Приклад 6.2.4.** Дослідимо послідовність $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}(l_2)$ на рівномірну збіжність, якщо

$x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots), A_n x = \left(\underbrace{0,0,\dots,0}_{n}, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\right)$. Зрозуміло, що при $n \to \infty$ $A_n x \to (0,0,\dots,0,\dots)$, тобто послідовність збігається до нульового оператора. Знайдемо

$$\|A_n - 0\| = \|A_n\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|A_n x\|}{\|x\|} = \sup_{x\neq 0} \frac{\|(0,0,\dots,0,x_{n+1},x_{n+2},\dots)\|}{\|(x_1,x_2,\dots,x_i,\dots)\|}.$$

Оскільки $\|(0,0,\dots,0,x_{n+1},x_{n+2},\dots)\| \le \|(x_1,x_2,\dots,x_i,\dots)\|$, $\|A_n\| \le 1$. Але при $x = \left(\underbrace{0,0,\dots,0,}_{n} 1,0,0,\dots\right)$ $\|A_n x\| = \|x\| = 1$, тобто $\|A_n\| = 1$, отже, рівномірно послідовність не збігається.

Розглянемо тепер іншу послідовність $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}(l_2)$, де $A_n x = \left(\frac{x_n}{n}, \frac{x_{n+1}}{n+1}, \frac{x_{n+2}}{n+2} \dots\right)$. Оскільки $x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots) \in l_2$, ряд $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2$ збігається, тобто при $n \to \infty$ $x_n \to 0$, отже, $A_n x \to 0$, тобто задана послідовність збігається до нульового оператора. Знайдемо

$$\|A_n - 0\| = \|A_n\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|A_n x\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \frac{\left\|\left(\frac{x_n}{n}, \frac{x_{n+1}}{n+1}, \frac{x_{n+2}}{n+2} \dots\right)\right\|}{\|(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)\|}.$$

Оскільки $\left\|\left(\frac{x_n}{n}, \frac{x_{n+1}}{n+1}, \frac{x_{n+2}}{n+2} \dots\right)\right\| \le \frac{1}{n}\|(x_n, x_{n+1}, x_{n+2} \dots)\| \le \frac{1}{n}\|(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)\|$, $\|A_n\| \le \frac{1}{n}$. Але при $x = \left(\underbrace{0,0,\dots,0,}_{n-1} 1,0,0,\dots\right)$ $\|A_n x\| = \frac{1}{n}$, тобто $\|A_n\| = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$, отже, послідовність операторів збігається рівномірно.

Зауважимо, що разом з рівномірною можна розглядати «по точкову» збіжність послідовності лінійних неперервних операторів, тобто збіжність на кожному елементі $x \in X$.

🗁 **Означення 6.2.5.** Говорять, що послідовність $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ *сильно (поточково) збігається* до оператора $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, якщо

$$\forall x \in X \ \lim_{n\to\infty} \|A_n x - Ax\| = 0.$$

Оскільки $\forall x \in X \ \|A_n x - Ax\| \le \|A_n - A\| \cdot \|x\|$, з рівномірної збіжності послідовності випливає сильна збіжність. Це дає нам можливість зробити висновок, що друга послідовність з прикладу 6.2.4. збігається також сильно. Розглянемо тепер першу послідовність $A_n x = \left(\underbrace{0,0,\dots,0,}_{n} x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\right)$. Оскільки $\|A_n x\| = \sqrt{\sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i|^2}$ – це залишок збіжного числового ряду, $\lim_{n\to\infty} \|A_n x\| = 0 \ \forall x \in X$, тобто послідовність збігається до нульового оператора сильно, але нерівномірно.

⬚ **Приклад 6.2.6.** Розглянемо ще одну послідовність $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}(l_2)$, де $x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots), A_n x = \left(\underbrace{0,0,\dots,0,}_{n-1} x_1, 0,0,\dots\right)$. Знову при $n \to \infty$ $A_n x \to (0,0,\dots,0,\dots)$, тобто послідовність збігається до нульового оператора. Але $\|A_n x\| = |x_1|$, тобто не при кожному $x \in l_2$ $\|A_n x\| \nrightarrow 0$. В якості такого x можна вибрати елемент $x = (1,0,\dots,0,\dots)$, для якого $\|A_n x\| = 1$. Отже, розглянута послідовність операторів не збігається сильно та не збігається рівномірно.

6.3 Компактні оператори в нормованих просторах

🗁 **Означення 6.3.1.** Нехай X, Y – нормовані простори. Компактним оператором називається лінійний оператор $A: X \to Y$, який будь–яку обмежену підмножину з X відображає в предкомпактну множину простору Y.

Отже, компактний оператор довільну обмежену множину переводить у обмежену, значить, кожний компактний оператор є обмеженим і неперервним. Наведемо без доведення основні властивості компактних операторів.

Твердження 6.3.2. Якщо A – компактний оператор, а B – обмежений оператор, то оператори AB та BA – компактні.

Твердження 6.3.3. Якщо оператори A та B компактні, та діють з нормованого простору X у нормований простір Y та $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то оператор $C = \alpha A + \beta B$ також компактний.

Отже, сукупність компактних операторів утворює лінійний підпростір у просторі $\mathcal{L}(X, Y)$ всіх лінійних операторів, що діють з нормованого простору X у нормований простір Y, причому цей простір є замкненим, що виипливає з наступного твердження.

Твердження 6.3.4. Якщо $\{A_n\}$ – послідовність компактних операторів у банаховому просторі X, яка збігається за нормою до деякого оператора A, тоді оператор A також компактний.

🗁 **Означення 6.3.5.** Лінійний обмежений оператор $A: X \to Y$ називається скінченновимірним, якщо множина значень цього оператора є скінченновимірним підпростором у просторі Y.

Зрозуміло, що кожний скінченновимірний обмежений оператор є компактним, оскільки обмежену множину такий оператор переводить у обмежену, яка є передкомпактною у скінченновимірному просторі. Прикладом скінченновимірного оператора є функціонал. Іншими словами, можна зробити висновок, що будь-який лінійний неперервний функціонал є компактним.

У нескінченновимірному просторі компактність оператора є вимогою істотно більш сильною, ніж просто його неперервність (тобто обмеженість). Наприклад, одиничний оператор I у нескінченновимірному банаховому просторі неперервний, але не компактний. Цей факт випливає з того, що одинична куля не є компактною множиною у нескінченновимірному нормованому просторі.

🗋 **Приклад 6.3.1.** В просторі неперервних функцій $C[a, b]$ важливий клас компактних операторів утворюють оператори вигляду:

$$Ax = y(s) = \int_a^b K(s,t)x(t)dt, \tag{6.3}$$

де функція $K(s,t)$ неперервна на квадраті $a \le s \le b, a \le t \le b$.

Дійсно, в зазначених умовах інтеграл (6.3) існує для будь–якого s з $[a, b]$, тобто функція $y(s)$ визначена. Нехай $M = \max\limits_{a \le s,t \le b} |K(s,t)|$. На квадраті $a \le s \le b, a \le t \le b$ функція $K(s,t)$ рівномірно неперервна за теоремою Кантора,

оскільки вона неперервна на замкненій та обмеженій множині на площині. Отже,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta: \forall (s',t),(s'',t): \rho\big((s',t),(s'',t)\big) < \delta \quad |K(s',t) - K(s'',t)| < \frac{\varepsilon}{b-a},$$

$$|y(s') - y(s'')| \le \int_a^b |K(s',t) - K(s'',t)| \cdot |x(t)| dt.$$

Оцінимо різницю

$$\int_a^b |K(s',t) - K(s'',t)| \cdot |x(t)| dt < \frac{\varepsilon}{b-a} \|x\| \cdot (b-a) = \varepsilon \|x\|$$

при $\rho\big((s',t),(s'',t)\big) < \delta$.

З цієї нерівності видно, що якщо $\{x(t)\}$ – обмежена множина у $C[a,b]$, то відповідна множина $\{y(s)\}$ рівностепенево неперервна. А якщо виконується нерівність $\|x\| \le c$, то

$$\|y\| = \sup_{s\in[a,b]} |y(s)| \le \sup_{s\in[a,b]} \int_a^b |K(s,t)| \cdot |x(t)| dt \le M(b-a) \cdot c,$$

тобто обмежена множина переходить в рівномірно обмежену. Таким чином, оператор (6.3) переводить будь–яку обмежену множину з $C[a,b]$ в множину функцій, рівномірно обмежену і равностепенево неперервну в $C[a,b]$, тобто компактну за теоремою Арцела 1.10.9.

6.4 Вузькі оператори в просторах Лебега

Поняття вузького оператора було введено в 90-х роках 20-го століття, як узагальнення поняття компактного оператора. Наразі теорія вузьких операторів бурхливо розвивається, тому ми ознайомимося з деякими поняттями теорії вузьких операторів, заданих на просторах $L_p[a,b], 1 < p < \infty$. Докладно про них можна прочитати в [4].

Нехай $T \in \mathcal{L}\big(L_p[0,1], Y\big)$, де Y −банахів простір.

🗁 **Означення 6.4.1.** Оператор $T \in \mathcal{L}\big(L_p[0,1], Y\big)$ називається вузьким, якщо для довільної вимірної на $[0,1]$ множини A та для довільного $\varepsilon > 0$ існує така функція $x \in L_p[0,1]$: $x^2(t) = \chi_A(t)$, $\int_{[0,1]} x(t) d\mu = 0$ та $\|Tx\| < \varepsilon$.

Тут символом $\chi_A(t)$ позначається характеристична функція множини A. Іншими словами, умова $x^2 = \chi_A$ означає, що існує така функція x, що приймає значення ± 1 на множині A, та 0 за межами цієї множини.

Умова $\int_{[0,1]} x(t) d\mu = 0$ означає, що існує таке розбиття множини $A = A_1 \coprod A_2$на 2 вимірні множини, що не перетинаються, де $A_1 = \{t \in A: x(t) = 1\}$ та $A_2 = \{t \in A: x(t) = -1\}$.

Тоді

$$0 = \int_{[0,1]} x d\mu = \int_{[0,1]\setminus A} 0 d\mu + \int_{A_1} 1 d\mu - \int_{A_2} 1 d\mu = \mu(A_1) - \mu(A_2),$$

звідси випливає, що $\mu(A_1) = \mu(A_2)$.

Отже, функцію x можна подати у вигляди різниці двох характеристичних функцій розбиття множини A, тобто:

$$x = \chi_{A_1} - \chi_{A_2} = \begin{cases} 1, t \in A_1; \\ -1, t \in A_2; \\ 0, t \notin A. \end{cases}$$

В наступному розділі ми встановимо зв'язок між компактними та вузькими операторами.

