Міністерство освіти і науки України
Запорізький національний університет

С. І. Гоменюк, С. М. Гребенюк, Є. В. Панасенко

КОМПЛЕКСНИЙ АНАЛІЗ

Навчальний посібник
для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра
спеціальності Прикладна математика
освітньо-професійної програми «Комп’ютерне моделювання»

Затверджено
вченою радою ЗНУ
Протокол №
від __.__.2025

Запоріжжя
2025

УДК 517.53(075.8)
Г641

Гоменюк С. І., Гребенюк С. М., Панасенко Є. В. Комплексний аналіз : навчальний посібник для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра спеціальності Прикладна математика освітньо-професійної програми «Комп’ютерне моделювання». Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2025. 88 с.

У навчальному посібнику подано у систематизованому вигляді програмний матеріал дисципліни «Комплексний аналіз». Структура посібника така, що сприяє розвитку і активізації самостійної роботи студентів. Викладено основи класичної теорії функції комплексної змінної. Видання містить основні теоретичні відомості дисципліни, приклади та пояснення до застосування формул і методів розв’язання типових задач з комплексного аналізу. У кінці кожної теми наведено питання та завдання для самоперевірки, що спрямовані на успішне оволодіння студентами основами дисципліни та їх якісну підготовку до екзамену.

Для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра спеціальності Прикладна математика освітньо-професійної програми «Комп’ютерне моделювання».

Рецензент
А.О. Лісняк, кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри програмної інженерії

Відповідальний за випуск
С.М. Гребенюк, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри фундаментальної та прикладної математики

ЗМІСТ

Вступ 5
1. Площина комплексних чисел 8
1.1. Загальні поняття про комплексні числа 8
1.2. Алгебраїчна форма запису комплексного числа. 8
1.3. Геометрична інтерпретація. Тригонометрична форма запису 9
1.4. Формула Муавра. Добування кореня з комплексного числа 11
1.5. Корінь *n*-ого степеня з комплексного числа. 12
Питання для самоконтролю до теми 1 13
2. Комплексна площина та геометрія на ній 15
2.1. Послідовності в комплексній площині 15
2.2. Сфера Рімана 16
2.3. Геометрія на комплексній площині 17
2.4. Основні топологічні поняття комплексної площини 18
Питання для самоконтролю до теми 2 19
3. Функції комплексної змінної та їх властивості 21
3.1. Основні поняття та властивості функції комплексної змінної 21
3.2. Границя і неперервність функції комплексної змінної 22
3.3. Диференційовність комплекснозначної функції 23
3.4. Умови Коші-Рімана 23
3.5. Правила диференціювання функції комплексної змінної 24
3.6. Спряжені гармонічні функції 24
3.7. Конформні відображення 25
Питання для самоконтролю до теми 3 26
4. Аналітичні функції та їх властивості 28
4.1. Аналітичні функції 28
4.2. Лінійна функція 30
4.3. Дробово-лінійна функція 31
4.4. Показникова функція 33
4.5. Тригонометричні функції 33
4.6. Гіперболічні функції 34
4.7. Поняття багатозначної функції комплексної змінної 34
4.8. Логарифмічна функція 35

4.9. Обернені тригонометричні функції 36
Питання для самоконтролю до теми 4 38
5. Інтегрування функцій комплексної змінної 41
5.1. Поняття інтеграла від функції комплексної змінної 41
5.2. Основні властивості інтегралу в комплексній площині 42
5.3. Первісна 44
5.4. Формула Ньютона-Лейбніца 45
5.5. Інтегральна формула Коші 45
5.6. Достатні умови аналітичності функції 50
Питання для самоконтролю до теми 5 50
6. Ряди у комплексній площині 52
6.1. Комплексні числові та функціональні ряди 52
6.2. Степеневі ряди 53
6.3. Ряд Тейлора 54
6.4. Поняття нуля аналітичної функції 56
Питання для самоконтролю до теми 6 57
7. Ряди Лорана 59
7.1. Розклад аналітичної функції в ряд Лорана 59
7.2. Теорема П.А. Лорана 60
7.3. Зв’язок між рядами Лорана та рядами Фур’є 62
Питання для самоконтролю до теми 7 63
8. Теорія лишків 65
8.1. Поняття нуля аналітичної функції 65
8.2. Ізольовані особливі точки 66
8.3. Лишки 71
8.4. Методи обчислення лишків 73
8.5. Застосування лишків до обчислення інтегралів 74
8.6. Логарифмічний лишок 77
Питання для самоконтролю до теми 8 79
Предметний покажчик 82
Використана література 85
Рекомендована література 87

ВСТУП

Комплексний аналіз – один з найважливіших розділів класичної математики. Перші згадки про «уявні» числа як про квадратні корені з від'ємних чисел відносяться ще до XVI століття, а от ідеї комплексного аналізу виникли тільки у другій половині XVIII століття і пов'язані перш за все з ім'ям Леонарда Ейлера (нім. *Leonhard Euler*). Фундамент теорії був створений у XIX столітті зусиллями математиків Оґюстена-Луї Коші (фр. *Augustin Louis Cauchy*), Бернарда Рімана (нім. *Georg-Friedrich-Bernhard Riemann*) та Карла Вейєрштраса (нім. *Karl Theodor Wilhelm Weierstrass*).

Поняття комплексного числа виникло в результаті потреби замкненості обчислень. Навіть прості алгебраїчні операції над дійсними числами виходять за межі поля дійсних чисел R. Як відомо, не всяке алгебраїчне рівняння може бути розв'язане на множині дійсних чисел. Найпростішим прикладом такого рівняння є рівняння $x^2 + 1 = 0$, яке приводить до введення «уявної» одиниці, числа i, квадрат якого дорівнює -1. В результаті виникла необхідність розширення множини дійсних чисел таким чином, щоб усі алгебраїчні операції були завжди здійсненні. Таким розширенням стало введення множини комплексних чисел $\mathbb{C}$, однією з найважливіших властивостей якої є те, що основні алгебраїчні операції над комплексними числами не виходять за область комплексних чисел.

Сучасний комплексний аналіз має широке застосування в різних розділах математики, механіки, фізики, тощо. Апарат функцій комплексної змінної пропонує ефективні методи обчислення інтегралів, розв'язання диференціальних рівнянь, отримання асимптотичних оцінок та інші застосування. Крім того, аналітичні функції комплексної змінної описують плоскі гармонічні векторні поля, до дослідження яких зводиться багато задач механіки і фізики. Тому методи комплексного аналізу мають широке застосування в задачах гідро-, електро- і аеродинаміки, теорії пружності.

У свою чергу поняття комплексного аналізу є основою багатьох досліджень у таких галузях науки, як функціональній аналіз, алгебра, топологія, диференціальна геометрія, рівняння математичної фізики та інших розділах сучасної математики.

Метою вивчення навчальної дисципліни «Комплексний аналіз» є засвоєння систематичних знань із основних методів розв'язання типових задач з теорії функції комплексної змінної; оперування інструментарієм комплексного аналізу для дослідження на диференційовність та аналітичність функцій комплексної площини, що, в свою чергу, дає можливість аналізувати та моделювати процеси та явища в галузях майбутньої діяльності студентів як фахівців; набуття навичок із методів комплексного аналізу.

Основними **завданнями** вивчення дисципліни «Комплексний аналіз» є:

- ознайомитися із множиною комплексних чисел;
- ознайомитися із однозначними та багатозначними функціями комплексної площини;

- засвоїти класифікацію ізольованих особливих точок аналітичних функцій;
- ознайомитися із теорією лишків;
- набути вмінь із дослідження функції на диференційовність та аналітичність;
- набути навички із використання умов Коші-Рімана;
- виробити навичок із розвинення аналітичних функцій у ряди Тейлора та Лорана;
- виробити навичок із використання теорії лишків та її застосування до обчислення інтегралів.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен набути таких програмних компетентностей:

- здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях;
- здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу;
- здатність використовувати й адаптувати математичні теорії, методи та прийоми для доведення математичних тверджень і теорем;
- здатність виконувати завдання, сформульовані у математичній формі;
- здатність обирати та застосовувати математичні методи для розв'язання прикладних задач, моделювання, аналізу, проектування, керування, прогнозування, прийняття рішень;
- здатність сформулювати математичну постановку задачі, спираючись на постановку мовою предметної галузі, та обирати метод її розв’язання, що забезпечує потрібні точність і надійність результату.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен набути таких програмних результатів навчання:

- демонструвати знання й розуміння основних концепцій, принципів, теорій прикладної математики і використовувати їх на практиці;
- володіти основними положеннями та методами математичного, комплексного та функціонального аналізу, лінійної алгебри та теорії чисел, аналітичної геометрії, теорії диференціальних рівнянь, зокрема рівнянь у частинних похідних, теорії ймовірностей, математичної статистики та випадкових процесів, чисельними методами;
- формалізувати задачі, сформульовані мовою певної предметної галузі; формулювати їх математичну постановку та обирати раціональний метод вирішення; розв’язувати отримані задачі аналітичними та чисельними методами, оцінювати точність та достовірність отриманих результатів;
- уміти розробляти та використовувати на практиці алгоритми, пов’язані з апроксимацією функціональних залежностей, чисельним диференціюванням та інтегруванням, розв’язанням систем алгебраїчних, диференціальних та інтегральних рівнянь, розв’язанням крайових задач, пошуком оптимальних рішень.

Набуті знання при вивченні курсу «Комплексний аналіз» необхідні для подальшого вивчення курсу «Функціональний аналіз» та подальшої

дослідницької діяльності в науках про інформаційні технології та інших галузях науки та техніки.

1. Площина комплексних чисел

1.1. Загальні поняття про комплексні числа

Означення. Комплексним числом z називають впорядковану пару дійсних чисел $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$. Для будь яких двох комплексних чисел $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ визначено:

1) відношення рівності: $z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \ \wedge \ y_1 = y_2$;

2) операцію додавання: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ – комплексне число, яке називається сумою чисел z_1, z_2;

3) операцію множення: $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$ – комплексне число, яке називається добутком чисел z_1, z_2.

Означення. Визначена множина з введеними операціями додавання і множення утворює поле, яке називають полем комплексних чисел і позначають $\mathbb{C}$. Відношення порядку на множині комплексних чисел не вводиться (це поле, яке не можливо впорядкувати).

Для операцій додавання і множення на множині комплексних чисел справедливі закони комутативності, асоціативності і дистрибутивності.

Означення. Елемент $(0,0)$ є нейтральним відносно операції додавання і називається *нулем поля комплексних чисел*. Елемент $(1,0)$ є нейтральним відносно операції множення і називається *одиницею поля комплексних чисел*.

1.2. Алгебраїчна форма запису комплексного числа.

Якщо кожному комплексному числу вигляду $(x, 0) \in \mathbb{C}$ поставити у відповідність дійсне число $x \in \mathbb{R}$, то буде встановлено взаємно-однозначну відповідність (бієкцію) між полем дійсних чисел і комплексними числами вигляду $(x, 0)$, причому сумі елементів даної множини відповідатиме сума елементів $\mathbb{R}$, а добутку – добуток. В силу встановленого ізоморфізму, можна ототожнити елементи цих полів, приймемо за означенням $(x, 0) \equiv x \in \mathbb{R}$, звідси випливає, що множину дійсних чисел можна розглядати як підмножину комплексних чисел, тобто $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Використовуючи означення операцій додавання і множення комплексних чисел, отримаємо

$$\forall z \in \mathbb{C}, z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0,1)(y, 0) = x + iy,$$

де $x, y \in \mathbb{R}$.

Означення. Вираз $z = x + iy$ називається алгебраїчною формою запису комплексного числа, де $x \equiv \mathrm{Re}\, z \in \mathbb{R}$ – дійсна частина комплексного числа z, а $y \equiv \mathrm{Im}\, z \in \mathbb{R}$ – уявна частина комплексного числа z.

Теорема. (основна властивість уявної одиниці) $i^2 = -1$.

$$\triangleright i^2 = i \cdot i = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) \equiv -1.\blacktriangleleft$$

Означення. Модулем комплексного числа $z = x + iy$ називається дійсне, невід'ємне число$|z|$, що визначається формулою: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Означення. Комплексне число $\overline{z} = x - iy$ називають комплексно-спряженим (або спряженим) до числа $z = x + iy$.

Теорема. (властивості комплексно-спряженого)

1) $\overline{\overline{z}} = z$
2) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$;
3) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$;
4) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$;
5) $z + \overline{z} = 2x = 2 \cdot \mathrm{Re}\, z$;
6) $z - \overline{z} = 2iy = 2i \cdot \mathrm{Im}\, z$.

Операції над комплексними числами в алгебраїчній формі запису.

Додавання та множення комплексних чисел в алгебраїчній формі аналогічні відповідним діям над многочленами, з врахуванням умови $i^2 = -1$.

1) $z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$;
2) $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$;
3) $z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$;
4) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$.

Приклад. Спростити вираз: $\frac{(2-3i)^2(1-i)^3}{(4+i)i^5}$.

$$\frac{(2-3i)^2(1-i)^3}{(4+i)i^5} = \frac{(4-12i+9i^2)(1-3i+3i^2-i^3)}{(4+i)(i^2)^2 i} =$$

$$= \frac{(4-12i-9)(1-3i-3+i)}{(4+i)i} =$$

$$= \frac{(-5-12i)(-2-2i)}{-1+4i} = \frac{10+34i-24}{-1+4i} = \frac{(-14+34i)}{(-1+4i)} \cdot \frac{(-1-4i)}{(-1-4i)} =$$

$$= \frac{14+22i+136}{17} = \frac{150+22i}{17} = \frac{150}{17} + \frac{22}{17}i.$$

1.3. Геометрична інтерпретація. Тригонометрична форма запису

Елементи поля $\mathbb{C}$ комплексних чисел можна ототожнити з точками площини, якщо вважати дійсну x та уявну y частини комплексного числа $z = x + iy$ координатами точки z в деякій прямокутній декартовій системі координат Oxy. В цьому випадку площину Oxy називають комплексною площиною и позначають $\mathbb{C}$ або (z) (див. рис. 1). Будь якому дійсному числу $x \in \mathbb{R}$ відповідає точка $(x, 0)$ осі Ox, яку називають дійсною віссю, а будь якому чисто уявному числу вигляду iy відповідає точка $(0, y)$ осі, Oy яку називають уявною віссю. Кожній точці площини відповідає її радіус-вектор, що дозволяє ввести векторну інтерпретацію комплексного числа, тобто зображати його радіус-вектором точки. Причому операції додавання і віднімання комплексних чисел будуть в цій інтерпретації еквівалентні додаванню і відніманню відповідних векторів.

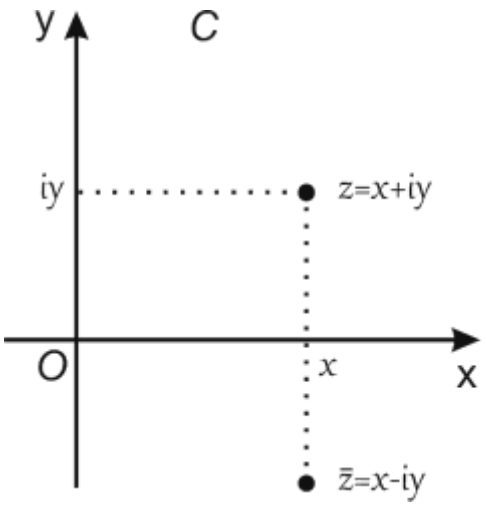


Рисунок 1 – Комплексна площина

Введемо на комплексній площині (z) полярну систему координат (r, φ), де r – полярний радіус, що дорівнює довжині вектора $\overline{z}$, тобто $r = |z|$, φ – полярний кут, що дорівнює куту між додатним напрямом осі Ox і вектором $\overline{z}$ (див. рис. 2). Тоді $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

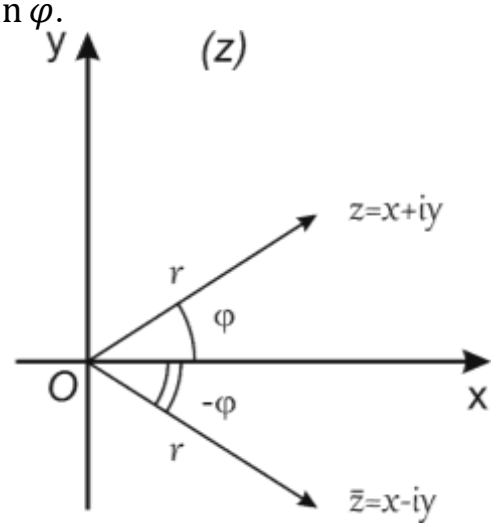


Рисунок 2 – Полярна система координат на комплексній площині

Означення. *Тригонометричною формою запису комплексного числа* $z = x + iy$, називають його запис в полярних координатах $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Полярні координати r, φ називають відповідно *модулем* і *аргументом комплексного числа* і позначають $|z|$, $\mathrm{Arg}\, z$.

Зауваження. **.** $\forall z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ модуль z визначається однозначно: $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, аргумент z визначається з точністю до $2\pi k$, тобто справедлива формула $\mathrm{Arg}\, z = \varphi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, де φ – деяке значення аргументу числа z. Якщо $z = 0$, то $|z| = 0$, а аргумент *не визначений*.

Означення. *Головним значенням аргументу комплексного числа* називають таке значення φ аргументу z, що задовольняє умову $-\pi < \varphi \leq \pi$. Позначають $\varphi = \arg z$.

Зауваження. $\forall z \in \mathbb{C},\ z \neq 0$ головне значення аргументу z визначається однозначно, для *загального значення аргументу комплексного числа* справедлива наступна формула:

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Враховуючи всі можливі випадки розташування числа $z \neq 0$ на комплексній площині, запишемо загальну формулу для знаходження головного значення аргументу:

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right), & x > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right), & x < 0,\ y \geq 0, \\ -\pi + \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right), & x < 0,\ y < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0,\ y > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0,\ y < 0. \end{cases}$$

Дії в тригонометричній формі.

Теорема. Нехай $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),\ z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ – довільні комплексні числа, що записані у тригонометричній формі, тоді:

1) $z_1 = z_2 \Leftrightarrow r_1 = r_2 \ \wedge\ \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$;

2) $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$;

3) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)),\ z_2 \neq 0$.

$$\triangleright\ \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2)}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).\ \blacktriangleleft$$

1.4. Формула Муавра. Добування кореня з комплексного числа

Розглядаючи піднесення комплексного числа z до натурального степеня n як множення числа z на себе n разів, отримаємо:

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),\ n \in \mathbb{N}.$$

Останнє співвідношення називають *формулою Муавра* піднесення комплексного числа до натурального степеня.

Зауваження. При виконанні дій з комплексними числами у тригонометричній формі можна використовувати будь-яке значення аргументу комплексного числа, наприклад, можна вважати, що $\varphi = \arg z$. При записі відповіді у тригонометричній формі рекомендується приводити аргумент до головного значення.

1.5. Корінь *n*-ого степеня з комплексного числа.

Добування кореня з комплексного числа – це операція обернена до піднесення до степеня n, тобто за означенням $w = \sqrt[n]{z},$ якщо $w^n = z$.

Нехай $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ а $w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, тоді

$$\rho^n = r,\ n\theta = \varphi + 2\pi k,\ n \in \mathbb{Z},$$

звідки $\rho = \sqrt[n]{r}$, $\theta = \frac{\varphi+2k\pi}{n},\ n \in \mathbb{Z}$. Приймемо $\varphi = \arg z$, отримаємо формулу

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\arg z+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\arg z+2\pi k}{n}\right),\ k = \overline{0,(n-1)}.$$

З даного співвідношення, що називається формулою Муавра добування кореня натурального степеня з комплексного числа, випливає, що серед усіх значень $\sqrt[n]{z}$ різними будуть лише n значень, причому всі вони мають рівні модулі, а їх аргументи відрізняються на кути, що кратні $\frac{2\pi}{n}$.

На комплексній площині значенням $\sqrt[n]{\boldsymbol{z}}$ відповідають точки, що розташовані у вершинах правильного n -кутника, вписаного в коло радіуса $\rho = \sqrt[n]{r}$ з центром у початку координат, причому одна з вершин має аргумент $\frac{\arg z}{n}$.

Приклад. а) Знайти $\left(1 - i\sqrt{3}\right)^{275}$; б) Розв'язати рівняння $w^5 = i$.

▷ а) Нехай $z = 1 - i\sqrt{3}$, тоді $|z| = \sqrt{1+3} = 2$, $\arg z = \operatorname{arctg}\left(\frac{-\sqrt{3}}{1}\right) = -\frac{\pi}{3}$, тоді у тригонометричній формі запису $z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$ і за формулою Муавра, отримаємо

$$z^{275} = 2^{275}\left(\cos\left(-\frac{275\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{275\pi}{3}\right)\right) =$$
$$= 2^{275}\left(\cos\left(-92\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-92\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right) =$$
$$= 2^{275}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2^{275}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2^{274}\left(1 + i\sqrt{3}\right).$$

б) За означенням кореня маємо $w = \sqrt[5]{i}$, нехай $z = i$, тоді $|z| = 1,\ arg\, z = \frac{\pi}{2}$ і в тригонометричній формі матимемо $z = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$.

За формулою Муавра добування кореня, отримаємо

$$w = \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{5}\right), k = \overline{0,4}.$$

Далі, підставляючи $k = 0,1,2,3,4$, знайдемо п'ять різних коренів:

$$k = 0,\ \ w_1 = \cos\frac{\pi}{10} + i\sin\frac{\pi}{10};$$
$$k = 1,\ \ w_2 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2};$$
$$k = 2,\ \ w_3 = \cos\frac{9\pi}{10} + i\sin\frac{9\pi}{10};$$
$$k = 3,\ \ w_4 = \cos\frac{13\pi}{10} + i\sin\frac{13\pi}{10} = \cos\left(-\frac{7\pi}{10}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{10}\right);$$

$$k=4,\ \ w_5=\cos\frac{17\pi}{10}+i\sin\frac{17\pi}{10}=\cos\left(-\frac{3\pi}{10}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{10}\right).$$

Геометрично, на комплексній площині (w) цим кореням відповідають точки, які розташовані у вершинах правильного п'ятикутника, який вписано в одиничне коло з центром у початку координат (див. рис. 3).◀

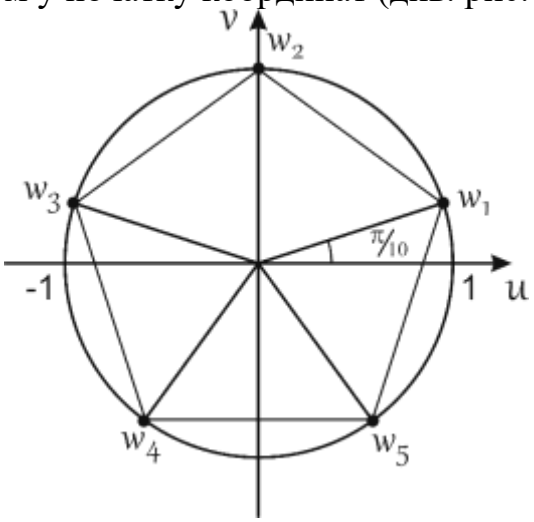


Рисунок 3 – Геометрична інтерпретація

Питання для самоконтролю до теми 1

1. Надайте означення множини комплексних чисел, та запишіть умову рівності двох комплексних чисел.
2. Сформулюйте теорему про основну властивість уявної одиниці.
3. Надайте означення модуля і аргументу комплексного числа.
4. Чому на множині комплексних чисел не вводиться відношення порядку?
5. Доведіть властивості комплексно-спряженого числа.
6. Запишіть у комплексній формі параметричні рівняння прямої, еліпса, кола, параболи та гіперболи.
7. Наведіть приклад обмеженої трьохзв'язної області в $\mathbb{C}$.

Завдання до теми 1

1. Спростити вираз. Відповідь записати в алгебраїчній формі.

1) а) $(1+2i)^2(2-3i)$; б) $\frac{(1+\sqrt{2}i)^3}{(1-\sqrt{2}i)}-\frac{(1-\sqrt{2}i)^3}{(1+\sqrt{2}i)}$; в) $\frac{1}{(2a+3bi)^2}$.

2) а) $(-20-i)(5+13i)^2$; б) $\frac{(\sqrt{2}+i)^3}{(1-\sqrt{2}i)}-\frac{(\sqrt{2}-i)^3}{(1+\sqrt{2}i)}$; в) $\frac{1}{(-a+3i)^2}$.

3) а) $(-2+19i)^2(-1-2i)^3$; б) $\frac{(-6+i)^3}{(1-4i)}-\frac{(6-i)^3}{(1+4i)}$; в) $\frac{1}{(25a+i)^2}$.

4) а) $(8+5i)^3(1-i)^3$; б) $\frac{(i)^{15}}{(1+2i)}-\frac{(-i)^{15}}{(1-2i)}$; в) $\frac{1}{(5ab+i)^2}$.

5) а) $(-3-3i)^3(2-4i)^3$; б) $\frac{(\sqrt{5}-i)^3}{(1+i)}-\frac{(\sqrt{5}+i)^3}{(1-i)}$; в) $\frac{1}{(b+i)^2}$.

2. Обчислити за формулами Муавра. Для прикладів а) і б) відповідь записати в тригонометричній, показниковій та алгебраїчній формі. У прикладі в) надати геометричну інтерпретацію.

1) а) $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{101}$; б) $\left(\sin\frac{\pi}{4}-i\cos\frac{\pi}{4}\right)^{325}$; в) $\sqrt[6]{-4-4i}$.

2) а) $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^{89}$; б) $\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{125}$; в) $\sqrt[8]{2+2i}$.

3) а) $(-5+5i)^4$; б) $\left(-\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{225}$; в) $\sqrt[6]{-3+3i}$.

4) а) $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{120}$; б) $\left(\sin\frac{\pi}{4}+i\cos\frac{\pi}{4}\right)^{25}$; в) $\sqrt[8]{1-i}$.

5) а) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{3}i\right)^5$; б) $\left(\sin\frac{\pi}{6}-i\cos\frac{\pi}{6}\right)^{175}$; в) $\sqrt[6]{-2-2i}$.

3. Розв’язати рівняння.

1) а) $z^2-iz+2=0$; б) $z^5+z^2=0$; в) $z^4+iz^2+2=0$.

2) а) $z^2+3z+3=0$; б) $z^4+z=0$; в) $z^4+5z^2+4=0$.

3) а) $z^2-(7-2i)z+13(1-i)=0$; б) $16z^5+z=0$;
в) $z^4-4z^3-20z^2+100z-125=0$.

4) а) $z^2+(9+i)z+20+17i=0$; б) $27z^4+z=0$;
в) $z^4-2z^3-95z^2+200z-500=0$.

5) а) $z^2+(20+2i)z+98+20i=0$; б) $625z^5+z=0$;
в) $z^4+3z^3+6z^2-2z-60=0$.

2. Комплексна площина та геометрія на ній

2.1. Послідовності в комплексній площині

В комплексну площину введемо евклідову метрику

$$d(z_1, z_2) := |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

де $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$. Комплексна площина з так введеною метрикою стає метричним простором, і тому всі поняття метричних просторів переносяться в комплексну площину, зокрема означення границі послідовності, теореми про границі суми, різниці, добутку та частки, критерій Коші, теорема Веєрштраса і так далі.

