МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра фундаментальної та прикладної математики

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА

на тему: **«ДОСЛІДЖЕННЯ МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ РІВНЯНЬ ЗАДАЧІ ПРО ЗНОШУВАННЯ ОСНОВИ ВІНКЛЕЕРІВСЬКОГО ТИПУ ПРЯМОКУТНИМ В ПЛАНІ ШТАМПОМ»**

Виконав: студент 2 курсу, групи 8.1113
спеціальності 111 Математика
(шифр і назва спеціальності)
освітньої програми Математика
(назва освітньої програми)
О.Е. Дугієнко
(ініціали та прізвище)

Керівник доцент кафедри фундаментальної та прикладної математики, к.ф.-м.н., доцент, Д'яченко Н.М.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Рецензент доцент кафедри загальної математики, к.ф.-м.н., доцент Спиця О.Г.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Запоріжжя – 2024

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет математичний

Кафедра фундаментальної та прикладної математики

Рівень вищої освіти магістр

Спеціальність 111 Математика
(шифр і назва)

Освітня програма Математика

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри комп'ютерних наук,
д.т.н., професор

_____ Гребенюк С. М.
(підпис)

" ____ " _____ 2024 р.

З А В Д А Н Н Я

НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТОВІ

Дугієнку Олександру Едуардовичу
(прізвище, ім'я та по-батькові)

1. Тема роботи Дослідження методів розв'язання рівнянь задачі про зношування основи Вінклеерівського типу прямокутним в плані штампом

керівник роботи Д'яченко Наталія Миколаївна, к.ф.-м. н., доцент
(прізвище, ім'я та по-батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом ЗНУ від « 01 » березня 2024 року № 385-с

2. Строк подання студентом роботи 21.11.2024!

3. Вихідні дані до роботи 1. Постановка задачі.
2. Перелік літератури.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)
1. Постановка задачі.
2. Основні теоретичні відомості.
3. Дослідження методів розв'язання рівнянь задачі про зношування основи Вінклеерівського типу прямокутним в плані штампом та проведення порівняльного аналізу

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень) презентація

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання 02.09.2024

К А Л Е Н Д А Р Н И Й П Л А Н

№	Назва етапів кваліфікаційної роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	Розробка плану роботи.	01.09.2024–09.09.2024	
2.	Збір вихідних даних.	10.09.2024–24.09.2024	
3.	Обробка методичних та теоретичних	25.09.2024–09.10.2024	
	джерел.		
4.	Розробка першого та другого розділу.	10.10.2024–21.10.2024	
5.	Розробка третього та четвертого розділу.	22.10.2024–05.11.2024	
6.	Оформлення та нормоконтроль	06.11.2024–20.11.2024	
	кваліфікаційної роботи бакалавра.		
7.	Захист кваліфікаційної роботи.	10.12.2024	

Студент _____ О.Е. Дугієнко
(підпис) (ініціали та прізвище)

Керівник роботи _____ Н.М. Д’яченко
(підпис) (ініціали та прізвище)

Нормоконтроль пройдено

Нормоконтролер _____ О.Г.Спиця
(підпис) (ініціали та прізвище)

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота магістра «Дослідження методів розв’язання рівнянь задачі про зношування основи Вінклеерівського типу прямокутним в плані штампом»: 55 с., 11 рис., 3 табл., 22 джерела, 1 додаток.

ЗНОСОКОНТАКТНА ЗАДАЧА, МЕТОД ПОЛОВИННОГО ДІЛЕННЯ, МЕТОД ПОСЛІДОВНИХ НАБЛИЖЕНЬ, МЕТОД СКІНЧЕННИХ РІЗНИЦЬ, МЕТОД СТЕПЕНЕВИХ РЯДІВ, ОСНОВА ВІНКЛЕЕРІВСЬКОГО ТИПУ, ПРЯМОКУТНИЙ В ПЛАНІ ШТАМП, УСТАЛЕНИЙ ЗНОС.

Об’єкт дослідження – диференціальне та інтегральне розв’язувальні рівняння зносоконтактної задачі.

Мета роботи: дослідити методи розв’язання рівнянь задачі про зношування основи Вінклеерівського типу прямокутним в плані штампом та провести їх порівняльний аналіз.

Метод дослідження – практичний.

Вивчено постановку та процес виведення розв’язувальних рівнянь задачі про зношування основи Вінклеерівського типу прямокутним в плані штампом, викладений в літературі. У випадку лінійного закону зношування на основі відомих формул знайдено зносоконтактні характеристики у випадку штампа з плоскою підошвою та визначеною квадратичною функцією.

У випадку степеневого закону зношування спочатку знайдено наближено-аналітичний розв’язок для штампа з плоскою підошвою. Особливу увагу приділено дослідженню різних підходів для розв’язання рівнянь задачі за нелінійного закону зношування для штампа з підошвою, визначеною квадратичною функцією. Умова рівноваги визначала рівняння відносно одного з невідомих параметрів, до розв’язання рівнянь застосовувався метод половинного ділення. Для нелінійного розв’язувального диференціального рівняння застосовано метод скінченних різниць, а для інтегрального – метод послідовних наближень та метод степеневих рядів. Проведено порівняльний аналіз результатів, отриманий різними методами.

SUMMARY

Master's Qualifying Theses «Study of the Winkler-type fundament wear problem solving methods by a rectangular punch»: 55 pages, 11 figures, 3 tables, 22 references, 1 supplement.

WEAR-CONTACT PROBLEMS, METHOD OF DIVISION IN HALF, ITERATIVE METHOD, METHOD OF FINITE DIFFERENCES, METHOD OF POWER SERIES, WINKLER-TYPE BASE, RECTANGULAR PLAN PUNCH, CONSTANT WEAR.

Object of the study – differential and integral solving equations of the wear-contact problem.

Aim of the study: study of the Winkler-type fundament wear problem solving methods by a rectangular punch and provide their comparative analysis.

Method of research: practical.

The problem formulation and the process of deriving the solving equations of the problem of wear of the base of the Winkler type with a rectangular punch, described in the literature, have been studied. In the case of a linear wear law based on known formulas, wear contact characteristics were found in the case of a punch with a flat fundament and a defined quadratic function.

In case of the power law of wear, firstly an approximate analytical solution has been found for a punch with a flat fundament. Particular attention has been paid to the study of different approaches for solving the equations of the problem under the nonlinear wear law for a punch with a fundament defined by a quadratic function. The equilibrium condition determined the equation with respect to one of the unknown parameters, the half-division method has been used to solve the equations. The finite difference method has been used for the non-linear solution of the differential equation, and the iterative method and the power series method have been applied for the integral one. Comparative analysis of the results obtained by different methods has been carried out.

ЗМІСТ

Завдання на кваліфікаційну роботу 2
Реферат 4
Summary 5
Вступ 8
1 Загальна постановка задачі та рівняння, що її моделюють. відомий розв’язок задачі за лінійним законом зношування півпростору 10
1.1 Загальна постановка задачі та рівняння, що її моделюють 10
1.2 Відомий розв’язок задачі за лінійним законом зношування півпростору 16
2 Розв’язання задачі за нелінійним законом зношування півпростору штампом з плоскою підошвою 20
2.1 Пошук наближеного розв’язку задачі для штампа з плоскою основою з використанням аналітичного розв’язку нелінійного диференціального рівняння 20
2.1.1 Аналітичний розв’язок диференціального рівняння 20
2.1.2 Аналітичне інтегрування в рівнянні рівноваги 21
2.1.3 Чисельне інтегрування в рівнянні рівноваги 22
2.1.4 Функція форми зношеної поверхні півпростору 22
2.1.5 Порівняльний аналіз числових результатів, отриманих різними підходами 23
3 Випадок нелінійного закону зношування півпростору штампом з неплоскою підошвою, що визначається квадратичною функцією 25
3.1 Способи еквівалентного подання розв’язувального рівняння задачі та його однозначність 25
3.1.1 Перший спосіб подання розв’язувального рівняння – через нелінійне диференціальне рівняння першого порядку 25

3.1.2 Другий спосіб – через інтегральне рівняння із змінною нижньою межею 25
3.2 Розв’язання нелінійного диференціального рівняння методом скінченних різниць 27
3.2.1 Два підходи до розв’язання 27
3.2.2 Дискретизована функція профілю зношеної поверхні півпростору 29
3.2.3 Порівняльний аналіз числових результатів, отриманих різними підходами 29
3.3 Наближене розв’язання задачі з використанням розв’язувального інтегрального рівняння 31
3.3.1 Застосування методу послідовних наближень до розв’язувального інтегрального рівняння 31
3.3.2 Застосування методу степеневих рядів до розв’язувального інтегрального рівняння 33
4 Аналіз числових результатів для різних вхідних параметрів 39
Висновки 43
Перелік посилань 45
Додаток А Фрагменти програми 48

ВСТУП

Контактна взаємодія супроводжується зношуванням тіл, тобто видаленням матеріалу з їхньої поверхні. Такі руйнівні процеси є важливою складовою інженерних досліджень. Саме тому зносоконтактним задачам приділяється велика увага, а кількість публікацій збільшується. Дослідників, які займаються зазначеною проблематикою: О. П. Козачок (O. P. Kozachok) [2, 16], О. В. Максимук, Ю. В. Сачук [3, 5], Р. М. Мартиняк [2], Н. М. Д'яченко [1], В. М. Онишкевич, Г. Т. Сулим [4], I. I. Argatov, Y. S. Chai, W. Tato [7, 8, 9], J. F. Archard [6], L. A. Galin [10], S. Garcin, S. Baydoun, P. Arnaud, S. Fouvry [11], I. G. Goryacheva [], D. Han, W. Han, M. Jureczka, A. Ochal [14], J. Hu, F. Gao, X. Liu, Y. Wei [15], C. Y. Lee, L. S. Tian, J. W. Bae, Y. S. Chai [17], N. Menga, M. A. Ciavarella [18], P. Põdra, S. Andersson [19], H. Xuan, X. Cheng [20], W. Zhan, P. Huang [21], X. Zhang, H. Shen, J. Liu, S. Deng, X. Li, Z. Cai, M. Zhu [22].

Розвиток даної галузі свідчить про актуальність даної тематики. Зокрема, в дослідженні [17] контактні задачі зношування внаслідок вібраційних навантажень застосовано для розрахунку U-подібних труб парогенераторів на атомних електростанціях.

У роботах [6, 13] описано розрахункові моделі для виявлення залежності (закони) між швидкістю зношування тіла та контактним тиском. Виявлено лінійний та степеневий закон зношування. У кваліфікаційні роботі розглянуто обидва випадки.

Одним з ефективних підходів моделювання пружного півпростору в зносоконтактних задачах є подання його як основи Вінклеерівського типу [11, 13, 15, 18, 19]. В цих роботах проводиться порівняння результатів розрахунків з обчисленнями за іншими методами, зокрема, методом скінченних елементів. Виявлено узгодженість результатів, що свідчить про ефективність моделі

Вінклеера. В даній кваліфікаційній роботі ми будемо засновуватись на зазначеній моделі.

Будемо досліджувати задачу про зношування півпростору прямокутним в плані штампом внаслідок його руху вздовж поверхні півпростору, що моделюється Вінклеерівською основою.

Дослідимо відому постановку зазначеної задачі, детально вивчимо хід виведення розв'язувальних рівнянь. Використаємо відомі аналітичні формули для побудови зносоконтактних характеристик у випадку лінійного закону зношування півпростору для штампів з плоскою та неплоскою підошвами.

Розв'язувальні рівняння поставленої задачі можна розглядати у двох видах – диференціальне рівняння першого порядку або інтегральне. Кожен з типів рівнянь вимагає різних підходів в комбінації методів до свого розв'язання. У випадку лінійного закону зношування диференціальне рівняння розв'язується в аналітичному вигляді, а його невідома стала так само в аналітичному вигляді може бути знайдена з умови рівноваги.

Випадок поставленої задачі з нелінійним законом зношування в літературі не знайдено. Тому рівняння даної задачі у цьому випадку потребують розв'язання з підбором комбінації методів отримання розв'язків. Потрібно виявити, у якому випадку можна знайти наближено-аналітичний розв'язок, а у якому потрібно застосовувати чисельні підходи.

Основна мета роботи – дослідити методи розв'язання рівнянь задачі про зношування основи Вінклеерівського типу прямокутним в плані штампом та провести їх порівняльний аналіз.

