МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра фундаментальної та прикладної математики

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА БАКАЛАВРА

на тему: **«РОЗВ'ЯЗАННЯ ДВОВИМІРНОЇ ЗАДАЧІ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПОРИСТОГО МАТЕРІАЛУ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ»**

Виконав: студент 4 курсу, групи 6.1132

спеціальності 113 Прикладна математика
(шифр і назва спеціальності)

освітньої програми Комп'ютерне моделювання
(назва освітньої програми)

К.Р. Крамарчук
(ініціали та прізвище)

Керівник завідувач кафедри фундаментальної та прикладної математики, професор, д.т.н. Гребенюк С.М.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Рецензент декан математичного факультету, професор, д.т.н. Гоменюк С.І.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Запоріжжя – 2026

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет математичний

Кафедра фундаментальної та прикладної математики

Рівень вищої освіти бакалавр

Спеціальність 113 Прикладна математика
(шифр і назва)

Освітня програма Комп'ютерне моделювання

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри
фундаментальної та прикладної
математики, професор, д.т.н.

_____ Гребенюк С.М.
(підпис)

« ____ » _____ 2026 р.

ЗАВДАННЯ
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТУ

Крамарчук Катерині Романівні
(прізвище, ім'я та по-батькові)

1. Тема роботи (проекту) Розв'язання двовимірної задачі пружності для пористого матеріалу методом скінченних елементів

керівник роботи (проекту) Гребенюк Сергій Миколайович, професор, д.т.н.
(прізвище, ім'я та по-батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом ЗНУ від « 02 » грудня 2025 року № 1741-с

2. Строк подання студентом роботи 28.05.2026

3. Вихідні дані до роботи 1. Постановка задачі.
2. Перелік літератури.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень)
Презентація

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання 29.12.2026

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів кваліфікаційної роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	Розробка плану роботи.	09.02.2026	
2.	Збір вихідних даних.	02.03.2026	
3.	Розробка першого розділу.	30.03.2026	
4.	Розробка другого розділу.	20.04.2026	
5.	Розробка третього розділу.	18.05.2026	
6.	Оформлення та нормоконтроль	28.05.2026	
	кваліфікаційної роботи.		
7.	Захист кваліфікаційної роботи.	19.06.2026	

Студент _____ К. Р. Крамарчук
(підпис) (ініціали та прізвище)

Керівник роботи _____ С. М. Гребенюк
(підпис) (ініціали та прізвище)

Нормоконтроль пройдено

Нормоконтролер _____ О. Г. Спиця

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота бакалавра «Розв’язання двовимірної задачі пружності для пористого матеріалу методом скінченних елементів»: 42 с., 11 рис., 2 табл., 22 джерела.

ДЕФОРМАЦІЯ, МЕТОД СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ, НАПРУЖЕННЯ, ПОРИСТІСТЬ, ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ, ФУНКЦІЇ ФОРМИ.

Об’єкт дослідження – метод скінченних елементів для розв’язання двовимірних задач механіки пористих матеріалів.

Мета роботи: на основі аналітичних співвідношень методу скінченних елементів для пористих матеріалів отримати розв’язок двовимірної задачі теорії пружності для пористого матеріалу.

Метод дослідження – аналітичний, чисельний, порівняльний.

У кваліфікаційній роботі наведено огляд підходів до математичного моделювання властивостей пористих матеріалів, проведено аналіз методів розв’язання крайових задач для тіл пористої структури. Отримано основні співвідношення двовимірного методу скінченних елементів для пористого матеріалу.

За допомогою програмної реалізації цього підходу змодельовано геометрію, властивості матеріалу та крайові умови для конструкції із пористого матеріалу й отримано розв’язок двовимірної крайової задачі. Проведено дослідження залежності напружено-деформованого стану конструкції від пористості матеріалу.

SUMMARY

Bachelor’s Qualifying Theses "Solving a Two-dimensional Elasticity Problem for a Porous Material Using the Finite Element Method": 42 pages, 11 figures, 2 tables, 22 sources.

DEFORMATION, FINITE ELEMENT METHOD, STRESS, POROSITY, SHAPE FUNCTIONS, SOFTWARE IMPLEMENTATION.

The object of research is the finite element method for solving two-dimensional problems of the mechanics of porous materials.

The purpose of the work: based on the analytical relations of the finite element method for porous materials, to obtain a solution to a two-dimensional problem of the theory of elasticity for a porous material.

The research method is analytical, numerical, comparative.

The qualification work provides an overview of approaches to mathematical modeling of the properties of porous materials, an analysis of methods for solving boundary value problems for bodies of a porous structure is carried out. The main relations of the two-dimensional finite element method for a porous material are obtained.

Using the software implementation of this approach, the geometry, material properties, and boundary conditions for a structure made of porous material were modeled and a solution to a two-dimensional boundary value problem was obtained. The dependence of the stress-strain state of the structure on the porosity of the material was studied.

ЗМІСТ

Завдання на кваліфікаційну роботу 2
Реферат 4
Summary 5
Перелік умовних позначень, скорочень і термінів 7
Вступ 8
1 Математичне моделювання механічних процесів у пористих матеріалах .. 11
1.1 Ефективні характеристики пористих матеріалів 11
1.2 Метод скінченних елементів у крайових задачах механіки пористих матеріалів 14
1.3 Висновки до розділу 1 16
2 Основні співвідношення методу скінченних елементів для пористих матеріалів 18
2.1 Постановка задачі та основні співвідношення 18
2.2 Побудова матриці жорсткості чотирикутного скінченного елементу 21
2.3 Висновки до розділу 2 30
3 Розв’язання плоскої задачі механіки деформівного твердого тіла для пористих матеріалів методом скінченних елементів 31
3.1 Постановки задач 31
3.2 Застосування методу скінченних елементів до визначення напружено-деформованого стану балок із пористого матеріалу 32
3.3 Висновки до розділу 3 36
Висновки 38
Перелік посилань 40

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ, СКОРОЧЕНЬ І ТЕРМІНІВ

МГЕ – метод граничних елементів

МСЕ – метод скінченних елементів

МСР – метод скінченних різниць

САПР – системи автоматизованого проєктування робіт

СЕ – скінченний елемент

ВСТУП

На сучасному етапі розвитку науки і техніки при створенні нових конструктивних елементів традиційні конструкційні матеріали поступово замінюються новими матеріалами, до яких в тому числі відносяться неоднорідні матеріали. Їх застосування дозволяє варіювати діапазонами властивостей матеріалу, і за рахунок підбору параметрів матеріалу підібрати необхідний набір властивостей. До таких неоднорідних матеріалів відносяться композиційні та пористі матеріали.

Композиційні матеріали складаються із двох та більшої кількості компонентів. Пористим матеріалам притаманна наявність чітко виражених порожнеч. Ці порожнечі можуть бути поєднані між собою у матеріалі матриці (суцільному матеріалі), або ж ізольовані одна від одної. Кількісними характеристиками наявності пор у суцільному матеріалі є дві характеристики – пористість та відносна щільність. Пористість – відношення об’єму пор до загального об’єму всього матеріалу. Відносна щільність пористого матеріалу – це безрозмірна величина, яка дорівнює відношенню щільності пористого матеріалу до щільності його суцільної матриці.

При необхідності точного математичного моделювання такого матеріалу виникає багато складнощів, пов’язаних із необхідністю опису як форми та розмірів кожної окремої пори, так і її розташування у матеріалі матриці. Для сучасних конструктивних елементів, коли у матеріалі налічуються тисячі пор такий підхід є громіздким і недоцільним.

При розв’язанні практичних задач для моделювання властивостей пористого матеріалу використовують інший підхід, який полягає в уявній заміні неоднорідного матеріалу неіснуючим однорідним із механічними властивостями, що враховують наявність та об’єм пор у матеріалі. Отримані для такого матеріалу механічні властивості називають ефективними.

Після такої заміни (гомогенізації) у подальших розрахунках можна

використовувати ефективні характеристики гомогенізованого матеріалу. Як правило, після гомогенізований матеріал залишається ізотропним або квазіізотропним.

Після проведення етапу гомогенізації маємо однорідний матеріал, властивості якого описуються традиційним набором констант механіки деформівного твердого тіла, хоча й отриманих специфічним способом (ефективних пружних сталих).

В цьому випадку при розв’язанні крайових задач для такого матеріалу можемо застосовувати традиційні методи механіки деформівного твердого тіла.

Деякі постановки двовимірних задач, наприклад, вісесиметричні задачі, дають можливість застосовувати аналітичні методи, які дають точний розв’язок задачі.