Означення. Нехай задана послідовність комплексних чисел $\{z_n = x_n + iy_n\colon\ n \in \mathbb{N}\}$. Будемо говорити, що *послідовність збігається* до комплексного числа $a = \alpha + i\beta$ (позначимо це так: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$), якщо

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 \colon |z_n - a| < \varepsilon.$$

Твердження. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha \wedge \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \beta.$

Приклад. Нехай задана послідовність комплексних чисел $\left\{z_n = \frac{i^n}{n^2}\colon\ n \in \mathbb{N}\right\}$. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{i^n}{n^2} = 0$.

$\triangleright\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 \colon \left|\frac{i^n}{n^2} - 0\right| = \frac{|i|^n}{n^2} = \frac{1}{n^2} < \varepsilon$, звідки

$$\frac{1}{\varepsilon} < n^2 \Rightarrow n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \Rightarrow n_0 = \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right] + 1. \blacktriangleleft$$

Означення. Кажуть, що послідовність комплексних чисел $\{z_n\colon\ n \in N\}$ *збігається до нескінченності* (позначимо це так: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$) *або є нескінченно великою*, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = \infty$, тобто:

$$\forall R > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 \colon |z_n| > R.$$

Символ «∞» називається *нескінченно віддаленою точкою*.

Означення. Множина $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ називається *розширеною комплексною площиною.*

Очевидно, що з будь-якої послідовності в $\overline{\mathbb{C}}$ можна виділити збіжну підпослідовність (принцип компактності в $\overline{\mathbb{C}}$). Зауважимо, що нескінченно віддалена точка не приймає участі в алгебраїчних операціях.

Приклад. Нехай задана послідовність комплексних чисел $\{z_n = (1 + i)^n\colon\ n \in \mathbb{N}\}$. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + i)^n = \infty$.

$\triangleright\ \forall R > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 \colon |(1 + i)^n| = |1 + i|^n = \left(\sqrt{2}\right)^n > R$, звідки

$$n > \log_{\sqrt{2}} R \Rightarrow \left\| \log_{a^k} b = \frac{1}{k} \log_a b \right\| \Rightarrow n > 2 \log_2 R \Rightarrow n_0 = [2 \log_2 R] + 1. \blacktriangleleft$$

Твердження. Нехай задано збіжні послідовності комплексних чисел $\{z_n\}$ та $\{w_n\}$, причому $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = b$, тоді справедливі наступні властивості:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} (z_n \pm w_n) = a \pm b$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(z_n \cdot w_n) = a \cdot b$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{z_n}{w_n} = \frac{a}{b}$, якщо $b \neq 0$.

Означення. Послідовність комплексних чисел $\{z_n\}$ називається *фундаментальною*, якщо вона задовольняє умові Коші:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0, \forall m \geq n_0 : |z_n - z_m| < \varepsilon.$$

Означення. Послідовність комплексних чисел $\{z_n\}$ називається *обмеженою*, якщо

$$\exists M > 0\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}: |z_n| \leq M.$$

Теорема. (Теорема Больцано-Веєрштраса) З будь-якої обмеженої послідовності можна виділити збіжну послідовність.

2.2. Сфера Рімана

Виберемо у просторі $\mathbb{R}^3$ прямокутну декартову систему координат $O\xi\eta\chi$ таким чином, що вісі $O\xi$ і $O\eta$ співпадають з осями Ox і Oy системи координат комплексної площини $\mathbb{C}$ (див. рис. 4), і розглянемо сферу S, яка визначається в цій системі координат так:

$$S = \left\{(\xi;\eta;\chi) \in \mathbb{R}^3 :\ \xi^2 + \eta^2 + \left(\chi - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\right\}.$$

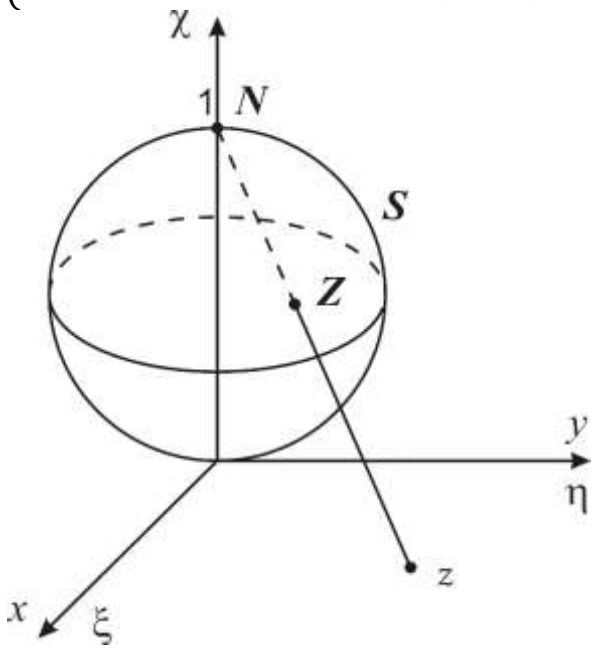


Рисунок 4 – Сфера Рімана

Кожному комплексному числу $z = x + iy$ з координатами (x, y) на площині $\mathbb{C}$ поставимо у відповідність точку $Z(\xi;\eta;\chi)$ перетину зі сферою S променя, що з'єднує точку сфери $N(0;0;1)$ з точкою z площини $\mathbb{C}$. Точку Z називають *сферичним зображенням* комплексного числа $z \in \mathbb{C}$. Таким чином встановлюється взаємнооднозначна відповідність між точками комплексної площини $\mathbb{C}$ і множиною $S\backslash\{N\}$, зауважимо, що точці сфери N не відповідає жодна точка комплексної площини $\mathbb{C}$. Домовимось вважати, що точці N відповідає єдина *нескінченно віддалена* $z = \infty$. Комплексну площину з доданою до неї

нескінченно віддаленою точкою $z = \infty$ називають розширеною комплексною площиною і позначають $\overline{\mathbb{C}}$. З врахуванням поповнення комплексної площини точкою $z = \infty$, встановлено взаємно однозначну відповідність між розширеною комплексною площиною $\overline{\mathbb{C}}$ і сферою S, яку називають *сферою комплексних чисел* або *сферою Рімана*.

Мають місто формули зв'язку координат (x, y) точки $z \in \mathbb{C}$ з координатами (ξ, η, χ) її сферичного зображення Z:

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{x}{1 + x^2 + y^2}, \\ \eta = \dfrac{y}{1 + x^2 + y^2}, \\ \chi = \dfrac{x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2}. \end{cases}$$

Приведемо дві важливі властивості відображення, яке ставить у відповідність кожному комплексному числу його сферичне зображення:

1) кола на комплексній площині відображаються в кола на сфері Рімана і, навпаки, кола на сфері Рімана, які не проходять через точку N, мають своїми прообразами кола на комплексній площині;

2) прямі на комплексній площині відображаються в кола, які проходять через точку N, і, навпаки, кола на сфері Рімана, які проходять через точку N, мають своїми прообразами прямі на комплексній площині.

2.3. Геометрія на комплексній площині

Розглянемо два способи введення метрики на множині комплексних чисел. На комплексній площині $\mathbb{C}$ введемо звичайну евклідову метрику, в якій відстань між двома точками $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ визначається за формулою

$$d(z_1, z_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Інший спосіб полягає у введенні сферичної метрики, в якій за відстань між точками z_1, z_2 комплексної площини $\mathbb{C}$ приймають відстань у евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$ між їх сферичними зображеннями Z_1, Z_2. Можна для сферичної метрики записати формулу:

$$\rho(z_1, z_2) = \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1 + |z_1|^2}\sqrt{1 + |z_2|^2}}.$$

У сферичній метриці можна визначити відстань від точки z до нескінченно віддаленої точки $z = \infty$ як евклідову відстань між їх сферичними зображеннями:

$$\rho(z, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |z|^2}}.$$

Введення кожної з двох метрик перетворює множину $\mathbb{C}$ на метричний простір. Останні формули утворюють метричний простір з розширеної комплексної площини $\overline{\mathbb{C}}$. Для доведення останніх тверджень достатньо перевірити аксіоми метрики в кожному випадку.

Приклад. В координатному просторі $\mathbb{R}^3$знайти координати зображень на сфері Рімана точок розширеної комплексної площини: $z_1 = 1 + 2i, z_2 = -i, z_3 = \infty$. Обчислити відстані між точками z_1, z_2 та z_2, z_3 в евклідовій та сферичній метриці.

▷Для знаходження координат сферичних зображень Z_1, Z_2, Z_3 точок z_1, z_2, z_3 скористаємось відповідними формулами, підставляючи у них $x_1 = 1$, $y_1 = 2$, $|z_1| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$, для $z_1 = 1 + 2i$, отримаємо

$$\xi_1 = \frac{x_1}{1 + |z_1|^2} = \frac{1}{1+5} = \frac{1}{6}, \eta_1 = \frac{y_1}{1 + |z_1|^2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \chi_1 = \frac{|z_1|^2}{1 + |z_1|^2} = \frac{5}{6},$$

таким чином сферичним зображенням комплексного числа $z_1 = 1 + 2i$ буде точка сфери Рімана $Z_1\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{3}; \frac{5}{6}\right)$.

Аналогічно для $z_2 = -i$ матимемо: $x_2 = 0, y_2 = -1, |z_2| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1$, звідки отримаємо координати $\xi_2 = 0, \eta_2 = -\frac{1}{2}, \chi_2 = \frac{1}{2}$ точки Z_2.

Сферичним зображенням точки $z_3 = \infty$, за означенням, буде точка $Z_3(0; 0; 1)$.

Таким чином для комплексних чисел $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = -i$, $z_3 = \infty$ їх зображеннями на сфері Рімана будуть точки $Z_1\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{3}; \frac{5}{6}\right), Z_2\left(0; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), Z_3(0; 0; 1)$.

Знайдемо відстані між точками z_1, z_2 в евклідовій і сферичній метриці. Для евклідової метрики за формулою (1.9) отримаємо

$$d(z_1, z_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = |z_1 - z_2| = \\ = \sqrt{(1-0)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{10}.$$

Визначимо відстань у сферичній метриці:

$$\rho(z_1, z_2) = \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1 + |z_1|^2}\sqrt{1 + |z_2|^2}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{1+5}\sqrt{1+1}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{12}} = \sqrt{\frac{5}{6}}.$$

Відстань між точками z_2, z_3 в евклідовій метриці визначити не можливо тому, що точка $z_3 = \infty$ не є елементом множини $\mathbb{C}$. Для визначення відстані між цими точками в метричному просторі $\bar{C}$ скористаємось формулою:

$$\rho(z_2, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |z_2|^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \blacktriangleleft$$

2.4. Основні топологічні поняття комплексної площини

Означення. *r-колом* точки $z_0 \in \mathbb{C}$ називається множина $B_r(z_0) := \{z_0 \in \mathbb{C}: |z - z_0| < r\}$.

Означення. *R-колом* нескінченно віддаленої точки називається множина $B_R(\infty) := \{z_0 \in \mathbb{C}: |z| > R\} \cup \{\infty\}$.

Означення. Точка $z_0 \in D \subset \overline{\mathbb{C}}$ називається *внутрішньою*, якщо $\exists B_r(z_0) \subset D$.

Означення. Множина $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ називається *відкритою*, якщо $\forall z_0 \in D\ \exists r > 0$: $B_r(z_0) \subset D$.

Означення. Нехай $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ і $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$. Точка z_0 називається *граничною точкою множини* D, якщо $\forall r > 0 \ \exists z \in D: \ z \in B_r(z_0) \backslash \{z_0\}$.

Граничні точки множини можуть належать множині, а можуть і не належати їй, тобто, якщо у точки існує коло $B_r(z_0)$ яке не перетинає саму множину.

Означення. Множина $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ називається *замкненою*, якщо вона містить всі свої граничні точки.

Приклад. Розглянемо множину $D = \mathbb{Z}$. Якщо її розглядати як множину в $\mathbb{C}$, то тоді вона замкнена в $\mathbb{C}$. Якщо її розглядати як множину в $\overline{\mathbb{C}}$, то вона не є замкнена в $\overline{\mathbb{C}}$, оскільки не містить своєї граничної точки ∞.

Означення. Приєднання до множини $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ всіх її граничних точок називається *замиканням даної множини* і позначається $\overline{D}$.

Означення. Множина $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ називається *лінійно зв'язною*, якщо дві точки в D можна з'єднати кривою, можливо необмеженою, яка повністю належить D.

Означення. Множина $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ називається *областю*, якщо вона відкрита і лінійно зв'язна.

Означення. Нехай D – область в $\overline{\mathbb{C}}$. Множина $\partial D := \overline{D} \backslash D$ називається *межею області* D.

Межа будь-якої області є замкненою множиною.

Питання для самоконтролю до теми 2

1. Надайте означення збіжної послідовності у полі комплексних чисел.
2. Яка послідовність називається нескінченно великою?
3. Надайте означення обмеженої і необмеженої послідовності.
4. Яка послідовність називається фундаментальною?
5. Наведіть властивості збіжних послідовностей у полі комплексних чисел.
6. Що називається сферичним зображенням комплексного числа?
7. Яку сферу називають сферою Рімана?
8. Чи є зв'язок між декартовими і сферичним координатами?
9. За якою формулою визначається евклідова метрика?
10. За якою формулою визначається сферична метрика?
11. Як можна визначити відстань від точки z до нескінченно віддаленої точки $z = \infty$?
12. Наведіть властивості сферичного відображення
13. Сформулюйте означення r-кола і R-кола.
14. Яка точка називається граничною точкою множини?
15. Яка множина називається областю?

Завдання до теми 2

В координатному просторі $\mathbb{R}^3$ знайти координати проекції на сферу Рімана точок розширеної комплексної площини: z_1, z_2, z_3, z_4. Обчислити відстані між точками z_1, z_2, а також z_3, z_4 в евклідовій та сферичній метриці.

1) $z_1 = 1 + 2i, z_2 = -i, z_3 = 0, z_4 = \infty.$
2) $z_1 = 9 - 4i, z_2 = 1 - i, z_3 = 6, z_4 = -2 + 3i.$
3) $z_1 = -3 + i, z_2 = 4, z_3 = -2 - i, z_4 = 7 + i.$
4) $z_1 = 10 + 5i, z_2 = 3i, z_3 = -8 + 2i, z_4 = 9 - i.$
5) $z_1 = 0, z_2 = 12i, z_3 = 6 - 2i, z_4 = \infty.$
6) $z_1 = 3 + 3i, z_2 = -2i, z_3 = 10, z_4 = 2 + i.$
7) $z_1 = 4 - i, z_2 = 5i, z_3 = -9 + 2i, z_4 = -4 - i.$
8) $z_1 = 5 + 3i, z_2 = -8i, z_3 = 1 - 5i, z_4 = -3 - 2i.$
9) $z_1 = -4 + 2i, z_2 = 2 - 4i, z_3 = 12, z_4 = 5 - 4i.$
10) $z_1 = -7 + i, z_2 = 8 + 2i, z_3 = 3 - i, z_4 = \infty.$

3. Функції комплексної змінної та їх властивості

3.1. Основні поняття та властивості функції комплексної змінної

Означення. Якщо на множині $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ визначено закон f, за яким кожному комплексному числу $z \in D$ поставлено у відповідність єдине комплексне число $w \in \overline{\mathbb{C}}$, то кажуть, що f є функцією із D в $\overline{\mathbb{C}}$ і позначають $f: D \to \overline{\mathbb{C}}$ або $w = f(z)$, $z \in D \subset \overline{\mathbb{C}}$.

Означення. Функцію $f: D \to \overline{\mathbb{C}}$ називають *обмеженою* на множині D, якщо існує таке дійсне число $M > 0$, що $|f(z)| \leq M$ для кожного $z \in D$.

Нехай $z = x + iy$ і $w = f(z) = u + iv$. Тоді комплексна функція $w = f(z)$ визначається двома дійсними функціями двох змінних:

$$u = u(x, y) \text{ і } v = v(x, y).$$

Таким чином функція комплексної змінної $w = f(z)$ здійснює відображення множини D комплексної площини (z) на множину $f(D)$ комплексної площини (w), множина $f(D)$ називається *образом* множини D при відображенні $w = f(z)$, а множина D – *прообразом* множини $f(D)$ при цьому відображенні (див. рис. 5).

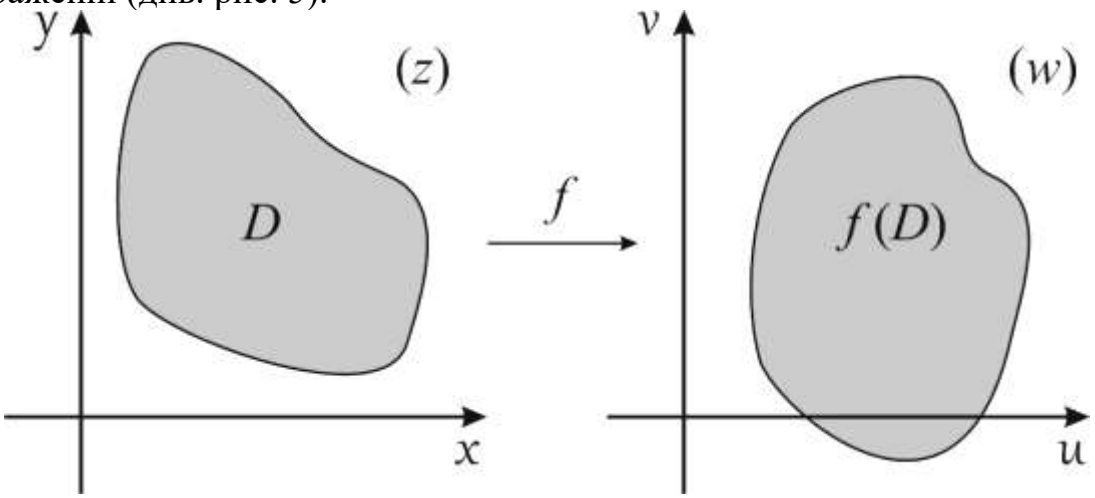


Рисунок 5 – Образ і прообраз множини

Однією з важливих задач комплексного аналізу є задача знаходження образу заданої множини при заданому відображенні. Розглянемо задачу знаходження образу кривої Γ при відображенні $w = f(z)$. В загальному випадку, якщо на площині (z) крива Γ задана неявним рівнянням $F(x, y) = 0$, то для знаходження рівняння кривої Γ' в площині (w), на яку функція

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

відображає криву Γ, необхідно виключити x, y з системи

$$\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y), \\ F(x, y) = 0, \end{cases}$$

в результаті отримаємо рівняння $\Phi(u, v) = 0$ кривої Γ' в площині (w).

Якщо крива Γ задана на площині (z) параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} t \in [a; b],$$

то параметричними рівняннями образу Γ' цієї кривої будуть рівняння

$$\begin{cases} u = u\big(x(t), y(t)\big), \\ v = v\big(x(t), y(t)\big), \end{cases} t \in [a; b].$$

3.2. Границя і неперервність функції комплексної змінної

Означення. Нехай $D \subset \mathbb{C}$, $z_0 = x_0 + iy_0$ – гранична точка множини D, $f: D \to \overline{\mathbb{C}}$, $A = \alpha + i\beta$. *Границя функції* f в точці z_0 рівна A (позначимо як $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$), якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall z \in D: 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - A| < \varepsilon.$$

Оскільки $|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ та

$$|f(z) - A| = \sqrt{(u(x, y) - \alpha)^2 + (v(x, y) - \beta)^2},$$

то з даного означення випливає таке твердження.

Твердження. $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0, y \to y_0} u(x, y) = \alpha$ та $\lim\limits_{x \to x_0, y \to y_0} v(x, y) = \beta$.

Нехай функція $f(z)$ визначена в деякому околі точки $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$.

Означення. Функцію $f(z)$ комплексної змінної z називають *неперервною в точці* $z = z_0$, якщо $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Зауваження. У випадку $f(z_0) \neq \infty$ будемо казати про неперервність в сенсі $\mathbb{C}$, а у випадку $f(z_0) = \infty$ – у сенсі $\overline{\mathbb{C}}$. Для функцій неперервних у сенсі $\mathbb{C}$ справедливі основні теореми про властивості неперервної в точці функції дійсної змінної: сума, різниця, добуток і частка (за умови, що знаменник не обертається в нуль) неперервних у точці z_0 функції є функціями неперервними в цій точці. Справедлива також теорема про неперервність складної функції.

Означення. Нехай $z_0 \in D$, z_0 – гранична точка множини D. Функція $f(z)$, $z \in D$ називається *неперервною у точці* $z = z_0$, якщо $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$. Функція $f(z)$ називається неперервною в області D, якщо вона неперервна в кожній точці області D.

Запишемо основні властивості функцій неперервних на *обмеженій замкненій множині* $K \subset \mathbb{C}$.

1. Якщо функція $f(z)$ неперервна на множині K, то вона обмежена на цій множині, тобто $\exists B > 0: |f(z)| \leq B, z \in K$.

2. Якщо функція $f(z)$ неперервна на множині K, то її модуль досягає на цій множині найбільшого та найменшого значень, тобто $\exists\, z_1, z_1 \in K: \ |f(z)| \leq |f(z_1)| \ \wedge \ |f(z)| \geq |f(z_2)|, z \in K$.

3. Якщо функція $f(z)$ неперервна на множині K, то вона одностайно неперервна на цій множині, тобто

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0: \forall z_1, z_2 \in K \ (|z_1 - z_2| < \delta \ \Rightarrow \ |f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon).$$

3.3. Диференційовність комплекснозначної функції

Нехай функція $w = f(z)$ визначена в деякому околі $U(z_0)$ точки $z_0 \in \mathbb{C}$. Надамо z_0 приріст Δz, такий, що $z_0 + \Delta z \in U(z_0)$. Різницю $f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$ називають приростом функції $f(z)$ в точці z_0, що відповідає приросту аргументу Δz і позначають $\Delta f(z_0)$ або Δw.

Означення. Якщо існує скінченна границя

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z},$$

то її називають похідною функції $f(z)$ комплексної змінної z в точці z_0 і позначають $f'(z_0)$ або $\frac{df(z_0)}{dz}$.

Означення. Функцію $f(z)$ називають диференційовною в точці z_0, якщо її приріст $\Delta f(z_0)$ в цій точці може бути представлено у вигляді

$$\Delta f(z_0) = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = A \cdot \Delta z + o(\Delta z),$$

де A – комплексне число, яке не залежить від Δz, $o(\Delta z)$ – нескінченно мала функція при $\Delta z \to 0$ більш високого порядку ніж Δz, тобто $\lim_{\Delta z \to 0} \frac{o(\Delta z)}{\Delta z} = 0$.

Теорема. Функція $f(z)$ є диференційовною в точці z_0 тоді і тільки тоді коли в цій точці існує скінченна похідна функції $f'(z_0)$.

Означення. Головну частину приросту $\Delta f(z_0)$, лінійну відносно Δz називають диференціалом функції $f(z)$ в точці z_0 і позначають $df(z_0)$.

Вважаючи, що $A = f'(z_0)$ і $\Delta z = dz$, для диференціала маємо співвідношення

$$df(z_0) = f'(z_0)dz.$$

3.4. Умови Коші-Рімана

Неперервність комплекснозначної функції у точці $z_0 = x_0 + iy_0$ еквівалентна неперервності у точці $(x_0; y_0)$ її дійсної і уявної частини. Аналогічного твердження не існує для диференційованості функції комплексної змінної, хоча для комплекснозначної функції дійсної змінної таке твердження має місце. Зв'язок між диференційовністю функції комплексної змінної і її дійсної та уявної частини встановлює наступна терема.

Теорема. Нехай D – область в $\mathbb{C}$, $z_0 \in D$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy \in D$. Для того, щоб функція $f(z)$ була диференційовна у точці $z_0 = x_0 + iy_0$, необхідно і достатньо, щоб виконувались умови:

1) функції $u(x, y)$ та $v(x, y)$ були диференційовні у точці (x_0, y_0);

2) у точці (x_0, y_0) виконувались *умови Коші-Рімана:*

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x_0;y_0)} = \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{(x_0;y_0)}, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(x_0;y_0)} = -\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{(x_0;y_0)}.$$

При цьому для похідної функції справедлива формула

$$f'(z_0) = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} + i\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} - i\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}.$$

Приклад. Нехай $f(z) = 5x + i4y$. Очевидно, що для даної функції не виконується перша умова Коші-Рімана:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x_0;y_0)} = 5; \quad \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{(x_0;y_0)} = 4,\ 5 \neq 4,$$

а тому вона не є диференційовною в жодній точці комплексної площини.

3.5. Правила диференціювання функції комплексної змінної

З означення і властивостей границі функції отримаємо основні правила диференціювання функцій комплексної змінної, які аналогічні відповідним правилам для функцій дійсної змінної, а саме:

1) стала функція $f(z) = A = \text{const}$ диференційовна в кожній точці комплексної площини, причому $f'(z) = 0,\ z \in \mathbb{C}$;

2) функція $f(z) = z$ диференційовна в кожній точці комплексної площини, причому $f'(z) = 1,\ z \in \mathbb{C}$;

3) якщо функції $f(z)$ і $g(z)$ мають похідні в точці $z_0 \in \mathbb{C}$, то функції $Af(z) + Bg(z)$, $(A, B = \text{const} \in \mathbb{C})$, $f(z) \cdot g(z)$, $\frac{f(z)}{g(z)}$ (остання за умови $g(z_0) \neq 0$) також мають похідні в цій точці, причому:

$$\big(Af(z) + Bg(z)\big)'\Big|_{z=z_0} = Af'(z_0) + Bg'(z_0),$$

$$\big(f(z) \cdot g(z)\big)'\Big|_{z=z_0} = f'(z_0) \cdot g(z_0) + f(z_0) \cdot g'(z_0),$$

$$\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)'\Bigg|_{z=z_0} = \frac{f'(z_0) \cdot g(z_0) - f(z_0) \cdot g'(z_0)}{\big(g(z_0)\big)^2},$$

4) якщо функція $w = f(z)$ диференційовна в точці z_0, а функція $W = g(w)$ диференційовна в точці $w_0 = f(z_0)$, то складна функція $W = g\big(f(z)\big)$ диференційовна в точці z_0, причому

$$W'(z_0) = \Big(g\big(f(z)\big)\Big)'\Big|_{z=z_0} = g'(w_0) \cdot f'(z_0).$$

3.6. Спряжені гармонічні функції

Нехай D – область в $\mathbb{C}$, на якій задана аналітична функція $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy \in D$. Крім того, будемо вважати, що $\{u, v\} \in C^2(D)$.

З аналітичності $f(z)$ випливає виконання умов Коші-Рімана у всіх точках області D

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases} \text{ в } D \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}, \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}. \end{cases} \text{ в } D \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ в } D.$$

Аналогічно доводиться, що $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$ в D. В математичній літературі сума таких похідних називається оператором Лапласа, тобто $\Delta * := \frac{\partial^2 *}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 *}{\partial y^2}$. Таким чином, $\Delta u = \Delta v = 0$ в D.

Означення. Дійсна функція $g \in C^2(D)$ називається *гармонічною в* D, якщо $\Delta g = 0$ в D (тобто задовольняє в цій області рівнянню Лапласа $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$).

Означення. Впорядкована пару $\langle h, g \rangle$ гармонічних в області D функцій, які задовольняють умови Коші-Рімана, називають *спряженою парою гармонічних функцій в області* D.