1 ЗАГАЛЬНА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ТА РІВНЯННЯ, ЩО ЇЇ МОДЕЛЮЮТЬ. ВІДОМИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ЗА ЛІНІЙНИМ ЗАКОНОМ ЗНОШУВАННЯ ПІВПРОСТОРУ

1.1 Загальна постановка задачі та рівняння, що її моделюють

Постановка задачі, яка буде розглянута в роботі, в загальному вигляді наводиться в [13]. Викладемо її відповідно до зазначеної роботи.

Розглянемо прямокутний в плані штамп і пружний півпростір (рис. 1.1). Пов'яжемо зі штампом систему координат (x, y, z), а з пружним півпростором – (x_1, y_1, z_1). Розріз штампа площиною $x = const$ є прямокутником. Штамп знаходиться під дією постійної (незмінної в часі) нормальної сили P та рухається в напрямку осі Ox з постійною швидкістю V. В результаті цього, півпростір зношується.

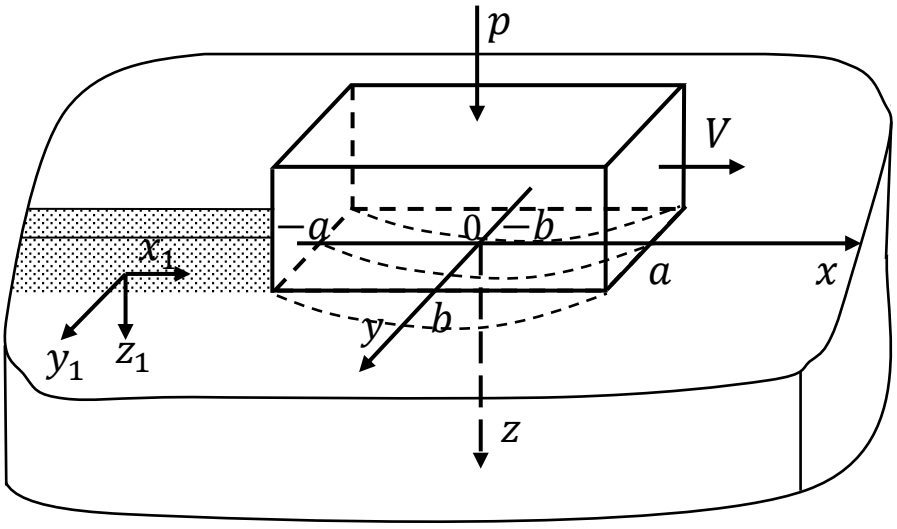


Рисунок 1.1 – Схема контактної взаємодії [13]

Функцію зносу півпростору в системі координат (x_1, y_1, z_1) позначимо через $w_*(x_1, y_1.t)$. Цей знос наступає внаслідок дії функції тиску $p(x_1, y_1.t)$. Законом зношуванням називають залежність між швидкістю зносу та контактним тиском, який записується у вигляді [13, 6]

$$\frac{\partial w_*(x_1, y_1.t)}{\partial t} = K_w p^{\alpha}(x_1, y_1.t) V^{\beta}(x_1, y_1.t), \qquad (1.1)$$

де $K_w -$ коефіцієнт зношування, що залежить від умов контакту, $\alpha \geq 1$, $\beta \geq 0 -$ параметри закону зношування.

Якщо $\alpha > 1$, то маємо степеневий закон зношування, якщо $\alpha = 1$ – лінійний.

Початок рухомої системи координат $Oxyz$ розмістимо в центрі основи штампа. Областю контакту є витягнутий вздовж осі Ox прямокутник

$$\Omega = [-a; a] \times [-b; b].$$

Для зазначеної форми штампа відомо [13, 10], що функція тиску для поставленої задачі визначається як

$$p(x, y) = \frac{p_1(x)}{\pi\sqrt{b^2 - y^2}}. \qquad (1.2)$$

у всіх точках площадки контакту $(x, y) \in \Omega$.

В багатьох зносоконтактних задачах півпростір моделюється основою Вінклеера [13, 18, 11, 19, 15]. Вінклеерівська модель передбачає відому залежність між пружними вертикальними переміщеннями основи і контактним тиском. У роботі будемо розглядати лінійну залежність вигляду

$$p_1(x) = k\, w_1(x), \qquad (1.3)$$
$$k = \frac{\pi E}{2(1 - \nu^2) \lg\left(\frac{a}{b}\right)},$$

де $E, \nu -$ модуль пружності, та коефіцієнт Пуассона пружного півпростору відповідно [13].

Вищезазначене дозволяє розглядати дану задачу в плоскій постановці, визначаючи поведінку контактних характеристик в площині $y = 0$ [13].

Відомо, що процес зношування поділяється на дві основні стадій. Перша – стадія припрацювання, коли зносоконтактні характеристики – функція тиску і профіль зношеної поверхні – швидко змінюються, друга – стадія усталеного зносу, коли процес зношування набуває рівномірного вигляду.

Тут розглянемо стадію усталеного зносу [13]. Нехай у кожен момент часу платформа штампа всіма точками контактує з півпростором. Зафіксуємо точку $(x_1, 0)$ на межі півпростору. Тій точці $(x_1, 0)$, яка в момент часу $t = 0$ вступає в контакт, відповідає $x_1 = a$. Уведемо позначення $t(x)$ для моменту часу, коли точка $(x_1, 0)$ буде збігатися з точкою $(x, 0)$ в системі координат Oxy. Внаслідок рівномірного руху штампа з постійною швидкістю V, матимемо

$$t(x) = \frac{a - x}{V}.$$

У рухомій системі координат Oxy уведемо функції, що не залежать від часу:

$$W_*(x) = w_*\big(a, 0, t(x)\big), \qquad W_*(x) = 0, \qquad \text{якщо } x > a,$$
$$p_s(a - Vt) = p(a, 0, t).$$

З урахуванням (1.1) отримаємо

$$W_*(x) = K_w V^\beta \int_0^{t(x)} p_s^\alpha\,(a - Vt')\,dt'.$$

Під знаком інтеграла зробимо заміну $x' = a - Vt'$, тоді $dt' = -\frac{1}{V}dx'$, а стара змінна інтегрування $t' = 0$ перейде в нову $x' = a$, а $t' = t(x)$ – в $x' = x$. Отже інтеграл набуде вигляду:

$$W_*(x) = -\frac{1}{V}K_w V^\beta \int_a^x p_s^\alpha(x')\,dx';$$

$$W_*(x) = K_w V^{\beta-1} \int_x^a p_s^\alpha(x')\,dx'. \qquad (1.4)$$

Співвідношення (1.4) визначає залежність між $W_*(x)$ і $p_s(x)$. Умова контакту штампа з пружним півпростором в рухомій системі координат Oxz задається рівнянням [13:]

$$W_*(x) + w_1(x) = D - f(x), \qquad (1.5)$$

де $W_*(x)$ та $w_1(x)$ визначається залежностями від $p_s(x)$, заданими співвідношеннями (1.4) та (1.3) відповідно, $f(x) -$ функція, що визначає поверхню штампа в площині $y = 0$, а $D -$ осадка штампа. З (1.2), (1.3) та означення функцій $p_s(x)$ виведемо

$$p(x,y) = \frac{p_1(x)}{\pi\sqrt{b^2 - y^2}} = \frac{k\,w_1(x)}{\pi\sqrt{b^2 - y^2}};$$

$$p_s(x) = p_s(a - Vt) = p(a,0,t) = \frac{k\,w_1(x)}{\pi b};$$

$$w_1(x) = \frac{\pi b}{k}p_s(x).$$

Таким чином, отримаємо рівняння

$$K_w V^{\beta-1} \int_x^a p_s^{\alpha}(x')\,dx' + \frac{\pi b}{k} p_s(x) = D - f(x). \qquad (1.6)$$

Продиференціюємо рівняння (1.6)

$$-K_w V^{\beta-1} p_s^{\alpha}(x) + \frac{\pi b}{k} p'_s(x) = -f'(x).$$

Уведемо коефіцієнт

$$K_* = K_w V^{\beta-1}, \qquad (1.7)$$

одержимо рівняння

$$K_* p_s^{\alpha}(x) - \frac{\pi b}{k} p'_s(x) = f'(x). \qquad (1.8)$$

Виразимо $p_1(x)$ через $p_s(x)$ з використанням означення останньої функції та формули (1.2):

$$p_s(x) = p_s(a - Vt) = \frac{p_1(x)}{\pi\sqrt{b^2 - y^2}}\Big|_{y=0} = \frac{p_1(x)}{\pi b}. \qquad (1.9)$$

Розглянемо рівняння рівноваги сил у загальному вигляді, Застосувавши (1.9)

$$P = \iint_{\Omega} p(x,y)dx\,dy = \int_{-b}^{b} \frac{dy}{\pi\sqrt{b^2 - y^2}} \int_{-a}^{a} p_1(x)\,dx = \pi b \int_{-a}^{a} p_s(x)\,dx.$$

Звідси отримаємо умову рівноваги відносно функції $p_s(x)$:

$$\int_{-a}^{a} p_s(x)dx = P_0, \tag{1.10}$$

$$P_0 = \frac{P}{\pi b}.$$

для якого визначимо P_0.

Таким чином функція $p_s(x)$ може бути отримана з диференціального рівняння (1.8) та умови рівноваги (1.10). Перейдемо до безрозмірних величин в зазначених рівняннях. Покладемо [13]

$$\xi = \frac{x}{a}, \qquad \widetilde{p_s}(\xi) = \frac{\pi b p_s(a\xi)}{ka}, \quad \tilde{f}(\xi) = f(\xi a), \qquad \widetilde{W_*}(\xi) = \frac{W_*(a\xi)}{a},$$

$$\kappa = K_* \left(\frac{ak}{\pi b}\right)^{\alpha} = K_w V^{\beta-1} \left(\frac{aE}{2(1-\nu^2) b \lg\left(\frac{a}{b}\right)}\right)^{\alpha}, \qquad \widetilde{P} = \frac{K_* P_0}{a},$$

Тоді рівняння (1.8) та умова рівноваги набудуть вигляду:

$$\kappa\, \tilde{p}_s^{\alpha}(\xi) - \tilde{p}_s'(\xi) = \widetilde{f}'(\xi), \tag{1.11}$$

$$\int_{-1}^{1} \tilde{p}_s(\xi)d\xi = \widetilde{P}\,. \tag{1.12}$$

Розв’язання системи (1.11), (1.12) дозволяє знайти безрозмірну функцію тиску $\widetilde{p_s}(\xi)$. Для отримання зношування півпростору застосуємо співвідношення (1.4), отримаємо:

$$\widetilde{W_*}(\xi) = \kappa \int_{\xi}^{1} \tilde{p}_s^{\alpha}(\xi')\; d\xi'. \tag{1.13}$$

1.2 Відомий розв'язок задачі за лінійним законом зношування півпростору

Розв'язання поставленої задачі у випадку лінійного закону зношування, тобто при $\alpha = 1$ наведено в роботі [13]. Вивчимо деталі розв'язання. Розглянемо диференціальне рівняння

$$\kappa\, \tilde{p}_s\ (\xi) - \tilde{p}_s'(\xi) = \widetilde{f}'(\xi). \tag{1.14}$$

Рівняння (1.14) є лінійним. Зробимо заміну $\tilde{p}_s\ (\xi) = u(\xi)v(\xi)$, прийдемо до рівняння

$$u(\xi)\left(\kappa\, v(\xi) - \frac{dv(\xi)}{d\xi}\right) - \left(v(\xi)\frac{du(\xi)}{d\xi} + \widetilde{f}'(\xi)\right) = 0,$$

Звідки маємо перше рівняння: $\kappa\, v(\xi) = v'(\xi)$, тоді $v(\xi) = e^{\kappa\xi}$, а друге набуває вигляду

$$v(\xi)\frac{du(\xi)}{d\xi} = -\widetilde{f}'(\xi), \qquad \frac{du(\xi)}{d\xi} = \widetilde{f}'(\xi)e^{-\kappa\xi},$$

$$u(\xi) = \mathrm{C} - \int_{-1}^{\xi} \widetilde{f}'(\xi')e^{-\kappa\xi'}\,d\xi'.$$

Отже, розв'язком рівняння (1.14) буде функція

$$\tilde{p}_s\ (\xi) = e^{\kappa\xi}\left(\mathrm{C} - \int_{-1}^{\xi} \widetilde{f}'(\xi')e^{-\kappa\xi'}\,d\xi'\right), \tag{1.15}$$