6.5 Питання для самоконтролю

- Який оператор називається лінійним?
- Дайте означення неперервного та обмеженого оператора. Як пов'язані між собою ці поняття для лінійних операторів?
- Дайте означення норми лінійного неперервного оператора.
- Якою нормою наділений простір лінійних неперервних операторів?
- Дайте означення рівномірної збіжності послідовності лінійних неперервних операторів.
- Дати означення компактного оператора.
- Дати означення вузького оператора.

Задачі для самостійного розв'язання:

Задача 6.1. Нехай $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Якщо M – замкнена підмножина простору X , чи обов'язково множина AM буде замкненою підмножиною простору Y ?

Задача 6.2. Нехай $A: C[a, b] \to C[a, b]$. $Ax(t) = p(t)x(t)$. Для яких функцій $p(t)$ оператор A неперервний? Знайдіть його норму, якщо він неперервний.

Задача 6.3. Дослідити послідовність $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}(L_2[0,1])$ операторів на рівномірну та сильну збіжності, якщо $(A_n x)(t) = \int_{[0,1]} t^n s^n x(s) d\mu$.

Задача 6.4. Дослідити на компактність оператор $A : L_2[0; 1] \to L_2[0; 1]$, визначений за допомогою рівності

$$(Ax)(t) = \int\limits_{[0,1]} \frac{x(s)}{20s - 20} d\mu(s).$$

7 ЛІНІЙНІ НЕПЕРЕРВНІ ФУНКЦІОНАЛИ

7.1 Означення та властивості лінійних неперервних функціоналів

Познайомимося тепер з одним з найважливіших прикладів лінійних неперервних операторів – лінійними неперервними функціоналами, які мають чисельні застосування в математиці. Зауважимо, що функціонал – це частковий випадок оператора, тому основні означення та факти, які стосуються операторів, без суттєвих змін переносяться на функціонали.

🗁 **Означення 7.1.1.** Нехай X – лінійні нормовані простори. *Функціоналом* називається довільне відображення $f: X \to \mathbb{R}$.

🗁 **Означення 7.1.2.** Функціонал $f: X \to \mathbb{R}$ називається *лінійним*, якщо $\forall\, x, y \in X$ та $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ виконується умова $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$.

Прикладами лінійних функціоналів є наступні відображення:

1. $f: l_2 \to \mathbb{R}$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)$, $f(x) = a_1 x_1 + a_2 x_2$.

2. $f: C[a;b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \int_a^b x(t)dt$; $f(x) = x(a)$.

🗁 **Означення 7.1.3.** Функціонал f називається *неперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо він є неперервним відображенням, тобто якщо

$$\forall\ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X: x_n \to x_0 \implies f(x_n) \to f(x_0).$$

Як і для операторів, з неперервності лінійного функціонала в одній точці випливає його неперервність на всьому просторі. Якщо функціонал неперервний на всьому просторі, будемо називати його просто *неперервним*.

Зрозуміло, що для неперервних функціоналів також виконується умова

$$f\left(\lim_n x_n\right) = \lim_n f(x_n).$$

🗁 **Означення 7.1.4.** Лінійний функціонал f називається *обмеженим*, якщо $\exists c > 0\ \ \forall x \in X\ |f(x)| \le c\|x\|$.

Зауважимо, що оскільки норма в просторі $\mathbb{R}$ задається як модуль, це означення є частковим випадком означення 7.1.6. норми лінійного неперервного оператора.

Теорема 7.1.5. Лінійний функціонал є неперервним тоді та тільки тоді, коли він обмежений.

✍ **Вправа 7.1.** Доведення цієї теореми повторює доведення теореми 6.1.5. для операторів. Проведіть його самостійно.

🗁 **Означення 7.1.6.** *Нормою* лінійного неперервного функціонала f називається число

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}. \tag{7.1}$$

З цього означення випливає, що

$$\forall x \in X \quad |f(x)| \le \|f\| \cdot \|x\|. \tag{7.2}$$

Більше того, $\|f\|$ – це інфімум констант c, для яких нерівність $|f(x)| \le \|f\| \cdot \|x\|$ виконується при всіх $x \in X$. Таким чином, можна дати інше означення норми лінійного неперервного функціонала.

🗁 **Означення 7.1.7.** *Нормою* лінійного неперервного функціонала f називається число

$$\|f\| = \inf\{c > 0: \forall x \in X \quad |f(x)| \le c \cdot \|x\|\}.$$

⬚ **Приклад 7.1.8.** Перевірити лінійність, неперервність функціонала f та знайти його норму.

а) $X = l_1, x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots), f(x) = x_1 + x_2$.

Перевіримо лінійність цього функціонала за означенням: нехай $x = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots) \in l_2,\ y = (y_1, y_2, \dots, y_k, \dots) \in l_2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

тоді $f(\alpha x + \beta y) = \alpha x_1 + \beta y_1 + \alpha x_2 + \beta y_2 = \alpha x_1 + \alpha x_2 + \beta y_1 + \beta y_2 =$

$$= \alpha f(x) + \beta f(y),$$

тобто функціонал f – лінійний, отже, замість неперервності можна перевіряти його обмеженість. Нехай $x \in l_1$, тоді

$$|f(x)| = |x_1 + x_2| \le |x_1| + |x_2| \le \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| = \|x\|,$$

тобто $|f(x)| \le \|x\|$, що означає обмеженість функціонала та дає оцінку для його норми : $\|f\| \le 1$.

З нерівності (7.2) випливає що для лінійного обмеженого функціонала f вірна нерівність

$$\forall x \in l_2 \quad |f(x)| \le \|f\| \cdot \|x\|.$$

Виберемо $x_0 = (1,0,\dots,0,\dots)$. Для нього також $|f(x_0)| \le \|f\| \cdot \|x_0\|$. Але $\|x_0\| = 1$, $f(x_0) = 1$ тобто $|f(x_0)| = 1$, значить, $1 \le \|f\| \cdot 1$.

Таким чином, одночасно виконуються дві нерівності: $1 \le \|f\|$ та $\|f\| \le 1$, тобто $\|f\| = 1$.

б) Розглянемо тепер той же самий функціонал, але в іншому просторі $X = l_2$, та покажемо, що його норма буде іншою.

Нехай $x \in l_2$, тоді, користуючись нерівністю Коші-Буняковського $|(x,y)| \le \|x\| \cdot \|y\|$, отримаємо оцінку

$$|f(x)| = |x_1 + x_2| = \big((1,1,0,0,\dots),(x_1,x_2,\dots,x_i,\dots)\big) \le$$
$$\le \|(1,1,0,0,\dots)\|\|(x_1,x_2,\dots,x_i,\dots)\| = \sqrt{2}\|x\|,$$

тобто $|f(x)| \le \sqrt{2}\|x\|$, що означає обмеженість функціонала та дає оцінку для його норми : $\|f\| \le \sqrt{2}$.

В нерівності $|f(x)| \le \|f\| \cdot \|x\|$ виберемо $x_0 = (1,1,0,0,\dots,0,\dots)$. Для нього також

$$|f(x_0)| \le \|f\| \cdot \|x_0\|.$$

Але $\|x_0\| = \sqrt{2}$, $f(x_0) = 1 + 1 = 2$ тобто $2 \le \|f\| \cdot \sqrt{2}$.

Таким чином, одночасно виконуються дві нерівності: $\sqrt{2} \le \|f\|$ та $\|f\| \le \sqrt{2}$, тобто $\|f\| = \sqrt{2}$.

в) $X = C[0,1], f(x) = \int_0^1 (t+1)x(t)dt.$

Перевіримо його лінійність: нехай $x(t), y(t) \in C[0,1]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, тоді

$$f(\alpha x + \beta y) = \int_0^1 (t+1)\big(\alpha x(t) + \beta y(t)\big)dt = \alpha \int_0^1 (t+1)x(t)dt +$$

$$+\beta \int_0^1 (t+1)y(t)ds = \alpha f(x) + \beta f(y),$$

тобто функціонал f – лінійний.

Замість доведення неперервності функціонала f доведемо його обмеженість: нехай $x(t) \in C[0,1]$, тоді

$$|f(x)| = \left|\int_0^1 (t+1)x(t)dt\right| \le \int_0^1 (t+1)|x(t)|dt \le \int_0^1 (t+1)\max_{s\in[0,1]}|x(s)|dt =$$

$$= \|x\| \int_0^1 (t+1)dt = \frac{3}{2}\|x\|,$$

тобто функціонал f обмежений, та $\|f\| \le \frac{3}{2}$.

Для функціонала f виконується нерівність $\forall x \in C[0,1] \quad |f(x)| \le \|f\| \cdot \|x\|$. Виберемо $x_0(t) \equiv 1 \in C[0,1]$, тоді $|f(x_0)| \le \|f\| \cdot \|x_0(t)\|$.
Але $\|x_0(t)\| = \max\limits_{t\in[0,1]} |x_0(t)| = 1$, $f(x_0) = \int_0^1 (t+1)dt = \frac{3}{2}$. Отже, $\frac{3}{2} \le \|f\| \cdot 1$.

З цієї нерівності та з того, що $\|f\| \le \frac{3}{2}$, випливає що $\|f\| = \frac{3}{2}$.

Як і випадку лінійних неперервних операторів, *ядром* лінійного неперервного функціонала називають множину $Ker\, f = \{x \in X: f(x) = 0\}$. Розглянемо деякі властивості ядра.

Твердження 7.1.9. Ядро лінійного неперервного функціонала утворює підпростір нормованого простору X.

Доведення. Оскільки функціонал лінійний, $\forall\, x, y \in Ker\, f$ та $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ виконується умова $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) = 0$, тобто $\alpha x + \beta y \in Ker\, f$ і ядро утворює лінійний підпростір X. Покажемо його замкненість. Нехай x_0 – точка дотикання ядра, тоді, згідно з критерієм точки дотикання 1.7.3., існує послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ елементів ядра, яка збігається до x_0 : $x_n \longrightarrow x_0$. З неперервності функціонала випливає, що $f(x_n) \longrightarrow f(x_0)$. Але $x_n \in Ker\, f$, тобто $f(x_n) = 0$, з чого випливає, що $f(x_0) = 0$. Це означає, що точка дотикання ядра належить ядру, тобто воно є замкненою множиною. ■

Нехай $e \notin Ker\, f$ та $\|e\| = 1$. Для довільного $x \in X$ покладемо $\lambda = \frac{f(x)}{f(e)}$ та розглянемо елемент $g = x - \lambda e$. Оскільки

$$f(g) = f(x) - \lambda f(e) = f(x) - \frac{f(x)}{f(e)}\ f(e) = 0,$$

елемент $g \in Ker\, f$, тобто будь-який елемент x простору X можна подати у вигляді $x = g + \lambda e$, де $g \in Ker\, f, \lambda \in \mathbb{R}$. У випадку гільбертового простору це означає, що $H = Ker\, f \oplus Ker\, f^{\perp}$ (див. теорему 5.2.12.), причому простір $Ker\, f^{\perp}$ є одновимірним.