3.7. Конформні відображення

Означення. Відображення $w = f(z)$ називається *конформним першого роду* (першого роду, див. рис. 6) в точці z_0, якщо воно зберігає кути (і напрям їх обходу) між кривими, що проходять через дану точку. Якщо при відображенні кути між кривими зберігаються, а напрям їх обходу змінюється на протилежний, то кажуть про конформне відображення другого роду (другого роду, див. рис. 7).

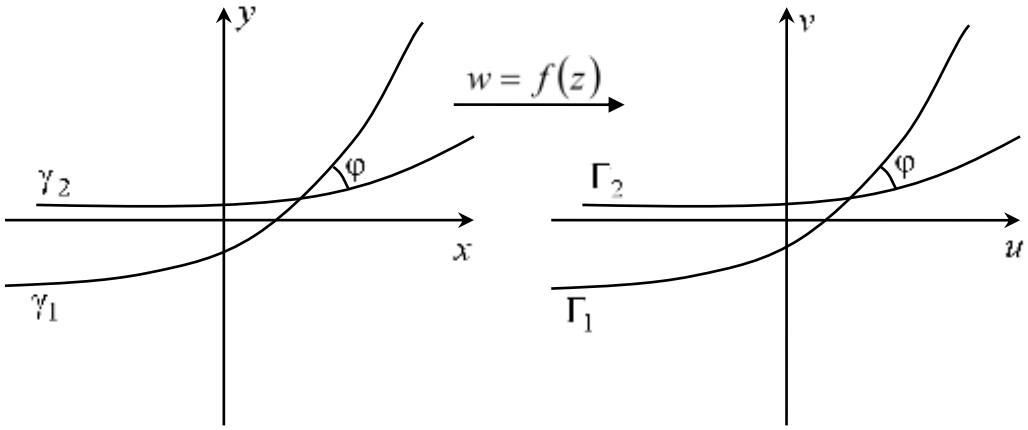


Рисунок 6 – Конформне відображення першого роду

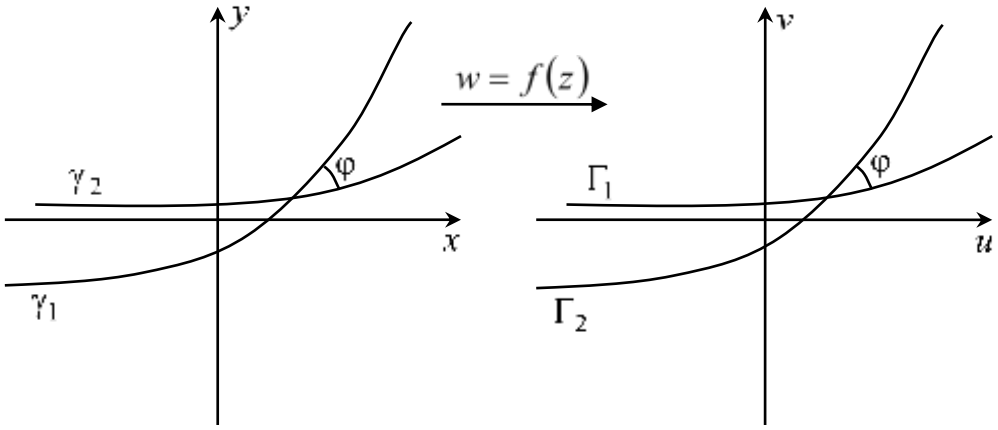


Рисунок 7 – Конформне відображення другого роду

Означення. Функція називається *конформною в області* D, якщо вона конформна в кожній точці області D.

Твердження. Якщо функція $f(z)$ конформна в області D, то образом цієї області при відображенні f буде також область в $\mathbb{C}$.

Теорема. (Критерій конформності відображення) Функція f – конформна в області D тоді і тільки тоді, коли

1) функції $\{u, v\}$ – диференційовні в D;

2) функція $f(z)$ в області D володіє властивістю сталого лінійного розтягу та властивістю збереження кутів.

Дамо означення конформності, коли z_0 або $w = f(z_0)$ є нескінченно віддаленою точкою.

Означення. Нехай $z_0 = \infty$, $f(z_0) \neq \infty$. Функція f називається *конформною в точці* z_0, якщо функція $g(z) := f\left(\frac{1}{z}\right)$ конформна в точці 0.

Означення. Нехай $z_0 \neq \infty$, $f(z_0) = \infty$. Функція f називається *конформною в точці* z_0, якщо функція $g(z) := \frac{1}{f(z)}$ конформна в точці z_0.

Означення. Нехай $z_0 = \infty$, $f(z_0) = \infty$. Функція f називається *конформною в точці* z_0, якщо функція $g(z) := \frac{1}{f\left(\frac{1}{z}\right)}$ конформна в точці 0.

Означення. Функція f називається *однолистою* в області D, якщо для довільних $\{z_1, z_2\} \in D$, $z_1 \neq z_2$, маємо $f(z_1) \neq f(z_2)$.

Основною теоремою про конформні відображення є теорема Рімана про відображення.

Теорема. (*Рімана*) Нехай D та G дві довільні однозв'язні області в $\mathbb{C}$, межі яких містять більше однієї точки. Тоді існує відображення $f: D \to G$.

Питання для самоконтролю до теми 3

1. Сформулюйте означення функції комплексної змінної.
2. Сформулюйте означення образу і прообразу множини.
3. Сформулюйте означення границі функції комплексної змінної.
4. Яку функцію комплексної змінної називають диференційовною в точці?
5. Сформулюйте необхідні та достатні умови диференційовності функції в точці.
6. Доведіть формулу для похідної добутку двох функцій.
7. Виведіть умови Коші-Рімана в полярних координатах.
8. Сформулюйте правила диференціювання функції комплексної змінної.
9. Яка пара гармонічних функцій називається спряженою?
10. Сформулюйте означення конформного відображення першого роду.
11. Сформулюйте означення конформного відображення другого роду.
12. Сформулюйте критерій конформності відображення.
13. Сформулюйте означення конформності у випадку нескінченно віддаленою точки.
14. Сформулюйте теорему Рімана.

Завдання до теми 3

1. При відображенні $w = \frac{1}{z}$ знайти образ кривої, яка визначена рівнянням:

1) а) $|z| = 3$; б) $\mathrm{Re}(z) = 2$; в) $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$.

2) а) $|z - 1| = 1$; б) $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}$; в) $\arg(z) = \pi$.

3) а) $|z| = 7$; б) $\mathrm{Re}(z) = -4$; в) $\arg(z) = \frac{2\pi}{7}$.

4) а) $|z-5|=5$; б) $\mathrm{Re}(z)=\frac{1}{7}$; в) $\arg(z)=\frac{3\pi}{5}$.

5) а) $|z|=\frac{5}{2}$; б) $\mathrm{Re}(z)=-3$; в) $\arg(z)=\frac{5\pi}{6}$.

6) а) $|z-2|=2$; б) $\mathrm{Re}(z)=11$; в) $\arg(z)=\frac{\pi}{2}$.

7) а) $|z|=8$; б) $\mathrm{Re}(z)=\frac{1}{3}$; в) $\arg(z)=\frac{4\pi}{7}$.

8) а) $\left|z-\frac{3}{2}\right|=\frac{3}{2}$; б)$\mathrm{Re}(z)=-6$; в) $\arg(z)=\frac{3\pi}{11}$.

9) а) $|z|=10$; б) $\mathrm{Re}(z)=-9$; в) $\arg(z)=\frac{2\pi}{9}$.

10) а) $|z-6|=6$; б) $\mathrm{Re}(z)=8$; в) $\arg(z)=\frac{3\pi}{8}$.

4. Аналітичні функції та їх властивості

4.1. Аналітичні функції

Означення. Функція f називається *аналітичною в точці* $z_0 \in \mathbb{C}$, якщо вона диференційовна в деякому околі точки z_0.

Означення. Функція f називається *аналітичною в нескінченно віддаленій точці* ∞, якщо функція $g(z) := f\left(\frac{1}{z}\right)$ є аналітичною в точці 0.

Дане означення дозволяє розглядати аналітичні функції на $\overline{\mathbb{C}}$. Слід відзначити, що поняття похідної в нескінченно віддаленій точці ∞ не має змісту.

Означення. Функція f називається *аналітичною в області* D, якщо вона диференційовна в кожній точці цієї області.

Множину усіх аналітичних функцій в області D будемо позначати $A(D)$.

Твердження. Множина $A(D)$ утворює кільце відносно операцій додавання і множення двох функцій.

Означення. Функція f називається *цілою*, якщо вона аналітична в $\mathbb{C}$.

Для перевірки функції $f(z)$ на аналітичність в точці $z_0 = x_0 + iy_0$ необхідно виділити дійсну $u = \operatorname{Re} f(z)$ і уявну $v = \operatorname{Im} f(z)$, дослідити в околі точки $(x_0; y_0)$ на диференційовність функції u і v (наприклад, встановивши неперервність часткових похідних цих функцій), а також перевірити виконання умов Коші-Рімана.

Приклад. Перевірити функції на аналітичність, та знайти похідну в тих точках де вона існує.

а) $w = z\sin z$; б) $w = \bar{z} + 2z$; в) $w = x + ay + i(bx + cy)$.

▷а) Функція $w = z\sin z$ є аналітичною у всій комплексній площині як добуток двох аналітичних у всій комплексній площині функцій $w = z$ і $w = \sin z$. Знайдемо похідну цієї функції, скориставшись правилами диференціювання та табличними похідними. Отримаємо

$$w' = z'\sin z + z(\sin z)' + \sin z + z\cos z.$$

б) Виділимо дійсну та уявну частини функції $w = \bar{z} + 2z = x - iy + 2x + 2iy = 3x + iy$, звідки $u = 3x$, $v = y$. Запишемо умови Коші-Рімана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Leftrightarrow 3 = 1,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Leftrightarrow 0 = 0.$$

Бачимо, що перша умова не виконується в жодній точці комплексної площини. Таким чином функція ніде недиференційовна і ніде неаналітична.

в) Для функції $w = x + ay + i(bx + cy)$ маємо $u = x + ay$, $v = (bx + cy)$. З умов Коші-Рімана отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} c = 1 \\ a = -b \end{cases}$$

з якої випливає, що функція $w = x - by + i(bx + y)$ є аналітичною у всій комплексній площині, якщо ж хоча б одне з рівнянь системи не виконується функція ніде не аналітична.◀

Теорема. Якщо $f(z)$ є аналітичною в точці $z = a$ функцією і $f(a) = 0$, то або $f(z) \equiv 0$, або точка $z = a$ має проколотій окіл в якому $f(z) \neq 0$.

Теорема (про єдиність аналітичної функції). Якщо дві аналітичні в області D функції $f_1(z)$ і $f_2(z)$ співпадають на множині $E \subset D$, яке має хоча б одну граничну точку $a \in D$, то $f_1(z) \equiv f_2(z)$ всюди в області D.

Теорема. Якщо $f(z)$ є аналітичною в області D і $f(z) \equiv c = \text{const}$ на деякій кривій $\gamma \subset D$, то $f(z) \equiv c$ на усій області D.

Приклад. Довести рівність $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ при $z \in \mathbb{C}$.

▷Розглянемо функцію $f(z) = \sin^2 z + \cos^2 z - 1$, аналітичність якої у всій комплексній площині випливає з аналітичності елементарних функцій $\sin z$, $\cos z$. Оскільки $f(z) = 0$ при $z = x \in \mathbb{R}$, то $f(z) = 0$ при усіх $z \in \mathbb{C}$, тобто $f(z) \equiv 0$.◀

Приклад. З'ясувати чи існує аналітична функція $w = u(x, y) + iv(x, y)$ (якщо існує то знайти її) якщо: $u(x, y) = x^2 + 7xy - y^2$

▷Перевіримо умову теореми, тобто – чи є функція $u = x^2 + 7xy - y^2$ гармонічною в області визначення. Для цього знайдемо частинні похідні першого і другого порядків і перевіримо виконання рівняння Лапласа.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x + 7y, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -2y + 7x. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2, \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2. \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0.$$

Таким чином функція $u(x, y)$ задовольняє рівнянню Лапласа тотожно, тобто для будь яких $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, а значить існує аналітична функція $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, для якої вона є дійсною частиною. Знайдемо невідому спряжену гармонічну функцію $v(x, y)$ з умов Коші-Рімана:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

З першої умови маємо: $2x + 7y = \frac{\partial v}{\partial y}$. Тоді $v(x, y) = \int (2x + 7y)\, dy = 2xy + \frac{7}{2}y^2 + \varphi(x)$.

Для знаходження невідомої функції $\varphi(x)$ підставимо знайдену функцію $v(x, y)$ в друге рівняння системи.

$$7x - 2y = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = 2y - 7x \Leftrightarrow 2y + \varphi'(x) = 2y - 7x$$

$$\Leftrightarrow \varphi'(x) = -7x \Rightarrow \varphi(x) = -\frac{7}{2}x^2 + C.$$

Остаточно для $v(x, y)$ отримаємо вираз з точністю до довільної сталої C:

$$v(x, y) = 2xy + \frac{7}{2}y^2 - \frac{7}{2}x^2 + C.$$

Знайдемо функцію $f(z)$:

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = x^2 + 7xy - y^2 + i\left(2xy + \frac{7}{2}y^2 - \frac{7}{2}x^2 + C\right) =$$
$$= x^2 + 7xy - y^2 + 2ixy + \frac{7}{2}iy^2 - \frac{7}{2}ix^2 + iC =$$
$$= x^2 + 2ixy - y^2 - \frac{7}{2}i(x^2 + 2ixy - y^2) + iC = z^2 - \frac{7}{2}iz^2 + iC =$$
$$= \left(1 - \frac{7}{2}i\right)z^2 + iC. \blacktriangleleft$$

4.2. Лінійна функція

Означення. Функція вигляду $w = f(z) = az + b$, $z \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, $\{a, b\} \subset \mathbb{C}$ називається *лінійною функцією*.

Оскільки $f'(z) = a \neq 0$, то лінійна функція є аналітичною, цілою, конформною та однолистою в $\mathbb{C}$.

Записавши число a в показниковій формі $a = |a|e^{i\theta}$, $\theta = \arg a$, лінійну функцію $w = f(z) = az + b$ можна представити у вигляді $w = f(z) = e^{i\theta}|a|z + b$, звідки видно, що це суперпозиція трьох відображень:

1) $w_1 = |a|z$ – гомотетія з центром в точці $z = 0$ і коефіцієнтом $|a|$ (див. рис. 8).

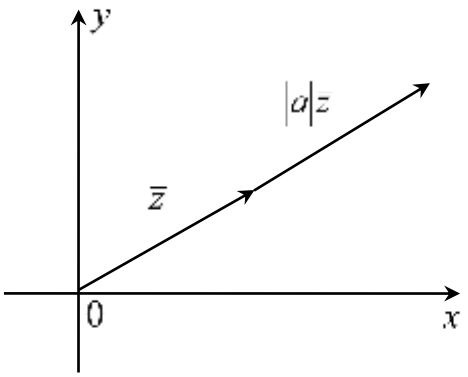


Рисунок 8 – Гомотетія з центром в точці $z = 0$

2) $w_2 = e^{i\theta}w_1$ – поворот навколо точки $w_1 = 0$ на кут $\theta = \arg a$ (див. рис. 9).

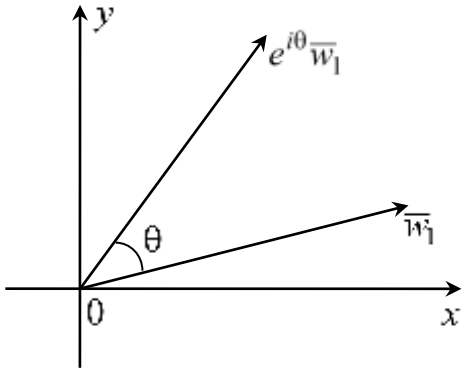


Рисунок 9 – Поворот навколо точки $w_1 = 0$ на кут $\theta = \arg a$

3) $w_3 = w_2 + b$ – паралельне перенесення на вектор $\bar{b}$ (див. рис. 10).

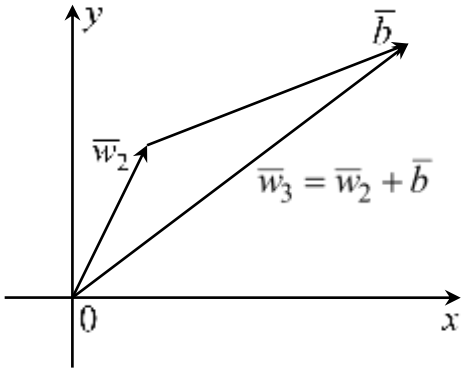


Рисунок 10 – Паралельне перенесення на вектор $\overline{b}$

4.3. Дробово-лінійна функція

Означення. Функція вигляду $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $z \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$, $\{a, b, c, d\} \subset \mathbb{C}$ називається *дробово-лінійною функцією*.

Функція є аналітичною в $\mathbb{C}$.

Надалі вважаємо, що $c \neq 0$. Довизначимо по неперервності дробово-лінійну функцію на $\overline{\mathbb{C}}$:

$$w = \Omega(z) = \begin{cases} \dfrac{az+b}{cz+d}, & z \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}, \\ \infty, & z = -\dfrac{d}{c}, \\ \dfrac{a}{c}, & z = \infty. \end{cases}$$

Очевидно, що кожна дробова-лінійна функція – це неперервне відображення з $\overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$. Крім того, для кожного дробово-лінійного відображення існує обернене і воно також є дробово-лінійним відображенням:

$$\Omega^{-1}(w) = \begin{cases} \dfrac{-dw+b}{cw-a}, & w \in \mathbb{C} \setminus \left\{\dfrac{a}{c}\right\}, \\ \infty, & w = \dfrac{a}{c}, \\ -\dfrac{d}{c}, & w = \infty. \end{cases}$$

Твердження. Дробово-лінійне відображення $\Omega: \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ – однолисте відображення.

Теорема. Дробово-лінійне відображення $\Omega: \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ – конформне відображення в $\overline{\mathbb{C}}$.

Частинним випадком дробово-лінійної функції є функція – $f(z) = \frac{1}{z}$ (інверсія), яка визначена на всій комплексній площині, за винятком точки 0.

Відзначимо основні властивості дробово-лінійної функції.

1) Дробово-лінійна функція однозначно визначається в трьох точках.

2) **Теорема.** Існує єдине дробово-лінійне відображення, яке три різні задані точки $\{z_1, z_2, z_3\} \subset \overline{\mathbb{C}}$ переводить в три різні задані точки $\{w_1, w_2, w_3\} \subset \overline{\mathbb{C}}$. Це дробово-лінійне відображення визначається формулою:

$$\frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} = \frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1}.$$

Означення. Вираз $\frac{z-z_1}{z-z_2} \cdot \frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}$ в геометрії називається ангармонічним відношенням чотирьох точок z, z_1, z_2, z_3.

3) **Теорема** (*кругова властивість*). Довільне коло на $\overline{\mathbb{C}}$ дробово-лінійна функція відображає на коло в $\overline{\mathbb{C}}$.

Під колом в $\overline{\mathbb{C}}$ розуміється звичайне коло або пряма.

4) Властивість збереження симетричних точок. Симетричні відносно кола точки при дробово-лінійному відображенні переходять в симетричні точки відносно образа цього кола (див. рис. 11).

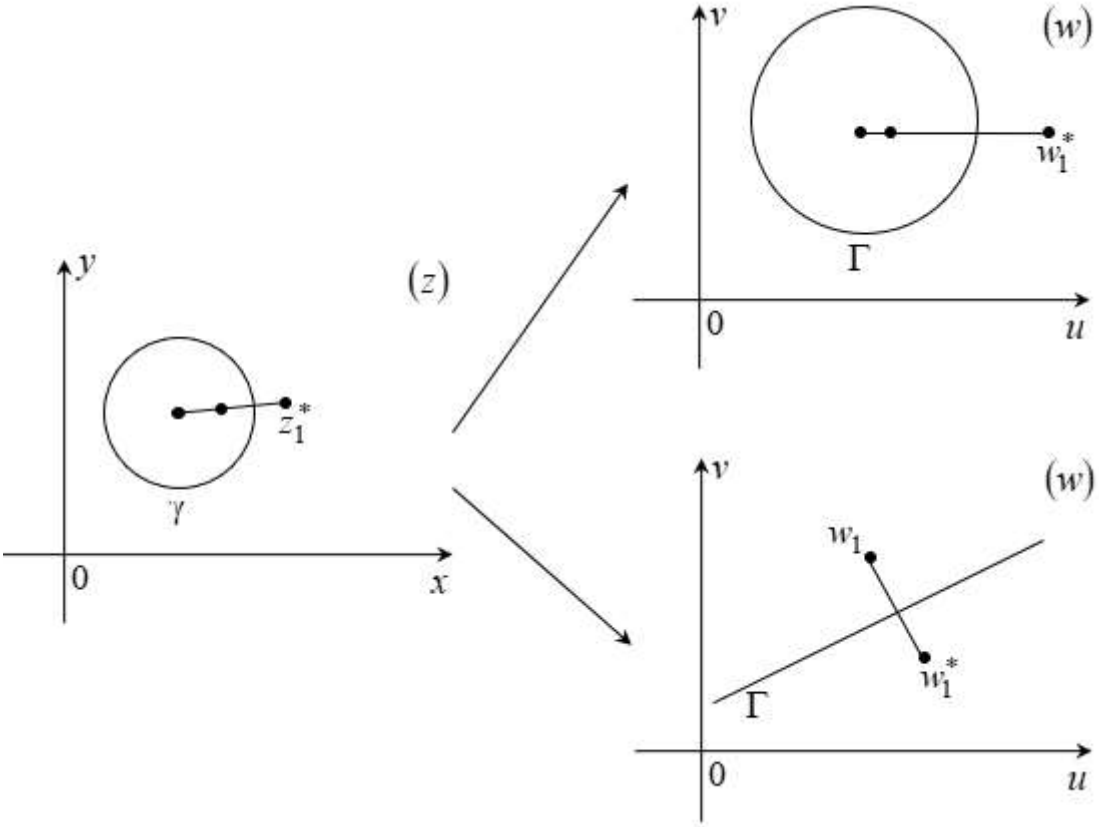


Рисунок 11 – Збереження симетричних точок

Означення. Точки z_1 та z_1^* називаються *симетричними відносно кола* $\Gamma = \{z: |z - a| = R\}$ (позначимо $z_1^* = \mathrm{Inv}_\Gamma(z_1)$), якщо виконуються умови:

1) $\arg(z_1^* - a) = \arg(z_1 - a)$;

2) $|z_1^* - a| \cdot |z_1 - a| = R^2$.

Крім того, за означенням покладемо, що $\infty = \mathrm{Inv}_\Gamma(a)$.

Означення. Області D та G в $\overline{\mathbb{C}}$ називаються *дробово-лінійним ізоморфізмом*, якщо існує дробово-лінійне відображення Ω таке, що $G = \Omega(D)$. При цьому відображення $\Omega: D \to G$ називається *дробово-лінійним ізоморфізмом області D на область G*.

Твердження. Кожний дробово-лінійний ізоморфізм верхньої півплощини $H_1 = \{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Im} z > 0\}$ на одиничний круг $H_2 = \{w \in \mathbb{C}: |w| < 1\}$ можна представити у вигляді:

$$w = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{z - \overline{z}_0},$$

де $\operatorname{Im}(z_0) > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Означення. Дробово-лінійний ізоморфізм області D на себе називається *дробово-лінійним автоморфізмом області D*.

Твердження. Кожний дробово-лінійний автоморфізм одиничного круга $\{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$ можна представити у вигляді:

$$w = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{z - z \cdot \overline{z}_0},$$

де $|z_0| < 1$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Означення. Функція вигляду

$$w = J(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), z \in \mathbb{C}\backslash\{0\},$$

називається *функцією Жуковського*.

4.4. Показникова функція

Означення дійсних елементарних функцій, таких як e^x, $\sin x$, $\cos x$, у випадку комплексного аргументу втрачають сенс.

Показникову функцію e^z, $z \in \mathbb{C}$ визначимо наступним чином:

$$w = f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y), \;\; z \in \mathbb{C}.$$

Границю $e^z = \lim\limits_{z \to +\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ можна також взяти за означення показникової функції.

Областями однолистості будуть горизонтальні смуги:

$$D_k = \{z: -\pi + 2\pi k < \operatorname{Im} z < \pi + 2\pi k\}, \;\; k \in \mathbb{Z}.$$

4.5. Тригонометричні функції

Зауважимо, що означення дійсних елементарних функцій, таких як $\sin x$, $\cos x$, у випадку комплексного аргументу втрачають сенс.

Як було показано в другій лекції, за формулою Ейлера, отримуються наступні співвідношення:

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \;\; \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Далі ці співвідношення використовуються для продовження тригонометричних функцій в комплексну площину:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \;\; \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \;\; z \in \mathbb{C}.$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = -i \frac{e^{i2z} - 1}{e^{i2z} + 1}, \;\; z \in \mathbb{C}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + \pi n, \;\; n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

$$\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = i \frac{e^{i2z} + 1}{e^{i2z} - 1} z \in \mathbb{C}\backslash\{\pi n, \;\; n \in \mathbb{Z}\}$$

З цих формул та властивостей показникової функції випливає, що $\cos z$ та $\sin z$ 2π-періодичні, $\operatorname{tg} z$ та $\operatorname{ctg} z$ – π-періодичні. Легко перевірити, що для тригонометричних функцій зберігаються звичайні формули диференціювання:

$$(\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

$$(\operatorname{tg} z)' = \frac{1}{\cos^2 z}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}\right\},$$

$$(\operatorname{ctg} z)' = -\frac{1}{\sin^2 z}, \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{\pi n, \ n \in \mathbb{Z}\},$$

а також всі тригонометричні співвідношення, які мають місце для дійсних чисел ($\sin^2 z + \cos^2 z = 1$, теореми додавання, формули зведення та інші).

4.6. Гіперболічні функції

Так само, як і у випадку функцій дійсної змінної, за допомогою показникової функції визначають *гіперболічні функції* комплексної змінної:

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

При дійсному z гіперболічні функції комплексної змінної співпадають з відповідними дійсними функціями. Гіперболічні функції комплексної змінної задовольняють основним співвідношенням, аналогічним до тих, які визначені для дійсних гіперболічних функцій, наприклад, неважко перевірити, що

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1.$$

Тригонометричні функції дуже тісно пов’язані з гіперболічними функціями через наступні співвідношення:

$$\sin(iz) = i \operatorname{sh} z, \qquad \operatorname{sh}(iz) = i \sin z,$$
$$\cos(iz) = \operatorname{ch} z, \qquad \operatorname{ch}(iz) = \cos z,$$
$$\operatorname{tg}(iz) = i \operatorname{th} z, \qquad \operatorname{th}(iz) = i \operatorname{tg} z,$$
$$\operatorname{ctg}(iz) = -i \operatorname{cth} z, \qquad \operatorname{cth}(iz) = -i \operatorname{ctg} z.$$

4.7. Поняття багатозначної функції комплексної змінної

Означення. Якщо кожному комплексному числу $z \in E \subset \overline{\mathbb{C}}$ за законом f поставлено у відповідність декілька комплексних чисел, які позначають $w = f(z)$, то кажуть, що f є багатозначною функцією комплексної змінної, що визначена на множині E.

Означення. Кажуть, що в області $D \subset E$ виділено однозначну вітку багатозначної функції $f(z)$, якщо в кожній точці цієї області обрано одне зі значень $w = f(z)$, причому так, що отримана однозначна функція є неперервною в області D.