що містить невідому сталу. Визначимо її за допомогою умови рівноваги (1.12)

$$\widetilde{P} = \int_{-1}^{1} e^{\kappa\xi}\left(\mathrm{C} - \int_{-1}^{\xi} \widetilde{f}'(\xi')e^{-\kappa\xi'}d\xi'\right)d\xi =$$

$$= \frac{\mathrm{C}}{\kappa}(e^{\kappa} - e^{-\kappa}) - \int_{-1}^{1} e^{\kappa\xi} \int_{-1}^{\xi} \widetilde{f}'(\xi')e^{-\kappa\xi'}d\xi'\,d\xi,$$

де реалізуємо інтегрування частинами, поклавши $u = \int_{-1}^{\xi} \widetilde{f}'(\xi')e^{-\kappa\xi'}d\xi'$, $dv = e^{\kappa\xi}d\xi$, звідки $du = \widetilde{f}'(\xi)e^{-\kappa\xi}d\xi$, $v = \frac{1}{\kappa}e^{\kappa\xi}$, тоді

$$\widetilde{P} = \frac{2\mathrm{C}}{\kappa} sh\,\kappa - \left(\frac{1}{\kappa}e^{\kappa\xi} \int_{-1}^{\xi} \widetilde{f}'(\xi')e^{-\kappa\xi'}d\xi'\right)\Bigg|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} \frac{1}{\kappa}e^{\kappa\xi}\,\widetilde{f}'(\xi)e^{-\kappa\xi}d\xi =$$

$$= \frac{2\mathrm{C}}{\kappa} sh\,\kappa - \frac{1}{\kappa}e^{\kappa} \int_{-1}^{1} \widetilde{f}'(\xi')e^{-\kappa\xi'}d\xi' + \frac{1}{\kappa}\int_{-1}^{1} \widetilde{f}'(\xi)\,d\xi =$$

$$= \frac{2\mathrm{C}}{\kappa} sh\,\kappa - \frac{1}{\kappa}\int_{-1}^{1} \widetilde{f}'(\xi')\left(e^{\kappa-\kappa\xi'} - 1\right)d\xi'.$$

Звідки й виразимо невідому константу

$$C = \frac{1}{2sh\,\kappa}\left(\kappa\widetilde{P} + \int_{-1}^{1} \widetilde{f}'(\xi')\left(e^{\kappa(1-\xi')} - 1\right)d\xi'\right). \qquad (1.16)$$

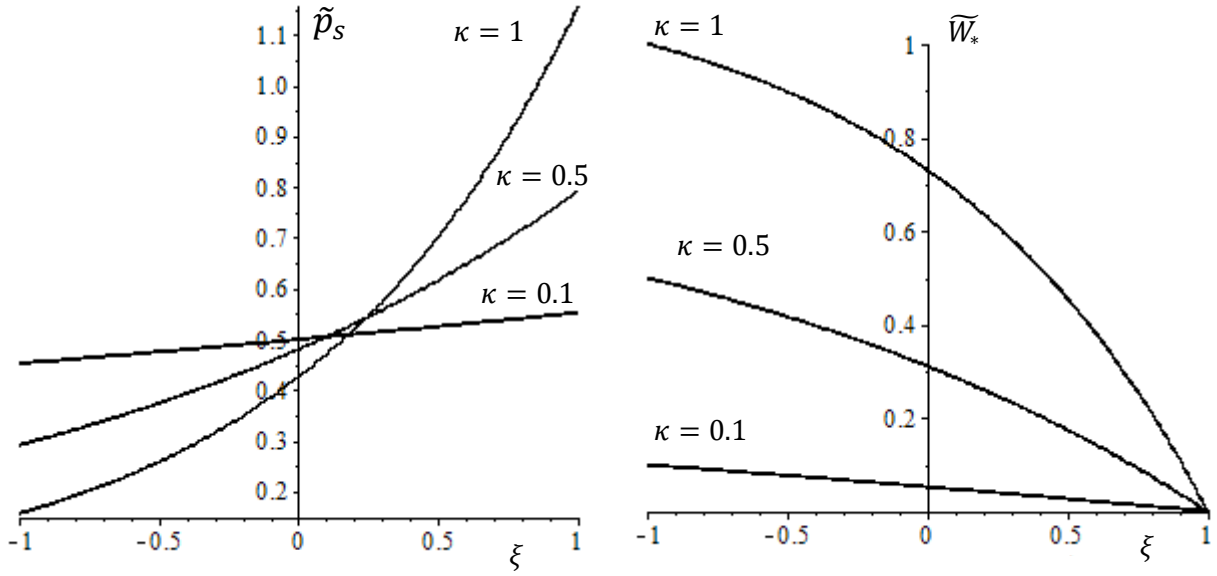
Розглянемо штамп з плоскою підошвою, тобто при $\tilde{f}'(\xi) = 0$. У такому випадку функція контактного тиску набуває вигляду

$$\tilde{p}_s\,(\xi) = \frac{\kappa\widetilde{P}}{2sh\,\kappa}e^{\kappa\xi},$$

а функція зношування – вигляду

$$\widetilde{W_*}(\xi) = \frac{\kappa\widetilde{P}}{2sh\,\kappa}\kappa\int_{\xi}^{1} e^{\kappa\xi'}\,d\xi' = \frac{\kappa\widetilde{P}}{2sh\,\kappa}(e^{\kappa} - e^{\kappa\xi}.$$

Для $\widetilde{P} = 1$ на рис. 1.2 побудовано графіки функцій тиску (рис. 1.2, а) та форми зношеної поверхні (рис. 1.2, б) у випадку штампа з плоскою підошвою для різних значень параметра κ.



а б

Рисунок 1.2 – Зносоконтактні характеристики для штампа з плоскою підошвою за лінійного закону зношування

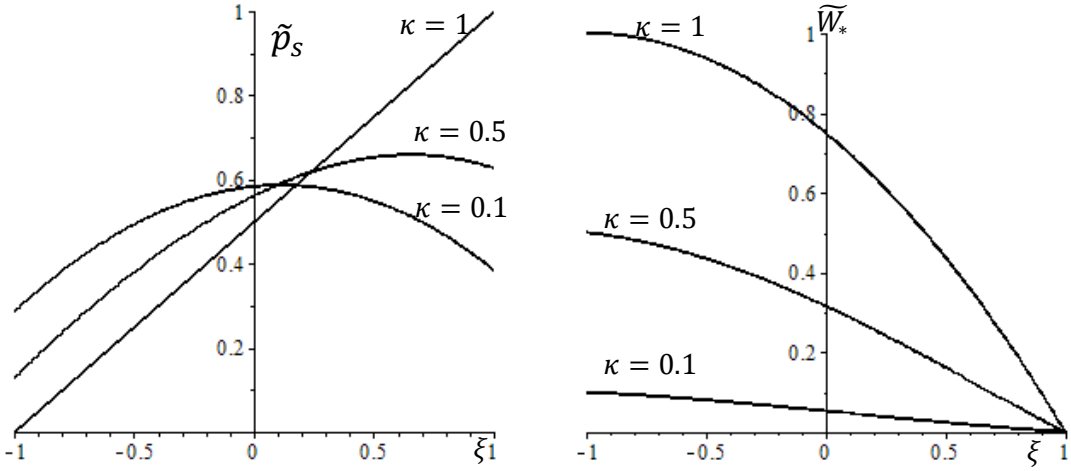
У роботі [13] зазначено, для того, щоб за усталеного руху вздовж зношеної поверхні півпростору тиск був розподілений рівномірно, тобто $\tilde{p}_s(\xi) = p_0$, потрібно, щоб штамп мав поверхню з рівнянням

$$\tilde{f}(\xi) = \kappa p_0^{\alpha}\xi + const.$$

Тепер застосуємо формули (1.15), (1.16) і (1.13) для отримання розв'язку задачі про усталений знос при русі вздовж осі Ox штампа з рівнянням

$$\tilde{f}(\xi) = A\xi^2 + const.$$

На рис. 1.3 при $A = 0.25$, $\widetilde{P} = 1$, для різних параметрів κ побудовано графіки функцій контактного тиску (рис. 1.3, а) та форми зношеної поверхні півпростору (рис. 1.3, б) на стадії усталеного зносу.



а б

Рисунок 1.3 – Зносоконтактні характеристики для штампа, визначеного рівнянням $\tilde{f}(\xi) = A\xi^2 + const$ за лінійного закону зношування

2 РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ЗА НЕЛІНІЙНИМ ЗАКОНОМ ЗНОШУВАННЯ ПІВПРОСТОРУ ШТАМПОМ З ПЛОСКОЮ ПІДОШВОЮ

2.1 Пошук наближеного розв'язку задачі для штампа з плоскою основою з використанням аналітичного розв'язку нелінійного диференціального рівняння

2.1.1 Аналітичний розв'язок диференціального рівняння

Аналітичним розв'язком нелінійного диференціального рівняння

$$\kappa\, \tilde{p}_s^{\alpha}(\xi) - \tilde{p}_s'(\xi) = \widetilde{f}'(\xi)$$

у випадку $\tilde{f}(\xi) = 0$ є функція

$$\tilde{p}_s(\xi) = \left(\frac{1}{(1-\alpha)(\kappa\xi + C)}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}},$$

визначена за умови

$$\kappa\xi + C < 0,$$

оскільки $\alpha > 1$.

Для отримання невідомого коефіцієнта C потрібно застосувати умову рівноваги

$$\int_{-1}^{1} \tilde{p}_s(\xi)d\xi = \widetilde{P}\ . \qquad (2.1)$$

Обчислення інтеграла реалізуємо двома способами – аналітичним та чисельним з метою подальшого порівняння результатів.

2.1.2 Аналітичне інтегрування в рівнянні рівноваги

Обчислимо інтеграл в умові рівноваги (1.12) аналітично

$$\int_{-1}^{1} \tilde{p}_s(\xi)d\xi = \frac{1}{\kappa}\frac{\alpha-1}{\alpha-2}\left(\frac{1}{\alpha-1}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\left\{(\kappa-C)^{\frac{\alpha-2}{\alpha-1}} - (-\kappa-C)^{\frac{\alpha-2}{\alpha-1}}\right\}.$$

Тепер потрібно підставити отриманий вираз в рівняння $\int_{-1}^{1} \tilde{p}_s(\xi)d\xi = \widetilde{P}$

$$\frac{\alpha-1}{\alpha-2}\left(\frac{1}{\alpha-1}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\left\{(\kappa-C)^{\frac{\alpha-2}{\alpha-1}} - (-\kappa-C)^{\frac{\alpha-2}{\alpha-1}}\right\} - \tilde{P} = 0. \qquad (2.2)$$

Щоб розв'язати його відносно C, застосуємо метод половинного ділення (див. А.1). Єдиність розв'язку рівняння (2.2) перевіряємо чисельним експериментом. Для обраних нижче вхідних параметрів зміна знаку лівої частини, як функції змінної C, на проміжку її задання $C < -\kappa$. Щоб з'ясувати місце розміщення нуля функції змінної C, що відповідає лівій частині (2.2) (позначимо її $\psi(\mathrm{C})$), можна побудувати її графік, який є зростаючим на зазначеному проміжку, тому має один нуль. Для прикладу, на рис. 2.1 побудовано графік такої функцій для вхідних параметрів $\alpha = 1.4, \kappa = 1, \tilde{P} = 1$.

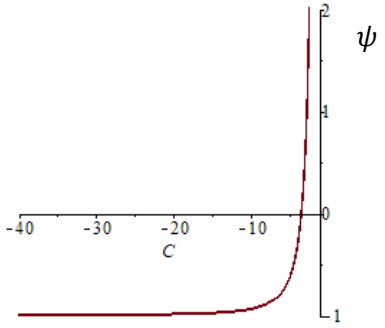


Рисунок 2.1 – Графічне подання функції $\psi(\mathrm{C})$ в лівій частині рівняння (2.2)

Таким чином, розв’язок даної задачі визначається однозначно.

2.1.3 Чисельне інтегрування в рівнянні рівноваги

Для чисельного інтегрування застосуємо метод правих прямокутників

$$\int_{-1}^{1} \tilde{p}_s(\xi)d\xi = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \tilde{p}_s(\xi_k)(\xi_k - \xi_{k-1}),$$

а рівняння

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \tilde{p}_s(\xi_k)(\xi_k - \xi_{k-1}) = \tilde{P}$$

розв’язуємо методом половинного ділення (див. А.1).