Але необхідність розв’язання таких задач виникає досить нечасто, і, як правило, практичні постановки задач не дають можливості розрахунків аналітичними методами. Тому більша частина задач розв’язується за допомогою систем автоматизованого проєктування робіт (САПР), які базуються на застосуванні чисельних методів, таких як метод скінченних елементів (МСЕ), метод скінченних різниць (МСР), метод граничних елементів (МГЕ) та інших.

Із зазначених методів найбільш поширеним чисельним методом є метод чкінченних елементів, основною ідеєю якого є побудова дискретної моделі неперервної області, яка полягає у представленні всієї області сукупністю підобластей малих розмірів, які називаються скінченними елементами (СЕ). Кожен скінченний елемент характеризується набором характерних точок – вузлами скінченного елементу. Шукана функція в середині СЕ описується однотипними апроксимуючими функціями, які представляють собою, зазвичай, многочлени невисокого порядку (лінійні, квадратичні, кубічні).

Як шукані величини при розв’язанні крайових задач виступають вузлові значення невідомої функції, знайшовши які і використовуючи апроксимуючи

функції, можна знайти невідому функцію у будь-якій точці досліджуваної області.

Наявність описаних етапів при розв’язанні крайових задач для пористих матеріалів викликає певні незручності та значні витрати часу при розрахунках традиційними САПР, тому створення обчислювальних інструментів, які б об’єднували обидва етапи є актуальним і має велике практичне значення для інженерних потреб.

1 МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ МЕХАНІЧНИХ ПРОЦЕСІВ У ПОРИСТИХ МАТЕРІАЛАХ

1.1 Ефективні характеристики пористих матеріалів

Існує багато співвідношень для різного рівня пористості, розподілу пор, форми пор, отриманих на основі різних гіпотез та розрахункових методів. Основні із цих співвідношень можна знайти, наприклад, у таких монографіях та довідниках [1-3].

Нижче наведено основні математичні формули для розрахунку ефективного об'ємного модуля K^* та модуля зсуву G^* або модуль Юнга E^* ізотропного пористого матеріалу.

Позначення: K_m і G_m – модулі чистої матриці, p – об'ємна частка пор (пористість). Для порожніх пор їхні власні модулі жорсткості дорівнюють нулю ($K_p = 0$, $G_p = 0$).

Метод розрідженої концентрації.

Застосовується за умови $(p \to 0)$, коли взаємодією пор можна знехтувати:

$$K^* = K_m\left(1 - p\frac{3K_m+4G_m}{4G_m}\right), \tag{1.1}$$

$$G^* = G_m\left(1 - p\frac{5(3K_m+4G_m)}{9K_m+8G_m}\right). \tag{1.2}$$

Метод Морі-Танака.

Враховує взаємодію пор через середнє поле напружень у матриці. Формули є явними:

$$K^* = K_m\left(1 + \frac{p}{\frac{1-p}{1+\frac{4G_m}{3K_m}} - p}\right) = K_m\frac{4G_m(1-p)}{4G_m + 3K_m p}, \quad (1.3)$$

$$G^* = G_m\left(1 - \frac{5p(3K_m+4G_m)}{9K_m+8G_m - p(3K_m-4G_m)}\right). \quad (1.4)$$

Метод самоузгодження.

Формули є неявними, оскільки значення ефективних модулів K^* та G^* входять в обидві частини рівнянь:

$$K^* = K_m(1-p) - pK_m\frac{4}{3}G^*, \quad (1.5)$$

$$G^* = G_m(1-p) - p\frac{G^*(9K^* + 8G^*)}{6(K^* + 2G^*)}. \quad (1.6)$$

Ці співвідношення менш зручні, оскільки для знаходження ефективних характеристик потребують використання ітераційного процесу, причому при $p \geq 0{,}5$ розв'язання дає $K^* = 0, G^* = 0$.

Диференціальний метод.

Залежність описується системою звичайних диференціальних рівнянь, де пористість змінюється від 0 до поточного значення p:

$$\frac{dK^*}{dp} = -\frac{1}{1-p}\left(K^* + \frac{4}{3}G^*\right), \quad (1.7)$$

$$\frac{dG^*}{dp} = -\frac{1}{1-p}\left(\frac{5G^*(3K^* + 4G^*)}{9K^* + 8G^*}\right). \quad (1.8)$$

При розв'язанні цієї системи диференціальних рівнянь використовуються наступні початкові умови (при $p = 0$): $K^*(0) = K_m, G^*(0) = G_m$.

Варіаційні границі.

Границі Фойгта-Рейсса.

Для пористого матеріалу нижня границя Рейсса (Reuss) завжди дорівнює нулю, оскільки пори не чинять опору напруженню. Верхня границя Фойгта (Voigt) є лінійною:

$$K^*_{Voigt+} = K_m(1-p), \tag{1.9}$$

$$G^*_{Voigt+} = G_m(1-p). \tag{1.10}$$

Границі Хашина-Штрікмана.

Нижня границя також дорівнює нулю. Верхня границя збігається з формулами методу Морі-Танака:

$$K^*_{HS+} = K_m + \frac{p}{-\frac{1}{K_m} + \frac{1-p}{K_m + \frac{4}{3}G_m}}, \tag{1.11}$$

$$G^*_{HS+} = G_m + \frac{p}{-\frac{1}{G_m} + \frac{1-p}{G_m + \frac{G_m(9K_m + 8G_m)}{6(K_m + 2G_m)}}}. \tag{1.12}$$

Емпіричне рівняння Спріггса.

Часто використовується для апроксимації через модуль Юнга експериментальних даних жорсткості кераміки чи бетону:

$$E^* = E_m \cdot e^{-b \cdot p}, \tag{1.13}$$

де b – емпіричний коефіцієнт, який залежить від форми та розподілу пор (зазвичай лежить у діапазоні від 2 до 4).

На теперішній час дослідження мікромеханічної поведінки неоднорідних, у тому числі пористих, матеріалів продовжується й визначаються нові залежності, що враховують нові фактори впливу на таку

поведінку.

Так, стаття [4] присвячена мікромеханічному аналізу гетерогенних порід з двома типами пор, а також мінеральними включеннями, результатом якої є розробка триетапної процедури гомогенізації.

У роботі [5] представлено мікромеханічний аналіз поведінки насичених пружних пористих середовищ у взаємодії із рідиною при рівномірному тиску. Використано схеми усереднення, засновані на різних модифікаціях методу січних.

1.2 Метод скінченних елементів у крайових задачах механіки пористих матеріалів

Навіть після гомогенізації, тобто певного спрощення задачі, застосування аналітичних методів, які дають точний результат, можливо лише для відносно простих постановок задач (одновимірних, вісесиметричних тощо).

Реальні задачі, як правило, мають більш складні постановки і, відповідно застосування аналітичних методів є неможливим, тому у цьому випадку починають відігравати основну роль чисельні методи.

При розв’язанні крайових задач механіки деформівного твердого тіла найбільш широко розповсюдженими чисельними методами є метод скінченних елементів, метод скінченних різниць, метод граничних елементів та інші. Ці методи за своєю природою є дискретними, тобто вони дають числові розв’язки у скінченному наборі точок досліджуваної області, хоча числовий розв’язок можна визначити у будь-якій точці області використовуючи методи апроксимації.

Кожен із зазначених методів має свої особливості, переваги та недоліки. Так, метод граничних елементів передбачає дискретизацію тільки межі досліджуваної області, і, відповідно, дає можливість задовільнити крайові

умови, які задаються на межі. Завдяки, тому, що всередині області дискретизація не відбувається, розмірність отримуваних розв’язувальних рівнянь набагато менше у порівнянні із іншими методами.

Метод скінченних різниць у наборі дискретних точок апроксимує похідні, що є у диференціальних рівняннях крайової задачі, скінчено-різницевими співвідношеннями, які не містять похідних.

У методі скінченних елементів дискретні значення об’єднані у підобласті малих розмірів – скінченні елементи, які покривають усю досліджувану область. В середині кожного скінченного елементу задається апроксимація шуканої функції, як правило, однотипними елементарними функціями (многочленами, тригонометричними функціями тощо).

У роботі [6] представлені чисельні підходи для комп’ютерного моделювання методом скінченних елементів поведінки пористих середовищ в різних умовах деформування (нелінійного пружного, пружно-пластичного).

Також, досить часто метод скінченних елементів використовується при дослідженні взаємодії рідини із пористими матеріалами. У монографії [7] розв’язуються зв’язані задачі термо-гідро-механіки у насичених та ненасичених пористих матеріалах.