$\operatorname{Arg} z$ є багатозначною функцією комплексної змінної, яка визначена на всій комплексній площині крім точки $z = 0$. Функція $\operatorname{Arg} z$ є найбільш важливим прикладом багатозначної функції в комплексному аналізі. З цією функцією пов’язано багато інших багатозначних функцій комплексної змінної. Побудова однозначних віток цих функцій визначається вибором певного значення аргументу комплексної змінної, тобто вибором однозначної вітки багатозначної функції $\operatorname{Arg} z$.

Приріст аргументу комплексного числа виражається через криволінійний інтеграл:

$$\Delta_\gamma \operatorname{Arg} z = \int\limits_\gamma \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2},$$

який не залежіть від шляху інтегрування. Виходячи з цього можна сформулювати *основні властивості приросту аргументу*:

1. $\Delta_\gamma \operatorname{Arg} z = -\Delta_{-\gamma} \operatorname{Arg} z$, де $-\gamma$ означає криву γ з протилежним напрямом обходу.

2. Якщо крива γ складається з кривих γ_1 і γ_2, то $\Delta_\gamma \operatorname{Arg} z = \Delta_{\gamma_1} \operatorname{Arg} z + \Delta_{\gamma_2} \operatorname{Arg} z$.

3. $\Delta_{\gamma_1} \operatorname{Arg} z = \Delta_{\gamma_2} \operatorname{Arg} z$ для будь яких кривих γ_1, γ_2, що належать однозв'язній області $D \subset \mathbb{C}\backslash\{0\}$ і мають спільні початкову і кінцеву точки.

4. $\Delta_\gamma \operatorname{Arg} z = 0$ для будь якої замкненої кривої γ в однозв'язній області D, що не містить точку $z = 0$.

5. $\Delta_\gamma \operatorname{Arg} z = 2\pi$ для будь якої простої замкненої кривої γ, що оточує точку $z = 0$ і пробігається проти годинникової стрілки.

4.8. Логарифмічна функція

Розглянемо довільне комплексне число $z \neq 0$.

Означення. Комплексне число w називають *логарифмом комплексного числа* $z \neq 0$ і позначають $w = \operatorname{Ln} z$, якщо $e^w = z$.

Нехай $w = u + iv$, тоді

$$e^{u+iv} = e^u e^{iv} = e^u(\cos v + i \sin v) = z.$$

З умови рівності комплексних чисел в тригонометричній формі випливає, що $|z| = e^u \Rightarrow u = \ln|z|$ і $v = \operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. Звідси, для логарифма комплексного числа, отримаємо формулу

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \arg z + 2\pi i k,\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

Остання формула визначає логарифм комплексного числа $z \neq 0$ неоднозначно.

Якщо покласти $k = 0$, отримаємо *головне значення логарифму*

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z\,.$$

Якщо $z = x > 0$, то головне значення логарифма є дійсним числом і співпадає з натуральним логарифмом дійсного числа x.

Співвідношення $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \arg z + 2\pi i k$ визначає сукупність усіх можливих значень логарифму комплексного числа. Цю сукупність називають *загальним значенням логарифму*.

Властивості логарифму.

1. $\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln}(z_1) + \operatorname{Ln}(z_2)$; 2. $\operatorname{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Ln}(z_1) - \operatorname{Ln}(z_2)$;

3. $\operatorname{Ln}(z)^n = n \operatorname{Ln} z,\ n \in \mathbb{N}$; 4. $\operatorname{Ln} \sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} \operatorname{Ln} z$.

Зауваження. Рівності 1-4 слід розуміти як рівності множин значень. Однозначні вітки функції $\operatorname{Ln} z$ визначаються вітками функції $\operatorname{Arg} z$, тобто їх

виділення можливе лише в таких областях, в яких можливе виділення однозначних віток функції $\operatorname{Arg} z$.

4.9. Обернені тригонометричні функції

Функції $\operatorname{Arcsin} z$, $\operatorname{Arccos} z$, $\operatorname{Arctg} z$ і $\operatorname{Arcctg} z$ визначаються як обернені до функцій $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$ і $\operatorname{ctg} z$ відповідно і називаються *оберненими тригонометричними* функціями комплексної змінної.

Наприклад, якщо $z = \cos w$, то w називають арккосинусом числа z і позначають $\operatorname{Arccos} z$.

Знайдемо формулу обчислення арккосинусу. Маємо

$$z = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}.$$

Позначимо $t = e^{iw}$, тоді $z = \frac{t+\frac{1}{t}}{2}$, звідки $t^2 - 2zt + 1 = 0$. Розв'язуючи квадратне рівняння відносно t, отримаємо розв'язки $t_{1,2} = z + \sqrt{z^2 - 1}$. Оскільки $t = e^{iw}$, то $iw = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$. Звідки

$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right).$$

Нехай ζ – те зі значень коренів квадратного рівняння t_1, t_2, головне значення аргументу якого належить проміжку $[0; \pi]$.

Головним значенням арккосинусу будемо називати значення функції $\operatorname{Arccos} z$, яке визначається співвідношенням

$$\arccos z = -i \ln|\zeta| + \arg \zeta.$$

Загальним значенням арккосинусу називають всю сукупність його значень, яка описується формулою

$$\operatorname{Arccos} z = \pm \arccos z + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Інші обернені тригонометричні функції за допомогою логарифмічної функції виражаються аналогічно:

$$\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln} i\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right),$$

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + iz}{1 - iz},$$

$$\operatorname{Arcctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{z + i}{z - i}.$$

Для будь яких значень $\operatorname{Arcsin} z$ і $\operatorname{Arctg} z$ існують такі значення $\operatorname{Arccos} z$ і $\operatorname{Arcctg} z$, що виконуються рівності:

$$\operatorname{Arcsin} z + \operatorname{Arccos} z = \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{Arctg} z + \operatorname{Arcctg} z = \frac{\pi}{2}.$$

$$\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 + 1}\right),$$

$$\operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right),$$

$$\operatorname{Arcth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + z}{1 - z},$$

$$\operatorname{Arccth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{z + 1}{z - 1}.$$

Випишемо формули (1.15), (1.17)-(1.19) в сенсі головного значення:

$$\arccos z = \arg\left(z+\sqrt{z^2-1}\right) - i\ln\left|z+\sqrt{z^2-1}\right|,$$

$$\arcsin z = \arg\left(z+\sqrt{z^2-1}\right) - i\ln\left|i\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)\right|,$$

$$\operatorname{arctg} z = \frac{1}{2}\arg\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right) - \frac{i}{2}\ln\left|\frac{1+iz}{1-iz}\right|,$$

$$\operatorname{arcctg} z = \frac{1}{2}\arg\left(\frac{z+i}{z-i}\right) - \frac{i}{2}\ln\left|\frac{z+i}{z-i}\right|.$$

Зауваження. Квадратний корінь із комплексного числа у формулах дає два значення. Для головного значення функції вибираємо одне, аргумент якого попадає в $[0;\pi]$.

Приклад. Знайти головні та загальні значення:

а) $\operatorname{Ln}(1+\sqrt{3}i)$; б) i^i; в) $\operatorname{Arccos}(i)$.

▷а) Загальне значення:

$$\operatorname{Ln}(1+\sqrt{3}i) = \ln\left|1+\sqrt{3}i\right| + i\arg\left(1+\sqrt{3}i\right) + 2\pi ik =$$

$$= \ln 2 + i\frac{\pi}{3} + 2\pi ik,\ \ k\in\mathbb{Z}$$

і головне значення – $\operatorname{ln}(1+\sqrt{3}i) = \ln 2 + i\frac{\pi}{3}$.

б) Скористаємось формулою – $a^z = e^{z\operatorname{Ln} a}$. Отримаємо $i^i = e^{i\operatorname{Ln}(i)}$. Знайдемо $\operatorname{Ln}(i) = \ln|i| + i\operatorname{Arg} i = i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right),\ k\in\mathbb{Z}$. Підставляючи цю відповідь у співвідношення для i^i, отримаємо загальне значення $i^i = e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)},\ k\in\mathbb{Z}$ і головне значення $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$.

Відмітимо, що уявне число в уявному степені приймає значення, які є дійсними додатними числами.

в) Загальне значення:

$$\operatorname{Arccos}(i) = -i\operatorname{Ln}\left(i+\sqrt{i^2-1}\right) = -i\operatorname{Ln}\left(i+\sqrt{-2}\right) =$$

$$= -i\operatorname{Ln}\left(i+i\sqrt{-2}\right) = -i\operatorname{Ln} i\left(1\pm\sqrt{2}\right) =$$

$$= -i\ln\left|1\pm\sqrt{2}\right| \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ \ k\in\mathbb{Z} = \begin{cases} -i\ln\left(\sqrt{2}+1\right) \pm \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}, \\ -i\ln\left(\sqrt{2}-1\right) \pm \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Головне значення матиме вигляд $\arccos i = \frac{\pi}{2} - i\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.◀

Приклад. Розв'язати рівняння:

а) $e^{3z} - 1 + i = 0$; б) $\sin z + \cos z = 2i$; в) $\operatorname{ch} 2z + 1 = 0$.

▷ а) $e^{3z} - 1 + i = 0 \Leftrightarrow\ e^{3z} = 1 - i \Leftrightarrow z = \frac{1}{3}\operatorname{Ln}(1-i) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1}{3}\ln\sqrt{2} - i\frac{\pi}{4} + 2k\pi i = \frac{1}{6}\ln 2 - i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right),\ k\in\mathbb{Z};$$

б) $\sin z + \cos z = 2i \Leftrightarrow \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} + \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = 2i \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (1+i)e^{iz} + (-1+i)e^{-iz} + 4 = 0.$$

Позначимо $e^{iz}=t$, отримаємо $(1+i)t+(-1+i)\frac{1}{t}+4=0 \Leftrightarrow 2t^2+4(1-i)t+2i=0 \Leftrightarrow t^2+2(1-i)t+i=0$.

Розв'язуючи квадратне рівняння, отримаємо корені

$$t_{1,2}=-1+i+\sqrt{(1-i)^2-i}=-1+i+\sqrt{-3i}=$$
$$=-1+i\pm\frac{\sqrt{6}}{2}(1-i)=-1\pm\frac{\sqrt{6}}{2}+i\left(1\mp\frac{\sqrt{6}}{2}\right).$$

Враховуючи, що $e^{iz}=t$, отримаємо сукупність рівнянь

$$\begin{bmatrix} e^{iz}=t_1 \\ e^{iz}=t_1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} z=\operatorname{Ln} t_1 \\ z=\operatorname{Ln} t_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} z=\operatorname{Ln}\left(-1+\frac{\sqrt{6}}{2}+i\left(1-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\right) \\ z=\operatorname{Ln}\left(-1-\frac{\sqrt{6}}{2}+i\left(1+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\right) \end{bmatrix}.$$

Знайдемо модулі і аргументи коренів квадратного рівняння:

$$|t_1|=\sqrt{\left(-1+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2+\left(1-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}=\sqrt{2\left(1-\sqrt{6}+\frac{3}{2}\right)}=\sqrt{5-2\sqrt{6}};$$

$$|t_1|=\sqrt{\left(-1-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2+\left(1+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}=\sqrt{2\left(1+\sqrt{6}+\frac{3}{2}\right)}=\sqrt{5+2\sqrt{6}};$$

$$\arg t_1=\operatorname{arctg}\frac{1-\frac{\sqrt{6}}{2}}{-1+\frac{\sqrt{6}}{2}}=-\operatorname{arctg}1=-\frac{\pi}{4};$$

$$\arg t_2=\pi+\operatorname{arctg}\frac{1+\frac{\sqrt{6}}{2}}{-1-\frac{\sqrt{6}}{2}}=\pi-\operatorname{arctg}1=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}.$$

Остаточно маємо сукупність розв'язків вихідного рівняння

$$\begin{bmatrix} z_1=\ln\sqrt{5-2\sqrt{6}}-i\left(\frac{\pi}{4}+2k_1\pi\right), \\ z_2=\ln\sqrt{5+2\sqrt{6}}+i\left(\frac{3\pi}{4}+2k_2\pi\right). \end{bmatrix} k_{1,2}\in\mathbb{Z}.$$

в) $\operatorname{ch}2z+1=0 \Leftrightarrow \frac{e^{2z}+e^{-2z}}{2}+1=0 \Leftrightarrow e^{4z}+2e^{2z}+1=0$. Позначимо $e^{2z}=t$, отримаємо квадратне рівняння

$$t^2+2t+1=0 \Leftrightarrow (t+1)^2=0 \Leftrightarrow t_{1,2}=-1.$$

Враховуючи, що $e^{2z}=t$, отримаємо розв'язок

$$z=\frac{1}{2}\operatorname{Ln}(-1)=\frac{i}{2}(\pi+2k\pi),\ k\in\mathbb{Z}.\blacktriangleleft$$

Питання для самоконтролю до теми 4

1. Яка функція називається аналітичною в точці?
2. Яка функція називається цілою у комплексній площині?

3. Як перевірити функції на аналітичність?
4. Охарактеризуйте лінійну функцію у комплексній площині.
5. Охарактеризуйте дробово-лінійну функцію у комплексній площині.
6. Сформулюйте ангармонічне відношенням чотирьох точок.
7. Що таке дробово-лінійний ізоморфізм верхньої півплощини?
8. Що таке дробово-лінійний ізоморфізм області на себе?
9. Яка функція називається функцією Жуковського?
10. Охарактеризуйте показникову функцію.
11. Охарактеризуйте тригонометричні функції у комплексній площині.
12. Охарактеризуйте гіперболічні функції у комплексній площині.
13. Охарактеризуйте поняття багатозначної функції комплексної змінної.
14. Які основні властивості має багатозначна функція?
15. Як визначається та які властивості має логарифмічна функція комплексної змінної?
16. Доведіть формули зв'язку між тригонометричними і гіперболічними функціями.
17. Що називають головним значенням логарифму?
18. Які формули Ви знаєте для визначення обернених тригонометричних функцій?
19. Доведіть формули, які виражають обернені тригонометричні функції через логарифмічну функцію.

Завдання до теми 4

1. Записати в алгебраїчній формі значення функцій:

1) а) $\sin(\pi + i\ln 5)$; б) $\text{th}(i\pi)$; в) $\text{ch}\left(i\frac{\pi}{2}\right)$.
2) а) $\cos(2\pi - i\ln 7)$; б) $\text{cth}\left(i\frac{7\pi}{4}\right)$; в) $\text{sh}(ln\,2)$.
3) а) $\text{tg}(i\ln 6)$; б) $\text{th}\left(i\frac{5\pi}{6}\right)$; в) $\text{ch}\left(i\frac{4\pi}{3}\right)$.
4) а) $\text{ctg}(i\ln 2)$; б) $\text{cth}\left(i\frac{3\pi}{4}\right)$; в) $\text{sh}(ln\,3)$.
5) а) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + i\ln 5\right)$; б) $\text{th}\left(i\frac{\pi}{4}\right)$; в) $\text{ch}\left(i\frac{3\pi}{2}\right)$.

2. Знайти головне та загальне значення багатозначних функцій комплексної змінної:

1) а) $\text{Ln}(5 - 6i)$; б) $i^{\frac{2}{i}}$; в) $\text{Arccos}(3i)$.
2) а) $\text{Ln}(\sqrt{2} - i)$; б) $(1 + i)^{3i}$; в) $\text{Arcsin}(i)$.
3) а) $\text{Ln}(3 + 5i)$; б) $(2i)^{i}$; в) $\text{Arctg}(1 + 2i)$.
4) а) $\text{Ln}(\sqrt{3} + i)$; б) $(2 - 2i)^{\frac{2}{i}}$; в) $\text{Arcctg}(5 - i)$.
5) а) $\text{Ln}(7 - 8i)$; б) $\left(\frac{i}{3}\right)^{i+1}$; в) $\text{Arcsh}(2 + 2i)$.

3. Розв'язати рівняння:

1) а) $2e^z + 1 - i = 0$; б) $\sin z + \cos z = 3i$; в) $\text{ch}\,10z + 2i = 0$.
2) а) $e^z + i = 0$; б) $\cos z = i\pi$; в) $\text{th}z - 1 + i = 0$.
3) а) $e^{2z} + 5e^z - 6 = 0$; б) $2\sin z - 3\cos z = 4$; в) $\text{sh}3z = -7i$.

4) а) $3e^z - 9i = 0$; б) $8\sin z = i$; в) $\operatorname{ch} z - 2\operatorname{sh} z = i$.

5) а) $e^{2z} + 3e^z - 54 = 0$; б) $\sin z + \cos z = 3$; в) $2\operatorname{ch} z + \operatorname{sh} z = i$.

4. Перевірити функції на аналітичність в C, та знайти похідну в тих точках де вона існує:

1) а) $w = z\cos z$; б) $w = \bar{z} + |z|^2$; в) $w = x + ay + i(bx + cy)$.

2) а) $w = z + e^{-z^2}$; б) $w = z \cdot \bar{z} + 1$; в) $w = ax - y + i(cx - by)$.

3) а) $w = \sin(z^2)$; б) $w = 2z \cdot \bar{z} + 3z$; в) $w = ax + 2y + i(cx - by)$.

4) а) $w = \cos^2(3z)$; б) $w = 7\bar{z} + z$; в) $w = ax - y + i(3cx + 2by)$.

5) а) $w = \cos z - 2e^{3z}$; б) $w = |3z|^2 + iz$;

в) $w = 4ax - y + i(cx + 3by)$.

5. З'ясувати чи існує аналітична функція $w = u(x, y) + iv(x, y)$ (якщо існує, то знайти її) якщо відомо, що:

1) а) $u = x^2 + 3xy - y^2 + x - 1$; б) $u = \frac{x}{x^2+y^2}$; в) $v = \frac{x^2}{y}$.

2) а) $u = -x^2 - xy + y^2 + 2y - x$; б) $u = \frac{y}{x^2+y^2}$; в) $v = x^2 + y^2 - 2xy$.

3) а) $u = 5xy + 3y - 4x + 1$; б) $u = -\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$; в) $v = x^3 + 4xy - y + x$.

4) а) $u = x^2 + xy - y^2 + 5y + 6x$; б) $u = 2\operatorname{arcctg}\frac{x}{y}$;

в) $v = x + 3xy - y^2 + 1$.

5) а) $u = 3y^2 - 5xy - 3x^2 - 7y + 2x + 1$; б) $u = y - \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$;

в) $v = 2x^2 + 5xy - 3y^2 + x - y + 3$.

5. Інтегрування функцій комплексної змінної

5.1. Поняття інтеграла від функції комплексної змінної

Означення. *Кривою* на площині $\mathbb{C}$ будемо називати неперервне відображення γ: [a;b] $\to \mathbb{C}$ відрізку $[a; b]$ дійсної осі $\mathbb{R}$ в комплексну площину $\mathbb{C}$. При цьому, множина значень E_γ називається *шляхом* кривої γ, а комплексні числа $A = \gamma(a)$ і $B = \gamma(b)$ будемо називати відповідно *початковою* і *кінцевою точками* кривої, яку будемо позначати AB.

Нехай D – область в $\mathbb{C}$; $z = z(t),\ t \in [a; b]$ – кусково-гладка крива, шлях якої належить даній області, тобто $E_\gamma \subset D$; $f \in C(D)$. Розглянемо розбиття кривої AB на дуги $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ точками $z_0, z_1, \dots, z_n$ такими, що $z_0 = A$, $z_n = B$ (див. рис. 12).

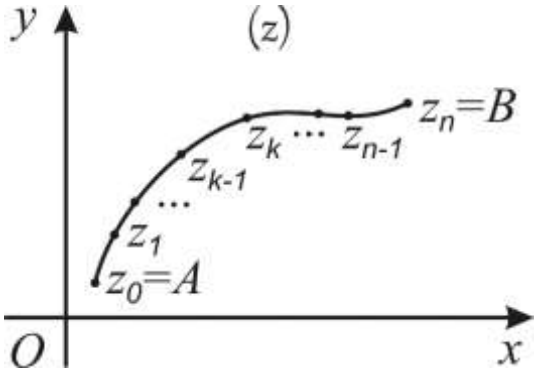


Рисунок 12 – Розбиття кривої на дуги

Позначимо через l максимальну з довжин дуг γ_i, $i = \overline{1, n}$. Оберемо на кожній дузі γ_k точку ξ_k і складемо інтегральну суму

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot (z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\, \Delta z_k,$$

де $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$.

Означення. Якщо при $l \to 0$ існує скінченна границя інтегральної суми, яка не залежить від способу розбиття кривої AB на дуги γ_k і від вибору точок ξ_k, то цю границю називають *інтегралом від функції $f(z)$ комплексної змінної z вздовж кривої AB* і позначають

$$\int_{AB} f(z)\, dz = \int_{\gamma} f(z)\, dz.$$

Таким чином

$$\int_{AB} f(z)\, dz = \lim_{l \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\, \Delta z_k.$$

Криву AB називають *шляхом інтегрування*.

Теорема. Якщо функція $f(z)$ неперервна на кусково-гладкій кривій AB то інтеграл $\int_{AB} f(z)\, dz$ існує.

Зведемо інтеграл від функції комплексної змінної до двох криволінійних інтегралів від дійсних функцій.

Для цього покладемо $z = x + iy$, $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z_k = x_k + iy_k$, $\xi_k = \tilde{x}_k + i\tilde{y}_k$, $x_k - x_{k-1} = \Delta x_k$, $y_k - y_{k-1} = \Delta y_k$, $\Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k$ тоді отримаємо:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n} \big(u(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k) + iv(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k)\big) \cdot (\Delta x_k + i\Delta y_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} [u(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k)\Delta x_k - v(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k)\Delta y_k] + i \sum_{k=1}^{n} [v(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k)\Delta x_k + u(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k)\Delta y_k].$$

Умова $l \to 0$ у випадку кусково-гладкої кривої еквівалентна умові $\max\limits_{k=1,n} |\Delta z_k| \to 0$, яка виконується, якщо $\max\limits_{k=1,n} |\Delta x_k| \to 0$ і $\max\limits_{k=1,n} |\Delta y_k| \to 0$.

З неперервності $f(z)$ на кривій AB випливає неперервність дійсних функцій $u(x,y)$, $v(x,y)$на цій кривій. З неперервності функцій $u(x,y)$, $v(x,y)$ на кривій AB випливає існування криволінійних інтегралів $\int_{AB} u(x,y)\,dx - v(x,y)dy$ і $\int_{AB} v(x,y)\,dx + u(x,y)dy$, для яких доданки в правій частині є інтегральними сумами, тобто існує скінченна границя правої частини (1.3), яка дорівнює інтегралу $\int_{AB} f(z)\,dz$. Переходячи до границі при $l \to 0$, отримаємо формулу:

$$\int_{AB} f(z)\,dz = \int_{AB} u(x,y)\,dx - v(x,y)dy + i\int_{AB} v(x,y)\,dx + u(x,y)dy.$$

Таким чином, існування інтегралу від функції комплексної змінної рівносильне існуванню двох криволінійних інтегралів від функцій двох дійсних змінних. Дану формулу можна отримати, якщо покласти $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $dz = dx + idy$ і виділити в інтегралі $\int_{AB} f(z)\,dz$ дійсну та уявну частини підінтегрального виразу.

Якщо відомі параметричні рівняння кривої AB: $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} t \in [a;b]$, то для обчислення інтегралу формула прийме наступний вигляд:

$$\int_{AB} f(z)\,dz = \int_a^b [u\big(x(t), y(t)\big) - v\,\big(x(t), y(t)\big)y'(t)]dt +$$

$$+i\int_a^b [v\big(x(t), y(t)\big) + u\big(x(t), y(t)\big)y'(t)]dt.$$

При обчисленні інтегралу (1.4) іноді корисно скористатися комплексним параметричним рівнянням $z = z(t)$, $t \in [\alpha;\beta]$ кривої AB, тоді отримаємо формулу

$$\int_{AB} f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f\big(z(t)\big)z'(t)dt$$

для обчислення інтегралу в комплексній формі.

5.2. Основні властивості інтегралу в комплексній площині

1. Лінійність. Для довільних $\{a, b\} \in \mathbb{C}$:

$$\int_\gamma \big(af(z)+bg(z)\big)\,dz = a\int_\gamma f(z)dz + b\int_\gamma g(z)dz.$$

2. Адитивність. Нехай $z=\gamma_1(t)$, $t\in[a;b]$, $z=\gamma_2(t)$, $t\in[b;c]$ – кусково-гладкі криві, для яких $\gamma_1(b)=\gamma_2(b)$. Об'єднання цих кривих позначимо через $\gamma=\gamma_1\cup\gamma_2=\begin{cases}\gamma_1(t), t\in[a;b],\\ \gamma_2(t), t\in[b;c].\end{cases}$ Тоді:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz.$$

3. Орієнтованість. Нехай задана кусково-гладка крива $z=\gamma(t)$, $t\in[a;b]$. Позначимо через γ^- криву $z=\gamma^-(\tau)=\gamma^-(a+b-\tau)$, $\tau\in[a;b]$. Очевидно, що криві γ та γ^- мають протилежну орієнтацію. Тоді:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = -\int_{\gamma^-} f(z)\,dz.$$

4. Інваріантність. Якщо криві $z=\gamma_1(t)$, $t\in[a_1;b_1]$, $z=\gamma_2(\tau)$, $\tau\in[a_2;b_2]$ еквівалентні, тоді:

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz.$$

5. Оцінка інтегралу. Має місце така нерівність: $\left|\int_{AB} f(z)\,dz\right| \le \int_{AB}|f(z)|\,|dz|$, якщо $|f(z)|\le M$, $z\in AB$, то

$$\left|\int_{AB} f(z)\,dz\right| \le M\cdot l_{AB},$$

де $l_{AB}=\sqrt{\big(x'(t)\big)^2+\big(y'(t)\big)^2}$ – довжина кривої AB.

Приклад. Обчислити інтеграл $\int_{AB} z\,\mathrm{Re}\,z\,dz$ вздовж двох шляхів:

а) AB: відрізок прямої, що з'єднує точки $A(0;0)$ і $B(1;1)$;

б) AB: дуга параболи з вершиною у початку координат, що з'єднує точки $A(0;0)$ і $B(1;1)$;

▷ а) пряма AB має рівняння $y=x$, $x\in[0;1]$ будемо вважати незалежну змінну x параметром і перейдемо до визначеного інтегралу^

$$\int\limits_{AB} z\,Re\,z\,dz = \int\limits_{AB}(x+iy)x(dx+idy) =$$

$$= \int\limits_{AB} x^2dx - xydy + i\int\limits_{AB} xydx + x^2dy =$$

$$= \int_0^1(x^2-x^2)dx + i\int_0^1(x^2+x^2)dx = 2i\int_0^1 x^2dx = \frac{2}{3}ix^3\Big|_0^1 = \frac{2}{3}i;$$

б) парабола AB має рівняння $y=x^2$, $x\in[0;1]$, в цьому випадку отримаємо

$$\int_{AB} z\,\mathrm{Re}\,z\,dz = \int_{AB} x^2dx - xydy + i\int_{AB} xydx + x^2dy = \int_0^1 (x^2 - 2x^4)\,dx +$$
$$i\int_0^1 (x^3 + 2x^3)dx = = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{2x^5}{5}\right)\Big|_0^1 + i\,\frac{3x^4}{4}\Big|_0^1 = -\frac{1}{15} + i\,\frac{3}{4}.\blacktriangleleft$$

Приклад. Обчислити інтеграл $\oint_L (z - z_0)^n\,dz$, де L: $|z - z_0| = R$, $n \in \mathbb{Z}$.