2.1.4 Функція форми зношеної поверхні півпростору

Функція форми зношеної поверхні визначається як функція нижньої межі інтегрування формулою (1.13) $\widetilde{W_*}(\xi) = \kappa \int_{\xi}^{1} \tilde{p}_s^{\alpha}(\xi')\ d\xi$. Щоб подати функцію графічно, визначимо її значення в точках розбиття $\xi_k = -1 + \frac{2k}{n}, k = \overline{0,n}$ відрізка $[-1; 1]$ шляхом чисельного інтегрування на відрізку $[\xi_k; 1]$. Чисельне інтегрування реалізуємо засобами системи комп’ютерної алгебри (див. додаток А).

2.1.5 Порівняльний аналіз числових результатів, отриманих різними підходами

Для порівняння результатів проведемо обчислення при $\alpha = 1.4, \kappa = 1$, $P = 1$ для різної кількості N відрізків розбиття проміжка інтегрування $[-1; 1]$. При аналітичному обчисленні інтеграла невідома константа набула значення

$$C_{analit} = -3.4700241.$$

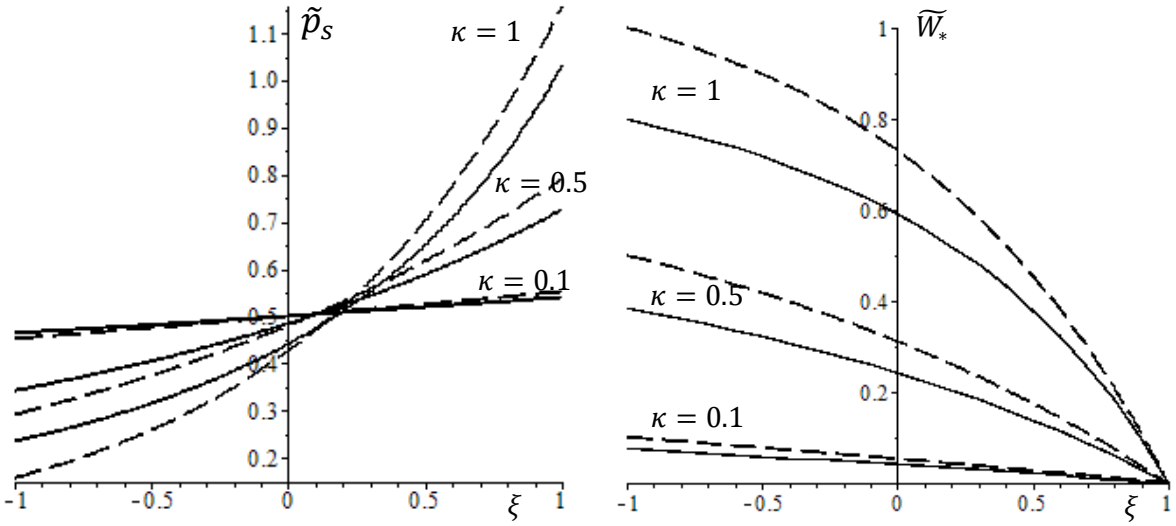
В табл. 2.1 наведено значення невідомої константи C, отриманох для різних N. В обох способах обчислення метод половинного ділення використовувався з точністю $\varepsilon = 10^{-6}$.

Таблиця 2.1 – Порівняння значень константи, обчислених з використанням чисельного інтегруванням, для різних N

N	$C_{numeric}$
20	-3.419547081
100	-3.460005761
200	-3.465020179
500	-3.468024257
1000	-3.469023705

Аналізуючи результати порівняльної таблиці, приходимо до висновків, що чисельний метод інтегрування з розбиттям відрізка інтегрування на $N = 20$ рівних частин визначає відхилення від результату, отриманого аналітичним інтегруванням, на рівні 1.5%, а при $N = 1000$ – 0.0003%.

Для параметрів $\alpha = 1.4, P = 1$ і різних значень κ на рис. 2.2, а суцільними лініями побудовано графіки функцій контактного тиску, а на рис.2.2, б – функції профілю зношеної поверхні півпростору. Штрихові лінії відповідають лінійному закону зношування, що відповідають рис. 1.2.



а б

Рисунок 2.2 – Зносоконтактні характеристики під штампом з плоскою підошвою за степеневого (суцільні лінії) та лінійного (штрихові) законах зношування

3 ВИПАДОК НЕЛІНІЙНОГО ЗАКОНУ ЗНОШУВАННЯ ПІВПРОСТОРУ ШТАМПОМ З НЕПЛОСКОЮ ПІДОШВОЮ, ЩО ВИЗНАЧАЄТЬСЯ КВАДРАТИЧНОЮ ФУНКЦІЄЮ

В цьому розділі будемо досліджувати зносоконтактну задачу на стадії усталеного зносу, який виникає під час руху штампа, підошва якого визначається функцією $\tilde{f}(\xi) = A\xi^2 + const$. Значення константи для функції обираємо так, щоб $\tilde{f}(1) = 0$, тобто рівною $-A$.

3.1 Способи еквівалентного подання розв'язувального рівняння задачі та його однозначність

3.1.1 Перший спосіб подання розв'язувального рівняння – через нелінійне диференціальне рівняння першого порядку

У випадку, коли права частина рівняння

$$\kappa\, \tilde{p}_s^{\alpha}(\xi) - \tilde{p}_s'(\xi) = \widetilde{f}'(\xi) \qquad (3.1)$$

не дорівнює нулю, воно потребуватиме чисельного розв'язання. Кожен з методів призведе до появи невідомої. Для її пошуку потрібно використати рівняння рівноваги, в яке невідома входитиме нелінійно.

3.1.2 Другий спосіб – через інтегральне рівняння із змінною нижньою межею

Проінтегруємо диференціальне рівняння (3.1) від ξ до 1, отримаємо розв'язувальне інтегральне рівняння:

$$\kappa \int_{\xi}^{1} \tilde{p}_s^{\alpha}(\xi')\, d\xi' + \tilde{p}_s(\xi) = -\tilde{f}(\xi) + \breve{D}, \qquad (3.2)$$

де $\breve{D} = \frac{D}{a}$, $D -$ осадка штампа.

Таке саме рівняння, як (3.2), можна було отримати з рівняння (1.6), ввівши в ньому безрозмірні величини, виписані в підрозділі 1.1.

Для пошуку безрозмірної осадки штампа $\breve{D}$ застосовуватимемо рівняння рівноваги.

Інтегральне рівняння (3.2) типу Вольтерра має розв'язок, який визначається однозначно з точністю до сталої $\breve{D}$, і в просторі функцій, неперервних на відрізку $[-1; 1]$, його можна знайти методом послідовних наближень

$$\tilde{p}_{s,n+1}(\xi) = -\kappa \int_{\xi}^{1} \tilde{p}_{s,n}^{\alpha}(\xi')\, d\xi' - \tilde{f}(\xi) + \breve{D}, \;\; n = 1, 2, 3, \ldots, \qquad (3.3)$$

де за перше наближення може бути обраною будь-яка функція, неперервна на $[-1; 1]$.

Внаслідок еквівалентності рівнянь (3.1) і (3.2) розв'язки обох визначаються однозначно з точністю до сталої $\breve{D}$.

3.2 Розв’язання нелінійного диференціального рівняння методом скінченних різниць

3.2.1 Два підходи до розв’язання

Реалізуємо два види скінчених різниць першого порядку – ліві та праві. Розіб’ємо відрізок інтегрування $[-1; 1]$ на N рівних частин точками

$$\xi_k = -1 + kh, \qquad h = \frac{2}{N}, \qquad k = \overline{0, N}.$$

Ліві скінченні різниці визначають наближене значення похідної в точках розбиття формулою

$$\tilde{p}_s'(\xi_k) = \frac{\tilde{p}_s(\xi_{k-1}) - \tilde{p}_s(\xi_k)}{-h}, \qquad k = \overline{1, N},$$

а праві –

$$\tilde{p}_s'(\xi_k) = \frac{\tilde{p}_s(\xi_{k+1}) - \tilde{p}_s(\xi_k)}{h}, \qquad k = \overline{0, N-1},$$

Диференціальне рівняння (3.1) в наближеному вигляді в зазначених точках запишеться у формах

$$\kappa\, \tilde{p}_s^{\alpha}(\xi_k) - \frac{\tilde{p}_s(\xi_{k-1}) - \tilde{p}_s(\xi_k)}{-h} = \tilde{f}'(\xi_k), \qquad k = \overline{1, N} \qquad (3.4)$$

або

$$\kappa\, \tilde{p}_s^{\alpha}(\xi_k) - \frac{\tilde{p}(\xi_{k+1}) - \tilde{p}(\xi_k)}{h} = \tilde{f}'(\xi_k), \qquad k = \overline{0, N-1} \qquad (3.5)$$

для лівих та правих скінченних різниць відповідно. Тут для функції, що визначає неплоску поверхню штампа $\tilde{f}(\xi) = A\xi^2 + const$, матимемо $\widetilde{f}'(\xi_k) = 2A\xi_k$.

У кожному з випадків отримані системи дозволяють виразити невідомі $\tilde{p}_s(\xi_k)$ через $\tilde{p}_s(\xi_N)$ для системи (3.4) або через $\tilde{p}_s(\xi_0)$ для (3.5), в наслідок того, що у першому випадку

$$\tilde{p}_s(\xi_{N-1}) = -h\kappa\, \tilde{p}_s^{\alpha}(\xi_N) + \widetilde{p_s}(\xi_N) + h\widetilde{f}'(\xi_N),$$
$$\tilde{p}_s(\xi_{N-2}) = -h\kappa\, \tilde{p}_s^{\alpha}(\xi_{N-1}) + \widetilde{p_s}(\xi_{N-1}) + h\widetilde{f}'(\xi_{N-1}),$$
$$\dots$$
$$\tilde{p}_s(\xi_{k-1}) = -h\kappa\, \tilde{p}_s^{\alpha}(\xi_k) + \widetilde{p_s}(\xi_k) + h\widetilde{f}'(\xi_k) \ \ (k = \overline{1, N)},$$
$$\dots$$
$$\tilde{p}_s(\xi_1) = -h\kappa\, \tilde{p}_s^{\alpha}(\xi_2) + \widetilde{p_s}(\xi_2) + h\widetilde{f}'(\xi_2),$$
$$\tilde{p}_s(\xi_0) = -h\kappa\, \tilde{p}_s^{\alpha}(\xi_1) + \widetilde{p_s}(\xi_1) + h\widetilde{f}'(\xi_1),$$

у другому –

$$\tilde{p}_s(\xi_1) = h\kappa\, \tilde{p}_s^{\alpha}(\xi_0) - \widetilde{p_s}(\xi_0) - h\widetilde{f}'(\xi_0),$$
$$\tilde{p}_s(\xi_2) = h\kappa\, \tilde{p}_s^{\alpha}(\xi_1) - \widetilde{p_s}(\xi_1) - h\widetilde{f}'(\xi_1),$$
$$\dots$$
$$\tilde{p}_s(\xi_{k+1}) = h\kappa\, \tilde{p}_s^{\alpha}(\xi_k) - \widetilde{p_s}(\xi_k) - h\widetilde{f}'(\xi_k) \ \ (k = \overline{0, N-1)},$$
$$\dots$$
$$\tilde{p}_s(\xi_{N-1}) = h\kappa\, \tilde{p}_s^{\alpha}(\xi_{N-2}) + \widetilde{p_s}(\xi_{N-2}) - h\widetilde{f}'(\xi_{N-2}),$$
$$\tilde{p}_s(\xi_N) = h\kappa\, \tilde{p}_s^{\alpha}(\xi_{N-1}) - \widetilde{p_s}(\xi_{N-1}) - h\widetilde{f}'(\xi_{N-1}),$$

Проте, внаслідок наявності нелінійних доданків, які будуть накопичуватися, вибір великої кількості відрізків розбиття може не лише збільшити час подальшого розрахунку, а й унеможливити його в системі комп’ютерної алгебри. Для розрахунків будемо використовувати $N = 20$.