7.2 Спряжений простір. Загальний вигляд лінійних неперервних функціоналів у деяких просторах

Нагадаємо, що символом $\mathcal{L}(X, Y)$ ми позначаємо **с**укупність лінійних неперервних (обмежених) операторів, що діють між просторами X, Y. У випадку $Y = \mathbb{R}$ простір $\mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ позначається X^* та називається простором, спряженим до X.

🗁 **Означення 7.2.1.** *Спряженим* до простору X називається простір лінійних неперервних функціоналів, заданих на X.

Оскільки спряжений простір X^* є частковим випадком простору $\mathcal{L}(X, Y)$, він також є нормованим простором з нормою, що задається формулою (7.1). Більше того, оскільки простір дійсних чисел $\mathbb{R}$ є банаховим, з теореми 6.2.2. випливає наступний результат.

Теорема 7.2.2. Спряжений простір X^* до нормованого простору X є банаховим простором.

Зауважимо, що для багатьох нормованих просторів спряжені до них простори добре відомі та докладно описані. Отже, відомий і загальний вигляд лінійних неперервних функціоналів у таких нормованих просторах. Ми докладно зупинимося лише на просторах послідовностей та гільбертовому просторі. Спочатку познайомимося з поняттям базису Шаудера у нормованому просторі.

🗁 **Означення 7.2.3.** Нехай X – дійсний банаховий простір, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – послідовність елементів X. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ називають *збіжним*, якщо збігається послідовність $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ його часткових сум, де $S_n = x_1 + \ldots + x_n$. В цьому випадку елемент $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ називають *сумою ряда* і пишуть $S = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$.

🗁 **Означення 7.2.4.** Послідовність $\{e_1, e_2, \ldots\} \subset X$ називається *базисом Шаудера* банахового простору X, якщо будь-який елемент $x \in X$ можна єдиним чином подати у вигляді суми ряду

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k\, e_k, x_k \in \mathbb{R}.$$

Теорема 7.2.5. У просторі $l_p (1 \le p < \infty)$ послідовність векторів $e_1 = (1,0,0,\ldots), e_2 = (0,1,0,\ldots), e_3 = (0,0,1,0,\ldots), \ldots.$ є базисом Шаудера. Інакше кажучи, будь-який елемент $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_{\mathrm{p}}$ однозначно подається у вигляді суми збіжного в l_p ряда за системою $\{e_k\}_{n=1}^{\infty}$, а саме, у вигляді $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k\, e_k$.

Доведення. Покладемо $S_n = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$ та покажемо, що послідовність $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна. При $n > m$ маємо:

$$\|S_n - S_m\| = \left\|\sum_{k=1}^{n} x_k e_k - \sum_{k=1}^{m} x_k e_k\right\| = \|(0,\ldots,0, x_{m+1}, \ldots, x_n, 0, \ldots)\| =$$
$$= \left(\sum_{k=m+1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}$$

і фундаментальність послідовності $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ випливає зі збіжності числового ряду $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p$. Отже, в силу повноти простору l_p, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k\, e_k$ збігається до деякого елементу простору l_p. Покажемо, що він збігається саме до x, тобто що $x = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Дійсно,

$$\|x - S_n\| = \left\|x - \sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right\| = \|(0,\ldots,0, x_{n+1}, x_{n+2} \ldots)\| = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p},$$

тобто $\lim\limits_{n\to\infty} \|x - S_n\| = 0$ як границя залишку збіжного ряду. ■

Теорема 7.2.6. Нехай $p > 1$ і $1/p + 1/q = 1$. Тоді ${l_p}^* = l_q$.

Інакше кажучи, для будь-якого лінійного неперервного функціонала f, заданого на l_p, існує такий елемент $(f_1, f_2, \ldots, f_k, \ldots) \in l_q$, що для довільного $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots) \in l_p$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k x_k \,. \qquad (7.3)$$

Вірно й зворотне: для будь-якого елемента $(f_1, f_2, \ldots, f_k, \ldots) \in l_q$ формула (9.3) визначає функціонал $f \in {l_p}^*$. При цьому $\|f\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^q\right)^{1/q}$.

Доведення. Нехай $(f_1, f_2, \dots, f_k, \dots) \in l_q$. Покажемо, що функціонал f, який визначається формулою (7.3), належить ${l_p}^*$. Перевіримо лінійність цього функціонала:
нехай $x = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots) \in l_p$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_k, \dots) \in l_p$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, тоді

$$f(\alpha x + \beta y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(\alpha x_k + \beta y_k) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} f_k x_k + \beta \sum_{k=1}^{\infty} f_k\, y_k = \\ = \alpha f(x) + \beta f(y),$$

тобто функціонал лінійний.

В силу нерівності Гельдера (1.1), маємо

$$|f(x)| \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^q\right)^{1/q} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^q\right)^{1/q} \|x\| < +\infty.$$

Звідси випливає обмеженість функціонала f і нерівність $\|f\| \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^q\right)^{1/q}$. Отже, показано, що $l_q \subseteq {l_p}^*$.

Нехай тепер $f \in {l_p}^*$. Покажемо, що цей функціонал можна подати у вигляді (7.3). В силу теореми 7.2.5. та неперервності функціонала f маємо:

$$f(x) = f\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k\right) = f\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right) = \\ = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k f(e_k) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k f(e_k) \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} f_k x_k.$$

Покажемо тепер, що елемент $(f_1, f_2, \dots, f_k, \dots) \in l_q$ – це й буде означати, що ${l_p}^* \subseteq l_q$. Для цього при будь-якому фіксованому $n \in \mathbb{N}$ розглянемо елемент $x_0 \in l_p$, який визначається наступним чином:

$$x_0 = (signf_1 \cdot |f_1|^{q-1}, signf_2 \cdot |f_2|^{q-1} \dots, signf_n \cdot |f_n|^{q-1}, 0, 0, \dots).$$

Тоді

$$f(x_0) = \textstyle\sum_{k=1}^{n} f_k \cdot signf_k \cdot |f_k|^{q-1} = \sum_{k=1}^{n} |f_k|^q. \qquad (7.4)$$

З обмеженості функціонала випливає, що

$$|f(x_0)| \le \|f\|\|x_0\| = \|f\|\left(\textstyle\sum_{k=1}^{n} |f_k|^{p(q-1)}\right)^{1/p} = \|f\|\left(\sum_{k=1}^{n} |f_k|^q\right)^{1/p} \qquad (7.5)$$

Тут ми скористались тим, що $p(q-1) = q$. Порівнюючи (7.4) і (7.5), отримаємо $\sum_{k=1}^{n} |f_k|^q \le \|f\| \left(\sum_{k=1}^{n} |f_k|^q\right)^{1/p}$, звідки знаходимо, що при будь-якому $n \in \mathbb{N}$ $\left(\sum_{k=1}^{n} |f_k|^q\right)^{1/q} \le \|f\|$. Переходячи до границі за n, отримуємо $\left(\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^q\right)^{1/q} \le \|f\|$.

З останньої нерівності випливає, що $(f_1, f_2, \dots, f_k, \dots) \in l_q$ і $\left(\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^q\right)^{1/q} \le \|f\|$. Оскільки вище було отримано нерівність $\|f\| \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^q\right)^{1/q}$, то $\|f\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^q\right)^{1/q}$.■

✍ **Вправа 7.2.** Ознайомтеся самостійно з доведенням того факту, що ${l_1}^* = m$. [5]

З теореми 7.2.6. випливає, що $l_2^{\ *} = l_2$, тобто простір l_2 збігається зі своїм спряженим. Це не випадково, такий результат має місце для будь-якого гільбертового простору.

Теорема 7.2.7. (Рісса). Нехай H — гільбертів простір. Тоді для будь-якого функціонала $f \in H^*$ існує єдиний елемент $u \in H$ такий, що $\forall\, x \in H$

$$f(x) = (x, u). \tag{7.6}$$

При цьому $\|f\| = \|u\|$. Зворотно, для будь-якого $u \in H$ формула (7.6) визначає функціонал f з нормою $\|f\| = \|u\|$.

Доведення. З властивостей скалярного добутку безпосередньо випливає, що при будь-якому $u \in H$ формула (7.6) визначає лінійний неперервний функціонал на H: нехай $x, y \in H$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, тоді

$$f(\alpha x + \beta y) = (\alpha x + \beta y, u) = \alpha(x, u) + \beta(y, u) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

При цьому в силу нерівності Коші-Буняковського $|f(x)| = |(x, u)| \le \|x\|\|u\|$, звідки $\|f\| \le \|u\|$.

Крім того, з (7.6) при $x = u$ отримуємо $\|u\|^2 = f(u) \le \|f\|\|u\|$, звідки $\|u\| \le \|f\|$. Отже, якщо функціонал задається формулою (7.6), тоді $\|f\| = \|u\|$.

Доведемо тепер, що довільний функціонал $f \in H^*$ можна подати у вигляді (7.6). З результатів п. 7.1. випливає, що $H = Ker\, f \oplus Ker\, f^{\perp}$, де вимірність простору $Ker\, f^{\perp}$ дорівнює одиниці. Нехай $e \in Ker\, f^{\perp}$ та $\|e\| = 1$. Тоді довільний елемент $x \in H$ подається у вигляді $x = g + \lambda e$, де $g \in Ker\, f, \lambda \in \mathbb{R}$. При цьому $(g, e) = 0$ та $(x, e) = (g + \lambda e, e) = (g, e) + \lambda(e, e) = \lambda$.

Звідси випливає, що

$f(x) = f(g + \lambda e) = f(g) + \lambda f(e) = \lambda f(e) = (x, e) f(e) = (x, f(e)e)$ і для отримання подання (7.6) достатньо покласти $u = f(e)e$. Якщо маємо представлення (7.6), рівність $\|f\| = \|u\|$ вже було доведено.

Залишається довести єдиність елемента u, який відповідає даному функціоналу f. Припустимо, що таких елементів два, тобто існують такі $u, v \in H$, що $\forall\, x \in H\ f(x) = (x, v)$ та $f(x) = (x, u)$. Тоді при всіх $x \in H$ $(x, u) = (x, v)$, звідки $(x, u - v) = 0$. Якщо вибрати тепер $x = u - v$, отримаємо $\|u - v\| = 0$, тобто $u = v$.■

Ця теорема фактично дозволяє ототожнити гільбертів простір та спряжений до нього.