Робота [8] надає загальні відомості про теорію лінійної поропружності, описує механічні ефекти, що виникають при взаємодії гірських порід із рідиною, в тому числі наведені формування визначальних рівнянь за допомогою методу скінченних елементів та граничних елементів.

В монографії [9] представлена практична збірка верифікаційних тестів та чисельних прикладів для розрахунку пористих середовищ.

Застосування методу скінченних елементів до процедури гомогенізації пористих матеріалів представлено у статті [10], де визначаються ефективні термоелектромеханічні властивості матеріалу п’єзоелектричних керамічних композитів на основі цементу. Використовується метод представницького об’ємного елемента з розподілом п’єзоелектричних частинок у пористій цементній матриці.

У практичному керівництві [11] містяться обчислювальні підходи з алгоритмами та програмними кодами на мові Python та у середовищі MATLAB для моделювання задач переносу маси та тепла у пористих середовищах.

Застосування основних законів теорії поромеханіки, яка найчастіше використовується для макроскопічно ізотропного гранульованого матеріалу, розповсюджено на комбінацію односпрямованих волокон при їх деформуванні під дією стискаючих навантажень [12].

Процедуру гомогенізації модифікацією методу ортогонального розкладання та порівняння із результатами розрахунку методом скінченних елементів представлено у роботі [13].

У статті [14] на основі асимптотичного розкладання запропоновано редуковану поропружну модель динамічної поведінки матеріалу, яку використано для побудови багатосіткового алгоритму на основі методу скінченних елементів.

Робота [15] присвячена розробці дворівневої схеми гомогенізації в рамках теорії пористих середовищ із врахуванням параметрів масштабування при дискретизації на скінченні елементи.

Використання методу скінченних елементів та його модифікацій у різних САПР при дослідженні напружено-деформованого стану композитів, армованих дискретними включеннями та волокнами представлено у роботах [16-18].

1.3 Висновки до розділу 1

З аналізу наукових джерел можна зробити наступні висновки. Врахування неоднорідної структури матеріалу, а саме наявності пор, доцільно робити представленням матеріалу однорідним, але скорегувати його властивості в залежності від значення пористості матеріалу. Ці властивості описуються ефективним характеристиками, які отримані для різних гіпотез,

умов та методів і мають бути вибрані для кожного матеріалу окремо.

Після гомогенізації матеріалу (представлення його однорідним ізотропним (квазіізотропним) матеріалом) можемо перейти до класичної постановки задачі механіки деформівного твердого тіла. Проблема розв’язання таких задач полягає у виборі того чи іншого методу та його можливостей. Більш доцільним є застосування аналітичних методів, які дають точні розв’язки, але коло задач, придатних для їх використання дуже обмежено. Тому для розв’язання практичних задач на перший план виходять чисельні методи, одним із найпоширеніших із яких є метод скінченних елементів.

2 ОСНОВНІ СПІВВІДНОШЕННЯ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ ПОРИСТИХ МАТЕРІАЛІВ

2.1 Постановка задачі та основні співвідношення

Класична постановка статичної задачі механіки деформівного твердого тіла передбачає розв'язання крайової задачі, яка складається із системи диференціальних рівнянь з крайовими умовами, або можлива, альтернативна, варіаційна постановка задачі.

Основні співвідношення для таких задач механіки наявні у багатьох довідниках та монографіях механіки деформівного твердого тіла, наприклад, в роботі [19].

У двовимірних або плоских задачах статики основними функціями, які описують механічну поведінку конструкції є переміщення, деформації та напруження.

Виходячи із розмірності задачі будемо оперувати наступними складовими цих функцій: дві компоненти переміщень – u_1, u_2; три компоненти деформацій – лінійні деформації $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}$ та кут зсуву γ_{12}; три компоненти напружень – л Цей напружено-деформований стан характеризується трьома незалежними напруженнями (внутрішні сили) – нормальні σ_{11}, σ_{22} та дотичнє σ_{12}. Для подальших викладок доцільно представити описані функції у векторній формі:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix};\ \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix};\ \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}. \tag{2.1}$$

Усі ці функції пов'язані між собою певними законами, тому при розв'язанні задачі, як правило, переходять до якоїсь однієї функції – переміщень або напружень. Для цього запишемо ці основні закони механіки

для подальшого їх використання. Зв’язок між деформаціями та переміщеннями визначається співвідношеннями Коші (геометричними співвідношеннями):

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \gamma_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \tag{2.2}$$

векторно-матрична форма запису прийме вид:

$$\{\varepsilon\} = [\partial]\{u\}, \tag{2.3}$$

де матриця диференціювання записується таким чином:

$$[\partial] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix}.$$

У законі, що пов’язує напруження з деформаціями, як правило використовують або сталі Ляме μ та λ, або через коефіцієнт Пуасона ν та модуль пружності E. Але, враховуючи, що в процесі гомогенізації як ефективні пружні характеристики пористого матеріалу визначаються модуль зсуву G та об’ємний модуль K, закон стану теж доцільно записати із залученням вказаних характеристик. Пам’ятаючи, що при розв’язанні плоскої задачі механіки деформівного твердого тіла, конструкція може знаходиться або в умовах плоско-напруженого стану, або в умовах плоскої деформації, запишемо закон Гука для обох випадків. Для плоско-напруженого стану будемо мати:

$$\sigma_{11} = \frac{4G}{3K+4G}\big((3K+G)\varepsilon_{11} + (3K-2G)\varepsilon_{22}\big),$$
$$\sigma_{22} = \frac{4G}{3K+4G}\big((3K-2G)\varepsilon_{11} + (3K+G)\varepsilon_{22}\big),$$
$$\sigma_{12} = G\gamma_{12}.$$

Для плоско-деформованого стану закон Гука запишеться у наступному виді:

$$\sigma_{11} = \left(K + \frac{4}{3}G\right)\varepsilon_{11} + \left(K - \frac{2}{3}G\right)\varepsilon_{22},$$
$$\sigma_{22} = \left(K - \frac{2}{3}G\right)\varepsilon_{11} + \left(K + \frac{4}{3}G\right)\varepsilon_{22},$$
$$\sigma_{12} = G\gamma_{12}.$$

У загальному виді закон стану в матричній формі запису буде мати вигляд:

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\}, \tag{2.4}$$

де матриця пружних характеристик матеріалу для плоско-напруженого стану буде мати вид:

$$[C] = \frac{G}{3K+4G}\begin{bmatrix} 12K+4G & 12K-8G & 0 \\ 12K-8G & 12K+4G & 0 \\ 0 & 0 & 3K+4G \end{bmatrix}, \tag{2.5}$$

а у випадку плоско-деформованого стану ця матриця запишеться таким чином:

$$[C] = \begin{bmatrix} K + \frac{4}{3}G & K - \frac{2}{3}G & 0 \\ K - \frac{2}{3}G & K + \frac{4}{3}G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Крайові умови для статичної задачі механіки деформівного твердого тіла можуть бути задані на межі конструкції у вигляді заданих переміщень (в тому числі нульових), або у вигляді заданих силових навантажень (поверхневих або зосереджених).

2.2 Побудова матриці жорсткості чотирикутного скінченного елементу

При застосуванні до задачі механіки методу скінченних елементів на першому етапі відбувається дискретизація конструкції, тобто представлення області у вигляді сукупності скінченних елементів.

Форма та розміри скінченних елементів можуть варіюватися в залежності від геометрії досліджуваної області, її механічних характеристик, наявності концентраторів напружень тощо та заданих параметрів сітки розбиття на скінченні елементи.

Для плоскої задачі механіки деформівного твердого тіла найбільш поширеними є скінченні елементи трикутної та чотирикутної форми, хоча для деяких задач можливе застосування скінченних елементів і інших форм.

Розглянемо стандартний скінченний елемент прямокутної форми. Будемо вважати, що для досліджуваної області попередньо проведена гомогенізація матеріалу і замість неоднорідного пористого матеріалу маємо гомогенізований (однорідний) матеріал із ізотропними (квазіізотропними) властивостями (рис. 2.1).