$\triangleright$ Скористаємось параметричним рівнянням кола L у комплексній формі L: z-$z_0 = R \cdot e^{it},\ t \in [0;\ 2\pi]$. Отримаємо

$$\oint_L (z - z_0)^n\,dz = \int_0^{2\pi} R^n e^{int} Rie^{it}dt = R^{n+1} i\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}dt.$$

Останній інтеграл дорівнює нулю при будь якому цілому $n \neq -1$, дійсно $\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}dt = \frac{1}{i(n+1)} e^{i(n+1)t}\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{i(n+1)}\left(e^{i2\pi(n+1)} - 1\right) = 0,\ n \neq -1.$

Розглянемо випадок коли $n = -1$. Отримаємо

$$\oint_L \frac{dz}{z - z_0} = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.\blacktriangleleft$$

Ми отримали важливу у застосуваннях формулу, запишемо її окремо.

$$\oint_L (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 0, & n \neq -1 \\ 2\pi i, & n = -1 \end{cases},\ \ L\colon\ |z - z_0| = R, n \in \mathbb{Z}.$$

5.3. Первісна

Означення. Нехай D – область в $\mathbb{C}$, $F \in A(D)$ та $f \in C(D)$. Функція F називається первісною функції f в області D, якщо

$$F'(z) = f(z)\ \ \forall z \in D.$$

Зрозуміло, що якщо F – первісна функції f в області D, то для довільного комплексного числа c функція $F + c$ – також первісна.

Теорема *(про локальне існування первісної).* Нехай $f \in A(D)$. Тоді в довільному крузі $B_r(a) \subset D$ існує первісна

$$F(z) = \int_{[a;z]} f(\xi)d\xi,\ \ z \in B_r(a)\,,$$

функції f. Інтеграл береться по відрізку $[a; z]$.

Означення. Нехай $f \in C(\Omega)$, $z = \gamma(t)$, $t \in [a; b]$ – крива, шлях E_γ якої належить області Ω. Неперервна функція Ψ: $[a; b] \to \mathbb{C}$ називається *первісною функції f вздовж кривої γ*, якщо в деякому околі кожної точки на шляху кривої γ існує первісна для f, звуження якої на відповідну частину шляху E_γ співпадає з Ψ, тобто

$$\forall t_0 \in [a; b]\ \exists\delta > 0\ \exists r > 0\ \exists F_{t_0} \in A\left(B_r\left(\gamma(t_0)\right)\right)\colon$$
$$\begin{cases} F'_{t_0}(z) = f(z), & \forall z \in B_r\left(\gamma(t_0)\right) \subset \Omega, \\ F_{t_0}\left(\gamma(t)\right) = \Psi(t), & \forall t \in (t_0 - \delta; t_0 + \delta) \cap [a; b]. \end{cases}$$

Теорема *(теорема про первісну вздовж кривої).* Якщо $f \in A(D)$, тоді існує первісна Ψ функції f вздовж довільної кривої γ, шлях якої належить області D. Функція Ψ визначається з точністю до адитивної константи.

Теорема *(теорема Коші для однозв'язної області або інтегральна теорема Коші).* Якщо функція $f(z)$ є аналітичною в однозв'язній області D і на контурі γ, що обмежує область D, то

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

Теорема *(теорема Коші для многозв'язної області).* Нехай многозв'язна область D обмежена зовнішнім простим кусково-гладким контуром γ_0 і внутрішніми кусково-гладкими контурами $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$. Якщо функція $f(z)$ є аналітичною в замкненій області $\overline{D}$, то

$$\oint_{\gamma_0} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{\gamma_k} f(z)\,dz.$$

5.4. Формула Ньютона-Лейбніца

Теорема (*формула Ньютона-Лейбніца*). Нехай $z = \gamma(t),\ t \in [a; b]$ – кусково-гладка крива, шлях E_γ якої належить області D, тобто $E_\gamma \subset D$. Якщо функція f неперервна в D: $f \in C(D)$ і має первісну Ψ вздовж γ, тоді

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \Psi(b) - \Psi(a).$$

Приклад. Обчислити інтеграл $\int_{AB} e^z \cos 5\, z dz$, де AB – відрізок прямої, що з'єднує точки $A(0; 0)$ і $B(1; 2)$.

▷ Підінтегральна функція є аналітичної у всій комплексній площині, тому інтеграл не залежить від шляху інтегрування, який з'єднує початкову і кінцеву точки. Застосуємо формулу Ньютона-Лейбніца.

$$\int_{AB} e^z \cos 5\, z dz = \int_0^{1+2i} e^z \frac{e^z + e^{-z}}{2} dz =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{1+2i} (e^{2z} + 1)dz = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2z}}{2} + z\right)\Big|_0^{1+2i} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{2+4i} + 2 + 4i - 1\right) = \frac{1}{4}(e^2(\cos 4 + i \sin 4) + 1 + 4i) =$$

$$= \frac{e^2 \cos 4 + 1}{4} + i\frac{e^2 \sin 4 + 4}{4}. \blacktriangleleft$$

5.5. Інтегральна формула Коші

Теорема. Нехай функція $f(z)$ є аналітичної в однозв'язній області D і на контурі L, що обмежує область D. Тоді для будь якої точки $z_0 \in D$ є справедливою формула

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz.$$

▷Підінтегральна функція $\frac{f(z)}{z-z_0}$ є аналітичною у всіх точках області D крім точки z_0.

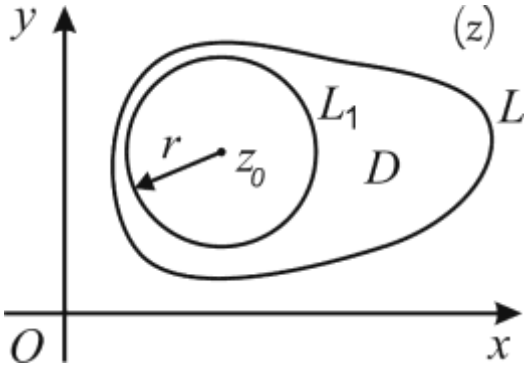


Рисунок 13 – Коло L_1 досить малого радіуса, яке оточує точку z_0

Розглянемо коло L_1 досить малого радіуса, яке оточує точку z_0 (див. рис. 13). За теоремою Коші для многозв'язної області, маємо

$$\oint_L \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = \oint_{L_1} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz.$$

З аналітичності функції $f(z)$ в області D випливає її неперервність в точці z_0, тобто $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$: $|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$. Тоді, можна записати:

$$f(z_0) = f(z_0)\cdot\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_1}\frac{dz}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{L_1}\frac{f(z_0)}{z - z_0}\,dz.$$

Виберемо радіус r кола L_1 таким чином, що $r < \delta$ і оцінимо модуль різниці

$$\left|f(z_0) - \frac{1}{2\pi i}\oint_{L_1}\frac{f(z)}{z - z_0}\,dz\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_1}\frac{f(z_0) - f(z)}{z - z_0}\,dz\right| \le \frac{2\pi r\varepsilon}{2\pi r|i|} = \varepsilon.$$

Останнє співвідношення означає, що різниця $f(z_0) - \frac{1}{2\pi i}\oint_{L_1}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$ є нескінченно малою при $r \to \infty$. З іншого боку ця різниця є сталою, в силу незалежності інтегралу від радіуса кола, тобто дорівнює нулю.◀

Означення. Праву частину рівності $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$ називають *інтегралом Коші,* а саму формулу $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$ – *інтегральною формулою Коші.*

Інтегральна формула Коші дозволяє для аналітичної в замкненій області $\overline{D}$ функції знаходити її значення в будь якій точці $z_0 \in D$, якщо відомі значення цієї функції на контурі L.

При обчисленні інтеграла $\oint_L \varphi(z)dz$ інтегральну формулу Коші застосовують за наступною схемою.

1) Якщо функція $\varphi(z)$ є аналітичною в однозв'язній області D і на контурі L, що її обмежує, то

$$\oint_L \varphi(z)dz = 0.$$

2) Якщо в однозв'язній області D аналітичність функції $\varphi(z)$ порушується в точці z_0 і її можна представити у вигляді $\varphi(z) = \frac{f(z)}{z-z_0}$, де $f(z)$ є аналітичною в $\overline{D}$, то

$$\oint_L \varphi(z)dz = \oint_L \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0).$$

3) Якщо в області D існує скінченна кількість особливих точок $z_1, z_2, \ldots, z_n$ функції $\varphi(z)$, причому ця функція має вигляд $\varphi(z) = \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n)}$, де $f(z)$ є аналітичною в $\overline{D}$, то за теоремою Коші для многозв'язної області, маємо

$$\oint_L \varphi(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{L_k} \varphi(z)dz,$$

де $L_1, L_2, \ldots, L_n$ – замкнені контури, які оточують точки $z_1, z_2, \ldots, z_n$, не перетинаються між собою і з контуром L.

$$\oint_{L_k} \varphi(z)dz = \oint_{L_k} \frac{f_k(z)}{z-z_k}dz = 2\pi i f_k(z_k),$$

де $f_k(z) = \frac{f(z)}{(z-z_1)\ldots(z-z_{k-1})(z-z_{k+1})\ldots(z-z_n)}$ є функцією аналітичною в області, що обмежує контур L_k.

Приклад. Обчислити інтеграл $\oint_L \frac{\cos z}{z^2+1}dz$, де контур L – коло: а) $|z| = \frac{1}{3}$; б) $|z+i| = \frac{1}{3}$; в) $|z| = \frac{3}{2}$.

▷а) Підінтегральна функція є аналітичною в замкненому крузі $|z| \le \frac{1}{3}$ (див. рис. 14), тому, за теоремою Коші для однозв'язної області, інтеграл дорівнює нулю.

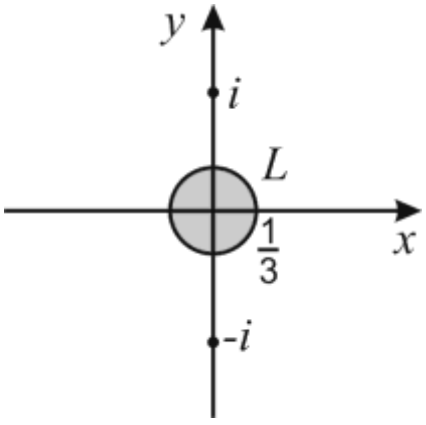


Рисунок 14 – Область, обмежена контуром $|z| = \frac{1}{3}$

б) Область, що обмежена контуром $|z+i| = \frac{1}{3}$ містить точку $z = -i$, у якій аналітичність підінтегральної функції порушується в силу того, що її знаменник обертається в нуль (див. рис. 15). Для того щоб застосувати до цього інтегралу інтегральну формулу Коші потрібно розкласти знаменник підінтегральної

функції на множники і виділити функцію, яка буде аналітичною в крузі $|z+i| \leq \frac{1}{3}$.

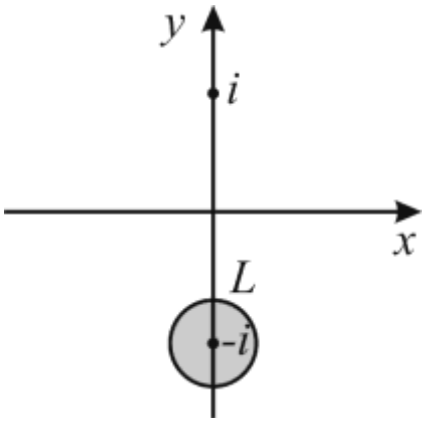


Рисунок 15 – Область, обмежена контуром $|z+i| = \frac{1}{3}$

Представимо підінтегральну функцію у вигляді

$$\frac{\cos z}{z^2+1} = \frac{1}{z+i} \cdot \frac{\cos z}{z-i}.$$

В силу аналітичності функції $\frac{\cos z}{z-i}$ в замкненому крузі $|z+i| \leq \frac{1}{3}$, використовуючи інтегральну формулу Коші, отримаємо

$$\oint_{|z+i|=\frac{1}{3}} \frac{\cos z}{z^2+1} dz = \oint_{|z+i|=\frac{1}{3}} \frac{1}{z+i} \cdot \frac{\cos z}{z-i} dz = 2\pi i \cdot \frac{\cos z}{z-i}\Big|_{z=-i} =$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{\cos i}{-2i} = -\pi \operatorname{ch} 1.$$

в) В цьому випадку область, що обмежена контуром $|z| = \frac{3}{2}$ містить дві особливі точки $z_1 = i$, $z_2 = -i$ підінтегральної функції. Для того щоб скористатися інтегральною формулою Коші застосуємо спочатку інтегральну теорему Коші для многозв'язної області. Оточимо особливі точки контурами γ_1 і γ_2, так щоб вони не перетиналися між собою і з колом $|z| = \frac{3}{2}$ (в якості контурів γ_1 і γ_2 можна взяти кола з центрами у особливих точках досить малих радіусів).

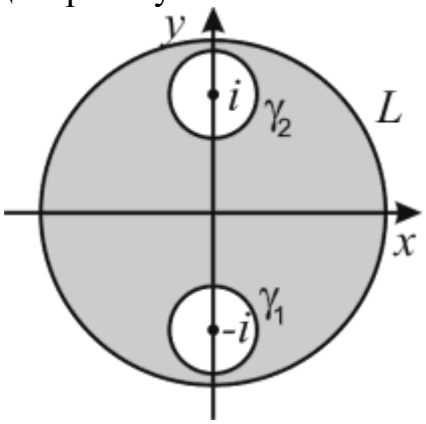


Рисунок 16 – Область, обмежена контуром $|z| = \frac{3}{2}$

Якщо видалити з області обмеженої колом $|z| = \frac{3}{2}$ замкнені внутрішності контурів γ_1 і γ_2, то отримаємо трьохзв'язну область, у якій підінтегральна функція буде аналітичною (див. рис. 16).

Тоді за теоремою Коші для многозв'яної області, отримаємо

$$\oint_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{\cos z}{z^2+1}\,dz = \oint_{\gamma_1} \frac{\cos z}{z^2+1}\,dz + \oint_{\gamma_2} \frac{\cos z}{z^2+1}\,dz.$$

До кожного з цих інтегралів застосуємо інтегральну формулу Коші.

$$\oint_{\gamma_1} \frac{\cos z}{z^2+1}\,dz = \oint_{\gamma_1} \frac{1}{z+i}\cdot\frac{\cos z}{z-i}\,dz = 2\pi i\cdot\frac{\cos z}{z-i}\Big|_{z=-i} = -\pi \operatorname{ch} 1,$$

$$\oint_{\gamma_2} \frac{\cos z}{z^2+1}\,dz = \oint_{\gamma_2} \frac{1}{z-i}\cdot\frac{\cos z}{z+i}\,dz = 2\pi i\cdot\frac{\cos z}{z+i}\Big|_{z=i} = \pi \operatorname{ch} 1.$$

Остаточно отримаємо

$$\oint_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{\cos z}{z^2+1}\,dz = -\pi \operatorname{ch} 1 + \pi \operatorname{ch} 1 = 0.\blacktriangleleft$$

Теорема. (*про нескінченну диференційовність аналітичної функції*). Якщо $f \in A(\overline{D})$, то вона має в цій точці похідну будь-якого порядку, яка виражається формулою

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\,d\xi\,,$$

де γ – будь який простий замкнений контур, що оточує точку z.

Приклад. Обчислити інтеграл $\oint_L \frac{\operatorname{sh} z}{(z^2+1)z^2}\,dz$, вздовж кола L: $|z| = 2$.

$\triangleright$В області, що обмежує контур L, знаходяться три особливі точки підінтегральної функції $z_1 = 0$, $z_2 = i$, $z_3 = -i$. Оточимо кожну цих особливих точок контурами γ_1, γ_2 і γ_3, так щоб вони не перетиналися між собою і з контуром L (див. рис. 17). Тоді підінтегральна функція буде аналітичною на замиканні чотирьохзв'язної області D.

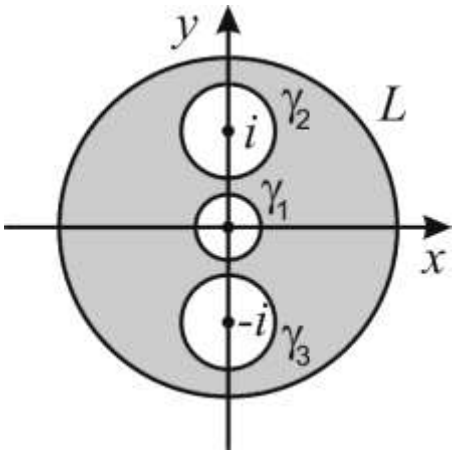


Рисунок 17 – Область, обмежена контуром $|z| = 2$

Згідно з теоремою Коші для многозв'язної області

$$\oint_L \frac{\operatorname{sh} z}{(z^2+1)z^2}\,dz = \oint_{\gamma_1} \frac{\operatorname{sh} z}{(z^2+1)z^2}\,dz +$$

$$+\oint_{\gamma_2}\frac{\operatorname{sh} z}{(z^2+1)z^2}\,dz+\oint_{\gamma_3}\frac{\operatorname{sh} z}{(z^2+1)z^2}\,dz.$$

Обчислимо кожен з інтегралів окремо.

Контур γ_1 оточує лише одну особливу точку $z_1=0$, тому функція $\frac{\operatorname{sh} z}{z^2+1}$ буде аналітичною в області, яка обмежена цим контуром. При $n=1$:

$$\oint_{\gamma_1}\frac{1}{z^2}\cdot\frac{\operatorname{sh} z}{z^2+1}\,dz=2\pi i\left(\frac{\operatorname{sh} z}{z^2+1}\right)'\Big|_{z=0}=$$

$$=2\pi i\,\frac{\operatorname{ch} z\,(z^2+1)-2z\operatorname{sh} z}{(z^2+1)^2}\Big|_{z=0}=2\pi i.$$

Контур γ_2 оточує лише одну особливу точку $z_2=i$, тому функція $\frac{\operatorname{sh} z}{(z+i)z^2}$ буде аналітичною в області, яка обмежена цим контуром. Тоді:

$$\oint_{\gamma_2}\frac{1}{z-i}\cdot\frac{\operatorname{sh} z}{(z+i)z^2}\,dz=2\pi i\cdot\frac{\operatorname{sh} z}{(z+i)z^2}\Big|_{z=i}=-\pi\operatorname{sh} i=-\pi i\sin 1.$$

Контур γ_3 оточує лише одну особливу точку $z_2=-i$, тому функція $\frac{\operatorname{sh} z}{(z-i)z^2}$ буде аналітичною в області, яка обмежена цим контуром. Тоді:

$$\oint_{\gamma_3}\frac{1}{z+i}\cdot\frac{\operatorname{sh} z}{(z-i)z^2}\,dz=2\pi i\cdot\frac{\operatorname{sh} z}{(z-i)z^2}\Big|_{z=-i}=-\pi\operatorname{sh} i=-\pi i\sin 1.$$

Таким чином, остаточно отримаємо:

$$\oint_{L}\frac{\operatorname{sh} z}{(z^2+1)z^2}\,dz=2\pi i-\pi i\sin 1-\pi i\sin 1=2\pi i(1-\sin 1).\blacktriangleleft$$

5.6. Достатні умови аналітичності функції

Теорема *(теорема Морери).* Нехай функція $f(z)$ неперервна в однозв'язній області D і інтеграл від $f(z)$ вздовж будь-якого замкненого контуру, що належить D, дорівнює нулю. Тоді, функція $f(z)$ аналітична в області D.

Теорема. Якщо функція $f(z)$ неперервна на замиканні $\overline{D}$ однозв'язної області D, що обмежена замкненим контуром γ, і для будь-якого $z\in D$ виконується рівність

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta\,,$$

то функція $f(z)$ аналітична в області D.

Інтеграл в правій частині $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta$ називають *інтегралом типу Коші.*

Питання для самоконтролю до теми 5

1. Надайте означення інтегралу від функції комплексної змінної.
2. Який зв'язок має інтеграл від функції комплексної змінної з криволінійним інтегралом другого роду від функції дійсної змінної?

3. Виведіть формулу для обчислення інтегралу, якщо контур інтегрування заданий явним рівнянням.
4. Доведіть основні властивості інтегралу від функції комплексної змінної.
5. Доведіть формулу Ньютона-Лейбніца.
6. Сформулюйте і доведіть інтегральні теореми Коші.
7. Яким умовам повинна відповідати підінтегральна функція для того щоб інтеграл не залежав від шляху інтегрування?
8. Запишіть інтегральну формулу Коші.
9. Сформулюйте і доведіть теорему про нескінченну диференційовність аналітичної функції.
10. Чим відрізняється інтеграл Коші від інтегралу типу Коші?

Завдання до теми 5

1. Обчислити інтеграли від функції комплексної змінної вздовж вказаної кривої:

а) $\int_\gamma (10 + z - 3i - 15\overline{z})dz$, γ – відрізок від точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = 2 + 2i$;

б) $\int_L \frac{12\overline{z}}{z^2}\,dz$ вздовж дуги кола $|z| = 3$, обхід за часовою стрілкою від точки $z_1 = -3i$ до точки $z_2 = 3i$;

в) $\int_C z dz$, вздовж $C: \begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$ (астроїда);

г) $\int_0^{-i} e^{2z} \cos z\, dz$.

2. Обчислити інтеграли, скориставшись інтегральною формулою Коші:

1) а) $\oint_{|z|=3} \frac{\mathrm{sh}(z+1)}{z+1} dz$; б) $\oint_{|z|=3} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}z\right)}{z^3-4z} dz$; в) $\oint_{|z-3i|=\sqrt{2}} \frac{1}{(z-3i)^3(z^2+1)} dz$.

2) а) $\oint_{|z|=4} \frac{4e^z-3}{(z^2+9)^2} dz$; б) $\oint_{\left|z+\frac{\pi}{3}\right|=\frac{1}{4}} \frac{3\cos z-\sin 2z}{\left(z+\frac{\pi}{3}\right)^4} dz$;

в) $\oint_{|z-2-3i|=3} \frac{1}{(z-9)(z^2+9)^2} dz$.

3) а) $\oint_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{z-10}{(z^2+1)(z-3)} dz$; б) $\oint_{\left|z-\frac{5\pi}{3}\right|=\frac{1}{3}} \frac{7\sin 5z}{\left(z-\frac{5\pi}{3}\right)^5} dz$; в) $\oint_{|z|=3} \frac{5e^z}{(z-2i)(z+i)^2} dz$.

4) а) $\oint_{|z|=2} \frac{e^z-3e^{-z}}{(z+i)^5} dz$; б) $\oint_{|z|=\pi} \frac{3\sin 2z-2\cos 3z}{z^2(z+\pi)^4} dz$;

в) $\oint_{|z+1-i|=\sqrt{2}} \frac{1}{(z+1)(z^2+1)^2} dz$.

5) а) $\oint_{|z|=3} \frac{e^{7z}-5}{(z-i)^6} dz$; б) $\oint_{|z|=5} \frac{z^4-2}{z^2(z+2)(z-3)} dz$; в) $\oint_{|z-3i|=4} \frac{1}{(z-6i)^3 z^2} dz$.

6. Ряди у комплексній площині

6.1. Комплексні числові та функціональні ряди

Означення. Дві послідовності комплексних чисел $\{c_n : n \in \mathbb{N}\}$ та $\{S_n = \sum_{k=1}^{n} c_k : n \in \mathbb{N}\}$ називаються *рядом комплексних чисел* і позначається символом

$$\sum_{k=1}^{+\infty} c_k.$$

Послідовність $\{S_n = \sum_{k=1}^{n} c_k : n \in \mathbb{N}\}$ називається *послідовністю часткових сум* ряду . Якщо послідовність $\{S_n : n \in \mathbb{N}\}$ збігається до деякого числа $S \in C$, то ряд називається *збіжним*, а число S називається *сумою ряду* і позначається:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} c_k \right)$$

Якщо не існує скінченної границі послідовності $\{S_n : n \in \mathbb{N}\}$, то ряд називається розбіжним.

Твердження. Для збіжності ряду з комплексним доданком $c_n = a_n + ib_n$ необхідно й достатньо, щоб збігались обидва ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

та

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Зауваження. Необхідна умова збіжності комплексного числового ряду з комплексними доданками аналогічна випадку ряду з дійсними доданками:

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0.$$

Означення. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ називається *абсолютно збіжним*, якщо збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ розбігається, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ називається *умовно збіжним*.

Твердження. Якщо ряд збігається абсолютно, то він є збіжним.

Означення. Множина таких $z \in D$, для яких ряд є збіжним, називається *областю збіжності ряду*.

Означення. Функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$, $z \in D$, називається *рівномірно збіжним* на множині $M \subset D$ до деякої функції $f(z)$, $z \in M$, якщо функціональна послідовність сум $\{S_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $z \in D$ збігається рівномірно на множині M до f, тобто

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \ \forall z \in M: \ |S(z) - S_n(z)| < \varepsilon.$$

Теорема (*критерій Коші*). Для рівномірної збіжності функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$, $z \in D$ на множині $M \subset D$ необхідно й достатньо, щоб

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \ \forall p \in \mathbb{N} \ \forall z \in M:$$

$$\left|S_{n+p}(z) - S_n(z)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(z)\right| < \varepsilon.$$

6.2. Степеневі ряди

Нехай $\{c_n : n \in \mathbb{N}\}$ – деяка послідовність комплексних чисел.

Означення. Ряд вигляду

$$c_0 + c_1(z - z_0) + \ldots + c_n(z - z_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n,$$

де z – комплексна змінна, називають *комплексним степеневим рядом*. При цьому комплексні числа c_n називають *коефіцієнтами* цього степеневого ряду. В частинному випадку, якщо $z_0 = 0$, отримаємо степеневий ряд

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$

Покладемо

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}, \quad 0 \le R \le +\infty,$$

або

$$R = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} \quad \text{– формула Коші-Адамара.}$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| \quad \text{– формула Даламбера.}$$

Означення. Круг $B_R(z_0) := \{z_0 \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ називається *кругом збіжності степеневого ряду*; число R називається *радіусом збіжності степеневого ряду*.

Теорема (*Абеля*). Якщо степеневий ряд збіжний в деякій точці $z' \in \mathbb{C}$, $z' \neq z_0$, то він збіжний абсолютно у всіх точках z, які задовольняють нерівність:

$$|z - z_0| < |z' - z_0|.$$

Якщо ряд розбіжний в деякій точці $z'' \in \mathbb{C}$, $z'' \neq z_0$, то він розбіжний у всіх точках z, які задовольняють нерівність:

$$|z - z_0| > |z'' - z_0|.$$

Приклад. Знайти круг збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-2i)^n}{3^n n}$ та дослідити збіжність цього ряду в точках $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 5i$.

▷Застосуємо ознаку Даламбера для дослідження на збіжність ряду з модулів загального члену ряду $|c_n(z - z_0)^n| = \frac{|z-2i|^n}{3^n n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|z-2i|^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)}}{\frac{|z-2i|^n}{3^n n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot |z-2i|}{3(n+1)} = \frac{|z-2i|}{3}.$$

При $\frac{|z-2i|}{3} < 1$, тобто при $|z-2i| < 3$, заданий ряд збігається абсолютно. Таким чином, $B_R(z_0)$: $|z-2i| < 3$ – круг збіжності степеневого ряду. При $|z-2i| > 3$ заданий ряд є розбіжним.