У результаті маємо одну невідому $\tilde{p}_s(\xi_N)$ або $\tilde{p}_s(\xi_0)$ відповідно, яку знайдемо з умови рівноваги, інтеграл в який будемо обчислювати чисельно методом трапецій з використанням знайдених вище $\tilde{p}_s(\xi_к)$. В обох випадках записуємо рівняння рівноваги у вигляді

$$\tilde{P} = \sum_{k=1}^{N} \frac{\tilde{p}_s(\xi_{k-1}) + \tilde{p}_s(\xi_k)}{2} h,$$

яке розв'язуємо відносно відповідної невідомої методом половинного ділення.

3.2.2 Дискретизована функція профілю зношеної поверхні півпростору

Після отримання дискретизованих значень функції контактного тиску знайдемо функцію профілю зношеної поверхні півпростору в точках розбиття $\xi_k, k = \overline{0, N}$ відрізка $[-1; 1]$ з використанням, наприклад, формули лівих прямокутників

$$\widetilde{W}_*(\xi_k) = \kappa \sum_{j=k}^{N-1} \tilde{p}_s^{\alpha}(\xi_j)\, h.$$

3.2.3 Порівняльний аналіз числових результатів, отриманих різними підходами

Проведемо порівняльний аналіз результатів для вхідних параметрів $\alpha = 1.4,\ A = 0.05,\ \kappa = 0.1,\ \tilde{P} = 1$. Кількість точок розбиття – $N = 20$. Фрагменти коду програми наведено в додатку А.

На рис. 3.1 побудовано графіки функцій контактного тиску під штампом. Суцільна лінія відповідає розв’язку, отриманому з використанням лівих скінченних різниць, а точковому – правим.

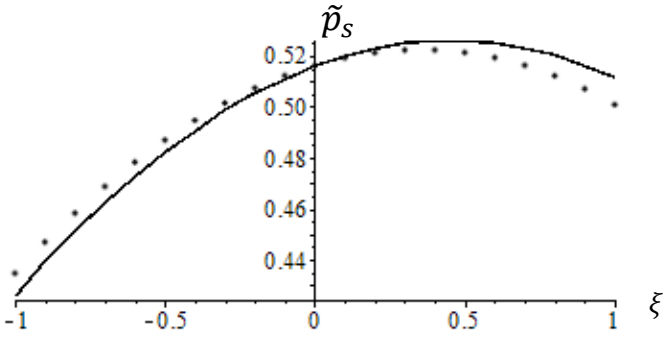


Рисунок 3.1 – Порівняння функцій контактного тиску, обчислених з використанням правих та лівих скінченних різниць

Таблиця 3.1 – Порівняння деяких значень двох дискретизованих функцій контактного тиску

Аргумент функції	Значення функції, отримані з використанням скінченних різниць	
	лівих	правих
-1	0.4257192611	0.4346722961
-0.9	0.4387445902	0.4469105346
-0.8	0.4509002958	0.4582645322
-0.7	0.4621790792	0.4687262123
0	0.5158881827	0.5162264779
0.7	0.5231317965	0.5162693500
0.8	0.5201687669	0.5121885900
0.9	0.5161737619	0.5070529236
1	0.5111357603	0.5008512499

Отже, відхилення в значеннях становить до 2.3%, а розв’язок потребує уточнення.

3.3 Наближене розв'язання задачі з використанням розв'язувального інтегрального рівняння

3.3.1 Застосування методу послідовних наближень до розв'язувального інтегрального рівняння

Як було зазначено вище, значення константи для функції, що визначає поверхню підошви штампа $\tilde{f}(\xi) = A\xi^2 + const$, обираємо рівною $-A$. Нехай

$$D_1 = \widetilde{D} + A. \tag{3.6}$$

Розглянемо систему, що складається з інтегрального рівняння (3.2) та умови рівноваги (2.1).

За перше наближення будемо обирати $\tilde{p}_{s,1}(\xi) = \widetilde{D} + A = D_1$.

Позначимо $C_0 = \tilde{p}_{s,n}(0)$. Чисельний експеримент попередніх розрахунків підтверджує справедливість нерівності

$$\left|\frac{\tilde{p}_{s,n}(\xi) - \mathrm{C}_0}{\mathrm{C}_0}\right| < 1.$$

Це дозволяє подати функцію $\tilde{p}_{s,n}^{\alpha}(\xi)$ за допомогою ряду

$$(1+u)^{\alpha} = 1 + \alpha u + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}u^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-3)}{3!}u^3 + \cdots + \\ + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}u^k + \cdots = \\ = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{k}\frac{\alpha-j+1}{j}u^k, |u| < 1. \tag{3.6}$$

Покладемо

$$u_n(\xi) = \frac{\tilde{p}_{s,n}(\xi) - \mathrm{C}_0}{\mathrm{C}_0},$$

тоді

$$\tilde{p}_{s,n}^{\alpha}(\xi) = \left(C_0 + \tilde{p}_{s,n}(\xi) - \mathrm{C}_0\right)^{\alpha} = C_0^{\alpha}\left(1 + \frac{\tilde{p}_{s,n}(\xi) - \mathrm{C}_0}{\mathrm{C}_0}\right)^{\alpha} =$$

$$= C_0^{\alpha}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} u_n^k(\xi)\right) \approx$$

$$\approx C_0^{\alpha}\left(1 + \sum_{k=1}^{N}\prod_{j=1}^{k} \frac{\alpha - j + 1}{j} u_n^k(\xi)\right).$$

Такий підхід дає змогу позбавитися від нецілих степенів, спростити інтегрування, а в методі послідовних наближень отримати

$$\tilde{p}_{s,n+1}(\xi) = -\kappa \int_{\xi}^{1} C_0^{\alpha}\left(1 + \sum_{k=1}^{N}\prod_{j=1}^{k} \frac{\alpha - j + 1}{j} u_n^k(\xi')\right) d\xi' - \tilde{f}(\xi) + D,$$

$$n = 1, 2, 3, \dots .$$

Щоб при використанні системи комп’ютерної алгебри позбавитися від функцій, залежних від D_1, метод половинного ділення розв’язання рівняння рівноваги (2.1) відносно D_1 будемо реалізовувати одночасно з методом послідовних наближень. Тоді на кожному кроці методу половинного ділення підставлятимуться конкретні значення D_1.

Функцію профілю зношеної поверхні півпростору знаходимо аналогічно до п. 2.1.4.

Для реалізації зазначеного методу використаємо систему комп’ютерної алгебри (див. додаток А). Внаслідок накопичення аналітичних функції степеневого вигляду така система задає певні обмеження на свої ресурси. Саме за цієї причини кількість доданків N часткової суми ряду обираємо рівною 5, а також обчислюємо 5 послідовних наближень. Незначна кількість

послідовних наближень не для всіх параметрів κ забезпечить збіжність ітераційного методу. Тут проілюструємо числовий результат для $\kappa = 0.1$ з порядком збіжності 0.1^N. Інші параметри залишаємо тими самими, що й вище. Порівняємо результати, знайдені різними підходами. А саме: на рис. 3.2 графічно зображено функції контактного тиску:

- штриховою і точковою лініями зображено функції, знайдені методом лівих та правих скінченних різниць відповідно по відношенню до розв'язувального диференціального рівняння,
- суцільною – методом послідовних наближень для розв'язувального інтегрального рівняння.

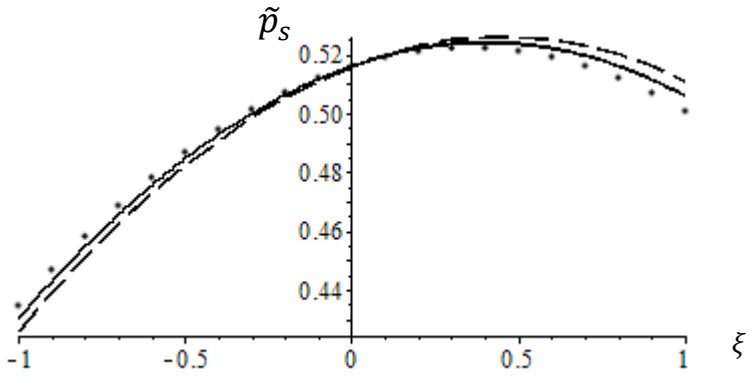


Рисунок 3.2 – Порівняння функцій контактного тиску, обчислених з використанням скінченних різниць та методу послідовних наближень

3.3.2 Застосування методу степеневих рядів до розв'язувального інтегрального рівняння

Функцію-розв'язок інтегрального рівняння (3.2) подаємо степеневим рядом

$$\tilde{p}_s(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \xi^j = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \cdots + a_j\xi^j + \cdots, \quad -1 \le \xi \le 1\,. \quad (3.7)$$

Для його подальшого піднесення до степеня α реалізуємо перетворення

$$\tilde{p}_s(\xi) = a_0\left(1 + \frac{a_1}{a_0}\xi + \frac{a_2}{a_0}\xi^2 + \cdots + \frac{a_j}{a_0}\xi^j + \cdots\right) =$$
$$= a_0\left(1 + b_1\xi + b_2\xi^2 + \cdots + b_j\xi^j + \cdots\right),$$

де $b_j = \frac{a_j}{a_0},\ j = 1,2,3, \ldots$. У розкладі (3.6) покладемо

$$u = b_1\xi + b_2\xi^2 + \cdots + b_j\xi^j + \cdots,$$

Отримаємо

$$\tilde{p}_s^{\alpha}(\xi) = a_0^{\alpha}\left(1 + \alpha\left(b_1\xi + b_2\xi^2 + \cdots + b_j\xi^j + \cdots\right) +\right.$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\left(b_1\xi + b_2\xi^2 + \cdots + b_j\xi^j + \cdots\right)^2 +$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-3)}{3!}(b_1\xi + b_2\xi^2 + \cdots + b_j\xi^j + \cdots)^3 + \cdots +$$
$$\left.+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}(b_1\xi + b_2\xi^2 + \cdots + b_j\xi^j + \cdots)^k + \cdots\right).$$

Згрупуємо за відповідними степенями ξ та впишемо стільки доданків, щоб побачити закономірність:

$$\tilde{p}_s^{\alpha}(\xi) = a_0^{\alpha}\left(1 + \xi\alpha b_1 + \xi^2\left(\alpha b_2 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}b_1^2\right) +\right.$$
$$+\xi^3\left(\alpha b_3 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}2b_1b_2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-3)}{3!}b_1^3\right) +$$
$$\left.+\xi^4\left(\alpha b_4 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}(2b_1b_3 + b_2^2) + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-3)}{3!}3b_1^2b_2 +\right.\right.$$

$$+\prod_{j=1}^{4}\frac{\alpha-j+1}{j}b_1^4\Bigg)+$$

$$+\xi^5\Bigg(\alpha b_5+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}(2b_1b_4+2b_2b_3)+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-3)}{3!}(3b_1^2b_3+3b_2^2b_1)+$$

$$+\prod_{j=1}^{4}\frac{\alpha-j+1}{j}4b_2b_1^3+\prod_{j=1}^{5}\frac{\alpha-j+1}{j}b_1^5\Bigg)+\cdots$$

Уведемо позначення

$$P_{m,k}=\prod_{j=1}^{k-m+1}\frac{\alpha-j+1}{j},k=1,2,3,\dots,m=1,2,\dots,k;$$

$$a_{k,k}=b_k,a_{k,m}=\sum_{j=1}^{m}a_{k-j,m-j+1}b_j\,,k=1,2,3,\dots,m=1,2,\dots,k-1,$$

$$\gamma_k=\sum_{m=1}^{k}P_{m,k}a_{k,m},\ k=1,2,3,\dots,$$

де γ_k визначають коефіцієнти при ξ^k, які відповідають встановленій закономірності, тобто

$$\tilde{p}_s^{\alpha}(\xi)=a_0^{\alpha}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k\,\xi^k\right). \tag{3.8}$$

Перевірку правильності у виявленні закономірностей реалізовано за допомогою системи комп'ютерної алгебри (див. додаток А).

Підставимо (3.7) та (3.8) до рівняння (3.2), виконавши інтегрування

$$\kappa\,a_0^{\alpha}\left(\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\gamma_k}{k+1}\right)-\left(\xi+\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k\frac{\xi^{k+1}}{k+1}\right)\right)+a_0\sum_{k=0}^{\infty}b_k\xi^k=-A\xi^2+D_1,$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях ξ, приходимо до системи

$$\kappa\, a_0^{\alpha}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\gamma_k}{k+1}\right)+a_0 = D_1;$$

$$-\kappa\, a_0^{\alpha}+a_0 b_1 = 0;$$

$$-\kappa\, a_0^{\alpha}\frac{\gamma_1}{2}+a_0 b_2 = -A;$$

...

$$-\kappa\, a_0^{\alpha}\frac{\gamma_{k-1}}{k}+a_0 b_k = 0;$$

...