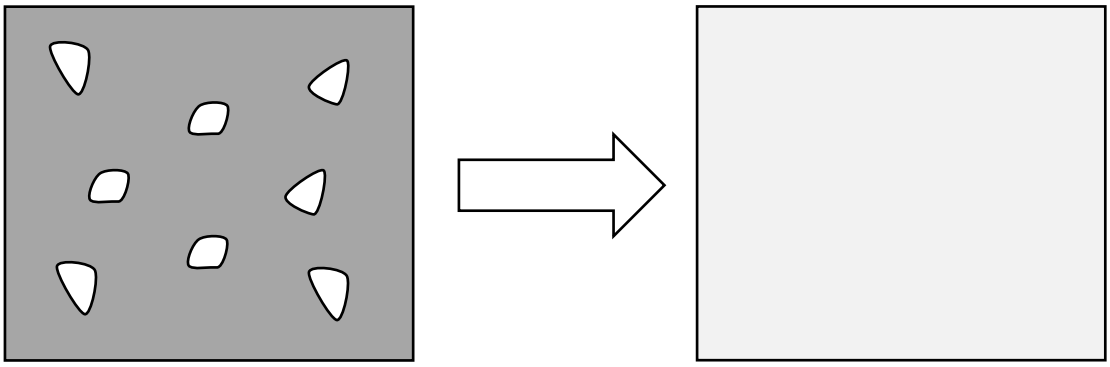


Рисунок 2.1 – Трансформація скінченного елементу неоднорідної структури

Отримаємо основні співвідношення для матриці жорсткості чотиривузлового плоского скінченного елементу з гомогенізованими пружними характеристиками.

Розміри скінченних елементів можуть варіюватися в залежності від сітки розбиття, тому доцільно отримати основні співвідношення для скінченного елементу стандартних розмірів, а потім за допомогою формул перетворення координат трансформувати скінченний елемент стандартних розмірів у елемент довільних розмірів, при цьому форма елемента зберігається.

Візьмемо скінченний елемент квадратної форми (рис. 2.2) із довжиною сторони, що дорівнює 2. Помістимо початок системи координат (локальна система координат) у точку перетину діагоналей квадрату, вузли скінченного елементу розташуємо у кутах квадрату й пронумеруємо їх як показано на рисунку 2.2.

При такому виборі системи координат положення вузлів скінченного елементу буде визначатися двома координатами $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}$ (i = 1,…,4 – номера вузлів):

1(-1; -1), 2(1; -1),

3(-1; 1), 4(1; 1).

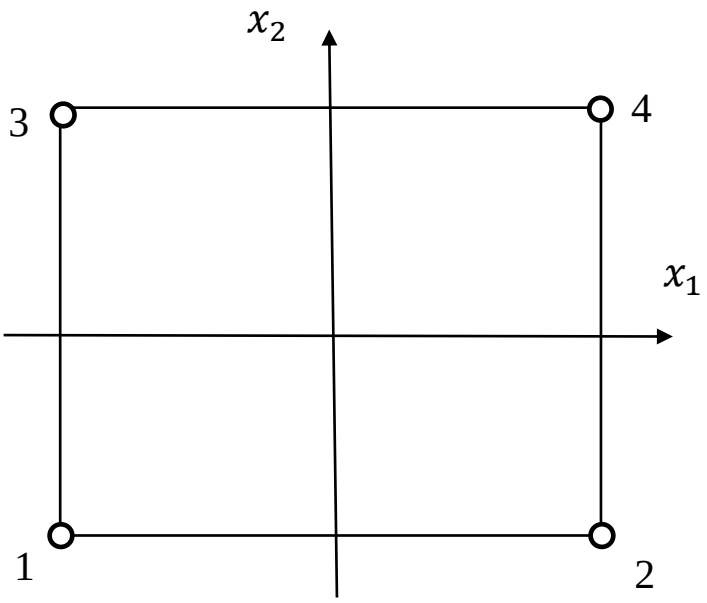


Рисунок 2.2 – Чотирикутний скінченний елемент

Для розв’язання двовимірних задач механіки деформівного твердого тіла можливе застосування двох модифікацій методу скінченних елементів.

Однією з них є метод скінченних елементів у формі методу переміщень, коли невідомими є дві функції переміщень – $u_1(x_1, x_2)$ та $u_2(x_1, x_2)$.

Іншою модифікацією є метод скінченних елементів у формі методу сил, коли невідомими є три функції напружень – $\sigma_{11}(x_1, x_2)$, $\sigma_{22}(x_1, x_2)$ та $\sigma_{12}(x_1, x_2)$.

Подальші викладки будемо проводити для першої модифікації – методу скінченних елементів у формі методу переміщень – для якої маємо дві невідомі функції.

У цьому випадку чотирикутний скінченний елемент із чотирма вузлами буде мати вісім невідомих вузлових значень шуканої функції – вузлових переміщень. Кожен вузол буде мати дві компоненти вектору переміщень у напрямку осей x_1 та x_2, які можна позначити таким чином $u_1^{(i)}, u_2^{(i)}$, де i – номер вузла.

У векторній формі запису вузлові переміщення чотирикутного

скінченного елементу можна представити так:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \\ u_1^{(3)} \\ u_2^{(3)} \\ u_1^{(4)} \\ u_2^{(4)} \end{Bmatrix}. \tag{2.7}$$

Другим важливим етапом побудови скінченно-елементних співвідношень є вибір апроксимуючих функцій для скінченного елементу. Візьмемо лінійну апроксимацію шуканої функції у кожному координатному напрямку всередині СЕ:

$$u_1(x_1, x_2) = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_2 \alpha_1 + \alpha_4 x_1 x_2, \tag{2.8}$$

$$u_2(x_1, x_2) = \beta_1 + \beta_2 x_1 + \beta_3 x_2 \alpha_1 + \beta_4 x_1 x_2, \tag{2.9}$$

Знайти вісім невідомих сталих коефіцієнтів α_i та β_i можна з умови, що підстановка координат кожного з вузлів $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}$ має давати вузлові значення переміщень. Тоді для першої залежності (2.8) матимемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 x_1^{(1)} + \alpha_3 x_2^{(1)} + \alpha_4 x_1^{(1)} x_2^{(1)} = u_1^{(1)}, \\ \alpha_1 + \alpha_2 x_1^{(2)} + \alpha_3 x_2^{(2)} + \alpha_4 x_1^{(2)} x_2^{(2)} = u_1^{(2)}, \\ \alpha_1 + \alpha_2 x_1^{(3)} + \alpha_3 x_2^{(3)} + \alpha_4 x_1^{(3)} x_2^{(3)} = u_1^{(3)}, \\ \alpha_1 + \alpha_2 x_1^{(4)} + \alpha_3 x_2^{(4)} + \alpha_4 x_1^{(4)} x_2^{(4)} = u_1^{(4)}. \end{cases} \tag{2.10}$$

Підставляючи у цю систему відповідні координати кожного із чотирьох

вузлів скінченного елементу, отримаємо значення невідомих коефіцієнтів α_i, підстановка яких у апроксимацію переміщень (2.8) конкретизує цю функцію. Якщо перегрупувати коефіцієнти відносно вузлових значень переміщень $u_1^{(i)}$ та ввести такі позначення:

$$N_1 = \frac{1}{4}(1 - x_1)(1 - x_2);$$
$$N_2 = \frac{1}{4}(1 + x_1)(1 - x_2);$$
$$N_3 = \frac{1}{4}(1 - x_1)(1 + x_2);$$
$$N_4 = \frac{1}{4}(1 + x_1)(1 + x_2). \qquad (2.11)$$

то апроксимацію (2.8) можна записати у виді:

$$u_1(x_1, x_2) = u_1^{(1)}N_1 + u_1^{(2)}N_2 + u_1^{(3)}N_3 + u_1^{(4)}N_4. \qquad (2.12)$$

Апроксимацію переміщень $u_2(x_1, x_2)$ для чотиривузлового скінченного елементу перетворимо аналогічним чином, для цього сформуємо таку систему:

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 x_1^{(1)} + \beta_3 x_2^{(1)} + \beta_4 x_1^{(1)} x_2^{(1)} = u_2^{(1)}, \\ \beta_1 + \beta_2 x_1^{(2)} + \beta_3 x_2^{(2)} + \beta_4 x_1^{(2)} x_2^{(2)} = u_2^{(2)}, \\ \beta_1 + \beta_2 x_1^{(3)} + \beta_3 x_2^{(3)} + \beta_4 x_1^{(3)} x_2^{(3)} = u_2^{(3)}, \\ \beta_1 + \beta_2 x_1^{(4)} + \beta_3 x_2^{(4)} + \beta_4 x_1^{(4)} x_2^{(4)} = u_2^{(4)}. \end{cases} \qquad (2.13)$$

Розв’язання цієї системи із подальшим групуванням коефіцієнтів відносно $u_2^{(i)}$ та з урахуванням позначень (2.11) дасть остаточний вигляд функції $u_2(x_1, x_2)$:

$$u_2(x_1, x_2) = u_2^{(1)} N_1 + u_2^{(2)} N_2 + u_2^{(3)} N_3 + u_2^{(4)} N_4. \qquad (2.14)$$

Перейдемо до векторно-матричної форми запису вказаних співвідношень:

$$\{U\} = [N]\,\{u\}, \qquad (2.15)$$

де $\{u\}$ – вектор вузлових переміщень виду (2.7),

$\{U\} = \begin{Bmatrix} u_1(x_1, x_2) \\ u_2(x_1, x_2) \end{Bmatrix}$ – вектор переміщень довільної точки СЕ,

$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}$ – матриця функцій форми, де функції форми N_i визначаються формулами (2.11).