Приклад 7.2.8. Перевірити лінійність, неперервність функціонала f та знайти його норму, якщо $x = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots) \in l_2$, $f(x) = x_1 + 3x_2 - x_4$. Оскільки l_2 – гільбертів простір, застосуємо теорему Рісса, тобто подамо заданий функціонал у вигляді скалярного добутку $f(x) = 1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + (-1) \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + \dots = (x, u)$, де $u = (1,3,0,-1,0,0, \dots)$. Зрозуміло, що $u \in l_2$. Отже, функціонал є лінійним та неперервним, а його норму знаходиться за формулою $\|f\| = \|u\| = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{11}$.

Приклад 7.2.9. Перевірити лінійність, неперервність функціонала f та знайти його норму, якщо $x(t) \in L_2[0,1]$, $f(x) = \int_{[0,\frac{1}{2}]} x(t)(t+1)d\mu$. Знову застосуємо теорему Рісса та подамо функціонал у вигляді скалярного добутку

$f(x) = (x, u)$, де $u(t) = \begin{cases} t+1, t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 0, t \notin [0, \frac{1}{2}] \end{cases}$. Оскільки функція $u(t)$ майже скрізь неперервна, вона належить просторові $L_2[0,1]$, тобто заданий функціонал є лінійним та неперервним. А його норма дорівнює $\|f\| = \|u\| = \sqrt{\int_{[0,\frac{1}{2}]}(t+1)^2 d\mu} = \sqrt{\int_0^{\frac{1}{2}}(t+1)^2 dt} = \sqrt{\frac{19}{24}}$.

Нехай X – лінійний нормований простір, X^* – спряжений простір, тобто простір лінійних неперервних функціоналів на X. Оскільки X^* – нормований простір, для нього також визначений спряжений простір $(X^*)^* = X^{**}$, що відповідно називають *другим спряженим* для X. Елементами цього простору є лінійні неперервні функціонали, які задані на просторі лінійних неперервних функціоналів, заданих на X. Виявляється, що другий спряжений простір безпосередньо пов'язаний з нормованим простором X.

Теорема 7.2.10. Якщо X – лінійний нормований простір, то $X \subseteq X^{**}$. При цьому

$$\forall\, x \in X \; \|x\|_X = \|x\|_{X^{**}}.$$

Отже, нормований простір вкладений в другий спряжений. Для деяких просторів (вони носять назву *рефлексивних*) нормований простір збігається з другим спряженим (точніше кажучи, ці простори ізоморфні та зберігають норму елементів). Наприклад, $H^* = H$, тобто $H^{**} = H$.

7.3 Основні принципи функціонального аналізу

Наведемо дві теореми, які разом із теоремою Банаха про обернений оператор, яку буде наведено в наступному розділі, вважаються основними принципами функціонального аналізу. Ці теореми пов'язані з функціоналами. Теорему Банаха-Штейнгауза, наведену нижче, часто називають принципом рівномірної обмеженості, оскільки вона стверджує, що з поточкової обмеженості послідовності лінійних неперервних функціоналів випливає її рівномірна обмеженість.

Теорема 7.3.1. (Банаха — Штейнгауза). Нехай X — банаховий простір, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ — послідовність функціоналів з X^*. Якщо ця послідовність обмежена в кожній точці, тобто

$$\forall\, x \in X \;\; \exists c_x > 0 : \forall\, n \in \mathbb{N} \; |f_n(x)| \le c_x, \qquad (7.7)$$

тоді послідовність норм функціоналів також обмежена, тобто $\exists\, c > 0 : \forall\, n \in \mathbb{N} \; \|f_n\| \le c$.

Доведення. Нехай послідовність $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ задовольняє умову теореми. Покажемо, що тоді існує замкнена куля $\mathrm{B}_r[a]$, в якій множина $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ обмежена. Припустимо супротивне, тобто що множина $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ не є обмеженою в жодній замкненій кулі, відповідно, в жодній відкритій кулі. Візьмемо довільну кулю $\mathrm{B}_{r_0}(x_0)$. Оскільки у відкритій кулі $\mathrm{B}_{r_0}(x_0)$ множина $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ не обмежена, знайдуться такі $x_1 \in \mathrm{B}_{r_0}(x_0)$ і $n_1 \in \mathbb{N}$, для яких $|f_{n_1}(x_1)| > 1$. Завдяки неперервності функціонала f_{n_1}, нерівність $|f_{n_1}(x)| > 1$ буде виконуватися і в деякому околі точки x_1, тобто в деякій замкненій кулі

$\mathrm{B}_{r_1}[x_1] \subset \mathrm{B}_{r_0}(x_0)$. При цьому можна вважати, що $r_1 \le r_0 \,/\, 2$. Оскільки в кулі $\mathrm{B}_{r_1}(x_1)$ множина $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ не обмежена, знову знайдуться такі $x_2 \in \mathrm{B}_{r_1}(x_1)$ і номер $n_2 > n_1$, що $\left|f_{n_2}(x_2)\right| > 2$. Завдяки неперервності функціонала l_{n_2}, нерівність $\left|f_{n_2}(x)\right| > 2$ виконується в деякій кулі $\mathrm{B}_{r_2}[x_2]$, причому можна вважати,що що $r_2 \le r_0 \,/\, 2^2$.

Продовжуючи цей процес, отримаємо послідовність вкладених замкнених куль $\mathrm{B}_{r_0}[x_0] \supset \mathrm{B}_{r_1}[x_1] \supset \mathrm{B}_{r_2}[x_2] \supset \ldots (r_k \to 0 \text{ при } k \to \infty)$ і натуральні числа $n_1 < n_2 < \ldots$ таки, що $\left|f_{n_k}(x)\right| > k$ при $x \in B_{r_k}[x_k]$. За теоремою 1.9.1. про вкладені кулі, в повному метричному просторі існує точка x^*, яка належить усім вибраним кулям ($x^* = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$). Тому $\left|f_{n_k}(x^*)\right| > k$ при будь-якому k, що заперечує умову (7.7). Отримане заперечення доводить існування кулі $\mathrm{B}_r[a]$, на якій множина $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ обмежена:

$$\exists\, c' > 0\ \forall\, x \in \mathrm{B}_r[a]\ \forall\, n \in \mathbb{N}\ |f_n(x)| \le c'.$$

Оскільки для будь-якого лінійного неперервного функціонала $\|f\| = \sup\limits_{x\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup\limits_{x\neq 0} \left|f(\frac{x}{\|x\|})\right| = \sup\limits_{y=1} |f(y)| = \sup\limits_{y\le 1} |f(y)|$, то для доведення теореми достатньо показати, що множина $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ обмежена на одиничній кулі $B_1[0]$. Для будь-якого $x \in B_1[0]$ положимо $x' = rx + a$, тоді $x = \frac{1}{r}(x' - a)$. Оскільки $\|x' - a\| = \|rx\| \le r\|x\| \le r$, зрозуміло, що $x' \in \mathrm{B}_r[a]$, тому $|f_n(x')| \le c'$.

Отже,

$$|f_n(x)| = \left|f_n(\frac{1}{r}(x' - a))\right| = \frac{1}{r}|f_n(x') - f_n(a)| \le \frac{1}{r}(|f_n(x')| + |f_n(a)| \le \frac{c' + c_a}{r},$$

що і доводить обмеженість $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ на одиничний кулі.■

Наступна теорема пов'язана з поняттям продовження лінійного функціонала. Ми розглянемо це питання лише для дійсних нормованих просторів.

🗁 **Означення 7.3.2.** Нехай X_0 – лінійний підпростір нормованого простору X, на якому задано лінійний неперервний функціонал f. Функціонал F називається *продовженням* функціонала f на весь простір X, якщо F задано на X та $\forall x \in X_0\ F(x) = f(x)$.

З означення норми зрозуміло, що норма продовження F не може бути меншою за норму самого функціонала f. Найбільшу цікавість викликають функціонали, які продовжуються на весь простір без збільшення норми. Існування таких функціоналів стверджує наступна теорема. Ми наводимо її без доведення, з яким можна ознайомитися самостійно. Теорема формулюється для нормованих просторів.

Теорема 7.3.3. (Гана-Банаха). Нехай X – лінійний нормований простір, X_0 – підпростір нормованого простору X. Тоді для довільного неперервного функціонала f, заданого на X_0, існує лінійний неперервний функціонал F, який є продовженням f на весь простір X та при цьому $\|F\| = \|f\|$.

7.4 Слабка збіжність у нормованих просторах

Існування лінійних неперервних функціоналів дозволяє розглянути поняття слабкої збіжності у нормованому просторі.

🗁 **Означення 7.4.1.** Нехай X – лінійний нормований простір. Послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ називається *слабко збіжною* до елемента $x_0 \in X$, якщо для будь-якого $f \in X^*$ $f(x_n) \to f(x_0)$.

Слабку збіжність послідовності позначають таким чином: $x_n \overset{\omega}{\to} x_0$. На відміну від слабкої, збіжність за нормою простору називають сильною збіжністю. Це легко пояснити, оскільки зі збіжності за нормою випливає слабка збіжність, тобто збіжність за нормою є «сильнішою»:

$$|f(x_n) - f(x_0)| \le \|f\|\|x_n - x_0\|.$$

Теорема 7.4.1. (необхідна умова слабкої збіжності). Якщо $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — слабко збіжна послідовність у нормованому просторі, тоді існує таке число C, що для всіх n $\|x_n\| \le C$. Інакше кажучи, будь-яка слабко збіжна послідовність у нормованому просторі обмежена.

Доведення. Розглянемо в X^* множини $A_{kn} = \{f: |f(x_n)| \le k\}, \quad k, n = 1,2,3, \dots$. Ці множини замкнені, оскільки якщо $f_i \in A_{kn}$ та $f_i \to f$, тоді $|f_i(x_n)| \le k$ та $|f(x_n)| \le k$, тобто $f \in A_{kn}$. Отже, замкненою (як перетин замкнених множин) буде і множина

$$A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{kn}.$$

В силу слабкої збіжності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, послідовність $f(x_n)$ обмежена для кожного $f \in E^*$, тому

$$X^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Оскільки простір X^* повний, тоді за теоремою Бера 1.9.3. хоча б одна з множин A_k, наприклад, A_{ko}, має бути щільною в деякій кулі $B_\varepsilon[f_o]$, а оскільки множина A_{ko} замкнена, тоді $B_\varepsilon[f_o] \subset A_{ko}$. Це означає, що послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ обмежена на кулі $B_\varepsilon[f_o]$, а отже, і на будь-якій кулі в X^*, зокрема, на одиничній кулі цього простору. Таким чином, послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ обмежена як послідовність елементів з X^{**}. Але в силу теореми 7.2.10. про вкладення нормованого простору у другий спряжений, це означає обмеженість $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ і в X .■

Наступна теорема часто буває корисна для фактичної перевірки слабкої збіжності тієї чи іншої послідовності.