Дослідимо збіжність даного ряду у точках $z_1 = 3+2i$, $z_2 = 5i$. Очевидно, що вони належать межі круга. Для дослідження поведінки ряду у цих точках розглянемо числові ряди, отримані підстановкою точок z_1 та z_2 у заданий ряд. У точці $z_1 = 3+2i$ маємо ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+2i-2i)^n}{3^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

який є гармонічним, отже розбіжним. У точці $z_2 = 5i$ маємо ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5i-2i)^n}{3^n n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3i)^n}{3^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + i\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right).$$

Очевидно, що ряд з модулів $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|i^n|}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ є розбіжним. Дослідимо отриманий ряд на умовну збіжність. Для цього розглянемо окремо ряди з дійсною й уявною частиною:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) = 0 - \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{4} + 0 - \frac{1}{6} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) = 1 + 0 - \frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{5} + 0 - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}.$$

Для останніх двох рядів виконуються умови ознаки Лейбніца, тому робимо висновок, що заданий ряд збіжний умовно у точці $z_2 = 5i$.◀

6.3. Ряд Тейлора

Однією з основних теорем у теорії функції комплексної змінної є теорема Тейлора про представлення аналітичної функції сумою степеневого ряду.

Теорема. Нехай D – область в $\mathbb{C}$, $f \in A(D)$. Тоді в довільному крузі $B_R(z_0) \subset D$ $(|z-z_0| < R)$ функцію f можна представити у вигляді суми збіжного степеневого ряду:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \quad \forall z \in B_R(z_0).$$

Позначимо

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi, \; n \in \mathbb{N}.$$

Зауваження. З даної теореми випливає, що розклад аналітичної функції в степеневий ряд є необхідною умовою аналітичності.

Означення. Степеневий ряд, коефіцієнти якого визначаються за формулою $c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$, називається *рядом Тейлора для функції* $f(z)$ *комплексної змінної* z по степеням $z - z_0$ (або с центром розкладу в точці z_0). При цьому c_n називають *коефіцієнтами Тейлора* для функції комплексної змінної. Представлення функції її рядом Тейлора називають *розкладом* цієї *функції в ряд Тейлора*.

Теорема (*нерівності Коші*). Нехай функція $f \in A\big(B_r(z_0)\big)$ і на межі даного кругу обмежена, тобто $\exists M > 0 \forall z \in \partial B_r(z_0)$: $|f(z)| \le M$. Тоді, коефіцієнти ряду Тейлора, в який функція f розкладається в крузі $\overline{B_r(z_0)}$, задовольняють нерівностям:

$$|c_n| \le \frac{M}{r^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Означення. Нерівності (1.11) називають *нерівностями Коші*.

Теорема. Якщо функція f представляється в деякому крузі $B_R(z_0)$ як сума степеневого ряду, то цей ряд буде її рядом Тейлора, тобто якщо

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad \forall z \in B_R(z_0),$$

то

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Теорема. Наступні три твердження еквівалентні:

(I) функція f – диференційовна в крузі $B_R(z_0)$;

(II) $f \in C\big(B_R(z_0)\big)$ і для довільного трикутника $\overline{\Delta} \subset B_R(z_0)$: $\oint_{\partial^+\Delta} f(z)dz = 0$ (де $\partial^+\Delta$ – додатно орієнтована межа трикутника);

(III) має місце представлення $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, $\forall z \in B_R(z_0)$.

Означення. Функція $f(z)$ називається *голоморфной* в точці z_0, якщо в цій точці має місце представлення $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, $\forall z \in B_R(z_0)$ (тобто функція розкладається в степеневий ряд).

Випишемо основні відомі розвинення елементарних функцій у степеневі ряди:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, |z| < \infty.$$

$$\sin z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, |z| < \infty.$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, |z| < \infty.$$

$$\ln(1+z) = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n, |z| < 1.$$

$$(1+z)^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1!}z + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{n!} z^n, |z| < 1.$$

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, |z| < 1.$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, |z| < 1.$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{z}{1!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \cdots + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, |z| < \infty.$$

$$\operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \cdots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, |z| < \infty.$$

Приклад. Розкласти в ряд Тейлора за степенями z функцію $f(z) = \frac{1}{9-z^2}$ і знайти область збіжності отриманого розкладу.

▷Застосуємо стандартну формулу розкладу функції у степеневий ряд:

$$\frac{1}{9-z^2} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{1-\frac{z^2}{9}} = \frac{1}{9} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^2}{9}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{9^{n+1}}.$$

Знайдемо область збіжності отриманого розкладу:

$$\left|\frac{z^2}{9}\right| < 1 \Rightarrow |z| < 3. \blacktriangleleft$$

6.4. Поняття нуля аналітичної функції

Означення. Точка $z_0 \in \mathbb{C}$ називається *нулем функції* $f(z)$, якщо $f(z_0) = 0$.

Теорема. Нехай $f(z) \in A(D)$ і $f(z) \neq 0$. Якщо точка $z_0 \in D$ – нуль функції $f(z)$, то в деякому околі точки z_0 функцію $f(z)$ єдиним чином можна представити у вигляді:

$$f(z) = (z - z_0)^m \varphi(z),$$

де $m \in \mathbb{N}$, а функція $\varphi(z)$ – аналітична і $\varphi(z_0) \neq 0$ в цьому околі.

Означення. Число m в теоремі називається *порядком* або *кратністю нуля* z_0 функції $f(z)$. Якщо $m = 1$, то z_0 називається *простим нулем* функції $f(z)$.

Наслідок. Нехай $z_0 \in D$ – нуль порядку m для функції $f(z) \in A(D)$. Тоді $f^{(k)}(z_0) = 0$ для всіх $k = 0,1,\ldots,m-1$, та $f^{(m)}(z_0) \neq 0$:

$$f(z_0) = 0,$$
$$f'(z_0) = 0,$$
$$\ldots$$
$$f^{(m-1)}(z_0) = 0,$$
$$f^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

Наслідок. Якщо $z_0 \in D$ є нулем кратності m аналітичної в точці z_0 функції $f(z)$, то для функції $g(z) = \big(f(z)\big)^p$, $p \in \mathbb{N}$ ця точка буде нулем кратності pm.

Означення. Нехай функція $f(z)$ є аналітичною у деякому околі нескінченно віддаленої точки. Нескінченно віддалена точка $z=\infty$ називається нулем порядку m для функції $f(z)$, якщо точка $z=0$ – нуль порядку m для функції $g(z)=f\left(\frac{1}{z}\right)$.

Питання для самоконтролю до теми 6

1. Надайте означення ряду в комплексній площині.
2. Сформулюйте необхідну умову збіжності комплексного числового ряду.
3. Наведіть приклад абсолютно збіжного і умовно збіжного ряду в комплексній площині.
4. Надайте означення комплексного степеневого ряду та області його збіжності.
5. Запишіть формулу Коші-Адамара та формулу Даламбера для знаходження радіусу збіжності комплексного степеневого ряду.
6. Надайте означення рівномірно збіжного на множині $M \subset D$ до деякої функції $f(z)$ функціонального ряду.
7. Сформулюйте критерій Коші рівномірної збіжності ряду.
8. Сформулюйте ознаку Веєрштраса для рівномірної збіжності ряду.
9. Надайте означення ряду Тейлора для функції $f(z)$ комплексної змінної z по степеням $z-z_0$.
10. Запишіть класичні розклади для цілих функцій у вигляді степеневих рядів.
11. Що називають нулем функції у комплексній площині?
12. Як визначити порядок нуля функції?

Завдання до теми 6

1. Дослідити на збіжність (абсолютну, умовну):

1) а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{4^{n^2}+i}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(i)^n}{n}$.

2) а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i}{n^5\sqrt{n}+5i}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{3in}}{n^3}$.

3) а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3^n(n-1)!+6i}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n}$.

4) а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{3^{n^2}+i}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{\pi}{4}i}}{n}$.

5) а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12}{n^3\sqrt{n}+2i}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i+(-1)^n}{n}$.

2. Визначити область в якій збігається ряд:

1) а) $\sum_{n=0}^{\infty}(1+in)\,z^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1+i)^n}{i2^{n+1}}$; в) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2)^n}{n!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{(z-2)^n}$.

2) а) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-2i)^n}{(n+1)(n+2)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-2i-3)^n}{1-3in}$; в) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+3i)^n}{n^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2+3i)^n}{(z+3i)^n}$.

3) а) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+i)^n}{1+in}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-2i)^n}{1+2in}$; в) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+7i)^n}{10^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(7+i)^n}{(z+7i)^n}$.

4) а) $\sum_{n=0}^{\infty}n!\,z^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{in-1}$;

в) $\sum_{n=0}^{\infty}(1+in)(z-5+i)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i}{n^n(z-5+i)^n}$.

5) а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+2i+1)^n}{n^2(2+2i)^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-5i)^n}{3+in}$; в) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{9}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{z}\right)^n$.

3. Розвинути функцію $f(z)$ в ряд Тейлора в околі $z_0=0$, визначити радіус збіжності, якщо:

1) а) $f(z)=\sin^2(5z)$; б) $f(z)=\frac{2z-5}{z^2-5z+6}$.

2) а) $f(z)=z^9\,\mathrm{ch}(z)$; б) $f(z)=\frac{2z}{z^2+1}$.

3) а) $f(z)=z^3e^{-\frac{z}{2}}$; б) $f(z)=\frac{5z-2}{z^2+z-20}$.

4) а) $f(z)=z^3\,\mathrm{sh}(z^3)$; б) $f(z)=\frac{\frac{5}{8}z+\frac{1}{8}}{z^2+z-2}$.

5) а) $f(z)=\cos^2(z^5)$; б) $f(z)=\frac{\frac{4}{7}z-\frac{10}{7}}{z^2+25}$.

7. Ряди Лорана

7.1. Розклад аналітичної функції в ряд Лорана

Ряди Тейлора представляють функції, що є аналітичними у деяких кругах комплексної площини $\mathbb{C}$. Розглянемо більш складний випадок ряду, який містить у собі як додатні, так і від'ємні степені біному $z - z_0$. Такі ряди представляють аналітичні функції у кільцях $r < |z - z_0| < R$. Можливість таких розкладів встановлює теорема, доведена французьким математиком П. А. Лораном (1813-1854 рр.).

Означення. Нехай $z_0 \in \mathbb{C}$ та $\{c_n\colon\ n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$. *Рядом Лорана* називається такий вираз:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n .$$

Означення. Ряд $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n$ називається *збіжним в точці* z, якщо функціональні ряди:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n$$

та

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} c_n(z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \frac{1}{(z - z_0)^n}$$

збігаються в точці z, при цьому сума ряду Лорана $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n$ визначається таким чином:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n = \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n}_{\text{правильна частина}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \frac{1}{(z - z_0)^n}}_{\text{головна частина}}.$$

Означення. Ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n$ називається *правильною частиною*, а ряд $\sum_{n=-1}^{-\infty} c_n(z - z_0)^n$ називається *головною частиною* ряду Лорана $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n$.

Очевидно, множиною збіжності ряду $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n$ є круг $\{z\colon |z - z_0| < R\}$, де $R = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}$. Ряд $\sum_{n=-1}^{-\infty} c_n(z - z_0)^n$ буде степеневим рядом, якщо зробити заміну $t = \frac{1}{z - z_0}$. Таким чином, множиною збіжності ряду $\sum_{n=-1}^{-\infty} c_n(z - z_0)^n$ буде множина $\{z\colon |z - z_0| > r\}$, де $r = \underline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_{-n}|}$.

Зрозуміло, що якщо $r > R$, то ряд $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n$ – розбіжний; якщо $r = R$, то в точках на колі $\{z\colon |z - z_0| = r\}$ ряд$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n$ може бути як збіжним, так і розбіжним. Якщо $r < R$, то ряд $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n$ – збіжний в кільці $\{z\colon 0 \le r < |z - z_0| < R\}$.

Означення. Кільце $K := \{z\colon 0 \le r < |z - z_0| < R\}$, внутрішній радіус якого визначається за формулою

$$r = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_{-n}|}$$

а зовнішній за формулою

$$R = \frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}}$$

називається *кільцем збіжності ряду Лорана* $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$.

Твердження. На основі теореми Коші-Адамара про степеневі ряди отримаємо наступне твердження

I. ряд Лорана $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$ збігається абсолютно в кожній точці кільця K;

II. ряд Лорана $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$ розбігається в кожній точці множини $\mathbb{C}\backslash\overline{K}$;

III. ряд Лорана $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$ може як збігатися, так і розбігатися в точках на межі ∂K;

IV. для довільного компакту $D \subset K$ ряд $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$ збігається рівномірно на D.

7.2. Теорема П.А. Лорана

Теорема (*П.А. Лорана*). Нехай $0 < \rho_1 < \rho_2$, $K_{\rho_1,\rho_2} = \{z: \rho_1 < |z-z_0| < \rho_2\}$. Якщо $f(z)$ аналітична в кільці K_{ρ_1,ρ_2}, то

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n, \ \ z \in K_{\rho_1,\rho_2},$$

де

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\{|z-z_0|=\rho\}^+} \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}\, d\xi, \ \ n \in \mathbb{Z}, \ \ \forall \rho \in (\rho_1;\rho_2).$$

Так само, як доводилися нерівності Коші для коефіцієнтів степеневих рядів, доводиться і нерівність Коші для коефіцієнтів ряду Лорана.

Наслідок. Нехай $f \in A\left(K_{\rho_1,\rho_2}\right)$ та

$$\exists \rho_0 \in (\rho_1;\rho_2), \ \ \exists M > 0: \max_{z\in\{\xi:|\xi-z_0|=\rho_0\}} |f(z)| < M.$$

Тоді для довільного $n \in \mathbb{Z}$ має місце нерівність $c_n \le \frac{M}{\rho_0^n}$.

Теорема (*про єдиність розкладу в ряд Лорана*). Нехай

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n, \ \ z \in K = \{z: 0 \le r < |z-z_0| < R\}.$$

Тоді коефіцієнти даного ряду визначаються за формулами:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\{|z-z_0|=\rho\}^+} \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}\, d\xi, \ \ n \in \mathbb{Z},$$

де ρ – довільне число з інтервалу $(r;R)$.

Щоб знайти всі розклади ряду Лорана даної функції, можна застосовувати наступну схему:

1) знайти всі особливі точки функції $f(z)$;

2) відмітити на комплексній площині $\mathbb{C}$ центр розкладу z_0 і знайдені особливі точки;
3) провести кола з центром в точці z_0 через особливі точки. При цьому може трапитися, що декілька особливих точок будуть розташовані на одному колі. Проведені кола розділять всю площину $\mathbb{C}$ на області аналітичності функції $f(z)$: коло (якщо точка z_0 не є особливою для функції $f(z)$) і концентровані кільця, всередині яких немає особливих точок функції $f(z)$;
4) в кожній із отриманих областей аналітичності функцію $f(z)$ можна розкласти в ряд Тейлора або в ряд Лорана;
5) коефіцієнти розкладів в областях аналітичності найпростіше знаходити за допомогою стандартних розкладів.

Приклад. Отримати всі можливі розклади функції $f(z) = \frac{5z-2}{z^2-3z-4}$ в ряд Лорана по степеням z.

▷Знайдемо особливі точки функції $f(z)$:

$$z^2 - 3z - 4 = 0 \Rightarrow z_1 = -1,\ z_2 = 4.$$

Далі на комплексній площині C відмітимо центр розкладу $z_0 = 0$ і особливі точки $z_1 = -1,\ z_2 = 4$ функції $f(z)$. Проведемо через особливі точки кола $|z| = 1$ та $|z| = 4$. Ці кола виділять на комплексній площині $\mathbb{C}$ три області D_1, D_2 і D_3, які описуються нерівностями: $|z| < 1,\ 1 < |z| < 4$ і $|z| > 4$ відповідно (див. рис. 18).

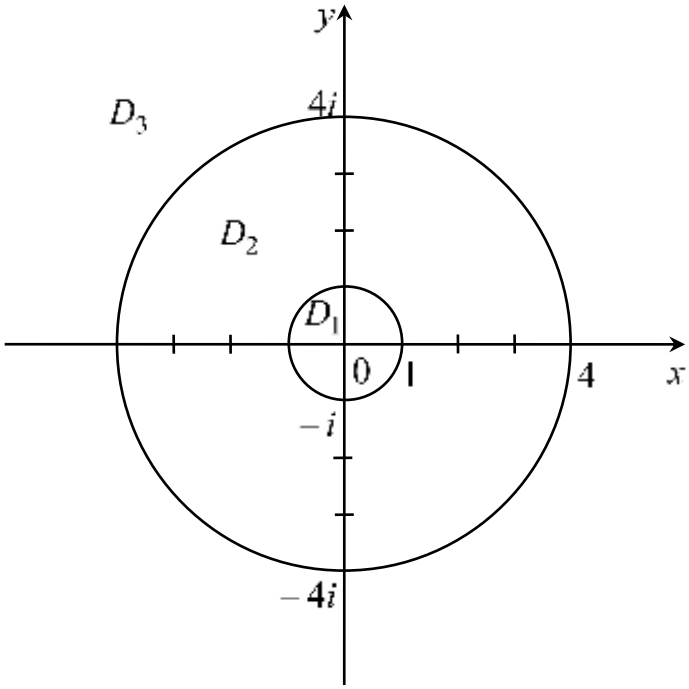


Рисунок 18 – Області D_1, D_2 і D_3

Розкладемо дробову-раціональну функцію $f(z) = \frac{5z-2}{z^2-3z-4}$ на елементарні дроби:

$$f(z) = \frac{5z-2}{z^2-3z-4} = \frac{5z-2}{(z+1)(z-4)} = \frac{7}{5}\cdot\frac{1}{z+1} + \frac{18}{5}\cdot\frac{1}{z-4}.$$

Застосуємо у кожній з областей стандартні розклади функцій. Для області D_1: $|z|<1$, маємо:

$$f(z)=\frac{7}{5}\cdot\frac{1}{z+1}+\frac{18}{5}\cdot\frac{1}{z-4}=\frac{7}{5}\cdot\frac{1}{1+z}-\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{4}}=$$

$$=\frac{7}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n-\frac{9}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{4}\right)^n,\ |z|<1.$$

Для області D_2: $1<|z|<4$, маємо:

$$f(z)=\frac{7}{5}\cdot\frac{1}{z+1}+\frac{18}{5}\cdot\frac{1}{z-4}=\frac{7}{5z}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z}}-\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{4}}=$$

$$=\frac{7}{5z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z}\right)^n-\frac{9}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{4}\right)^n,\ 1<|z|<4.$$

Для області D_3: $|z|>4$, маємо:

$$f(z)=\frac{7}{5}\cdot\frac{1}{z+1}+\frac{18}{5}\cdot\frac{1}{z-4}=\frac{7}{5z}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z}}-\frac{9}{10z}\cdot\frac{1}{1+\frac{4}{z}}=$$

$$=\frac{7}{5z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z}\right)^n-\frac{9}{10z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{z}\right)^n,\ |z|>4.\blacktriangleleft$$

7.3. Зв'язок між рядами Лорана та рядами Фур'є

Нехай $\varphi\in C^1(\mathbb{R})$ та φ – 2π-періодична функція. Тоді відомо з курсу математичного аналізу, що

$$\varphi(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nt)+b_n\sin(nt)),\ \ t\in\mathbb{R},$$

причому цей ряд збігається рівномірно на $\mathbb{R}$, а його коефіцієнти визначаються за формулами:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\cos(nt)\,dt,\ \ n\in\mathbb{N}\cup\{0\},$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sin(nt)\,dt,\ \ n\in\mathbb{N}.$$

Використовуючи співвідношення $\cos(nt)=\frac{e^{int}+e^{-int}}{2}$ та $\sin(nt)=\frac{e^{int}-e^{-int}}{2i}$, перепишемо ряд $\varphi(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nt)+b_n\sin(nt))$ у вигляді:

$$\varphi(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cdot\frac{e^{int}+e^{-int}}{2}+b_n\cdot\frac{e^{int}-e^{-int}}{2i}\right)=$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n-ib_n}{2}e^{int}+\frac{a_n+ib_n}{2}e^{-int}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{int},\ \ t\in[-\pi;\pi],$$

де

$$c_n = \begin{cases} \dfrac{a_n - ib_n}{2} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)e^{-int}, & n \in \mathbb{Z}, n \geq 0, \\ \dfrac{a_{-n} + ib_{-n}}{2} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)e^{-int}, & n \in \mathbb{Z}, n < 0. \end{cases}$$

Означення. Ряд $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ – це ряд Фур'є, який записаний в комплексній формі. Коефіцієнти $c_0 = \frac{a_0}{2}$, $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$, $c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$ називаються *комплексними коефіцієнтами Фур'є.*

Зробимо заміну $z = e^{it}$, $t \in [-\pi; \pi]$. Тоді $t = -i \ln z$. Ввівши позначення $f(z) = \varphi(-i \ln z)$, перепишемо $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ у такій формі:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n, \ \ z \in \{z: |z| = 1\},$$

де

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(e^{it}\right)e^{-int}dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(e^{it}\right)e^{-i(n+1)t}d\left(e^{it}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\{|z|=1\}^+} \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz.$$

Як бачимо, таке визначення коефіцієнтів $\{c_n\}$ узгоджується з формулою $c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\{|z-z_0|=\rho\}^+} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}d\xi$. Таким чином можна зробити висновок: ряд Фур'є для функції φ, записаний в комплексній формі, є рядом Лорана функції $f(z) = \varphi(-i \ln z)$ на одиничному колі з центром в точці $z = 0$. І навпаки, ряд Лорана деякої аналітичної функції f, звужений на одиничне коло (якщо кільце збіжності містить це коло) є рядом Фур'є функції $\varphi(t) := f\left(e^{it}\right)$, $t \in [-\pi; \pi]$.

Крім того, це ще один спосіб знаходження коефіцієнтів ряду Лорана.

Питання для самоконтролю до теми 7

1. Надайте означення ряду Лорана у комплексній площині.
2. Запишіть головну і правильну частину ряду Лорана.
3. Сформулюйте поняття кільця збіжності ряду Лорана.
4. Сформулюйте теорему Лорана.
5. Наведіть схему отримання всіх розкладів Лорана даної функції.
6. Надайте означення ряду Фур'є у комплексній площині.
7. Покажіть, у чому полягає зв'язок між рядами Лорана та рядами Фур'є.

Завдання до теми 7

1. Розвинути функцію $f(z)$ в ряд Лорана у вказаній області:

1) а) $f(z) = \cos^2\left(\frac{1}{z+i}\right)$, $0 < |z + i| < \infty$; б) $f(z) = \frac{z}{(z^2-4)(z^2-1)}$, $1 < |z| < 2$.

2) а) $f(z) = z^2 \sin\left(\frac{1}{z-1}\right)$, $0 < |z - 1| < \infty$;

б) $f(z) = \frac{1+z}{(z+3)^2(z-2i)}$, $2 < |z| < 3$.

3) а) $f(z) = (z + 1)^3 \cos\left(\frac{1}{z+1}\right)$, $0 < |z + 1| < \infty$;

б) $f(z)=\frac{z}{(z+1)(z+2i)},\ 1<|z|<2.$

4) а) $f(z)=\frac{1}{z+4},\ |z+2|<2;$ б) $f(z)=\frac{z+6}{z^2-3z+2},\ 1<|z|<2.$

5) а) $f(z)=\cos\left(\frac{3z}{z-i}\right),\ 0<|z-i|<\infty;$ б) $f(z)=\frac{4-3z}{(z-2)(z-3)},\ 2<|z|<3.$

2. Знайти усі можливі розвинення функції $f(z)$ з центром в точці z_0:

1) $f(z)=\frac{2z-5}{z^2-5z+6},\ z_0=0.$

2) $f(z)=\frac{z+1}{z^2+iz+6},\ z_0=i.$

3) $f(z)=\frac{2z-9}{z^2+12z-28},\ z_0=-4.$

4) $f(z)=\frac{z^2-2z-3}{z^2+2z-3},\ z_0=0.$

5) $f(z)=\frac{z}{z^2-4iz+5},\ z_0=-6i.$

3. Розвинути функцію $f(z)$ в ряд Лорана в околі її особливих точок (враховуючи $z=\infty$) та встановити їх тип, якщо:

1) $f(z)=\frac{z^3}{z^2-1}.$

2) $f(z)=z^8\cos\frac{1}{z}.$

3) $f(z)=\frac{z^4-5}{z^2-z-2}.$

4) $f(z)=z^{12}e^{\frac{1}{z}}.$

5) $f(z)=\frac{z^3+9}{z^2+4z-21}.$

8. Теорія лишків

8.1. Поняття нуля аналітичної функції

Означення. Точка $z_0 \in \mathbb{C}$ називається *нулем функції* $f(z)$, якщо $f(z_0) = 0$.

Нехай точка $z_0 \in \mathbb{C}$ є нулем аналітичної в цій точці функції $f(z)$. Аналітичність функції $f(z)$ у точці z_0 означає аналітичність функції $f(z)$ у деякому околі цієї точки. В околі точки z_0 існує розклад цієї функції в степеневий ряд Тейлора вигляду

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Так як точка $z = z_0$ є нулем функції $f(z)$, то із $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ та означення нуля функції випливає, що $c_0 = f(z_0) = 0$. Інші коефіцієнти в $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ будуть мати вигляд:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Нехай c_m – наймолодший за номером коефіцієнт розкладу в $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, відмінний від нуля, тобто $c_k = 0$, $k = \overline{0, m-1}$ і $c_m \neq 0$. Тоді число $m \in \mathbb{N}$ називають *порядком* (іноді *кратністю*) нуля $z = z_0$ аналітичної функції $f(z)$, а саму точку $z = z_0$ називають *нулем кратності* m функції $f(z)$. Кратність нуля $z = z_0$ функції $f(z)$ дорівнює найменшому порядку відмінному від нуля у точці $z = z_0$ похідної цієї функції. Нуль кратності один $(m = 1)$ називають простим нулем аналітичної функції.

Розклад $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ функції $f(z)$, що має в точці $z = z_0$ нуль кратності m, має вигляд:

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = c_m (z - z_0) + c_{m+1} (z - z_0)^{m+1} + \cdots,$$

де $c_m \neq 0$.

Теорема. Нехай $f(z) \in A(D)$ і $f(z) \not\equiv 0$. Якщо точка $z_0 \in D$ – нуль функції $f(z)$, то в деякому околі точки z_0 функцію $f(z)$ єдиним чином можна представити у вигляді:

$$f(z) = (z - z_0)^m \varphi(z),$$

де $m \in \mathbb{N}$, а функція $\varphi(z)$ – аналітична і $\varphi(z_0) \neq 0$ в цьому околі.

Твердження. Якщо точка $z_0 \in \mathbb{C}$ є нулем кратності m аналітичної в точці z_0 функції $f(z)$, то для функції $g(z) = \big(f(z)\big)^p$, $p \in \mathbb{N}$, ця точка буде нулем кратності pm.

Означення. Нехай функція $f(z)$ є аналітичною у деякому околі нескінченно віддаленої точки. Нескінченно віддалена точка $z = \infty$ називається нулем порядку m для функції $f(z)$, якщо точка $z = 0$ – нуль порядку m для функції $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$.