Якщо розглядати задачу статики у варіаційній постановці, необхідно визначити енергію пружної деформації тіла. А враховуючи, що після дискретизації тіло складається із сукупності скінченних елементів, цю енергію для всього тіла можна знайти як суму відповідних енергій усіх скінченних елементів. Тому знайдемо енергію пружної деформації окремого скінченного елементу:

$$W = \int_V \frac{\{\varepsilon\}^T \{\sigma\}}{2} dV. \qquad (2.16)$$

Тут V – об’єм скінченного елементу.

Враховуючи, що при розв’язанні плоскої задачі вважається, що один розмір набагато менший двох інших і має для всього тіла сталий розмір, вираз (2.16) можемо переписати наступним чином:

$$W = t \int_S \frac{\{\varepsilon\}^T \{\sigma\}}{2} dS. \quad (2.17)$$

Тут t – товщина скінченного елементу, S – площа скінченного елементу.

Взявши до уваги апроксимацію переміщень (2.15) та геометричні співвідношення (2.3), вектор деформацій можемо представити таким чином:

$$\{\varepsilon\} = [\partial]\{U\} = [\partial][N]\{u\},$$

а враховуючи, що вузлові значення переміщень не є функціями координатних змінних, останнє співвідношення можемо записати у такому вигляді:

$$\{\varepsilon\} = [B]\{u\}. \quad (2.18)$$

Тут $[B] = [\partial][N]$.

Із урахуванням отриманого співвідношення перепишемо закон стану, який у випадку плоско-напруженого стану прийме вид:

$$\{\sigma\} = \frac{G}{3K + 4G} \begin{bmatrix} 12K + 4G & 12K - 8G & 0 \\ 12K - 8G & 12K + 4G & 0 \\ 0 & 0 & 3K + 4G \end{bmatrix} [B]\{u\}, \quad (2.19)$$

а у випадку плоско-деформованого матимемо:

$$\{\sigma\} = \begin{bmatrix} K + \frac{4}{3}G & K - \frac{2}{3}G & 0 \\ K - \frac{2}{3}G & K + \frac{4}{3}G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} [B]\{u\}. \quad (2.20)$$

Тепер повернувшись до енергії пружної деформації, з урахуванням запропонованих апроксимацій, енергія пружної деформації окремого

скінченного в умовах плоско-напруженого стану прийме вид:

$$W = \frac{1}{2} t \frac{G}{3K + 4G} \int_S ([B]\{u\})^T \begin{bmatrix} 12K + 4G & 12K - 8G & 0 \\ 12K - 8G & 12K + 4G & 0 \\ 0 & 0 & 3K + 4G \end{bmatrix} [B]\{u\}\, dS, \tag{2.21}$$

а для плоскої деформації

$$W = \frac{1}{2} t \int_S ([B]\{u\})^T \begin{bmatrix} K + \frac{4}{3}G & K - \frac{2}{3}G & 0 \\ K - \frac{2}{3}G & K + \frac{4}{3}G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} [B]\{u\}\, dS. \tag{2.22}$$

Враховуючи правила матричного множення, а саме те, що $([B]\{u\})^T = \{u\}^T [B]^T$, вирази (2.21) та (2.22) можемо записати таким чином:

$$W = \frac{1}{2} t \frac{G}{3K + 4G} \{u\}^T \int_S [B]^T \begin{bmatrix} 12K + 4G & 12K - 8G & 0 \\ 12K - 8G & 12K + 4G & 0 \\ 0 & 0 & 3K + 4G \end{bmatrix} [B]\, dS \cdot \{u\}, \tag{2.23}$$

та

$$W = \frac{1}{2} t \{u\}^T \int_S [B]^T \begin{bmatrix} K + \frac{4}{3}G & K - \frac{2}{3}G & 0 \\ K - \frac{2}{3}G & K + \frac{4}{3}G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} [B]\, dS \cdot \{u\}. \tag{2.24}$$

Із цих виразів можна виокремити частину, що описує механічні властивості скінченного елементу, і яка називається матрицею жорсткості скінченного елементу. Відповідні співвідношення для плоско-напруженого та

плоско-деформованого стану приймуть вид:

$$[K] = t\frac{G}{3K+4G}\int_S [B]^T \begin{bmatrix} 12K+4G & 12K-8G & 0 \\ 12K-8G & 12K+4G & 0 \\ 0 & 0 & 3K+4G \end{bmatrix} [B]\, dS, \qquad (2.25)$$

та

$$[K] = t\int_S [B]^T \begin{bmatrix} K+\frac{4}{3}G & K-\frac{2}{3}G & 0 \\ K-\frac{2}{3}G & K+\frac{4}{3}G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} [B]\, dS. \qquad (2.26)$$

Аналізуючи розмірності складових матриці жорсткості, можемо зауважити, що у обох випадках для чотиривузлового чотирикутного скінченного елементу розмірність матриці жорсткості прийме такі значення – 8×8.

Ця матриця жорсткості отримана у локальній системі координат Ox_1x_2, а розрахунки проводяться у глобальній системі координат $O'x'_1x'_2$, тому знаючи перетворення $x_1 = f(x'_1, x'_2)$ та $x_2 = g(x'_1, x'_2)$, і підставляючи їх у вираз (2.25) або (2.26) можемо отримати матрицю жорсткості довільного прямокутного елементу будь-яких розмірів.

Побудувавши матриці жорсткості усіх скінченних елементів, формуємо з них глобальну матрицю жорсткості усієї конструкції $[\tilde{K}]$. Розв'язок задачі механіки знаходимо із розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь виду:

$$[\tilde{K}]\{\tilde{u}\} = [\tilde{P}], \qquad (2.27)$$

де $\{\tilde{u}\}$ – вектор вузлових переміщень конструкції;

$[\tilde{P}]$ – вектор вузлових навантажень конструкції.

2.3 Висновки до розділу 2

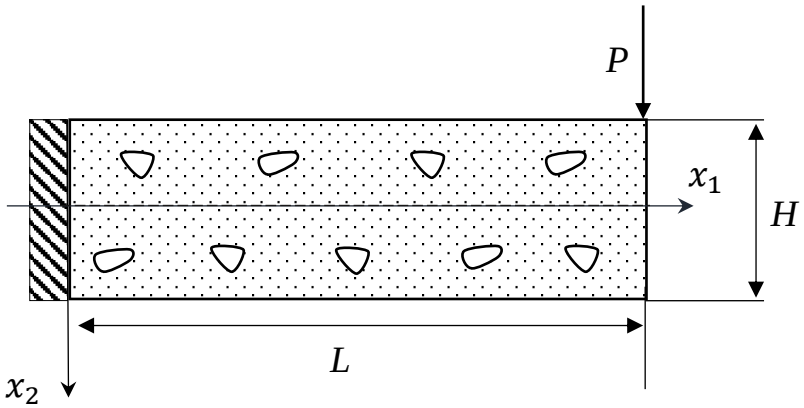
У цьому розділі описано постановку статичної задачі механіки деформівного твердого тіла та основні математичні співвідношення, які застосовуються при її розв’язанні. Так для зручності моделювання механічної поведінки пористих матеріалів закон стану записано через об’ємний модуль та модуль зсуву.

Описано основні етапи розв’язання описаної задачі методом скінченних елементів починаючи від гомогенізації пружних властивостей й до розв’язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь методу скінченних елементів. В тому числі побудовано матрицю жорсткості чотиривузлового чотирикутного скінченного елементу для пористого матеріалу.