Теорема 7.4.2. Послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ елементів нормованого простору X слабко збігається до $x \in X$, якщо:

1) $||x_n||$ обмежені в сукупності деякою константою M;

2) $f(x_n) \to f(x)$ для всякого $f \in \Delta$, де Δ — деяка множина, лінійна оболонка якої всюди щільна в X^*.

Доведення. З умови 2) і означення дій над лінійними функціоналами випливає, що якщо φ — лінійна комбінація функціоналів з Δ, то $\varphi(x_n) \to$

$\varphi(x)$. Нехай тепер φ — довільний елемент з X^* і $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — збіжна до φ послідовність лінійних комбінацій елементів з Δ. Покажемо, що $\varphi(x_n) \to \varphi(x)$. Це й буде означати слабку збіжність послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ за означенням.

Нехай M – така константа, що $\forall n \ \|x_n\| \le M$ і $\|x\| \le M$. Оцінимо різницю $|\varphi(x_n) \to \varphi(x)|$. Оскільки $\varphi_k \to \varphi$, тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке K, що $\|\varphi - \varphi_k\| < \varepsilon$ для всіх $k \ge K$.

Тому

$$|\varphi(x_n) - \varphi(x)| \le |\varphi(x_n) - \varphi_k(x_n)| + |\varphi_k(x_n) - \varphi_k(x)| + |\varphi_k(x) - \varphi(x)| \le$$
$$\le \|\varphi - \varphi_k\|\|x_n\| + |\varphi_k(x_n) - \varphi_k(x)| + \|\varphi - \varphi_k\|\|x\| <$$
$$< \varepsilon M + \varepsilon M + |\varphi_k(x_n) - \varphi_k(x)|.$$

Але, за умовою, $\varphi_k(x_n) \to \varphi_k(x)$ при $n \to \infty$, тобто при достатньо великих n $|\varphi_k(x_n) - \varphi_k(x)| < \varepsilon M$. Отже, $|\varphi(x_n) - \varphi(x)| < 3\varepsilon M$, тобто $\varphi(x_n) - \varphi(x) \to 0$ при $n \to \infty$ для будь-якого $\varphi \in X^*$. ■

Таким чином, для перевірки слабкої збіжності послідовності достатньо перевірити її обмеженість та збіжність $f(x_n) \to f(x)$ не для всіх функціоналів f, а лише для тих, які утворюють всюди щільний лінійний підпростір простору X^*. Ця теорема дає можливість сформулювати умови слабкої збіжності послідовності у конкретних нормованих просторах.

Розглянемо зміст поняття слабкої збіжності в деяких конкретних просторах.

Твердження 7.4.3. У скінченновимірному просторі $\mathbb{R}_p^m$ слабка збіжність збігається з сильною.

Доведення. Дійсно, нехай послідовність $x_n = (x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nm})$ слабко збігається до елемента $x_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0m})$.

Розглянемо так звані координатні функціонали $f_i(x) = \xi_i$ де $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m), i = 1,2, \dots, m$. Тоді $f_i(x_n) = x_{ni}$, $f_i(x_0) = x_{0i}$ і з означення слабкої збіжності випливає, що $f_i(x_n) = x_{ni} \to f_i(x_0) = x_{0i}$. Це означає покоординатну збіжність послідовності, яка, як відомо з п.1.6, є збіжністю за нормою у скінченновимірному просторі. ■

Твердження 7.4.4. Якщо у просторах l_p, $1 < p < \infty$ обмежена послідовність збігається покоординатно, вона збігається слабко.

Доведення. Знову розглянемо координатні функціонали $f_i(x) = \xi_i$, де $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i, \dots)$. За теоремою 7.2.6., кожний функціонал однозначно визначається елементом $e_i = \left(\underbrace{0,0, \dots,0}_{i-1}, 1,0, \dots\right) \in l_q = l_p{}^*$. Лінійні комбінації елементів e_i є всюди щільними в l_q (див. теорему 7.2.5.). Отже, за теоремою 7.4.2., слабка збіжність у просторі l_p – це покоординатна збіжність обмеженої послідовності. ■

Але слабка збіжність в l_p не збігається з сильною. Прикладом послідовності, яка збігається слабко, але не збігається сильно, є послідовність

елементів $e_n = \left(\underbrace{0,0,\dots,0}_{n-1}, 1,0,\dots\right)$. Покоординатно вона збігається до нуля, але за нормою не збігається, оскільки $\|e_n\| = 1 \nrightarrow 0$.

Розглянемо тепер слабку збіжність обмеженої послідовності у просторі неперервних функцій $C[a,b]$. В якості множини Δ вибирається сукупність лінійних функціоналів, кожний з яких є значенням функції в деякій фіксованій точці t_0: $\delta_{t_0}(x_n) = x_n(t_0)$. Для кожного такого функціонала умова $\delta_{t_0}(x_n) \to \delta_{t_0}(x)$ означає, що $x_n(t_0) \to x(t_0)$, тобто поточкову збіжність функціональної послідовності.

Твердження 7.4.5. У просторі $C[a,b]$ слабка збіжність послідовності збігається з поточковою.

🗒 **Приклад 7.4.6.** Розглянемо послідовність $x_n(t) = t^n - t^{2n}$ у просторі $C[0,1]$. Зрозуміло, що $|x_n(t)| = |t^n - t^{2n}| \le 2$, тобто послідовність є обмеженою. При будь-якому $t \in [0,1]$ $x_n(t) \to 0$ коли $n \to \infty$, тобто послідовність збігається слабко.

Перевіримо тепер сильну (рівномірну) збіжність до нуля цієї послідовності: $\|x_n - 0\| = \max\limits_{t\in[0,1]} |x_n(t)| = \max\limits_{t\in[0,1]} (t^n - t^{2n})$. Оскільки на кінцях відрізка $[0,1]$ функція $t^n - t^{2n}$ приймає значення нуль, свого максимуму вона досягає всередині відрізка. Точку екстремуму знайдемо за допомогою похідної: $(t^n - t^{2n})' = nt^{n-1}(1 - 2t^n) = 0$ при $t = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$. Отже, $\|x_n\| = \max\limits_{t\in[0,1]} (t^n - t^{2n}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \nrightarrow 0$ при $n \to \infty$, тобто послідовність не збігається до нуля за нормою простору $C[0,1]$.

Цей приклад показує, що слабка та сильна збіжність не еквівалентні у просторі неперервних функцій.

7.5 Слабка збіжність в нормованому просторі та компактність операторів

В п.6.3 ми познайомилися з поняттям компактного оператора. Виявляється, що критерій компактності оператора можна сформулювати в термінах слабко збіжних послідовностей.

Твердження 7.5.1. Нехай X, Y – банахові простори, Якщо оператор $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ є компактним тоді він будь-яку слабко збіжну послідовність простору X переводить в сильно збіжну послідовність простору Y.

✍ **Вправа 7.3.** Доведіть твердження 7.5.1. самостійно.

В якості слабко збіжної послідовності в таких просторах можна розглядати узагальнену систему Радемахера. Звичайна система Радемахера будується на відрізку $[0,1]$ наступним чином: $r_n(x) = sign(sin(2^n \pi x)), x \in [0;1], n = 0,1,2,3\dots$. Враховуючи, що функції, які майже скрізь збігаються, еквівалентні, можна вважати, що функції системи Радемахера приймають лише значення ± 1. Для визначеності будемо вважати, що $r_0(x) \equiv 1$, а при $n \ge 1$

$$r_n(x) = \begin{cases} 1, x \in \left[\frac{2k-2}{2^n}; \frac{2k-1}{2^n}\right), k = \overline{1, 2^{n-1}}; \\ -1, x \in \left[\frac{2k-1}{2^n}; \frac{2k}{2^n}\right), k = \overline{1, 2^{n-1}}. \end{cases}$$

Аналогічно можна побудувати узагальнену систему Радемахера, якщо замість відрізка $[0,1]$ розглядати довільну вимірну множину A. Ця множина розбивається на 2^m підмножин однакової міри, на яких функція почергово приймає значення ± 1. Відомо [7], що така узагальнена система слабко збігається до нуля у просторі $L_p[0,1],\ 1 < p < \infty$.

Цей результат допомагає встановити зв'язок між компактними та вузькими операторами.

Твердження 7.5.2. Будь-який компактний оператор $T \in L\left(L_p[0,1]\right)$ є вузьким.

Доведення. Нехай $\varepsilon > 0$ та A – довільна вимірна множина. Побудуємо на цій множині узагальнену систему Радемахера $\{r_m(A)\}_{m=1}^{\infty} \subset L_p[0,1]$, яка, за побудовою, задовольняє умовам з означення вузького оператора $r_m^2(A) = \chi_A$ та $\int_{[0,1]} r_m d\mu = 0$. Як зазначено вище, узагальнена система Радемахера слабко збігається до нуля, а компактний оператор T слабко збіжну послідовність переводить у сильно збіжну, тобто збіжну за нормою. Це означає, що $\|Tr_m\| \to 0$, тобто існує така функція r_m, для якої $\|Tr_m\| < \varepsilon$, що означає вузькість оператора T.

З цієї теореми випливає, що прикладами вузьких операторів у просторі $L_p[0,1], 1 < p < \infty$ будуть компактні оператори, зокрема, усі лінійні неперервні функціонали, оскільки вони є прикладами одновимірних операторів.

7.6 Питання для самоконтролю

- Дайте означення лінійного неперервного та лінійного обмеженого функціонала.
- Як визначається норма лінійного неперервного функціонала?
- Який простір називається спряженим? Як задається норма у спряженому просторі?
- Опишіть, який вигляд мають лінійні неперервні функціонали, задані на просторі $l_p,\ 1 < p < \infty$.
- Сформулюйте теорему Рісса про загальний вигляд лінійного неперервного функціонала у гільбертовому просторі.
- Сформулюйте теореми Банаха-Штейнгауза та Гана-Банаха.
- Дайте означення слабкої збіжності послідовності у нормованому просторі.
- Сформулюйте необхідну умову слабкої збіжності послідовності у нормованому просторі.
- Сформулюйте критерій слабкої збіжності послідовності у нормованому просторі.

- Який зміст слабкої збіжності у скінченновимірному просторі? У просторах $l_p,\ 1 < p < \infty$? У просторі $C[a,b]$?

- Як пов'язані між собою вузькі та компактні оператори, задані на просторах Лебега?

- Пояснити, чому лінійний неперервний функціонал на просторі $L_p[0,1], 1 < p < \infty$ є прикладом вузького оператора.