Зауваження. За означенням

$$f(\infty) = \lim_{z\to\infty} f(z).$$

Припустимо, що функція $f(z)$ аналітична в околі точки $z = \infty$, тобто аналітична в області $|z| \geq R$ і точка $z = \infty$ є нулем функції $f(z)$. Тоді функцію $f(z)$ можна розкласти у цій області у ряд Лорана за степенями z:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Оскільки, $f(\infty) = 0$, то $c_0 = c_1 = \cdots = c_n = 0$ і ряд $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$ можна записати так:

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \cdots + \frac{c_{-n}}{z^n} + \cdots = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n z^n.$$

Нехай в розкладі $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n z^n$ коефіцієнт c_{-m} – перший відмінний від нуля коефіцієнт, тобто $c_{-k} = 0$, $k = \overline{1, m-1}$ і $c_{-m} \neq 0$. Тоді число $m \in \mathbb{N}$ називають *кратністю нуля функції $f(z)$ у нескінченно віддаленій точці* (іноді *кратністю нуля $z = \infty$ функції $f(z)$*). В цьому випадку замість отримаємо:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-m} c_n z^n = \frac{1}{z^m}\left(c_{-m} + \frac{c_{-m-1}}{z} + \cdots\right) = z^{-m}\psi(z),$$

де $\psi(z)$ – функція, яку можна представити у вигляді степеневого ряду, що містить лише недодатні степені z. Тому $\psi(z)$ є аналітичною функцією в околі точки $z = \infty$, причому $\lim_{z\to\infty} \psi(z) = \psi(\infty) = c_{-m} \neq 0$.

Теорема. Нехай функція $f(z)$ є аналітичною в нескінченно віддаленій точці і $f(z) \neq 0$. Якщо точка $z = \infty$ – нуль порядку m функції $f(z)$, то існує додатне число r_1 і єдина функція $\psi \in A\big(B_{r_1}(\infty) = \{|z| > r_1\} \cup \{\infty\}\big)$, $\psi(z) \neq 0$ для всіх $z \in B_{r_1}(\infty)$, що

$$f(z) = \frac{1}{z^m}\psi(z). \forall z \in B_{r_1}(\infty).$$

Теорема (*Веєрштраса*). Якщо $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ – послідовність аналітичних функцій в області D і для довільного компакту $K \subset D$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ рівномірно на K збігається до функції f, то $f(z) \in A(D)$ і для довільного $k \in \mathbb{N}$:

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z), \quad \forall z \in D.$$

Теорема (*Рунге*). Нехай f – аналітична функція в однозв'язній області D і K – довільний компакт в D. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться многочлен $P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ такий, що

$$\max_{z\in K} |f(z) - P_n(z)| < \varepsilon.$$

8.2. Ізольовані особливі точки

Означення. Точка $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ називається *ізольованою особливою точкою* функції $f(z)$, якщо існує таке число $r > 0$, що $f \in A\left(\dot{B}_r(z_0)\right)$, де

$$\dot{B}_r(z_0) = \begin{cases} \{z: 0 < |z - z_0| < r\}, & z_0 \neq \infty; \\ \{z: |z| > r\}, & z_0 = \infty, \end{cases}$$

де $\dot{B}_r(z_0)$ – це проколотий окіл точки z_0.

Означення. Ізольована особлива точка $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ функції $f(z)$ називається:

1) *усувною особливою точкою*, якщо $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A \neq \infty$ (границя дорівнює константі);

2) *полюсом*, якщо $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$;

3) *істотно особливою точкою*, якщо не існує $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$.

Приклад. Знайти ізольовані особливі точки та встановити їх тип для функції $f(z) = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{z}\right)}$.

▷Точки $z_n = \frac{1}{n}$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$ є ізольованими особливими точками – полюсами, так як функція аналітична в проколотому околі кожної точки z_n і $\lim\limits_{z \to z_n} \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{z}\right)} = \infty$. А точка $z = 0$ є неізольованою особливою точкою, оскільки для цієї точки не існує її проколотого околу, в якому функція $f(z) = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{z}\right)}$ була б аналітичною, що суперечить означенню. Точка $z = 0$ є граничною точкою полюсів $z_n = \frac{1}{n}$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$◀

Означення. Кажуть, що особливість має *однозначний характер*, якщо в околі особливої точки функція визначається однозначно.

Надалі будемо розглядати ізольовані особливі точки однозначного характеру.

У проколотому околі ізольованої особливої точки $z_0 \in \mathbb{C}$ функцію можна розкласти у ряд Лорана вигляду:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \frac{1}{(z - z_0)^n}.$$

У цьому випадку говорять про лорановський розклад функції $f(z)$ в околі особливої точки $z = z_0$, причому ряд у правій частині називають рядом Лорана у цій особливій точці. При цьому, головна частина ряду є сумою всіх членів ряду Лорана з від'ємними степенями біному $z - z_0$, який прямує до нескінченності при $z \to z_0$, і є функцією, аналітичною у проколотому околі точки $z_0 \in \mathbb{C}$. Правильна частина лоранівського розкладу функції $f(z)$, яка містить члени з невід'ємними степенями біному $z - z_0$, представляє собою звичайний степеневий ряд, який є аналітичною функцією у точці $z = z_0$ і деякому її околі.

Розглянемо теореми, які показують зв'язок між типом ізольованої особливої точки та виглядом ряду Лорана.

Теорема (*про усувну особливу точку*). Ізольована особлива точка $z_0 \in \mathbb{C}$ функції $f(z)$ є усувною тоді і тільки тоді, коли ряд Лорана для функції $f(z)$ в деякому проколотому околі цієї точки немає головної частини, тобто

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots$$
$$\ldots + c_n(z - z_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n,$$
$$z \in \{z: 0 < |z - z_0| < R\}.$$

Теорема (*про полюс*). Ізольована особлива точка $z_0 \in \mathbb{C}$ функції $f(z)$ є полюсом тоді і тільки тоді, коли головна частина ряду Лорана функції $f(z)$ в деякому проколотому околі $\dot{B}_R(z_0)$ містить скінченне число ненульових членів, тобто:

$$\exists R > 0\ \exists!\, N > 0\ \forall z \in \dot{B}_R(z_0):$$
$$f(z) = \frac{c_{-N}}{(z - z_0)^N} + \cdots + \frac{c_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots$$
$$+ c_n(z - z_0)^n + \cdots = \sum_{n=-N}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n.$$

Наслідок (*про представлення аналітичної функції в проколотому околі її полюса*). Точка $z_0 \in \mathbb{C}$ – полюс функції $f(z)$ тоді і тільки тоді, коли існують єдине число $N \in \mathbb{N}$ та єдина функція $\varphi \in A\big(B_R(z_0)\big)$, яка не дорівнює нулю в жодній точці цього кругу, і

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^N} \quad \forall z \in \dot{B}_R(z_0).$$

Означення. Число $N \in \mathbb{N}$ в $\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^N}$ називається *порядком полюса* точки z_0.

Теорема (*про істотно особливу точку*). Точка $z_0 \in \mathbb{C}$ є істотно особливою точкою функції $f(z)$ тоді і тільки тоді, коли в деякому проколотому околі точки z_0 головна частина ряду Лорана функції $f(z)$ містить нескінченну кількість відмінних від нуля членів:

$$f(z) = \cdots + \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots +$$
$$+ c_n(z - z_0)^n + \cdots = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n.$$

Поведінку функції в околі істотно особливої точки характеризує наступна теорема.

Теорема (*Ю.В. Сохоцького*). Нехай $z_0 \in \mathbb{C}$ – істотно особлива точка для функції $f(z)$. Тоді для кожної точки $A \in \overline{\mathbb{C}}$ існує послідовність $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ така, що $\lim\limits_{z\to\infty} z_n = z_0$ та $\lim\limits_{z\to\infty} f(z_n) = A$.

Теорема (*Велика теорема Пікара*). В довільному проколотому околі істотно особливої точки аналітична функція приймає нескінченну кількість раз довільне комплексне значення за виключенням можливо одного.

Класифікацію ізольованих особливих точок функції $f(z)$ можна встановити за виглядом лоранівського розкладу функції $f(z)$ в околі цих точок. В силу вказаних вище теорем вигляд лоранівського розкладу функції можна

взяти за основу в означенні типів особливих точок. Ізольована особлива точка $z = z_0 \in \mathbb{C}$ функції $f(z)$ є:

1) *усувною точкою*, якщо лоранівський розклад функції $f(z)$ в околі точки $z = z_0$ не містить від'ємних степенів біному $z - z_0$ (відсутня головна частина ряду Лорана), тобто

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, z \in \{z: 0 < |z - z_0| < R\};$$

2) *полюсом*, якщо лоранівський розклад функції $f(z)$ в околі точки $z = z_0$ містить скінченне число ненульових членів з від'ємними степенями біному $z - z_0$, тобто

$$f(z) = \sum_{n=-N}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, z \in \{z: 0 < |z - z_0| < R\};$$

число N називається *порядком полюса* точки z_0;

3) *істотно особливою точкою*, якщо лоранівський розклад функції $f(z)$ в околі точки $z = z_0$ містить нескінченне число ненульових членів з від'ємними степенями біному $z - z_0$, тобто

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, z \in \{z: 0 < |z - z_0| < R\},$$

де серед коефіцієнтів c_{-1}, c_{-2}, ... є нескінченне число ненульових.

Означення. Ізольована особлива точка $z_0 = \infty$ функції $f(z)$ називається:

1) *усувною точкою*, якщо $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A \neq \infty$ (границя дорівнює константі);

2) *полюсом*, якщо $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$;

3) *істотно особливою точкою*, якщо не існує $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$.

Можна зробити наступний висновок: ізольована особлива точка $z_0 = \infty$ функції $f(z)$ є:

1) *усувною точкою*, якщо лоранівський розклад функції $f(z)$ в околі точки $z_0 = \infty$ не містить додатних степенів z (відсутня головна частина ряду Лорана), тобто

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{0} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n}, |z| > r;$$

2) *полюсом*, якщо лоранівський розклад функції $f(z)$ в околі точки $z_0 = \infty$ містить скінченне число ненульових членів з додатними степенями z, тобто

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{m} c_n z^n, |z| > r, m \in \mathbb{N}, c_m \neq 0;$$

число m називається *порядком полюса* точки $z_0 = \infty$ функції $f(z)$;

3) *істотно особливою точкою*, якщо лоранівський розклад функції $f(z)$ в околі точки $z_0 = \infty$ містить нескінченне число ненульових членів з додатними степенями z, тобто

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n, |z| > r,$$

де серед коефіцієнтів $c_1, c_2, \ldots$ при додатних степенях z є нескінченне число ненульових.

Наприклад, для функцій e^z, $\sin z$, $\cos z$ нескінченно віддалена точка є істотно особливою точкою. Дійсно, класичні розклади цих функцій за степенями z можна розглядати як лоранівські розклади в околі точки $z = \infty$, а вони містять нескінченне число доданків з додатними степенями z.

Приклад. Для функції

$$f(z) = \frac{z^3}{\sin^2\left(\frac{1}{z+1}\right)}$$

точки $z_k = -1 + \frac{1}{\pi k}$, $k \in Z$, $k \neq 0$ будуть полюсами другого порядку:

$$\sin\left(\frac{1}{z+1}\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{z+1} = \pi k \Rightarrow z_k = -1 + \frac{1}{\pi k}, k \in \mathbb{Z}, k \neq 0 \text{ і}$$

$$\lim_{z \to z_k} \frac{z^3}{\sin^2\left(\frac{1}{z+1}\right)} = \infty.$$

Дійсно, ці точки є простими нулями функції $\sin\left(\frac{1}{z+1}\right)$ і тому будуть нулями другого порядку для функції $\sin^2\left(\frac{1}{z+1}\right)$, а $z_k \neq 0$. Точка $z = -1$ при цьому буде граничною для полюсів z_k, а нескінченно віддалена точка $z_0 = \infty$ – полюсом п'ятого порядку функції $f(z)$, оскільки:

$$f(z) = \frac{z^3}{\sin^2\left(\frac{1}{z+1}\right)} \underset{z \to \infty}{\sim} \frac{z^3}{\left(\frac{1}{z+1}\right)^2} = z^3(z+1)^2 \underset{z \to \infty}{\sim} z^5.$$

Означення. Функцію $f(z)$ називають *цілою*, якщо вона аналітична в $\mathbb{C}$.

Для цілої функції $f(z)$ точка $z = \infty$ завжди є ізольованою особливою точкою. Якщо $z = \infty$ є усувною особливою точкою, то в силу сказаного вище, $f(z) = \text{const}$. Якщо ж $z = \infty$ – полюс порядку $m \in \mathbb{N}$ функції $f(z)$, то головна частина лоранівського розкладу функції $f(z)$ в околі точки $z = \infty$ має скінченне число доданків з додатними степенями z, тобто має вигляд:

$$g(z) = c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_m z^m.$$

Віднімаючи з $f(z)$ цю головну частину, отримаємо також цілу функцію $\varphi(z) = f(z) - g(z)$, але з лоранівським розкладом в околі точки $z = \infty$, який не містить доданків з додатними степенями z. Для такої функції $z = \infty$ буде усувною особливою точкою, тобто $\varphi(z) = \text{const}$. Отже, ціла функція $f(z)$ з полюсом порядку m у нескінченно віддаленій точці $z = \infty$ є многочленом степеня m.

Означення. Цілу функцію називають *цілою трансцендентною*, якщо $z = \infty$ є істотно особливою точкою для даної функції.

Прикладом цілих трансцендентних функцій є: e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\text{sh}\, z$, $\text{ch}\, z$.

Використовуючи встановлені вище результати, нескладно довести наступну основну теорему алгебри.

Теорема. Будь-який многочлен степеня $n \in \mathbb{N}$

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$$

має принаймні один нуль.

▷Припустимо супротивне. Нехай многочлен $P_n(z)$ не має нулів. Тоді функція $g(z) = \frac{1}{P_n(z)}$ є цілою. Так як $g(z) \to 0$ при $z \to \infty$, то $g(z)$ буде аналітичною на всій розширеній площині $\overline{\mathbb{C}}$ і, відповідно, $g(z) = \text{const}$. Це суперечить побудові функції $g(z)$. Тому вихідне припущення невірне, тобто многочлен $P_n(z)$ має принаймні один нуль.◀

Означення. Аналітична функція, яка в комплексній площині немає інших особливих точок, крім полюсів, називається *мероморфною* функцією.

У кожному крузі $|z| < n$, $n \in \mathbb{N}$ мероморфна функція може мати тільки скінченне число полюсів. Інакше існувала б скінченна гранична точка, яка представляла б собою неізольовану особливу точку, а це суперечить означенню, оскільки полюси є ізольованими особливими точками. Отже, мероморфна функція може мати в комплексній площині $\mathbb{C}$ не більше як зліченну множину полюсів.

Прикладом мероморфних функцій з нескінченною, але зліченною множиною полюсів є функції $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$, $\frac{1}{\sin z}$, $\frac{1}{e^z - 1}$. Мероморфною також є дробово-раціональна функція. Вона має на всій розширеній комплексній площині $\overline{\mathbb{C}}$ тільки скінчене число полюсів.

Теорема. Нехай $f(z)$ – мероморфна функція та $z = \infty$ – це є або її усувна особлива точка, або полюс. Тоді $f(z)$ – дробово-раціональна функція.

Теорема (*Мала теорема Пікара*). Мероморфна функція, що відмінна від сталої, приймає всі скінченні комплексні значення за виключенням, можливо двох значень. Ці числа називаються *пікарівськими виключними значеннями* меромофної функції.

8.3. Лишки

Означення. Нехай $f \in A\left(\dot{B}_r(z_0)\right)$, $z_0 \in \mathbb{C}$. *Лишком функції $f(z)$ в точці z_0* називається величина

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\{|z-z_0|=\rho\}^+} f(z)dz,$$

де ρ – довільне число з інтервалу $(0; r)$.

Означення. Нехай $f \in A\left(\dot{B}_r(\infty)\right)$. *Лишком функції $f(z)$ на нескінченності* називається величина

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\{|z|=\rho\}^+} f(z)dz,$$

де ρ – довільне число з інтервалу $(r; +\infty)$.

Нехай виконуються умови:

1. D – область в $\mathbb{C}$, $f \in A(D \backslash \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}})$, де $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ – послідовність ізольованих особливих точок.

2. G – обмежена область, така що $\overline{G} \subset D$; $\partial G = \bigcup_{j=0}^{k} E_{\gamma_j}$, де γ_j – замкнені жорданові криві, шляхи, яких попарно не перетинаються, та для довільного $j \in \{1, \dots, k\}$: $E_{\gamma_j} \subset \text{int}(\gamma_0)$ (множина значень є підмножиною внутрішності γ_0).

3. $G \cap \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{a_1, \dots, a_p\}$, $\partial G \cap \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \emptyset$.

Теорема (*теорема Коші про лишки*). Нехай $f \in A\big(\overline{G}\backslash\{a_1, \dots, a_p\}\big)$ та виконуються вище вказані умови 1-3. Тоді

$$\oint_{\partial^+ G} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{p} \text{res}_{z=a_k} f\,(z).$$

Теорема (*теорема про суму лишків*). Нехай $f \in A\big(\mathbb{C}\backslash\{a_1, \dots, a_p\}\big)$. Тоді

$$\sum_{k=1}^{p} \text{res}_{z=a_k} f\,(z) + \text{res}_{z=\infty} f\,(z) = 0.$$

Теорема. Лишок функції $f(z)$ в ізольованій особливій точці $z = z_0$ дорівнює коефіцієнту c_{-1} лоранівського розкладу $f(z)$ в околі z_0 (кажуть: „при мінус першій степені біному $z - z_0$“):

$$\text{res}_{z=z_0} f\,(z) = c_{-1}.$$

Доведення. ▷Представимо функцію $f(z)$ у проколотому околі $0 < |z - z_0| < r$ точки z_0 деякого радіуса r рядом Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n\,, 0 < |z - z_0| < r.$$

Коефіцієнти c_n ряду Лорана знаходяться за формулами $c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\{|z-z_0|=\rho\}^+} \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}\,d\xi$, в яких в якості контуру L можна взяти довільне коло $|z - z_0| = \rho$ радіуса $\rho < r$. В окремому випадку, коли $n = -1$ отримаємо:

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_L f(z)dz.$$

Але права частина отриманого виразу є лишком функції $f(z)$ у точці $z = z_0$, що і доводить теорему.◀

Приклад. Знайти лишок функції $f(z) = z^2 \sin\frac{1}{z-4}$ у точці $z = 4$.

▷Для цього використаємо розклад функції $f(z)$ за степенями біному $z - 4$. Спочатку розкладемо функцію $z^2 = \big((z-4)+4\big)^2 = (z-4)^2 + 2(z-4) + 16$. За допомогою стандартного розкладу для синусу, отримуємо розклад функції $\sin\frac{1}{z-4}$ при $|z - 4| > 0$:

$$\sin\frac{1}{z-4} = \frac{1}{z-4} - \frac{1}{3!\,(z-4)^3} + \frac{1}{5!\,(z-4)^5} + \cdots$$

Тоді

$$f(z) = z^2 \sin\frac{1}{z-4} = \big((z-4)^2 + 2(z-4) + 16\big) \times$$

$$\times\left(\frac{1}{z-4} - \frac{1}{3!\,(z-4)^3} + \frac{1}{5!\,(z-4)^5} + \dots\right) = \cdots + \frac{1}{z-4}\left(1 - \frac{1}{3!}\right) + \cdots$$

Таким чином коефіцієнт розкладу функції $f(z)$ при $(z-4)^{-1}$ дорівнює: $c_{-1}=1-\frac{1}{3!}=\frac{5}{6}$, тобто лишок $\operatorname{res}_{z=4}\left(z^2\sin\frac{1}{z-4}\right)=\frac{5}{6}$.◀

8.4. Методи обчислення лишків

1. Нехай $f\in A\left(\dot{B}_r(z_0)\right)$, $z_0\in\mathbb{C}$. Тоді, згідно з теоремою про розклад аналітичної функції в ряд Лорана для довільного $z\in\dot{B}_r(z_0)$ маємо $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n$, де

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\{|z-z_0|=\rho\}^+}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz,\ \ n\in\mathbb{Z},\forall\rho\in(0;r).$$

Отже,

$$\operatorname{res}_{z=z_0}f\,(z)=c_{-1}.$$

2. Нехай $f\in A\left(\dot{B}_R(\infty)\right)$. Тоді, згідно з теоремою про розклад аналітичної функції в ряд Лорана для довільного $z\in\dot{B}_R(\infty)$ маємо $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_nz^n$, де

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\{|z|=\rho\}^+}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz,\ \ n\in\mathbb{Z},\forall\rho\in(R;+\infty).$$

Отже,

$$\operatorname{res}_{z=\infty}f\,(z)=-c_{-1}.$$

3. Якщо точка $z_0\in\mathbb{C}$ – *усувна особлива точка* функції $f(z)$, то

$$\operatorname{res}_{z=z_0}f\,(z)=0.$$

Якщо «∞» – усувна особлива точка функції $f(z)$, то не можна стверджувати, що $\operatorname{res}_{z=\infty}f\,(z)=0$, оскільки коефіцієнт c_{-1} не входить в головну частину розкладу ряду Лорана. Якщо «∞» – нуль m-го порядку для функції $f(z)$ та $m\geq 2$, то $\operatorname{res}_{z=\infty}f\,(z)=0$.

4. Якщо точка $z_0\in\mathbb{C}$ – *полюс першого порядку* для функції $f(z)$, то

$$c_{-1}=\operatorname{res}_{z=z_0}f\,(z)=\lim_{z\to z_0}f(z)(z-z_0).$$

5. Якщо точка $z_0\in\mathbb{C}$ – *полюс m-го порядку* для функції $f(z)$ та $m\geq 2$, то

$$c_{-1}=\operatorname{res}_{z=z_0}f\,(z)=\frac{1}{(m-1)!}\cdot\lim_{z\to z_0}[f(z)(z-z_0)^m]^{(m-1)}.$$

6. Нехай $\varphi(z),\psi(z)\in A\left(\dot{B}_r(z_0)\right)$, де точка $z_0\in\mathbb{C}$ – *нуль першого порядку* для функції $\psi(z)$ $(\psi(z_0)=0,\ \psi'(z_0)\neq 0)$ та $\varphi(z_0)\neq 0$. Якщо $f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, $z\in\dot{B}_r(z_0)$, то

$$\operatorname{res}_{z=z_0}f\,(z)=\lim_{z\to z_0}f(z)(z-z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}(z-z_0)=$$

$$=\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)}{\dfrac{\psi(z)-\psi(z_0)}{z-z_0}}=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)},$$

$$\operatorname{res}_{z=z_0}f\,(z)=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

7. Якщо «∞» – *полюс m-го порядку* для функції $f(z)$, то

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -\frac{1}{(m+1)!} \cdot \lim_{z\to 0} \left[f\left(\frac{1}{z}\right) z^m \right]^{(m+1)}.$$

8. Якщо функція $f(z)$ парна та точки 0 та ∞ є її ізольовані особливі точки, то $\operatorname{res}_{z=0} f(z) = 0$, $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = 0$.

Приклад. Для $e^{1/z}$ точка $z = \infty$ є усувною особливою точкою, оскільки $e^{1/z} \to 1$ при $z \to \infty$. Проте лишок функції у точці $z = \infty$ відмінний від нуля. Дійсно, використовуючи стандартний розклад для експоненти, отримаємо при $|z| > 0$:

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{1!\,z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \ldots + \frac{1}{n!\,z^n} + \cdots$$

Звідси, робимо висновок, що $\operatorname{res}_{z=\infty} e^{1/z} = -c_{-1} = -1$.

8.5. Застосування лишків до обчислення інтегралів

Розглянемо невласний інтеграл вигляду

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx,$$

припускаючи, що функція $f(x)$ має аналітичне продовження у комплексну площину. Щоб обчислити цей інтеграл, можна діяти наступним чином. Продовжимо

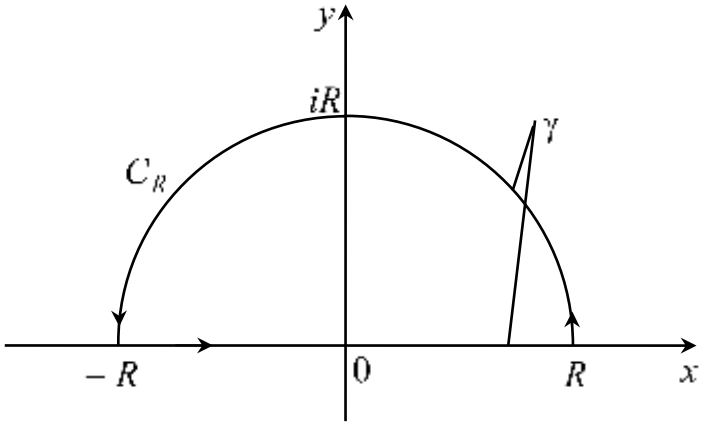


Рисунок 19 – Область $\operatorname{Im} z \geq 0$, обмежена контуром γ

підінтегральну функцію $f(x)$ у верхню півплощину $\operatorname{Im} z > 0$, тобто розглянемо функцію $f(z)$ комплексної змінної z, яка є аналітичною в області $\operatorname{Im} z > 0$ та на її межі і яка співпадає при дійсних значеннях z з функцією $f(x)$. Потім виберемо замкнений контур $L = \gamma$, що складається з відрізка $[-R; R]$ дійсної осі і дуги C_R кола $|z| = R$ у верхній півплощині $\operatorname{Im} z \geq 0$, яке з'єднує кінці відрізка $[-R; R]$ (див. рис. 19). За теоремою Коші про лишки для контурного інтеграла функції $f(z)$ вздовж контуру γ маємо

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{C_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}_{z=a_k} f(z).$$

Нехай R вибрано настільки великим, що всі особливі точки функції $f(z)$ у верхній півплощині знаходяться всередині контура γ, тобто a_k, $k = \overline{1,n}$ – всі

особливі точки функції $f(z)$ у верхній півплощині. Переходячи до границі при $R \to \infty$, отримаємо

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res}_{z=a_k} f\,(z).$$

Якщо вдається обчислити границю інтеграла по дузі C_R, то інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ можна знайти із рівності:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res}_{z=a_k} f\,(z) - \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz.$$

Теорема (*лема Жордана*). Нехай виконуються наступні умови:

1. функція аналітична в верхній півплощині $\operatorname{Im} z \geq 0$, за винятком скінченого числа точок;

2. $\lim\limits_{R\to+\infty}\max\limits_{z\in C_R}|f(z)| = 0$, де $C_R = Re^{it}$, $t \in [0;\pi]$.

Тоді для довільного $\lambda > 0$

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)e^{i\lambda z}dz = 0.$$

Зауваження. Лему Жордана можна переформулювати для випадку C_R – дуги кола $|z| = R$ у нижній півплощині $\operatorname{Im} z \leq 0$, при цьому буде виконуватись умова $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)e^{-i\lambda z}dz = 0$.

Розглянемо невласні інтеграли, для обчислення яких можна застосувати теорію лишків.

1. Інтеграл від раціональної функції, представлений у вигляді нескоротного раціональною дробу $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, де $P_n(x)$ та $Q_m(x)$ – многочлени степеня n та m відповідно і $m \geq n+2$. Якщо функція $f(x)$ неперервна на всій дійсній осі, тобто знаменник $Q_m(x)$ не має нулів на дійсній осі, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{m}\operatorname{res}_{z=a_k}\frac{P_n(z)}{Q_m(z)}, a_k \in H^+.$$

де лишки беруться у всіх полюсах a_k функції $f(z)$, розташованих у верхній півплощині H^+: $\operatorname{Im} z > 0$.