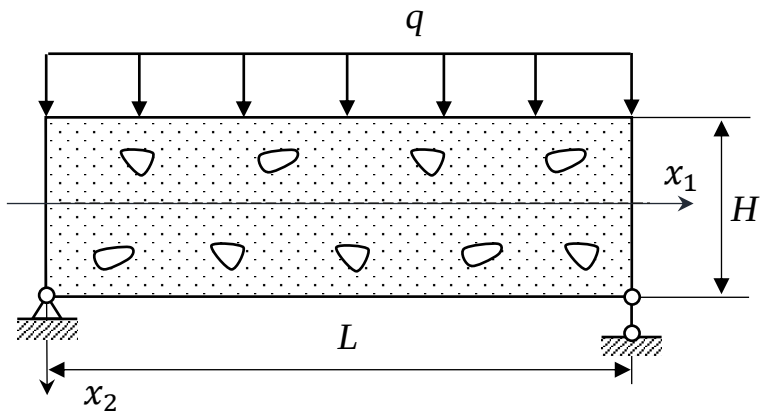
3 РОЗВ'ЯЗАННЯ ПЛОСКОЇ ЗАДАЧІ МЕХАНІКИ ДЕФОРМІВНОГО ТВЕРДОГО ТІЛА ДЛЯ ПОРИСТИХ МАТЕРІАЛІВ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

3.1 Постановки задач

Розглянемо дві плоскі задачі механіки деформівного твердого тіла для пористого матеріалу: перша про деформування консольної балки під дією зосередженої сили (рис. 3.1а), друга – про деформування шарнірно опертої балки під дією розподіленого навантаження (рис. 3.2б).



а)



б)

Рисунок 3.1 – Розрахункові схеми:
а – консольна балка, б – шарнірно оперта балка

3.2 Застосування методу скінченних елементів до визначення напружено-деформованого стану балок із пористого матеріалу

Розглянемо спочатку задачу про деформування консольної балки.

Розміри консольної балки приймемо такими: товщина балки $t = 1$ м, ширина балки $H = 3$ м, довжина балки $L = 20$ м.

Матрицею пористого матеріалу консольної балки є сталевий матеріал з механічними характеристиками: модуль пружності $E = 2{,}1 \times 10^{11}$ Па, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0{,}3$, або об'ємний модуль $K = 1{,}75 \times 10^{11}$ Па, модуль зсуву $G = 0{,}8077 \times 10^{11}$ Па.

Зосереджена сила $P = 5 \times 10^{7}$ Н.

Визначення компонентів переміщень (деформацій) та напружень у будь-якій точці консольної балки є основним завданням при розв'язанні задачі.

Для такої постановки задачі відомий аналітичний розв'язок для однорідного (непористого) матеріалу, але якщо попередньо провести гомогенізацію матеріалу, то для отриманих характеристик уявного однорідного ізотропного матеріалу можна використати ту саму формулу. Найбільш характерними точками балки є серединна лінія (при $x_2 = 0$), тому запишемо рівняння прогину цієї лінії [19]:

$$u_2(x) = \frac{12P\left(\frac{Lx_1^2}{2} - \frac{x_1^3}{6}\right)}{E^* H^3}, \tag{3.1}$$

де E^* – ефективний модуль пружності пористого матеріалу.

Обчислимо максимальний прогин серединної лінії балки з пористого матеріалу за формулою (3.1) та зведемо ці розрахунки у таблицю 3.1.

Проведемо розрахунок напружено-деформованого стану консольної балки з пористого матеріалу за допомогою методу скінченних елементів, для цього реалізуємо підходи, викладені у розділі 2, у вигляді пакету прикладних програм.

Таблиця 3.1 – Максимальний прогин серединної лінії балки

Пористість	Максимальний прогин, м	
	Формули (1.1), (1.2)	Формули (1.3), (1.4)
0,1	0,353	0,352
0,2	0,475	0,463
0,3	0,749	0,674

Розрахунки проведені при різних сітках розбиття на скінченні елементи, при збільшенні їх кількості спостерігається стійка збіжність результатів розрахунків. У таблиці 3.2 показані чисельні розрахунки при сітці розбиття 17×5, також показана похибка розрахунків у порівнянні із точними значеннями, яка розраховувалася за формулою:

$$\varepsilon = \frac{\tilde{u}_2 - u_2}{u_2} 100\%,$$

де u_2 – точне значення прогину серединної лінії балки,

$\tilde{u}_2$ – чисельне значення прогину серединної лінії балки.

Таблиця 3.2 – Чисельні розрахунки прогину серединної лінії балки

Пористість	Максимальний прогин			
	МСЕ, м	Похибка, %	МСЕ, м	Похибка, %
0,1	0,331	-6,23	0,328	-6,82
0,2	0,454	-4,42	0,430	-7,13
0,3	0,747	-0,27	0,616	-8,61

Результати розрахунків для теорії, що описується формулами (1.1) та (1.2), для пористості $p = 0{,}3$ представлені на рисунках 3.2–3.5.