Задачі для самостійного розв'язання:

Задача 7.1. Знайти норму функціонала $f \in l_2^*$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots) \in l_2$, $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k + x_{k+1}}{2^k}$.

Задача 7.2. Дослідити послідовність елементів $x_n = \left(\underbrace{1, \dots, 1}_{n-1}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots\right)$ на слабку збіжність у l_2.

Задача 7.3. Перевірити лінійність, неперервність функціонала f, заданого на $C[0,1]$, якщо $f(x) = \int_0^1 t \cdot x(t)dt$ та знайти його норму.

8 ОБОРОТНІСТЬ ЛІНІЙНИХ НЕПЕРЕРВНИХ ОПЕРАТОРІВ

Існування оберненого відображення – це питання, на якому ґрунтується можливість розв'язання різноманітних рівнянь (диференціальних, інтегральних тощо). Розглянемо це питання для лінійних неперервних операторів.

8.1 Оборотність лінійних неперервних операторів

🗁 **Означення 8.1.1.** Нехай $A: X \to Y, B: Y \to Z$. *Добутком операторів* B та A називається оператор $BA: X \to Z$, який діє за правилом $(BA)x = B(Ax)$.

✍ **Вправа 8.1.** Показати, що якщо B та A – лінійні оператори, тоді їх добуток також буде лінійним оператором.

☝ **Зауваження 8.1.2.** Зауважимо, крім того, що добуток двох неперервних операторів є неперервним оператором як композиція неперервних відображень. Отже, якщо $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, $B \in \mathcal{L}(Y,Z)$, тоді $BA \in \mathcal{L}(X,Z)$. Неперервність добутку можна встановити іншим чином: для довільного $x \in X$

$$\|(BA)x\| \le \|B\|\|Ax\| \le \|B\|\|A\|\|x\|.$$

З цього випливає, по-перше, що оператор BA є обмеженим (неперервним), та, по-друге, оцінка $\|BA\| \le \|B\|\|A\|$.

Зрозуміло, що операція множення не є комутативною, тобто у загальному випадку $BA \neq AB$. У просторі $\mathcal{L}(X)$ будемо розглядати *одиничний (тотожний)* оператор $I: x \to x$.

🗁 **Означення 8.1.3.** *Алгебраїчним оберненим* до оператора $A: X \to Y$ називається оператор $A^{-1}: Y \to X$, який здійснює обернене відображення, тобто такий, що $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Відомо, що для існування оберненого відображення, заданого на області значень оператора A $R(A)$, необхідно та достатньо, щоб оператор A був ін'єкцією.

Твердження 8.1.4. Лінійний оператор $A: X \to Y$ є ін'єктивним (у нього існує алгебраїчний обернений) тоді та тільки тоді, коли його *ядро* $Ker\ A = \{x \in X: Ax = 0\}$ нульове, тобто $Ker\ A = \{0\}$.

Доведення. Зауважимо, що для лінійних операторів $A0 = 0$, тобто $0 \in Ker\ A$.

Необхідність. Нехай A – ін'єкція, тоді якщо $x \neq 0$, тоді й $Ax \neq A0 = 0$, тобто жоден ненульовий елемент не може належати ядру, значить, ядро нульове.

Достатність. Нехай $Ker\ A = \{0\}$. Розглянемо $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$. Тоді $x_1 - x_2 \neq 0$, тобто $x_1 - x_2 \notin Ker\ A$, що означає, що $A(x_1 - x_2) \neq 0$ або $Ax_1 \neq Ax_2$ і оператор A є ін'єктивним. ■

Отже, нульове ядро є критерієм існування алгебраїчного оберненого відображення A^{-1}. Навіть коли оператор має алгебраїчний обернений, він може бути заданий лише на множині значень оператора A, а не на всьому просторі Y. Згідно цього, виникає нове поняття.

🗁 **Означення 8.1.5.** Оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ називається *оборотним*, якщо він має алгебраїчний обернений оператор A^{-1}, який задано на всьому просторі Y. При цьому оператор A^{-1} називається *оберненим* оператором.

Оскільки існування алгебраїчного оберненого оператора рівносильне ін'єктивності, а існування оберненого відображення на всьому просторі Y – сюр'єктивності оператора A, оборотність оператора рівносильна його бієктивності. Тобто можна говорити, що оператор називається оборотним, якщо він є бієктивним, або якщо $Ker\ A = \{0\}$ та $R(A) = Y$.

Твердження 8.1.6. Оператор, обернений до лінійного, лінійний. Інакше кажучи, якщо A – лінійний оборотний оператор, тоді обернений оператор A^{-1} також лінійний.

Доведення. Нехай $A: X \to Y$ та $\forall\, x_1, x_2 \in X$ та $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ виконується умова $A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha A x_1 + \beta A x_2$. Якщо позначити $Ax_1 = y_1, Ax_2 = y_2$, тоді $A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha y_1 + \beta y_2$ або

$$\alpha x_1 + \beta x_2 = A^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2). \qquad (8.1)$$

Оскільки $Ax_1 = y_1$, $Ax_2 = y_2$, тоді $x_1 = A^{-1}y_1$, $x_2 = A^{-1}y_2$. Помножимо ці рівності на константи $\alpha x_1 = \alpha A^{-1} y_1, \beta x_2 = \beta A^{-1} y_2$ та додамо почленно:

$$\alpha x_1 + \beta x_2 = \alpha A^{-1} y_1 + \beta A^{-1} y_2. \qquad (8.2)$$

Порівнюючи праві частини виразів (8.1) та (8.2), отримаємо умову лінійності оператора A^{-1}: $A^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha A^{-1} y_1 + \beta A^{-1} y_2$. ■

Отже, властивість лінійності зберігається для оберненого оператора. Натомість неперервність (обмеженість) оберненого оператора має місце не завжди.

🗁 **Означення 8.1.7.** Оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ називається *неперервно оборотним*, якщо він оборотний та обернений оператор є A^{-1} є неперервним, тобто якщо $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.

Твердження 8.1.8. (критерій неперервної оборотності оператора). Оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ з $R(A) = Y$ неперервно оборотний тоді та тільки тоді, коли $\exists\, m > 0\ \ \forall x \in X\ \ \|Ax\| \geq m\|x\|$.

Доведення. Необхідність. Нехай існує обернений оператор $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$. Тоді $\forall y \in Y \ \|A^{-1}y\| \le \|A^{-1}\|\|y\|$. Оскільки A – бієкція, для кожного $y \in Y$ існує єдиний елемент $x \in X$, що $y = Ax$. Підставимо цей елемент в останню нерівність та отримаємо потрібну умову: $\|A^{-1}Ax\| \le \|A^{-1}\|\|Ax\|$ або $\|A^{-1}\|^{-1}\|x\| \le \|Ax\|$ з константою $m = \|A^{-1}\|^{-1}$.

Достатність. З умови $\|Ax\| \ge m\|x\|$ випливає, що при $Ax = 0 \quad x = 0$, тобто ядро оператора A – нульове. Отже, існує алгебраїчний обернений оператор A^{-1}. Оскільки $R(A) = Y$, оператор A – оборотний. Підставимо в умову твердження $x = A^{-1}y$: $\|AA^{-1}y\| \ge m\|A^{-1}y\|$ або $\frac{1}{m}\|y\| \ge \|A^{-1}y\|$, що означає неперервність оберненого оператора та доводить достатність твердження. ■

8.2 Теорема Банаха про обернений оператор

Зауважимо, що поняття оборотності та неперервної оборотності не еквівалентні. Обернений оператор може існувати, але не бути неперервним. Але є клас просторів, в яких ці два поняття збігаються, тобто оборотність оператора гарантує його неперервну оборотність. Відповідний результат встановлює наступна теорема.

Теорема 8.2.1. (Банаха про обернений оператор). Нехай X, Y – банахові простори. Якщо оператор $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ – бієктивний, він неперервно оборотний. Інакше кажучи, з оборотності лінійного неперервного оператора, який діє між банаховими просторами, випливає його неперервна оборотність.

Доведення. З умови теореми випливає існування оберненого оператора $A^{-1}: Y \to X$. Необхідно довести лише його обмеженість. Розглянемо множини $Y_n = \{y \in Y: \|A^{-1}y\| \le n\|y\|\}$. Зрозуміло, що $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$, оскільки кожний ненульовий елемент $y \in Y$ потрапляє в деяку множину Y_n, де в якості n вибирається найменше натуральне число, яке перебільшує $\|A^{-1}y\|/\|y\|$. Оскільки простір Y – банаховий (повний), з теореми 2.3.1. (Бера) випливає, що принаймні одна з множин Y_n є всюди щільною в Y. Позначимо її через Y_m. Отже, Y_m – всюди щільна в Y.

Виберемо $y \in Y$. Нехай $\|y\| = r$. Оскільки множина $B_r[0] \cap Y_m$ є всюди щільною підмножиною кулі $B_r[0]$, в цій множині знайдеться такий елемент y_1 ($y_1 \in Y_m$, $\|y_1\| \le r$), що $\|y - y_1\| < \frac{r}{2}$. Множина $B_{\frac{r}{2}}[0] \cap Y_m$ є всюди щільною підмножиною кулі $B_{\frac{r}{2}}[0]$, значить, в цій множині знайдеться такий елемент y_2 ($y_2 \in Y_m$, $\|y_2\| \le \frac{r}{2}$), що $\|(y - y_1) - y_2\| < \frac{r}{2^2}$. Продовжуючи цей процес, побудуємо послідовність $\{y_k\}_{k=1}^{\infty} \subset Y_m$, для якої $\|y_k\| \le \frac{r}{2^{k-1}}$ та $\|y - (y_1 + y_2 + \cdots + y_k)\| < \frac{r}{2^k}$.

Таким чином, отримуємо, що $y = \lim\limits_{n} \sum_{k=1}^{n} y_k$. Покладемо $x_k = A^{-1}y_k$. Тоді $\|x_k\| \le \|A^{-1}y_k\| \le m\|y_k\| \le \frac{mr}{2^{k-1}}$. Це означає, що послідовність $\{\sum_{k=1}^{n} x_k\}_{n=1}^{\infty}$ збігається до деякого елемента x у просторі X.