Звідки отримаємо спочатку коефіцієнти $\{b_k\}$

$$b_1 = \kappa\, a_0^{\alpha-1};$$

$$b_2 = \kappa\, a_0^{\alpha-1}\frac{\gamma_1}{2} - -\frac{A}{a_0};$$

...

$$b_k = \kappa\, a_0^{\alpha-1}\frac{\gamma_{k-1}}{k}\ \ (k = 3,4,5,\dots);$$

...,

через які запишемо формулу для обчислення значення величини D_1, через яку виражається безрозмірна осадка штампа

$$D_1 = a_0\left(1+\sum_{k=1}^{\infty} b_k\right)+A.$$

Ураховуючи зв'язок між коефіцієнтами b_k та a_k, проведемо перетворення в умові рівноваги:

$$\tilde{P} = \int_{-1}^{1} \sum_{j=0}^{\infty} a_j \xi^j \, d\xi = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \frac{\xi^{j+1}}{j+1}\Big|_{-1}^{1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2\, a_{2k}}{2k+1}.$$

Внаслідок того, що до кожного з коефіцієнтів b_k параметр a_0 входить нелінійно, то рівняння

$$\tilde{P} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2\, a_{2k}}{2k+1}$$

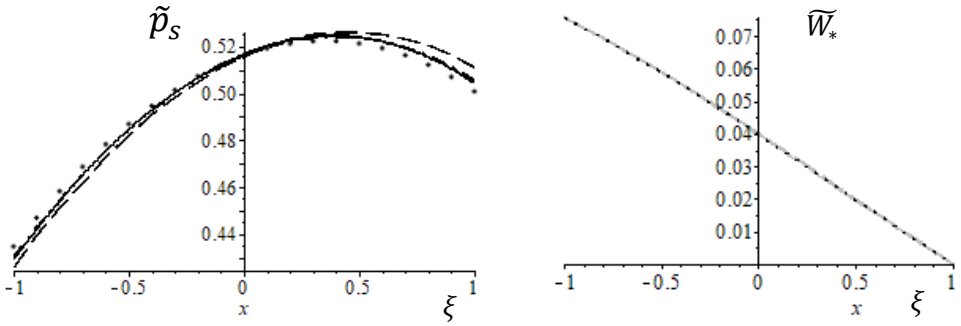
є нелінійним відносно невідомого a_0, який визначаємо з використанням методу половинного ділення.

При використанні методу степеневих рядів відпадає необхідність в дискретизації функції профілю зношеної поверхні півпростору, а цю функцію подаємо рядом

$$\widetilde{W}_*(\xi) = \kappa\, a_0^{\alpha} \left(\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{k+1} \right) - \left(\xi + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \frac{\xi^{k+1}}{k+1} \right) \right).$$

Для порівняльного аналізу числових результатів обрано ті самі параметри, що і у всьому розділі 3. Всі ряди в описаному вище методі замінюємо частковими сумами, виходячи з часткової суми степеневого ряду, якою подається наближена функція контактного тиску, де розглядатимемо 17 доданків. Програмний код див. додаток А.

На рис. 3.3, а побудовано графіки функції контактного тиски, знайдені методом скінченних різниць (штрихова та точкова лінії), методом послідовних наближень (штрих-пунктирна) та методом степеневих рядів (суцільна) по відношенню до розв’язувальних рівнянь відповідних типів. На рис. 3.3, б побудовано графіки функцій профілів зношеної поверхні; для обраних вхідних параметрів лінії візуально близькі.



а б

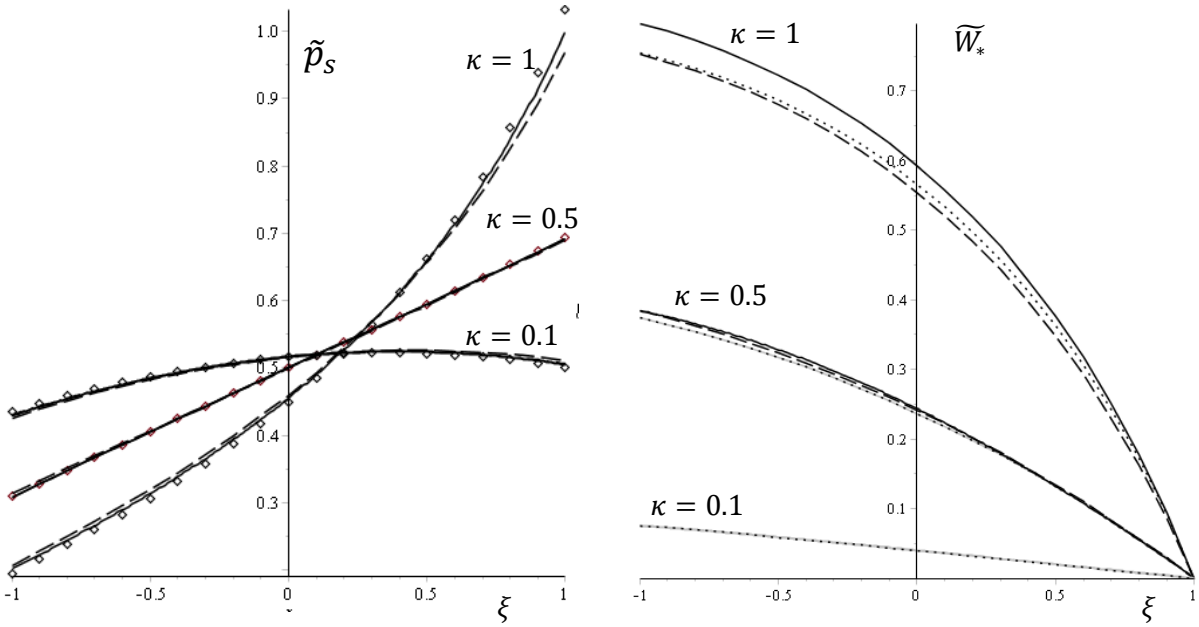
Рисунок 3.3 – Порівняння зносоконтактних характеристик, отриманих різними підходами

Метод степеневих рядів можна застосовувати також і до розв’язувального диференціального рівняння. По суті це не вплине на результати для функції контактного тиску та профілю зношеної поверхні півпростору, проте, не дозволить обчислити осадку штампа.

4 АНАЛІЗ ЧИСЛОВИХ РЕЗУЛЬТАТІВ ДЛЯ РІЗНИХ ВХІДНИХ ПАРАМЕТРІВ

Розглядаємо усталений знос під час руху прямокутного в плані штампа в напрямку осі абсцис. Підошва штампа визначається крадратичною функцією $\tilde{f}(\xi) = A\xi^2 - A$.

На рис. 4.1 побудовано графіки контактного тиску (рис.4.1, а) та функції профілів зношеної поверхні (рис. 4.1, б), обчислені для нелінійного закону зношування при $\alpha = 1.4$ для різних значеннях κ за допомогою описаних вище підходів до комбінації методів. Метод послідовних наближень для розв'язувального інтегрального рівняння було застосовано при $\kappa = 0.1$ та $\kappa = 0.5$.



а б

Рисунок 4.1 – Зносоконтактні характеристики, отримані різними підходами в комбінації методів

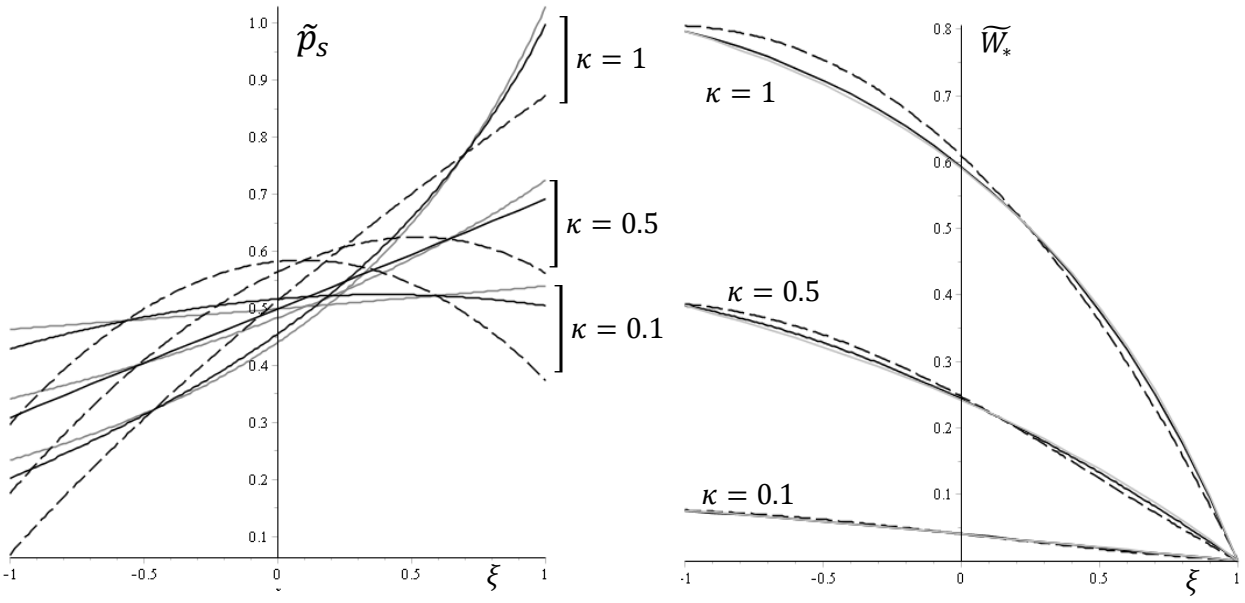
Найбільше відхилення в розрахункових значеннях отримано при $\kappa = 1$. Параметр κ виражає фізичні характеристики півпростору, оскільки залежить від модуля пружності, коефіцієнта Пуассона та коефіцієнта зношування

півпростору. Чим менше значення цього параметра, тим більш рівномірним є розподіл контактного тиску і менше зношення півпростору. Збільшення параметра κ призводить до збільшення тиску в точці початкового контакту штампа $\xi = 1$ і зменшенню – в кінцевій $\xi = -1$. Найбільший знос відповідає кінцевій точці контакту при $\kappa = 1$

Наведені далі числові результати отримано методом степеневих рядів розв'язання інтегрального рівняння, як «найбільш точного».

На рис. 4.2 побудовано аналогічні контактні характеристики для різних значень параметра κ та коефіцієнта A, що визначає функцію поверхні підошви штампа: сірій суцільній лінії відповідає $A = 0$, чорній суцільній – $A = 0.05$, чорній шриховій – $A = 0.25$.

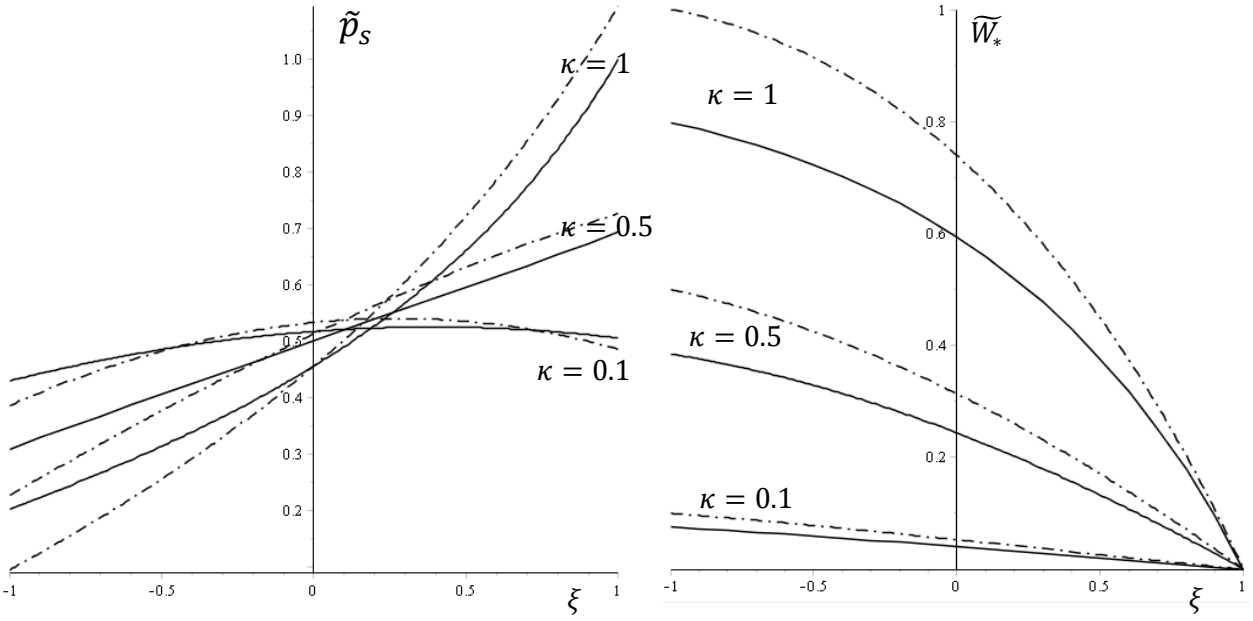
При $\kappa = 0.1$ спостерігається найбільш виражений вплив на контактний тиск форми поверхні штампа внаслідок меншого «супротиву» півпростору, який має пом'якшені фізичні характеристики. У цьому випадку найбільший тиск може досягатися ні в точці $\xi = 1$, а у деякій внутрішній точці площадки контакту. Коли фізичні характеристики півпростору є суттєвими, то тиск набуває найбільшого значення в точці $\xi = 1$.