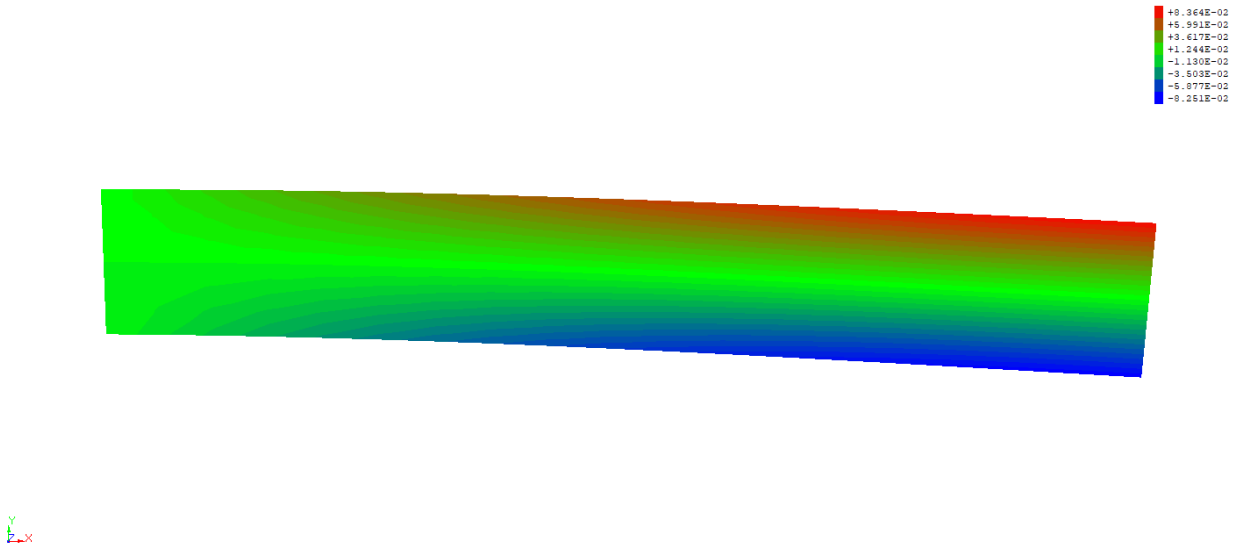


Рисунок 3.2 – Розподіл переміщень u_1

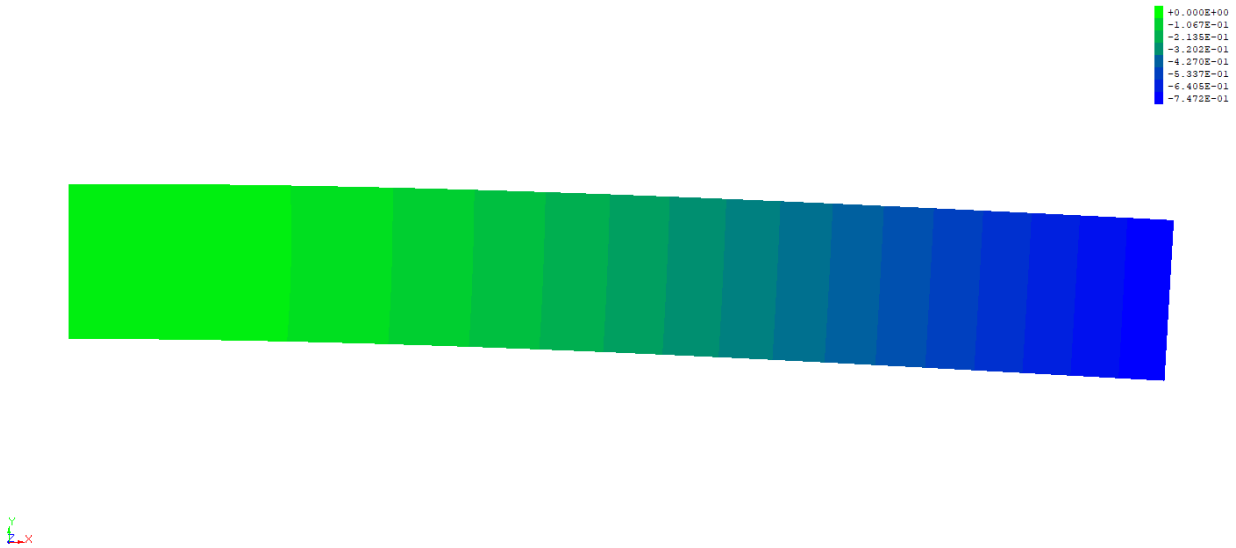


Рисунок 3.3 – Розподіл переміщень u_2

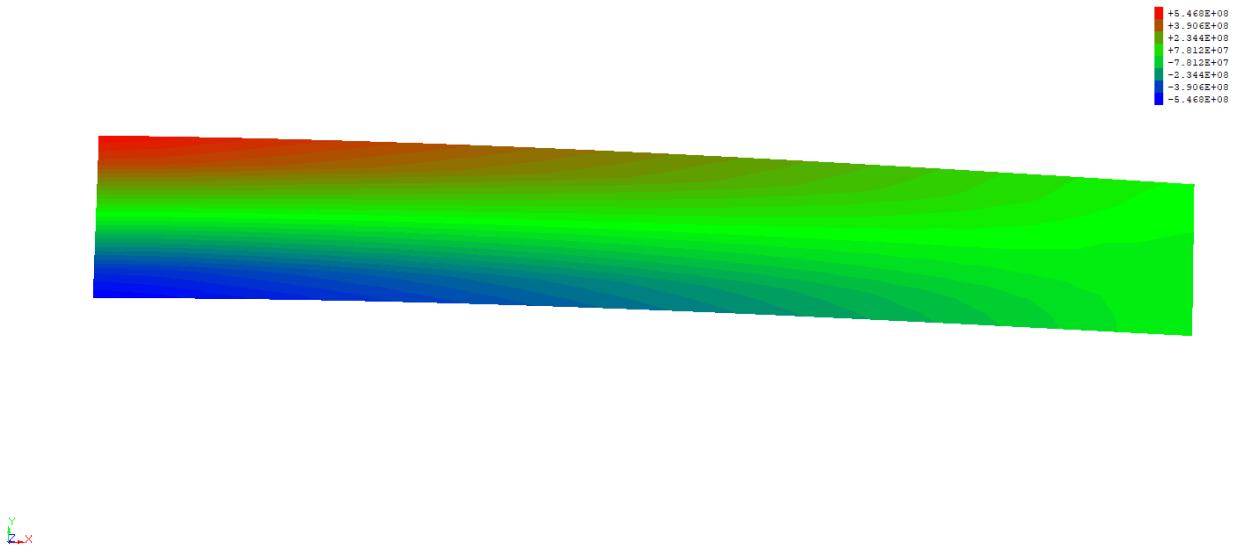


Рисунок 3.4 – Розподіл напружень σ_{11}

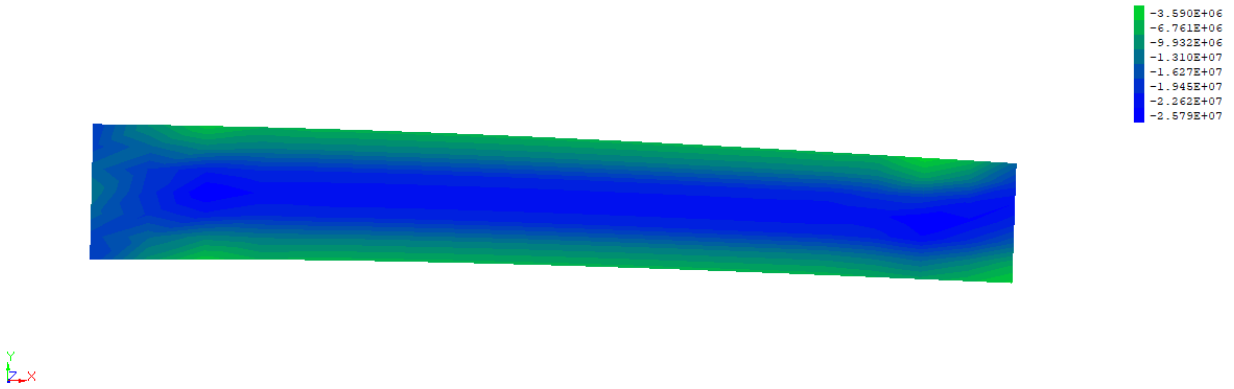


Рисунок 3.5 – Розподіл напружень σ_{12}

Також розглянемо задачу про шарнірно оперту балку з пористого матеріалу (рис. 3.1б).

Розміри балки приймемо аналогічними попередній задачі: товщина балки $t = 1$ м, ширина балки $H = 3$ м, довжина балки $L = 20$ м.

Матеріал балки – сталевий матеріал з механічними характеристиками: об'ємний модуль пружності $K = 1{,}75 \times 10^{11}$ Па, модуль зсуву $G = 0{,}8077 \times 10^{11}$ Па.

Розподілене поверхневе навантаження $q = 5 \times 10^{7}$ Па.

Визначимо напружено-деформований стан балки з пористого матеріалу.

Результати розрахунків при сітці розбиття 19×7 для теорії, що описується формулами (1.1) та (1.2), при пористості $p = 0{,}2$ представлені на рисунках 3.6–3.9.