Дійсно, оскільки

$$\left\|\sum_{k=1}^{n+p} x_k - \sum_{k=1}^{n} x_k\right\| = \left\|\sum_{k=n+1}^{n+p} x_k\right\| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{mr}{2^{k-1}} < \frac{mr}{2^{n-1}},$$

послідовність $\{\sum_{k=1}^{n} x_k\}_{n=1}^{\infty}$ є фундаментальною. Але простір X – банаховий, тобто в X існує $x = \lim\limits_n \sum_{k=1}^{n} x_k$. Оскільки оператор A – лінійний та неперервний,

$$Ax = A\left(\lim_n \sum_{k=1}^{n} x_k\right) = \lim_n \sum_{k=1}^{n} Ax_k = \lim_n \sum_{k=1}^{n} y_k = y.$$

Звідси випливає, що

$$\|A^{-1}y\| = \|x\| = \lim_n \left\|\sum_{k=1}^{n} x_k\right\| \le \lim_n \sum_{k=1}^{n} \|x_k\| \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{mr}{2^{k-1}} = 2mr = 2m\|y\|.$$

Оскільки y – довільний елемент простору Y, обмеженість (неперервність) оператора A доведено. ■

Приклад 8.2.2. Розглянемо існування неперервного оберненого оператора до оператора $A \in \mathcal{L}(l_2)$, якщо:

а) $x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)$, $Ax = (x_1 + x_2, x_2, x_3, \dots)$;

б) $x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)$, $Ax = (0, x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)$.

а) Перевіримо, чи здійснює оператор A ін'єктивне відображення. Для цього знайдемо ядро оператора, тобто розв'яжемо рівняння $Ax = 0$:

$$(x_1 + x_2, x_2, x_3, \dots) = (0,0,0, \dots).$$

Це рівняння рівносильне нескінченній системі рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_n = 0, n \ge 2 \end{cases}.$$

Зрозуміло, що ця система має тільки нульовий розв'язок, тобто $\forall n \ x_n = 0$ або $x = 0$. Отже, $Ker\ A = \{0\}$.

Перевіримо, чи буде оператор A сюр'єктивним, тобто чи дорівнює образ простору l_2 всьому l_2. Інакше кажучи, треба перевірити, чи має рівняння $Ax = y$ розв'язок у просторі l_2 при будь-якій правій частині $y \in l_2$.

Нехай $y = (y_1, y_2, y_3, \dots)$ – довільний елемент простору l_2. Рівняння $Ax = y$ буде рівносильним нескінченній системі рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = y_1 \\ x_n = y_n, n \ge 2 \end{cases}$$

Розв'язком цієї системи буде елемент

$$x_0 = (y_1 - y_2, y_2, y_3, \dots).$$

Доведемо, що цей x_0 дійсно належить просторові l_2:

$(y_1 - y_2)^2 + \sum_{i=2}^{\infty} y_i^2 < \infty$, тому що $y \in l_2$.

Отже, $R(A) = l_2$, тобто A є бієктивним оператором. Відомо, що простір l_2 є банаховим, тобто до оператора A можна застосувати теорему Банаха про обернений оператор та стверджувати, що A є неперервно оборотним оператором.

При цьому оператор A^{-1} було отримано при розв'язанні рівняння $Ax = y$, яке рівносильне рівнянню $x = A^{-1}y$, тобто обернений оператор діє так:

$$A^{-1}y = (y_1 - y_2, y_2, y_3, \dots).$$

б) Доведемо, що цей оператор не є сюр'єктивним відображенням. Дійсно, розв'яжемо рівняння $Ax = y$, де y – довільний елемент з простору l_2.

Це рівняння перепишемо у вигляді:

$$(0, x_1, x_2, \dots, x_i, \dots) = (y_1, y_2, y_3, \dots).$$

Зрозуміло, що воно буде мати розв'язок тоді та тільки тоді, коли $y_1 = 0$. Але y – довільний елемент простору l_2, тобто перша координата y_1 може бути будь-яким дійсним числом. З цього випливає, що ті елементи $y \in l_2$, у яких перша координата ненульова, не належать образу $R(A)$, тобто $R(A)$ є підпростором простору l_2, але $R(A) \neq l_2$. Дійсно, ніякий елемент $x \in l_2$ під дією оператора A не перейде в елемент, наприклад, $y = (1,0,0, \dots)$. Отже, A не є сюр'єкцією, тобто не існує оберненого відображення $A^{-1}: l_2 \to l_2$ та оператор A не має оберненого оператора.

Твердження 8.2.3. Нехай $A: l_2 \to l_2$, де $x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)$, $Ax = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \alpha_3 x_3, \dots)$, де $\sup_k |\alpha_k| < \infty$. Оператор A має неперервний обернений тоді та тільки тоді, коли $\inf_k |\alpha_k| > 0$.

Доведення. Необхідність. Припустимо супротивне, тобто що $\inf_k |\alpha_k| = 0$. Тоді $\forall \varepsilon > 0 \ \exists k: |\alpha_k| < \varepsilon$. В якості числа $\varepsilon > 0$ будемо вибирати числа вигляду $\varepsilon = \frac{1}{m}$, тоді $\forall m \ \exists k: |\alpha_{k_m}| < \frac{1}{m}$. Інакше кажучи, ми вибрали нескінченно малу підпослідовність послідовності $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$. Оскільки, за умовою, оператор має неперервний обернений, рівняння $Ax = y$ має єдиний розв'язок у просторі l_2 при довільній правій частині $y = (y_1, y_2, y_3, \dots) \in l_2$. Це означає, що для кожного елемента $y \in l_2$ існує елемент $x = \left(\frac{y_1}{\alpha_1}, \frac{y_2}{\alpha_2}, \frac{y_3}{\alpha_3}, \dots\right) \in l_2$, тобто такий, для якого $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k^2}{\alpha_k^2} < \infty$. Виберемо в якості $y \in l_2$ елемент, у якого на k_m -х місцях будуть стояти числа $\frac{1}{m}$, а на усіх інших місцях – нулі: $y = \left(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, \frac{1}{2}, 0, \dots, 0, \frac{1}{3}, 0, \dots, 0, \frac{1}{m}, 0, \dots\right) \in l_2$. Тоді відповідний елемент x буде мати вигляд: $x = \left(0, \dots, 0, \frac{1}{\alpha_{k_1}}, 0, \dots, 0, \frac{1}{2\alpha_{k_2}}, 0, \dots, 0, \frac{1}{3\alpha_{k_3}}, 0, \dots, 0, \frac{1}{m\alpha_{k_m}}, 0, \dots\right)$. Але ряд $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2 \alpha_{k_m}^2}$ буде розбіжним, оскільки, завдяки вибору $|\alpha_{k_m}| < \frac{1}{m}$, загальний член цього ряду буде більшим за 1. Це означає, що x не належить просторові l_2, тобто заперечує оборотність оператора A.

Достатність. Нехай $\inf_k |\alpha_k| > 0$. Це означає, що $\forall k \ \ \alpha_k \neq 0$. Оскільки простір l_2, в якому діє оператор, є банаховим, для неперервної оборотності оператора достатньо довести його бієктивність. Зрозуміло, що ядро оператора A буде нульовим, оскільки умова $Ax = 0$ рівносильна системі рівнянь $\alpha_k x_k = 0$ $\forall k$, тобто $x_k = 0 \ \ \forall k$ (оскільки $\alpha_k \neq 0$). Це означає ін'єктивність оператора A.

Покажемо його сюр'єктивність, тобто покажемо, що рівняння $Ax = y$ має єдиний розв'язок у просторі l_2 при довільній правій частині $y =$

$(y_1, y_2, y_3, \dots) \in l_2$. Зрозуміло, що розв'язком такого рівняння буде елемент $x = \left(\frac{y_1}{\alpha_1}, \frac{y_2}{\alpha_2}, \frac{y_3}{\alpha_3}, \dots\right)$. Позначимо $\inf_k|\alpha_k| = \alpha > 0$, тобто $\alpha_k \geq \alpha \ \ \forall k$. Тоді $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k^2}{\alpha_k^2} \leq \frac{1}{\alpha^2}\sum_{k=1}^{\infty} y_k^2 < \infty$, оскільки $y \in l_2$. Отже, оператор A здійснює бієктивне відображення та є неперервно оборотним, що й потрібно було довести. ■

Окремо слід зауважити, що в цьому прикладі мається на увазі, що $\sup_k|\alpha_k| < \infty$, інакше оператор не буде задано на всьому l_2.

Твердження 8.2.3. дає дуже зручний критерій неперервної оборотності великого класу операторів, заданих у просторі l_2. Наприклад, оператор $Ax = (x_1, -x_2, x_3, -x_4, \dots, (-1)^k x_k, \dots)$, буде неперервно оборотним, тому що $\inf_k|\alpha_k| = \inf_k\left|(-1)^k\right| = 1 > 0$. А оператор $Ax = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots, \frac{x_k}{k}, \dots\right)$ не буде неперервно оборотним, тому що $\inf_k \frac{1}{k} = 0$.

8.3 Спектр та резольвента лінійних неперервних операторів

Нехай X – лінійний нормований простір, A – лінійний неперервний оператор у ньому.

🗁 **Означення 8.3.1.** Ненульовий вектор $\phi \in X$ назвемо власним вектором оператора A, який відповідає власному значенню $\lambda \in \mathbb{C}$, якщо $A\phi = \lambda\phi$.

🗁 **Означення 8.3.2.** Нехай X – лінійний нормований простір, $A \in \mathcal{L}(X)$. Регулярною точкою оператора A називається число $\lambda \in \mathbb{C}$ таке, що оператор $A - \lambda I$ неперервно оборотний. Сукупність регулярних точек оператора називається його резольвентною множиною та позначається $\rho(A)$. При цьому оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ називається резольвентою оператора та позначається R_λ або $R_\lambda(A)$.

🗁 **Означення 8.3.3.** Доповнення (у комплексній площині) до множини $\rho(A)$ усіх регулярних точок оператора A називається спектром оператора A та позначається $\sigma(A)$.

Якщо X – скінченновимірний простір, тоді неперервна оборотність оператора $A - \lambda I$ рівносильна тому, що $Ker(A - \lambda I) = \{0\}$. Тому у випадку $dim\, X < \infty$ точка λ входить у $\sigma(A)$ в тому і тільки в тому випадку, коли має ненульовий розв'язок рівняння $(A - \lambda I)\phi = 0$. Таким чином, у випадку $dim\, X < \infty$ означення спектра оператора A збігається з відомим з лінійної алгебри означенням спектра як сукупності усіх власних значень оператора.

Нагадаємо, що якщо цей обернений оператор існує, тоді він буде неперервним завдяки теоремі Банаха про обернений оператор. Отже, якщо існує обмежений оператор $(A - \lambda I)^{-1}$, тобто λ є регулярною точкою, тоді сукупність таких λ утворює резольвентну множину оператора A.

Якщо рівняння $Ax = \lambda x$ має ненульовий розв'язок, тобто λ є власним значенням для A, оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ при цьому λ не існує, а сукупність таких таких λ утворює точковий спектр оператора A . Нарешті, якщо оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ існує, але заданий не на всьому просторі X, тобто $R(A - \lambda I) \subset X$, тоді можливі 2 ситуації: якщо $\overline{R(A - \lambda I)} = X$, говорять, що λ належить

неперервній частині спектра, а якщо $\overline{R(A-\lambda I)} \neq X$, λ належить залишковій частині спектра.