а б

Рисунок 4.2 – Зносоконтактні характеристики, отримані для різних вхідних даних

На рис. 4.3 побудовано аналогічні контактні характеристики взаємодії штампа з поверхнею, що визначається функцією $\tilde{f}(\xi) = A\xi^2 - A,\ A = 0.05$ для лінійного (штрих-пунктирні лінії) та нелінійного (суцільні лінії) законів зношування для різних значень параметра κ. Нелінійний закон зношування впливає на урівномірнення контактного тиску та зменшення зношування півпростору під штампом. Той самий висновок дасть і аналіз рис. 2.2.



а б

Рисунок 4.3 – Зносоконтактні характеристики для лінійного та степеневого законів зношування

Використання інтегрального рівняння, як розв'язувального, дозволило знайти осадку штампа під дією тиску. Для розв'язання рівняння застосовували метод степеневих рядів. Відповідно до (3.6)

$$D_1 = \widetilde{D} + A.$$

Занесемо до табл. 4.1 розрахункові значення D_1, для різних параметрів κ і коефіцієнтів A за лінійного ($\alpha = 1$) та нелінійного ($\alpha = 1.4$) законів зношування.

Нелінійний закон зношування спричиняє зменшення осадки. Збільшення параметра κ за фіксованого значення коефіцієнта A призводять до збільшення осадки штампа в пружний півпростір.

Таблиця 4.1 – Розрахункові значення D_1, що визначається через безрозмірну осадку штампа $\widetilde{D}$

	$\kappa = 0.1$	$\kappa = 0.5$	$\kappa = 1$
$\alpha = 1$			
$A = 0.$	0.5516665000	0.7909884384	1.156516960
$A = 0.05$	0.5683539986	0.8081973736	1.175215071
$A = 0.25$	0.6351096838	0.8770359424	1.249998186
$\alpha = 1.4$			
$A = 0$	0.5392540609	0.7253633691	1.030615275
$A = 0.05$	0.5559398642	0.7423833002	1.048729699
$A = 0.25$	0.6228801241	0.8114012421	1.123213126

ВИСНОВКИ

У процесі контактної взаємодії під час руху тіл виникають процесу руйнування, пов’язані з видаленням матеріалу з поверхні тіл. Цей процес зношування впливає на експлуатаційні характеристики машин та механізмів, тому дослідження зношування є важливою інженерною задачею і актуальним напрямком дослідження, що підтверджується зростанням кількості публікацій останнім часом [1-22].

У багатьох дослідженнях зносоконтактних задач для моделювання пружної основи використовується модель Вінклеера, яка підтвердила свою ефективність [11, 13, 15, 18, 19]. Саме ця модель застосована в кваліфікаційні роботі.

З експериментальних та теоретичних досліджень відомо про наявність лінійного та степеневого законів зношування, що виражають залежність між швидкістю зношування та контактним тиском. У роботі розглянуто задачу для обох випадків.

У літературі викладено постановку та виведено рівняння задачі, що було детально вивчено і викладено в роботі. Зазначені в літературі формули за лінійного закону зношування були використані для побудови розв’язків у випадках штампу з плоскою підошвою та підошвою, що визначається квадратичною функцією. Отримані таким чином зносоконтактні характеристики були використані у порівняльному аналізі.

Розв’язок поставленої задачі у випадку нелінійного (степеневого) закону зношування серед опублікованих робіт не знайдений.

Найбільша увага в роботі приділена дослідженню методів розв’язання диференціального та інтегрального розв’язувального рівняння задачі за степеневого закону зношування. Виявлено, що у випадку штампа з плоскою підошвою можна знайти аналітичний розв’язок диференціального рівняння, а

невідому константу знайти з умови рівноваги з використанням методу половинного ділення.

У випадку штампа з підошвою, що визначається квадратичною функцією до розв’язання диференціального рівняння було використано метод скінченних різниць, а для отримання невідомого параметра – метод половинного ділення.

Розгляд інтегрального рівняння як розв’язувального дозволив прийти до висновку про однозначність розв’язку задачі, який не залежить від обраних методів. До самого ж інтегрального рівняння застосовано метод послідовних наближень та метод степеневих рядів.

Для отримання числових результатів написано програму в середовищі пакета комп’ютерної математики Maple V Release 4. В додатку розміщено фрагменти програмного коду.

У роботі проведено порівняльний аналіз результатів, отриманих з використанням різних підходів в виборі комбінації методів, а також для різних вхідних параметрів задачі.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Д'яченко Н. М., Дмитрів К. М. Вплив закону деформування покриття на характеристики осесиметричної контактної задачі на різних стадіях зношування. *Прикладна механіка*. Київ, 2024. Т. 60 (70). № 2. С. 19-31.

2. Козачок О. П., Мартиняк Р. М. Локальне зношування пружних півпросторів з виступами. В колективній монографії: *Контактна механіка. Шорсткість, розшарування і зношування поверхонь* / за заг. ред. Р. М. Мартиняка. Львів : Видавець Вікторія Кундельська, 2022 С. 211–234.

3. Максимук О. В. Зношування покрить твердих тіл з урахуванням проміжкового шару. *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. Львів, 2001. Т. 37. № 1. С. 121–123.

4. Онишкевич В. М., Сулим Г. Т. Урахування зношування при плоскому контакті прямокутного штампа з пружною півплощиною. *Вісник Київського національного університету ім. Т. Шевченка. Серія фіз.-мат. науки.* Київ, 2019, №1. С. 138–141.

5. Сачук Ю. В., Максимук О. В., Саланда І. П. Аналітико-числове обчислення ітераційними методами областей контакту для задачі про зношування пружної півплощини канонічними штампами. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: фіз.-мат. науки.* Кам'янець-Подільський, 2019. Вип. 20. С. 70–78

6. Archard J. F. Contact and ruing of flat surfaces. *Appl. Phys*. 1953. No. 24. P. 981–988.

7. Argatov I. From Winkler's foundation to Popov's foundation. *Facta Universitatis, Series: Mechanical Engineering*. Berlin, 2019. Vol. 17, Iss. 2. P. 181–190.

8. Argatov I. I., Chai Y. S. Wear contact problem with friction: Steady-state regime and wearing-in period. *International Journal of Solids and Structures.* Elsevier, 2020. Vol. 193. P. 213–221.

9. Argatov I., Tato W. Asymptotic modeling of reciprocating sliding wear – Comparison with finite-element simulations. *European Journal of Mechanics - A/Solids*. Elsevier, 2012. Vol. 34. P. 1–11.

10. Galin L. A. Contact Problems: The legacy of L.A. Galin / Ed. G.M.L. Gladwell. *Solid Mechanics and Its Applications*. Springer, 2008. Vol. 155. 332 p.

11. Garcin S., Baydoun S., Arnaud P., Fouvry S. Fretting wear modeling of 3D and 2D Hertzian contacts with a third-body layer using a Winkler elastic foundation model. *Tribology International.* Elsevier, 2022. Vol. 170. Id: 107493.

12. Goryacheva I. G. Wear process for coated bodies with periodic microgeometry at the interface. *Int. J. Eng. Sci.* Elsevier, 2012. No. 61. P. 48–52.

13. Goryacheva I.G. Contact Mechanics In Tribology / Part of the book series: *Solid Mechanics and Its Applications* (SMIA, volume 61): Series Editor: G.M.L. Gladwell. Springer Science & Business Media, 1998. 346 p.

14. Han D., Han W., Jureczka M., Ochal A. Numerical analysis of a contact problem with wear. *Computers & Mathematics with Applications*. Elsevier, 2020. Vol. 79. P. 2942 –2951.

15. Hu J., Gao F., Liu X., Wei Y. An elasto-plastic contact model for conformal contacts between cylinders. *Proceedings of the Institution of mechanical engineers: Part J – Journal of engineering tribology*. London, 2020. Vol. 234. Iss. 12. P. 1837–1845.

16. Kozachok, O. P. Local Friction Wear of an Elastic Half Space with Protrusion. *Mater Sci* Springer, 2022. Vol. 57. P. 797–804 (2022).

17. Lee C. Y., Tian L. S., Bae J. W., Chai Y. S. Application of influence function method on the fretting wear of tube-to-plate contact. *Tribology International.* Elsevier, 2009. Vol. 42, Iss. 6. P. 951–957.

18. Menga N., Ciavarella M. A. Winkler solution for the axisymmetric Hertzian contact problem with wear and finite element method comparison. *J. Strain Analysis*. London, 2015. Vol. 50, No. 3. P. 156–162.

19. Põdra P., Andersson S. Wear simulation with the Winkler surface model. *Wear*. Elsevier, 1997. Vol. 207, Iss. 1–2. P. 79–85.

20. Xuan H., Cheng X. Numerical Analysis and Simulation of a Frictional Contact Problem with Wear, Damage and Long Memory. *East Asian Journal on Applied Mathematics.* Hong Kong, 2020. Vol. 10, No. 4. P. 659–678.

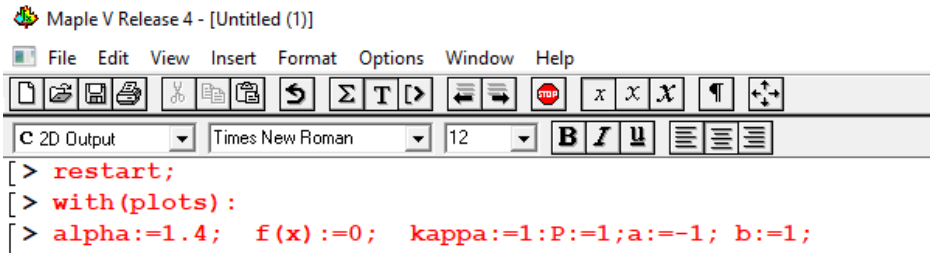
21. Zhan W., Huang P. Numerical analysis of time-varying wear with elastic deformation in line contact // Friction. Springer, 2019. Vol. 7. P. 143–152.

22. Zhang X., Shen H., Liu J., Deng S., Li X., Cai Z., Zhu M. An efficient numerical model for predicting the torsional fretting wear considering real rough surface. *Wear.* Elsevier, 2015. Vol. 344–345. P. 32–45.