2. Інтеграли вигляду

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos(\lambda x)\,dx\,,\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin(\lambda x)\,dx\,,(\lambda > 0),$$

де $R(x)$ – правильний раціональний дріб. Щоб знайти інтеграли такого вигляду, треба: 1) побудувати нову комплекснозначну функцію $f(z) = R(z)e^{i\lambda z}$, яка має скінченне число ізольованих особливих точок – полюсів, які є нулями знаменника раціонального дробу; 2) вибрати такий замкнений контур $\gamma = [-R;R]\cup C_R$, де C_R – дуга кола $|z| = R$ у верхній півплощині H^+: $\operatorname{Im} z \geq 0$; 3) шукають лишки у всіх полюсах $a_k \in H^+$ – з верхньої півплощини H^+; 4) застосовують теорему Коші про лишки, лему Жордана, формулу Ейлера, а саме рівності – $\operatorname{Re}\big(f(z)\big) = R(x)\cos(\lambda x)$, $\operatorname{Im}\big(f(z)\big) = R(x)\sin(\lambda x)$. Тоді:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{i\lambda x}dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}_{z=a_k} R\,(z)e^{i\lambda z}$$

де треба виділити дійсну і уявну частину:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos(\lambda x)\,dx = \operatorname{Re}\left(2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}_{z=a_k} R\,(z)e^{i\lambda z}\right) =$$

$$= -2\pi \operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}_{z=a_k} R\,(z)e^{i\lambda z}\right).$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin(\lambda x)\,dx = \operatorname{Im}\left(2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}_{z=a_k} R\,(z)e^{i\lambda z}\right) =$$

$$= 2\pi \operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}_{z=a_k} R\,(z)e^{i\lambda z}\right).$$

Приклад. Обчислити інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x^2+4x+5}\,dx$.

▷Введемо допоміжну функцію $f(z) = \frac{e^{i2z}}{z^2+4z+5}$. Якщо $z = x$, то $\operatorname{Im}\big(f(z)\big)$ співпадає з підінтегральною функцією $\varphi(x) = \frac{\sin 2x}{x^2+4x+5}$. Розглянемо контур $\gamma = C_R \cup [-R; R]$, зображений на рис. 20.

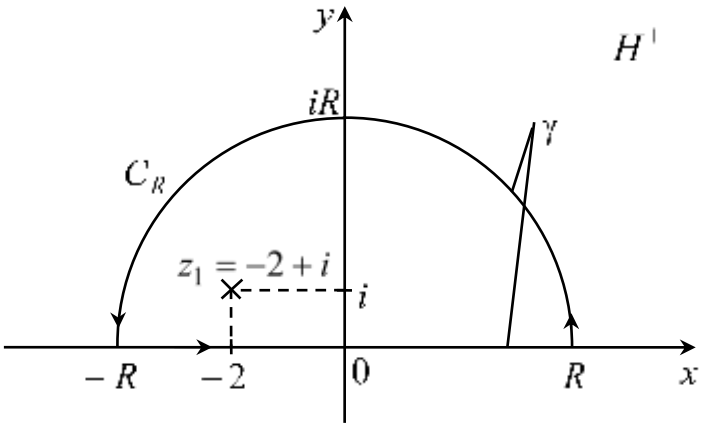


Рисунок 20 – Область $\operatorname{Im} z \geq 0$, обмежена контуром γ

Знайдемо особливі точки функції $f(z) = \frac{e^{i2z}}{z^2+4z+5}$:

$$z^2 + 4z + 5 = 0 \Rightarrow z_1 = -2 + i, z_2 = -2 - i.$$

Точка $z_2 = -2 - i$ належить нижній півплощині. Встановимо вид точки $z_1 = -2 + i$:

$$\lim_{z\to -2+i} \frac{e^{i2z}}{z^2 + 4z + 5} = \left\|\frac{\text{const}}{0}\right\| = \infty.$$

Отже, точка $z_1 = -2 + i$ є простим полюсом, оскільки вона є нулем знаменника кратності 1.

Для будь-якого $R > 2$ за теоремою Коші про лишки маємо:

$$\oint_\gamma f(z)dz = 2\pi i \cdot \operatorname{res}_{z=-2+i} f(z) =$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to -2+i}\left(\frac{e^{i2z}}{\big(z-(-2+i)\big)\big(z-(-2-i)\big)}\cdot\big(z-(-2+i)\big)\right) =$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to -2+i}\left(\frac{e^{i2z}}{z+2+i}\right) = \frac{2\pi i e^{i2(-2+i)}}{-2+i+2+i} =$$

$$= \frac{\pi}{e^2}e^{-4i} = \frac{\pi}{e^2}(\cos 4 - i\sin 4) = \frac{\pi\cos 4}{e^2} - i\frac{\pi\sin 4}{e^2}.$$

Таким чином $\oint_\gamma f(z)dz = \frac{\pi\cos 4}{e^2} - i\frac{\pi\sin 4}{e^2}$. З іншого боку

$$\oint_\gamma f(z)dz = \int_{-R}^{R}\frac{e^{i2x}dx}{x^2+4x+5} + \int_{C_R}\frac{e^{i2z}dz}{z^2+4z+5},$$

Тоді

$$\int_{-R}^{R}\frac{e^{i2x}dx}{x^2+4x+5} + \int_{C_R}\frac{e^{i2z}dz}{z^2+4z+5} = \frac{\pi\cos 4}{e^2} - i\frac{\pi\sin 4}{e^2}.$$

Перейдемо в останній рівності до границі при $R\to+\infty$. За лемою Жордана $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{C_R}\frac{e^{i2z}dz}{z^2+4z+5} = 0$. Маємо:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i2x}dx}{x^2+4x+5} = \frac{\pi\cos 4}{e^2} - i\frac{\pi\sin 4}{e^2},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(\cos 2x + i\sin 2x)dx}{x^2+4x+5} = \frac{\pi\cos 4}{e^2} - i\frac{\pi\sin 4}{e^2},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2x\,dx}{x^2+4x+5} + i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin 2x\,dx}{x^2+4x+5} = \frac{\pi\cos 4}{e^2} - i\frac{\pi\sin 4}{e^2}.$$

Прирівнявши уявні частини, одержимо, що

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin 2x\,dx}{x^2+4x+5} = -\frac{\pi\sin 4}{e^2}.\blacktriangleleft$$

8.6. Логарифмічний лишок

Нехай функція $f(z)$ є аналітичною функцією у проколотому околі точки $z=z_0$ і не перетворюється у цьому околі в нуль. Сама точка $z=z_0$ може бути як точкою аналітичності цієї функції, так і її ізольованою особливою точкою.

Означення. *Логарифмічним лишком* функції $f(z)$ у точці $z=z_0$ називають *лишок* її логарифмічної похідної $\frac{f'(z)}{f(z)}$ у цій точці, тобто значення

$$\operatorname{res}_{z=z_0}\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{2\pi i}\oint_L\frac{f'(z)}{f(z)}dz,$$

де в якості контуру L інтегрування можна взяти довільне коло з центром у точці $z=z_0$, яке повністю лежить у вказаному проколотому околі цієї точки.

Логарифмічний лишок функції $f(z)$ може бути відмінний від нуля в її ізольованих особливих точках, а також в нулях, оскільки точка $z = z_0$ буде особливою точкою функції $\frac{f'(z)}{f(z)}$ лише у вказаних випадках.

Теорема. В нулі аналітичної функції $f(z)$ її логарифмічна похідна $\frac{f'(z)}{f(z)}$ має простий полюс, а логарифмічний лишок дорівнює кратності цього нуля.

▷Нехай точка $z = z_0$ – нуль кратності m функції $f(z)$, аналітичної у цій точці. Тоді, у деякому околі цієї точки

$$f(z) = (z - z_0)^m \varphi(z),$$

де $\varphi(z)$ – функція, аналітична у точці $z = z_0$, причому $\varphi(z_0) \neq 0$ і $\varphi(z) \neq 0$ у деякому околі цієї точки. Обчислюючи логарифмічну похідну функції $f(z)$, отримуємо

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m(z - z_0)^{m-1}\varphi(z) + (z - z_0)^m \varphi'(z)}{(z - z_0)^m \varphi(z)} =$$

$$= \frac{1}{z - z_0} \frac{m\varphi(z) + (z - z_0)\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \frac{1}{z - z_0}\left(m + (z - a)z_0 \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right) \underset{z \to z_0}{\sim} \frac{m}{z - z_0}.$$

Робимо висновок, що точка $z = z_0$ є полюсом функції $\frac{f'(z)}{f(z)}$, і лишок у цій точці дорівнює $\operatorname{res}_{z=z_0} \frac{f'(z)}{f(z)} = m$.◀

Наслідок. Якщо точка $z = z_0$ – полюс функції $f(z)$ порядку m, то для логарифмічної похідної $\frac{f'(z)}{f(z)}$ цієї функції точка $z = z_0$ є простим полюсом, а лишок у ньому дорівнює $-m$.

Приклад. Обчислити логарифмічний лишок функції $f(z) = \frac{z^2 - 5z + 6}{(z-5)^2}$ в нулях цієї функції і у полюсі.

▷Функції $f(z) = \frac{z^2 - 5z + 6}{(z-5)^2}$ має прості нулі в точках $z_1 = 2$ і $z_2 = 3$. Тому

$$\operatorname{res}_{z=2} \frac{f'(z)}{f(z)} = \operatorname{res}_{z=3} \frac{f'(z)}{f(z)} = 1.$$

Точка $z = 5$ є полюсом другого порядку цієї функції, так що маємо:

$$\operatorname{res}_{z=5} \frac{f'(z)}{f(z)} = -2.◀$$

Означення. Якщо функція $f(z)$ є аналітичною функцією на замкнутому контурі L і немає нулів на цьому контурі, то значення

$$res_L \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

називають *логарифмічним лишком функції $f(z)$ відносно контуру L*.

Теорема (*про логарифмічний лишок*). Нехай функція $f(z)$ аналітична скрізь в однозв'язній області D і на її межі – кусково-гладкому контурі L, крім, можливо, деякого скінченного числа полюсів. Нехай також функція має скінченне число нулів, при цьому на контурі L немає ні нулів, ні полюсів функції. Тоді

$$res_L \frac{f'(z)}{f(z)} = N - P,$$

де N і P – загальне число відповідно нулів і полюсів функції $f(z)$ у області D, при цьому кожний нуль треба рахувати стільки раз, яка його кратність, а кожен полюс – який його порядок.

Наслідок. Логарифмічний лишок многочлена $P_n(z)$ степеня n відносно простого контура L, на якому немає нулів $P_n(z)$, дорівнює числу нулів многочлена (з урахуванням їх кратності) всередині контура.

Теорема (*теорема Руше*). Нехай функції $f(z)$ і $\varphi(z)$ – функції, аналітичні на замиканні $\overline{D}$ області D, яка обмежена контуром L, і у всіх точках цього контуру задовольняють нерівності

$$|\varphi(z)| > f(z), z \in L.$$

Тоді їх сума $\varphi(z) + f(z)$ і функція $\varphi(z)$ мають в D однакове число нулів (з врахуванням їх кратності).

Приклад. Знайти число коренів рівняння $z^5 + z^2 + 1 = 0$ всередині кола $|z| = 2$.

▷На даному колі маємо $|z^2| = 4$, і в силу нерівностей

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|,$$
$$|z_1 - z_2| \le \big||z_1| - |z_2|\big|,$$

маємо:

$$|z^5 + 1| \ge |z^5| - 1 = 32 - 1 = 31 > |z^2|.$$

Тому, відповідно до теореми Руше, у функцій $\varphi(z) = z^5 + 1$ і $\varphi(z) + f(z) = z^5 + z^2 + 1$ всередині кола $|z| = 2$ однакове число нулів. Але у рівняння $z^5 + 1 = 0$ п’ять коренів, і всі вони розташовані на колі $|z| = 1$, тобто всередині кола $|z| = 2$. Таким чином, задане рівняння має п’ять коренів всередині кола

$$|z| = 2.◀$$

Питання для самоконтролю до теми 8

1. Надайте означення нуля і нуля кратності m функції.
2. Надайте означення лишків у скінченній точці.
3. Надайте означення ізольованої особливої точки функції $f(z)$ (і для нескінченно віддаленої точки).
4. Надайте означення усувної точки, полюса, істотно особливої точки.
5. Сформулюйте теорему про усувну особливу точку. Сформулюйте теорему про полюс.
6. Сформулюйте теорему про істотно особливу точку.
7. Сформулюйте теорему Ю.В. Сохоцького.
8. Сформулюйте велику теорему Пікара і малу теорему Пікара.
9. Наведіть класифікацію аналітичних функцій за їх особливими точками.
10. Наведіть приклад мероморфної функції.
11. Сформулюйте основну теорему алгебри.
12. Наведіть приклад цілої функції.
13. Сформулюйте теорему Коші про лишки.
14. Запишіть формулу для обчислення лишку функції у полюсі.

15. Надайте означення лишку в нескінченній точці.
16. Сформулюйте теорему про суму лишків.
17. Сформулюйте лему Жордана.
18. Наведіть приклади застосування лишків до обчислення невласних інтегралів.
19. Надайте означення логарифмічного лишку.
20. Сформулюйте теорему про логарифмічний лишок.
21. Наведіть алгоритм знаходження нулів многочлена у правій півплощині.
22. Сформулюйте теорему Руше.

Завдання до теми 8

1. Знайти нулі функцій $f(z)$ та визначити їх кратність (порядок):

1) а) $f(z) = z\sin^2 z$; б) $f(z) = (1+e^z)(z^2+64)^2$.
2) а) $f(z) = \sin\frac{1}{z}$; б) $f(z) = z^5 - z^4 + 4z^3 - 4z^2$.
3) а) $f(z) = e^{z^2} - 1 - z^2$; б) $f(z) = z^3 + z^2 + 9z + 9$.
4) а) $f(z) = \sin^3 z - 1 + \cos z$; б) $f(z) = (i+e^z)(z^2+4)^3$.
5) а) $f(z) = e^{\sin z} - e^{\operatorname{tg} z}$; б) $f(z) = z^4 + 5z^3 + 4z^2 + 20z$.

2. Знайти ізольовані особливі точки та встановити їх тип (враховуючи $z = \infty$):

1) а) $f(z) = \frac{z^5}{(z^2+1)^2}$; б) $f(z) = \frac{e^z-1}{z^3}$.
2) а) $f(z) = z^2 - i + \frac{1}{z^2+4}$; б) $f(z) = \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}$.
3) а) $f(z) = \frac{z^3}{z-1}$; б) $f(z) = \frac{1}{e^z-1} - \frac{1}{z}$.
4) а) $f(z) = \frac{z^3}{(z^2+16)^2}$; б) $f(z) = \sin\left(\frac{1}{z-1}\right)$.
5) а) $f(z) = \frac{(z-5)^7}{(z^3-1)(z-5i)}$; б) $f(z) = \frac{e^z}{z}$.

3. Знайти лишки функції $f(z)$ в скінченних ізольованих особливих точках, якщо:

1) а) $f(z) = \frac{z^2}{1-\cos z}$; б) $f(z) = \frac{e^z-1}{z^4+z^3}$; в) $f(z) = z^6\sin\left(\frac{1}{z}\right)$.
2) а) $f(z) = \frac{z^5}{z^2-1}$; б) $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^3+z^5}$; в) $f(z) = \frac{1}{\sin z}$.
3) а) $f(z) = \frac{\cos z^4}{z^4 - \frac{\pi}{3}z^2}$; б) $f(z) = \frac{e^z-1}{z^2-3z}$; в) $f(z) = \operatorname{tg} z$.
4) а) $f(z) = \frac{z^6}{(z-1)^4}$; б) $f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2-1)(z+3)}$; в) $f(z) = \cos\left(\frac{1}{z-2}\right)$.
5) а) $f(z) = \frac{1}{z(z^2+4)^2}$; б) $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+1}$; в) $f(z) = \frac{1}{1-z}\sin\left(\frac{1}{z}\right)$.

4. Знайти лишок функції $f(z)$ в точці $z = \infty$, якщо:

1) а) $f(z) = \frac{z^8}{1+z^3}$; б) $f(z) = \frac{\sin z^2}{z^7}$.

2) а) $f(z)=\frac{z^7}{4-z^2}$; б) $f(z)=z^4\sin\left(\frac{1}{z}\right)$.

3) а) $f(z)=\frac{z^{21}}{6+z^{11}}$; б) $f(z)=\cos\left(\frac{1}{z-5}\right)$.

4) а) $f(z)=\frac{z^7}{9-z^4}$; б) $f(z)=z^3\sin\left(\frac{1}{z}\right)$.

5) а) $f(z)=\frac{z^{14}}{10+z^5}$; б) $f(z)=e^{\frac{1}{z^2}}\sin z^3$.

5. Обчислити інтеграли за допомогою лишків:

1) а) $\oint_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{ch}(3z)-\cos(4iz)}{z^2\sin 5z}dz$; б) $\oint_{|z|=3}\frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^6+1}dz$; в) $\oint_{|z|=1}\left(z+e^{\frac{1}{z}}\right)dz$.

2) а) $\oint_{|z+2|=\frac{5}{2}}\frac{e^z}{z\sin z}dz$; б) $\oint_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{\sin z}{z^3+16z}dz$; в) $\oint_{|z|=\frac{1}{2}}z^3\sin\frac{1}{z}dz$.

3) а) $\oint_{|z|=2}\frac{ze^z}{\sin z}dz$; б) $\oint_{|z-i|=1}\frac{e^z}{z-i}dz$; в) $\oint_{|z|=3}\frac{z^{12}}{(z^3+6)^3(z^4+3)}dz$.

4) а) $\oint_{|z|=3}\frac{z^3+z}{z^4+16}dz$; б) $\oint_{|z-1|=2}\sin\left(1+\frac{1}{z}\right)dz$; в) $\oint_{|z-2|=3}\frac{\cos^2 z+1}{(z-\pi)^2}dz$.

5) а) $\oint_{|z|=1}\frac{z^3+z}{z^2}dz$; б) $\oint_{|z-i|=3}\frac{e^z+2}{z^2+9}dz$; в) $\oint_{|z|=1}\frac{6z-\sin 6z}{z^2\,\mathrm{sh}^2\,2z}dz$.

6. Обчислити інтеграли від дійсних функцій за допомогою лишків:

1) а) $\int_0^{2\pi}\frac{1}{\left(\sqrt{5}+\cos x\right)^2}dx$; б) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x^2+1)^4}dx$; в) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+25}dx$.

2) а) $\int_0^{2\pi}\frac{\cos x+1}{\sin x+2}dx$; б) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2-2x+20}dx$; в) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin 3x}{x^2+4x+13}dx$.

3) а) $\int_0^{2\pi}\frac{1}{5-4\sin x}dx$; б) $\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+4)^2}dx$; в) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x+1)\cos 4x}{x^2-4x+6}dx$.

4) а) $\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+0.3\cos x}dx$; б) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x^2+3)^2(x^2+1)}dx$; в) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2-2x+10}dx$.

5) а) $\int_0^{2\pi}\frac{1}{3+\sin x}dx$; б) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+3)^2}dx$; в) $\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+1}dx$.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

А

Аналітична функція, 28
Аргументом комплексного числа, 10

В

Велика теорема Пікара, 68
Внутрішня точка, 18

Г

Геометрична інтерпретація, 10
Гіперболічні функції, 34
Головне значення аргументу комплексного числа, 10
Головне значення логарифму, 35
Гомотетія, 30
Границя функції, 22
Гранична точка множини, 19

Д

Диференціал функції, 23
Дійсна частина комплексного числа, 8
Добування кореня з комплексного числа, 12
Дробово-лінійний ізоморфізм верхньої півплощини, 32
Дробово-лінійний ізоморфізм області на себе, 33

Е

Евклідова метрика, 17

З

Загальне значення аргументу комплексного числа, 11
Замкнена множина, 19
Збіжна послідовність, 15

І

Ізольована особлива точка, 66
Інтеграл Коші, 46
Інтеграл типу Коші, 50
Інтегральна формула Коші, 46
Істотно особлива точка, 67

К

Кільце збіжності ряду Лорана, 60
Комплексне число, 8
Конформна в області функція, 25
Конформне відображення другого роду, 25
Конформне відображення першого роду, 25
Кратність нуля, 56
Крива у комплексній площині, 41
Критерій конформності відображення, 25

Л

Лема Жордана, 75
Лишок у скінченній точці, 71
Лінійно зв’язна область, 19
Логарифмічна функція, 35
Логарифмічний лишок, 77
Логарифмічний лишок функції, 78

М

Межа області, 19
Модуль комплексного числа, 10

Н

Неперервна функція у точці, 22
Нерівності Коші, 55
Нескінченно велика послідовність, 15
Нескінченно віддалена точка, 15
Нуль поля комплексних чисел, 8
Нуль функції, 56, 65

О

Обернені тригонометричні функції, 36
Область, 19
Обмежена послідовність, 16
Обмежена функція, 21
Образ множини, 21
Одиниця поля комплексних чисел, 8
Оператор Лапласа, 24
Основна властивість уявної одиниці, 8

П

Первісна, 44
Пікарівські виключні значення, 71
Показникова функція, 33
Поле комплексних чисел, 8
Полюс, 67
Порядок нуля, 65
Послідовність часткових сум, 52
Похідна функції, 23
Правила диференціювання функцій, 24
Прообраз множини, 21

Р

Розширена комплексна площина, 15
Ряд, 52
  абсолютно збіжний, 52
  комплексних чисел, 52
  степеневий, 53
  Тейлора, 55
  умовно збіжний, 52
  функціональний, 52
Ряд Лорана, 59
Ряд Фур'є, 63

С

Спряжена пара гармонічних функцій, 25
Сфера Рімана, 17
Сферична метрика, 17
Сферичне зображення комплексного числа, 16

Т

Теорема Абеля, 53
Теорема Больцано-Веєрштраса, 16
Теорема Коші для многозв'язної області, 45
Теорема Коші про лишки, 72
Теорема Морери, 50
Теорема П.А. Лорана, 60
Теорема про логарифмічний лишок, 78
Теорема Рімана, 26
Теорема Рунге, 66
Теорема Руше, 79
Теорема Сохоцького, 68
Тригонометрична форма запису комплексного числа, 10
Тригонометричні функції, 33

У

Умови Коші-Рімана, 23
Усувна особлива точка, 67
Уявна частина комплексного числа, 8

Ф

Формула Даламбера, 53
Формула для обчислення інтеграла, 42

Формула Коші-Адамара, 53
Формула Муавра, 11
Формула Ньютона-Лейбніца, 45
Фундаментальна послідовність, 16
Функція, 21
  мероморфна, 71
  трансцендентна, 70
Функція диференційовна у точці, 23
Функція Жуковського, 33
Функція ціла, 28

Ш

Шлях інтегрування, 41

ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Горяйнов В. В., Малютін К. Г., Козлова І. І. Комплексний аналіз : підручник. Суми : Сумський державний університет, 2020. 120 с.
2. Грищенко О. Ю., Нагнибіда Н. І., Настасієв П. П. Теорія функцій комплексної змінної : розв'язування задач. Київ : Вища школа, 1994. 375 с.
3. Грищенко О. Ю., Оноцький В. В. Курс лекцій з комплексного аналізу. Частина 1. Київ : Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2015. 144 с.
4. Грищенко О. Ю., Нагнибіда М. Г., Настасієв П. П. Теорія функцій комплексної змінної. Розв'язання задач. Київ : Вища школа, 1994. 376 с.
5. Єжов С. М., Разумова М. А. Теорія функції комплексної змінної. Київ : Київський університет, 2012. 191 с.
6. Мельник Т. А. Курс лекцій з комплексного аналізу: підручник. Київ : Київський університет, 2015. 192 с.
7. Комплексний аналіз / Гольдберг А. А., Заболоцький М. В., Скасків О. Б., Шеремета М. М. Львів : Афіша, 2002. 204 с.
8. Комплексний аналіз : навчальний посібник / Голіченко І. І., Задерей Н. М., Задерей П. В., Нефьодова Г. Д., Самусенко П.Ф. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2024. 220 с.
9. Комплексний аналіз : розрахункова робота / Дрозд В. В., Задерей Н. М., Задерей П. В., Голіченко І. І. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2017. 110 с.
10. Комплексний аналіз : навчальний посібник / Слюсарчук П. В., Бояришева Т. В., Герич М. С., Погориляк О. О., Синявська О. О., Сливка-Тилищак Г. І., Тегза А. М. Ужгород, 2022. 244 с.
11. Комплексний аналіз. Приклади і задачі / Самойленко В. Г., Бородін В. А., Верьовкіна Г. В., Ловейкін А. В., Романенко І. Б. Київ : Київський університет, 2010. 224 с.
12. Мартиненко М. А., Юрик І. І. Теорія функцій комплексної змінної. Операційне числення. Київ : Слово, 2008. 295 с.
13. Павлова Л. В., Редькіна О. І. Теорія аналітичних функцій. Збірник вправ. Київ : Вища школа, 1980. 216 с.
14. Панасенко Є. В., Стреляєв Ю. М., Клименко М. І. Комплексний аналіз : теорія рядів, лишки та їх застосування : навчальний посібник для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра напряму підготовки «Математика». Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2016. 74 с.
15. Стреляєв Ю. М., Панасенко Є. В., Клименко М. І. Комплексний аналіз : диференціальне та інтегральне числення функції комплексної змінної : навчальний посібник для студентів освітньо-кваліфікаційного рівня «Бакалавр» напряму підготовки «Математика». Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2014. 113 с.

16. Шека Д. Д. Комплексний аналіз в прикладах і задачах : навчальний посібник. Київ : факультет радіофізики, електроніки та комп’ютерних систем Київського національного університету імені Тараса Шевченка, 2019. 130 с.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Горяйнов В. В., Малютін К. Г., Козлова І. І. Комплексний аналіз : підручник. Суми : Сумський державний університет, 2020. 120 с.
2. Комплексний аналіз : навчальний посібник / Голіченко І. І., Задерей Н. М., Задерей П. В., Нефьодова Г. Д., Самусенко П.Ф. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2024. 220 с.
3. Комплексний аналіз : навчальний посібник / Слюсарчук П. В., Боярищева Т. В., Герич М. С., Погоріляк О. О., Синявська О. О., Сливка-Тилищак Г. І., Тегза А. М. Ужгород, 2022. 244 с.
4. Скасків О. Б. Комплексний аналіз : конспект лекцій. Львів : Львівський національний університет імені Івана Франка, 2025. URL : https://new.mmf.lnu.edu.ua/wp-content/uploads/2021/03/Complex_Analysis_31_01_2025.pdf
5. Скасків О. Б. Комплексний аналіз : методичні вказівки до практичних занять. Львів : Львівський національний університет імені Івана Франка, 2023. URL : https://new.mmf.lnu.edu.ua/wp-content/uploads/2021/03/Metod_vkazivky_p_z_kompleksnyy_analiz_2023.pdf
6. Romik D. Complex Analysis Lecture Notes. Princeton University Press, 2021. URL : https://www.math.ucdavis.edu/~romik/data/uploads/notes/complex-analysis.pdf

Навчальне видання
(*українською мовою*)

Гоменюк Сергій Іванович
Гребенюк Сергій Миколайович
Панасенко Євген Валерійович

КОМПЛЕКСНИЙ АНАЛІЗ

Навчальний посібник
для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра
спеціальності Прикладна математика
освітньо-професійної програми «Комп'ютерне моделювання»

Рецензент *А.О. Лісняк*
Відповідальний за випуск *С.М. Гребенюк*
Коректор *Є.В. Панасенко*