Відомо, що спектр будь-якого лінійного неперервного оператора є непорожньою множиною. Більш того, має місце наступний факт [5].

Твердження 8.3.4. Спектр лінійного неперервного оператора A є замкненою підмножиною кола $\{\lambda \in C \big| |\lambda| \leq \|A\|\} = B_{\|A\|}[0]$.

□ **Приклад 8.3.5.** Знайдемо в просторі $L_2[0,1]$ спектр оператора $(Ax)(t) = t \cdot x(t)$, де $t \in [0,1]$.

Спочатку шукаємо точковий спектр. Розглянемо рівняння $(Ax)(t) = \lambda x(t)$ або $(A-\lambda I)x(t) = 0$, тобто $(t-\lambda)x(t) = 0, \forall t \in [0,1]$. Звідси випливає, що $x(t) = 0$ для всіх $t \in [0,1]$, відмінних від λ, та приймає довільне значення при $t = \lambda$. Оскільки дві функції простору $L_2[0,1]$, що дорівнюють одна одній майже скрізь, належать одному класу еквівалентності, $x(t)$ є нульовим елементом простору.

Таким чином, при довільних $\lambda \in \mathbb{C}$ рівняння $(A-\lambda I)x(t) = 0$ має тільки нульовий розв'язок. Отже, для всіх $\lambda \in \mathbb{C}$ $Ker(A-\lambda I) = \{0\}$, а це значить, що $A-\lambda I$ має алгебраїчний обернений оператор, а точковий спектр – порожній.

З'ясуємо тепер, коли обернений оператор задано на всьому просторі, тобто для довільного $y \in L_2[0,1]$ розв'яжемо рівняння $(A-\lambda I)x = y$, яке в нашому випадку має вигляд $(t-\lambda)x(t) = y(t), \forall t \in [0,1]$.

Зрозуміло, що обернений до $A-\lambda I$ оператор задається формулою

$$(A-\lambda I)^{-1}y(t) = \frac{y(t)}{t-\lambda}.$$

Якщо $\lambda \in \mathbb{C}$ не належить відрізку $[0,1]$, тоді знайдеться додатне число δ таке, що $\forall t \in [0,1]$ виконується нерівність $|t-\lambda| \geq \delta > 0$. Тому

$$\|x(t)\| = \left\|\frac{y(t)}{t-\lambda}\right\| = \sqrt{\int\limits_{[0,1]} \left|\frac{y(t)}{t-\lambda}\right|^2 d\mu(t)} \leq \frac{1}{\delta}\sqrt{\int\limits_{[0,1]} |y(t)|^2 d\mu(t)} = \frac{1}{\delta}\|y\| < \infty$$

у просторі $L_2[0,1]$, тобто $\forall \lambda \in \mathbb{C}\backslash[0,1]$ $R(A-\lambda I) = L_2[0,1]$ і $\lambda \in \mathbb{C}\backslash[0,1]$ є регулярним значенням оператора A.

Якщо $\lambda \in \mathbb{C}$ належить замкненому відрізку $[0,1]$, тоді оператор $(A-\lambda I)^{-1}$ не визначений, наприклад, на функції $y \equiv 1$. Дійсно, в цьому випадку $x(t) = \frac{1}{t-\lambda}$ не належить простору $L_2[0,1]$, оскільки інтеграл не існує:

$$\int_{[0,1]} |x(t)|^2 d\mu(t) = \int_0^1 \frac{dt}{(t-\lambda)^2} = \infty.$$

Отже, $\forall \lambda \in [0,1]$ оператор $(A-\lambda I)^{-1}$ визначений не на всьому просторі $L_2[0,1]$. Таким чином, спектр оператора A – це відрізок $[0,1]$.

Приклад 8.3.6. Знайдемо спектр оператора $Ax = (x_2, x_3, x_4, \dots)$ у просторі l_2. Знайдемо спочатку точковий спектр оператора A. Розглянемо рівняння $(Ax)(t) = \lambda x(t)$, тобто $(x_2, x_3, x_4, \dots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \dots)$. Це рівняння рівносильне наступній системі лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_2 = \lambda x_1, \\ x_3 = \lambda x_2 = \lambda^2 x_1, \\ \dots \\ x_{n+1} = \lambda x_n = \lambda^n x_1, \\ \dots \end{cases}$$

Тобто ядру $Ker(A - \lambda I)$ належить елемент x, що має вигляд $x = x_1(1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \dots)$, де x_1 – довільне число. Цей елемент належить простору l_2 тоді та тільки тоді, коли ряд $\sum_{k=0}^{\infty} |\lambda|^k$ буде збіжним, тобто за умови $|\lambda| < 1$.

Отже, при $|\lambda| < 1$ $Ker(A - \lambda I) \neq \{0\}$, а це значить, що такі λ – точки спектра оператора A. Згідно з твердженням 8.3.4., спектр оператора є замкненою підмножиною круга $\{\lambda \in C \big| |\lambda| \leq \|A\|\} = B_{\|A\|}[0]$. Покажемо, що $\|A\| = 1$. Дійсно, оскільки $\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \frac{\sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} |x_k|^2}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2}} \leq 1$, $\|A\| = \sup\limits_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq 1$. При цьому супремум досягається на елементі $x = (0,1,0,0, \dots)$, на якому $\|Ax\| = \|x\|$. Отже, $\|A\| = 1$, і це означає, що спектр оператора є замкненою підмножиною одиничного круга $B_1[0]$ комплексної площини. Тобто жодне число λ, для якого $|\lambda| > 1$, не може належати спектру.

Зауважимо, що умова $|\lambda| < 1$ характеризує відкриту одиничну кулю $B_1(0)$ на комплексній множині. З вищесказаного випливає, що $B_1(0) \subseteq \sigma(A) \subseteq B_1[0]$. З властивостей операції замикання [9] та замкненості спектра випливає, що $B_1[0] = \overline{B_1(0)} \subseteq \sigma(A) \subseteq B_1[0]$, або $\sigma(A) = B_1[0]$. Тобто спектр оператора утворюють всі точки замкненого одиничного круга на комплексній множині.

8.4 Питання для самоконтролю

- Дайте означення добутку двох операторів.
- Дайте означення алгебраїчної оборотності оператора та її критерій.
- Який оператор називається оборотним?
- Дайте означення неперервно оборотного оператора.
- Сформулюйте теорему Банаха про обернений оператор.
- В яких просторах поняття оборотності та неперервної оборотності еквівалентні?
- Охарактеризуйте структуру спектра лінійного неперервного оператора.
- Що таке резольвента?

Задачі для самостійного розв'язання:

8.2. Нехай $A \in \mathcal{L}(C[0,1])$, $(Ax)(t) = \int_0^t x(s)ds$. Довести, що $Ker\, A = \{0\}$, $R(A) \neq C[0,1]$ та A не має неперервного оберненого оператора.

8.3. Нехай $C_0^1[0,1]$ – простір неперервно-диференційовних на $[0,1]$ функцій $x(t)$, для яких $x(0) = 0$ з нормою $\|x\| = \max_{t \in [0,1]} |x(t)| + \max_{t \in [0,1]} |x'(t)|$.

Довести, що існує неперервний обернений до оператора $A: C[0,1] \to C_0^1[0,1]$ та знайти його, якщо $(Ax)(t) = x'(t) - 3t^2x(t)$.

8.4. В банаховому просторі $C[0,1]$ задано оператори $(Ax)(t) = (t+1)x(t)$, $(Bx)(t) = x(t^2)$. Знайти $(AB)^{-1}, (BA)^{-1}$.

8.5. Нехай $A \in \mathcal{L}(l_1)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)$, $Ax = \left(x_1 - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} x_n, x_2, x_3, \dots\right)$. Довести, що оператор A є неперервно оборотним та знайти обернений оператор.

8.6. Нехай $A \in \mathcal{L}(l_2)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)$, $Ax = \left(x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, \dots\right)$. Довести, що цей оператор є оборотним, але не є неперервно оборотним.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Заболоцький М.В., Сторож О.Г., Тарасюк С.І. Математичний аналіз : підруч. затвердж. МОНУ. Київ : Знання, 2008. 424 с.
2. Федак І.В. Курс лекцій з іункціонального аналізу та теорії міри. Навчальний посібник. Ч.3. Основні структури функціонального аналізу. Івано-Франківськ : ПНУ імені В. Стефаника, 2020, 48 с.
3. Радченко В.М. Курс теорії міри та інтеграла. Київ : КНУ, 2015. 118 с.
4. Popov M., Randrianantoanina B. Narrow Operators on Function Spaces and Vector Lattices. Berlin-Boston : De Gruyter, 2013. 317 p.
5. Березанський Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г. Функціональний аналіз. Львів : Чижиков І.Е., 2014. 589 с.
6. Кадець В.М. Курс функціонального аналізу та теорії міри. Львів : Чижиков І.Е., 2014. 558 с.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Банах С. Курс функціонального аналізу (лінійні операції). Київ : Радянська школа, 1948. 216 с.
2. Сторож О.Г. Збірник задач з теорії міри та функціонального аналізу. Львів: Видавець І. Чижиков, 2011. – 152с.
3. Кадець В.М. Курс функціонального аналізу та теорії міри. Львів : Чижиков І.Е., 2014. 558 с.
4. Березанський Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г. Функціональний аналіз. Львів : Чижиков І.Е., 2014. 589 с.
5. Abramovich Y.A., Aliprantis C.D. An invitation to operator theory // Graduate Studies in Math. Providence, RI : AMS, 2002, 51. XIV. 530 p.
6. Красікова І. В., Д'яченко Н. М. Функціональний аналіз та теорія міри й інтеграла : методичні рекомендації до самостійної роботи для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра спеціальності «Математика» освітньо-професійної програми «Математика». Запоріжжя : ЗНУ, 2020. 70 с.
7. Дюженкова Л.І., Колесник Т.В., Лященко М.А. [та ін.] Математичний аналіз у задачах і прикладах : навч. посіб. для студ. вищ. пед. навч. закл. доп. МОНУ. Ч.2. Київ : Вища школа, 2003. 470 с.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

(українською мовою)

Красікова Ірина Володимирівна

Д'яченко Наталія Миколаївна

ФУНКЦІОНАЛЬНИЙ АНАЛІЗ

Навчальний посібник
для здобувачів вищої освіти бакалавра
спеціальності «Математика»
освітньо-професійної програми «Математика»

Рецензент *С.І. Гоменюк*
Відповідальний за випуск *С.М. Гребенюк*
Коректор *І.В. Красікова*