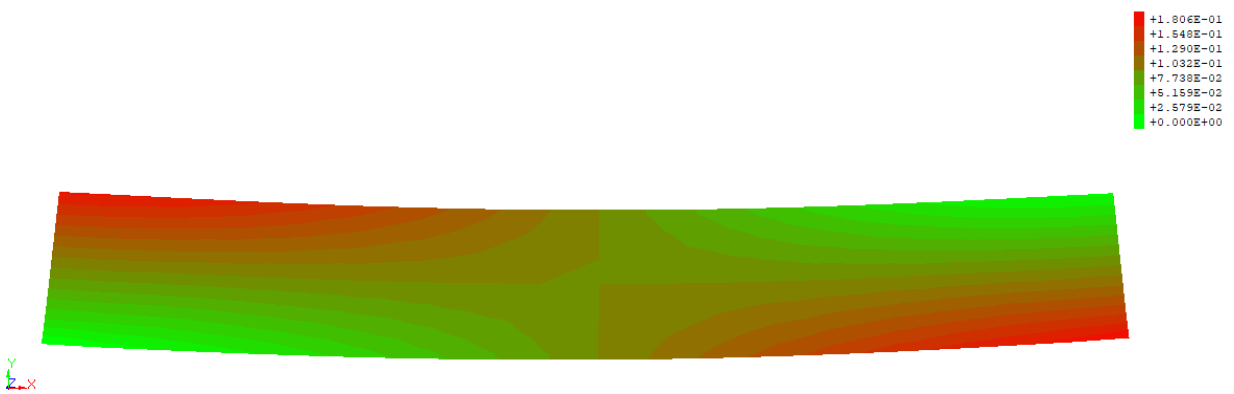


Рисунок 3.6 – Розподіл переміщень u_1



Рисунок 3.7 – Розподіл переміщень u_2

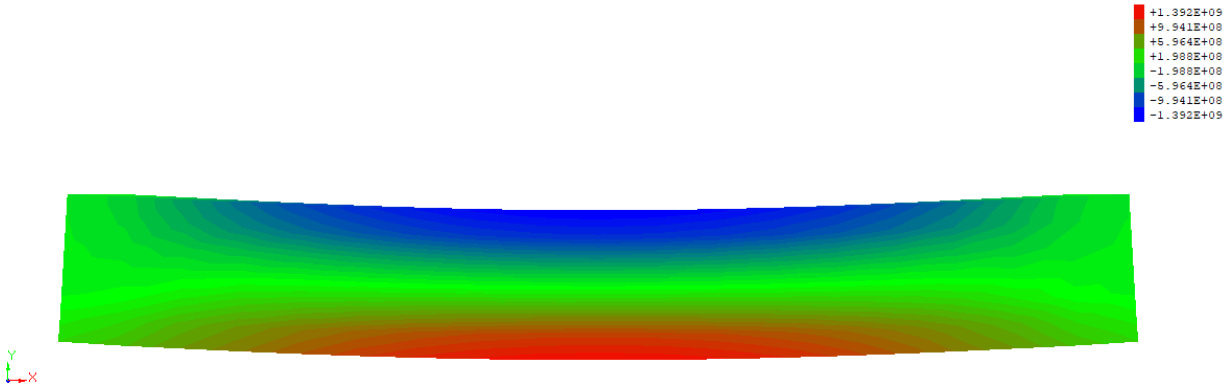


Рисунок 3.8 – Розподіл напружень σ_{11}

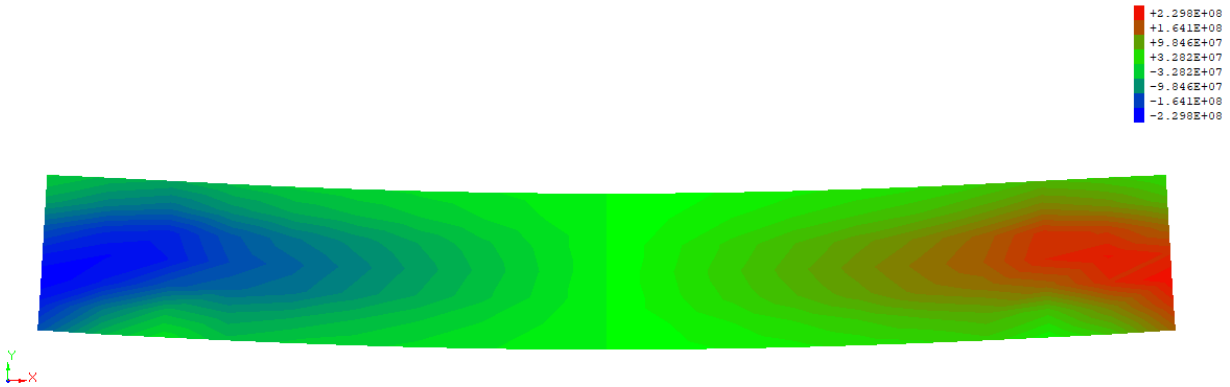


Рисунок 3.9 – Розподіл напружень σ_{12}

3.3 Висновки до розділу 3

Розглянуто дві плоскі задачі механіки деформівного твердого тіла для пористого матеріалу: перша про деформування консольної балки під дією

зосередженої сили, друга – про деформування шарнірно опертої балки під дією розподіленого навантаження.

Для першої задачі отримано як аналітичний, так і чисельний розв’язок проведено порівняння результатів, наведено похибку розрахунків. Друга задача розв’язана методом скінченних елементів при пористості $p = 0{,}2$, для обох розглянутих задач представлені розподіли переміщень та напружень у точках балок.

ВИСНОВКИ

У роботі розглядається розв’язання плоскої задачі механіки деформівного твердого тіла для пористих матеріалів у статичній постановці. Наводяться основні підходи до розв’язання таких задач. У роботі застосовується двоетапний підхід, який полягає у попередній гомогенізації пористого матеріалу та подальшому застосуванні методу скінченних елементів.

Етап гомогенізації полягає у застосуванні тієї чи іншої теорії представлення неоднорідного пористого матеріалу уявним однорідним, механічні властивості якого залежать від механічних властивостей матеріалу матриці та пористості матеріалу. Таким чином, задача для неоднорідного середовища трансформується у задачу для гомогенізованого ізотропного (квазіізотропного) матеріалу.

На другому етапі представлено процедуру побудови матриці жорсткості чотиривузлового прямокутного скінченного елементу. Як шукані функції використано функції переміщень, для апроксимації компонент яких застосовуються лінійні многочлени. Основні співвідношення методу скінченних елементів отримано для двох випадків – плоско-напруженого та плоско-деформованого стану.

Математичну формалізацію процедури гомогенізації, отримання матриці жорсткості окремих чотирикутних скінченних елементів, побудови глобальної матриці жорсткості, формування розв’язувальної системи лінійних алгебраїчних рівнянь та її розв’язання реалізовано у вигляді пакету прикладних програм.

За допомогою цього пакету було розв’язано дві плоскі задачі механіки деформівного твердого тіла для пористого матеріалу: перша про деформування консольної балки під дією зосередженої сили, друга – про деформування шарнірно опертої балки під дією розподіленого навантаження.

Отримано напружено-деформований стан консольної та шарнірно-опертої балок при різних значеннях пористості та при різних сітках розбиття на скінченні елементи. Для консольної балки проведено порівняння чисельних результатів із точними розв’язками.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Dormieux L., Kondo D., Ulm F.-J. Micromechanics of Porous Materials. John Wiley & Sons, Ltd. 2006. 328 p.

2. Nemat-Nasser S., Hori M. Micromechanics : Overall Properties of Heterogeneous Materials. Elsevier Science Publishers B.V. 1993. 687 p.

3. Dormieux L., Ulm F.-J. Applied Micromechanics of Porous Materials. Springer Vienna. 2005. 331 p.

4. Shen W. Q., Shao J. F. An incremental micro-macro model for porous geomaterials with double porosity and inclusion. *International Journal of Plasticity*. 2016. 83. P. 37–54. DOI : 10.1016/j.ijplas.2016.04.002

5. Dormieux L., Molinari A., Kondo D. Micromechanical approach to the behavior of poroelastic materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2002. 50(10). P. 2203–2231. DOI : 10.1016/S0022-5096(02)00008-X.

6. Anandarajah A. Computational Methods in Elasticity and Plasticity : Solids and Porous Media. Springer, 2010. 668 p.

7. Lewis R. W., Schrefler B. A. The Finite Element Method in the Static and Dynamic Deformation and Consolidation of Porous Media. Wiley, 1999. 512 p.

8. Wang H. F. Theory of Linear Poroelasticity with Applications to Geomechanics and Hydrogeology. Princeton University Press, 2017. 276 p.

9. Kolditz O., Görke U.-J., Shao H., Wang W. Thermo-Hydro-Mechanical-Chemical Processes in Porous Media : Benchmarks and Examples. Springer, 2012. 412 p.

10. Novák P., Bishay P., Žmindákm M. Computational Homogenization of Cement-Based Porous Piezoelectric Composites with Random Structure. *Strojnícky časopis – Journal of Mechanical Engineering*. 2019. 69(2). P. 77–88. DOI : 10.2478/scjme-2019-0018.

11. El-Amin M. F. Numerical Methods in Porous Media : MATLAB® and Python Approaches. Boca Raton, 2026. 474 p.

12. Tran T., Binetruy C., Comas-Cardona S., Abriak N.-E. Microporomechanical behavior of perfectly straight unidirectional fiber assembly: Theoretical and experimental. *Composites Science and Technology*. 2009. 69(2). P. 199–206. DOI : https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2008.10.015.

13. Hernández J., Oliver J., Huespe A., Caicedo M., Cante C.J. High-performance model reduction techniques in computational multiscale homogenization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2014. 276(21). P. 149–189. DOI : 10.1016/j.cma.2014.03.011.

14. Padhy M., Ricken T., Armiti-Juber A., From quasi-static to dynamics: A hierarchical asymptotic model and multigrid-in-time method for poroelasticity, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2026. 454. 118837. DOI : 10.1016/j.cma.2026.118837.

15. Maike S., Schröder J., Bluhm J., Ricken T. A mesh-in-element method for the theory of porous media. *International Journal for Numerical Methods in Engineering.* 2024. 125(21). 7565. DOI : 10.1002/nme.7565.

16. Shtanko H. I., Grebenyuk S. M. Features of the construction of the stiffness matrix of the spatial hexagonal finite element for composite material with discrete inclusions based on the moment scheme. *Computer Science and Applied Mathematics*. 2023. 2. P. 75–85. DOI : 10.26661/2786-6254-2023-2-10.

17. Гребенюк С. М., Гоменюк С. І., Клименко М. І. Напружено-деформований стан просторових конструкцій на основі гомогенізації волокнистих композитів. Херсон : Гельветика, 2019. 350 с.

18. Barbero E. J. Finite Element Analysis of Composite Materials using Abaqus (2nd ed.). Boca Raton : CRC Press, 2023. 571 p. DOI : 10.26661/2786-6254-2023-2-10.

19. Божидарник В. В., Сулим Г. Т. Елементи теорії пружності. Львів : Світ, 1994. 560 с.

20. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., Zhu J. Z. The finite element method : its basis and fundamentals. Amsterdam : Elsevier, Butterworth-Heinemann. 2013. 714 p.

21. Szabó B., Babuška I. Finite element analysis : Method, verification and validation. New Jork : Wiley, 2021. 363 p.

22. Gupta R. K. Numerical Methods : Fundamentals and Applications. Cambridge : Cambridge University Press. 2019. 824 p.