ДОДАТОК А

Фрагменти програми

А.1 Програмний код пошуку наближеного розв’язку задачі для штампа з плоскою основою з використанням аналітичного розв’язку нелінійного диференціального рівняння



Аналітичний розв’язок нелінійного диференціального рівняння

```
> p1(x):=(1/((1-alpha)*(kappa*x+Cccc)))^(1/(alpha-1));
```

$$p1(x) := \left(-\frac{2.500000000}{x + Cccc}\right)^{2.500000000}$$

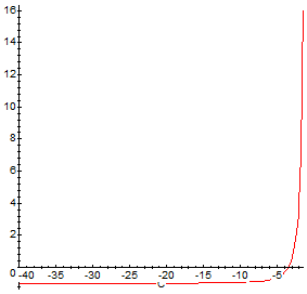
Використання аналітичного інтегрування рівняння рівноваги у вигляді

$$\int_{-1}^{1} \tilde{p}_s(\xi)d\xi = \frac{1}{\kappa}\frac{\alpha-1}{\alpha-2}\left(\frac{1}{\alpha-1}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\left\{(\kappa - C)^{\frac{\alpha-2}{\alpha-1}} - (-\kappa - C)^{\frac{\alpha-2}{\alpha-1}}\right\}.$$

Пошук невідомої сталої методом половинного ділення

```
> Urr :=
(alpha-1)*(1/(alpha-1))^(1/(alpha-1))*((kappa-Ccc)^((alpha-2)/(alpha-1))-(-kappa-Ccc)^((alpha-2)/(alpha-1)))/
(kappa*(alpha-2))-P; plot(subs(Ccc = C, Urr), C = -40 .. -1.5);
```

$$Urr := -\frac{6.588078458}{(1 - Ccc)^{1.500000000}} + \frac{6.588078458}{(-1 - Ccc)^{1.500000000}} - 1$$




```
> tt1 := -4; tt2 := -2;
  v1 := subs(Ccc = tt1, Urr);
  v2 := subs(Ccc = tt2, Urr);
  print(v1, v2);
>
```

$$tt1 := -4$$
$$tt2 := -2$$
$$v1 := -.3213793609$$
$$v2 := 4.320202168$$
$$-.3213793609,\ 4.320202168$$

```
> ozn := 0;
```

$$ozn := 0$$

```
> ozn := 0;
```

$$ozn := 0$$

```
> while (abs(tt1-tt2)>10^(-6) and ozn=0) do
  tt3 := evalf((tt1+tt2)*(1/2)):
   v1 := subs(Ccc = tt1, Urr):
   v2 := subs(Ccc = tt2, Urr):
   v3 := subs(Ccc = tt3, Urr):
   if v1*v3 < 0 then tt2 := tt3 fi:
   if v2*v3 < 0 then tt1 := tt3 fi:
   if abs(v3) < 10^(-10) then ozn := 1; print(tt1, tt2) fi:
   print(tt1, tt2) ; od:
```

Використання чисельного інтегрування умови рівноваги та пошук невідомої сталої методом половинного ділення.

```
> tt1 := -4; tt2 := -3;
  v1 := -P; v2 := -P;
  h := (b-a)*(1/1000);
  for i to 1000 do
  xx[i] := a+h*(i-1);
  v1 := v1+subs(Cccc = tt1, x = xx[i], p1(x)*h);
  v2 := v2+subs(Cccc = tt2, x = xx[i], p1(x)*h)
  od: v1; v2;
```

$$tt1 := -4$$
$$tt2 := -3$$
$$v1 := -1$$
$$v2 := -1$$
$$h := \frac{1}{500}$$
$$-.3218363763$$
$$.5042902204$$

```
> ozn := 0;
```

$$ozn := 0$$

```
> while (abs(tt1-tt2)>10^(-6) and ozn=0) do
  tt3 := evalf((tt1+tt2)*(1/2)):
  v1 := -P: v2 := -P: v3 := -P:
  h := (b-a)*(1/1000):
  for i to 1000 do xx[i] := a+h*(i-1):
  v1 := v1+subs(Cccc = tt1, x = xx[i], p1(x)*h):
  v2 := v2+subs(Cccc = tt2, x = xx[i], p1(x)*h):
  v3 := v3+subs(Cccc = tt3, x = xx[i], p1(x)*h):
  od:
  if v1*v3 < 0 then t1 := tt1: tt2 := tt3: fi;
  if v2*v3 < 0 then tt1 := tt3: tt2 := tt2:  fi;
  if abs(v3) < 10^(-10) then  ozn := 1 : fi;
  print(tt1, tt2, v1, v2, v3) od;
```

Графічне зображення функції тиску

```
> Ccc := tt3;
```

$$Ccc := -3.470023161$$

```
> plot([p1(x), (1/((1-alpha)*(kappa*x+Ccc)))^(1/(alpha-1))], x = -1 .. 1);
```

Визначення функції профілю зношеної поверхні

```
> for i to 21 do
  xx[i] := a+((b-a)*(1/20))*(i-1):
  www[i] := simplify(evalf(int(kappa*p1(x)^alpha, x = xx[i] .. 1)))
  od:
  grr := seq([xx[ii], www[ii]], ii = 1 .. 21):
  plot([grr]);
```

```
> alpha:=1.4; g(x):=x*0.1; a:=-1:b:=1:val:=1;
```

$$\alpha := 1.4$$

$$g(x) := .1\,x$$

$$val := 1$$

```
> n := 20; h := evalf((b-a)/n);
```

$$n := 20$$

$$h := .1000000000$$

```
> for k from 0 to n do xx[k] := h*k+a od:
> for k from 0 to n-1 do
  gk := subs(x = xx[k], g(x));
  ur[k] := subs(P = 1, kappa1 = val, kappa1*y[k]^alpha-(y[k+1]-y[k])/h-gk)
  od:
> for k from n-1 by -1 to 0 do y[k+1] := solve(ur[k], y[k+1]) od;
> UR := -P; for k from 0 to n-1 do
  UR := subs(P = 1, UR+((y[k]+y[k+1])*(1/2))*h) :
  od:
```

$$UR := -P$$

```
> UR := evalf(UR):
> UR1 := subs(y[0] = tt, UR):
> tt1 := 0; tt2 := 1;
  v1 := subs(tt = tt1, UR1);
  v2 := subs(tt = tt2, UR1);
>
```

$$tt1 := 0$$

$$tt2 := 1$$

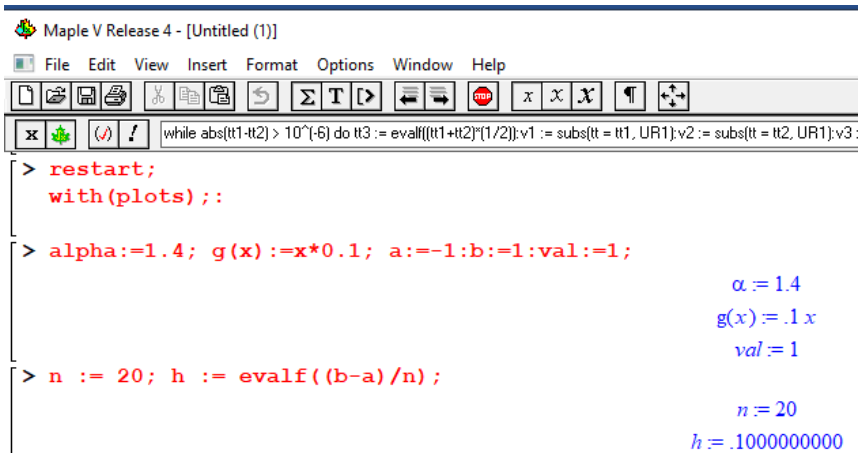
$$v1 := -.8987024900$$

$$v2 := 10.65653910$$

```
> while abs(tt1-tt2) > 10^(-6) do
  tt3 := evalf((tt1+tt2)*(1/2)):
  v1 := subs(tt = tt1, UR1):
  v2 := subs(tt = tt2, UR1):
  v3 := subs(tt = tt3, UR1):
  if v1*v3 < 0 then tt1 := tt1; tt2 := tt3 fi;
  if v2*v3 < 0 then tt1 := tt3; tt2 := tt2 fi: od:
```

А.2 Програмний код у випадку нелінійного закону зношування півпростору штампом з неплоскою основою, що визначається рівнянням квадратичного виду

А.2.1 Програмний код для розв'язання нелінійного диференціального рівняння методом скінченних різниць



Використання **лівих** скінченних різниць

```
> for k to n do
  gk := subs(x = xx[k], g(x));
  ur[k] := subs(P = 1, kappa1 = val, kappa1*yy[k]^alpha-(yy[k-1]-yy[k])/(-h)-gk)
  od:
> for k to n do yy[k-1] := solve(ur[k], yy[k-1]) od;
```

```
> UR := -P;
  for k to n do
  UR := subs(P = 1, UR+((yy[k-1]+yy[k])*(1/2))*h)
  od:
>
```

$$UR := -P$$

```
> UR := evalf(subs(kappa1 = val, P = 1, UR)):
> UR1 := subs(yy[n] = tt, UR):
> tt1 := .1: tt2 := 1.1:
  v1 := subs(tt = tt1, UR1); v2 := subs(tt = tt2, UR1);
```

$$v1 := -0.9254283852$$

$$v2 := 0.883644945$$

```
> while abs(tt1-tt2) > 10^(-6) do
  tt3 := evalf((tt1+tt2)*(1/2));
  v1 := subs(tt = tt1, UR1);
  v2 := subs(tt = tt2, UR1);
  v3 := subs(tt = tt3, UR1);
  if v1*v3 < 0 then tt1 := tt1; tt2 := tt3 fi;
  if v2*v3 < 0 then tt1 := tt3; tt2 := tt2 fi: od:
> yy[n] := tt3:
> for k from 0 to n do yy[k] := evalf(yy[k]) od:
```

$$yy_{20} := 0.5008497236$$

```
> gg := seq([xx[k], subs(P = 1, kappa1 = val, yy[k])], k = 0 .. n);
  plot([gg], style = point); sr2 := plot([gg], style = point);
```

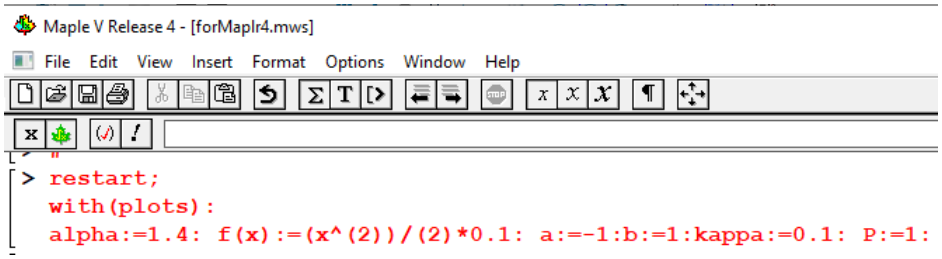
Використання правих скінченних різниць

```
> for k from 0 to n do xx[k] := h*k+a od:
> for k from 0 to n-1 do
  gk := subs(x = xx[k], g(x));
  ur[k] := subs(P = 1, kappa1 = val, kappa1*y[k]^alpha-(y[k+1]-y[k])/h-gk)
  od:
> for k from n-1 by -1 to 0 do y[k+1] := solve(ur[k], y[k+1]) od;
> UR := -P; for k from 0 to n-1 do
  UR := subs(P = 1, UR+((y[k]+y[k+1])*(1/2))*h) :
  od:
                                                    UR := -P
> UR := evalf(UR):
> UR1 := subs(y[0] = tt, UR):
> tt1 := 0; tt2 := 1;
  v1 := subs(tt = tt1, UR1);
  v2 := subs(tt = tt2, UR1);
> while abs(tt1-tt2) > 10^(-6) do
  tt3 := evalf((tt1+tt2)*(1/2)):
  v1 := subs(tt = tt1, UR1):
  v2 := subs(tt = tt2, UR1):
  v3 := subs(tt = tt3, UR1):
  if v1*v3 < 0 then tt1 := tt1; tt2 := tt3 fi;
  if v2*v3 < 0 then tt1 := tt3; tt2 := tt2 fi: od:
> y[0] := tt3:
> for k from 0 to n do y[k] := evalf(y[k]) od:
> gg := seq([xx[k], y[k]], k = 0 .. n):
> plot([gg]); sr1 := plot([gg]);
```

Дискретизована функція профілю зношеної поверхні

```
> WW[n] := 0:
  for k from 0 to n-1 do
  WW[k] := 0;
  for j from k to n-1 do
  WW[k] := WW[k]+y[j]^alpha*h*kappa1
  od: od:
> gg := seq([xx[k], subs(P = 1, kappa1 = val, WW[k])], k = 0 .. n):
> plot([gg]); ss1 := plot([gg]):
```

А.2.2 Програмний код для застосування методу послідовних наближень до розв'язувального інтегрального рівняння




```
> restart;
  with(plots):
  alpha:=1.4: f(x):=(x^(2))/(2)*0.1: a:=-1:b:=1:kappa:=0.1: P:=1:
```

```
> restart;
  with(plots):
  alpha:=1.4: f(x):=(x^(2))/(2)*0.1: a:=-1:b:=1:kappa:=0.1: P:=1:
> nn := 5:
> Dd[1]:=0.4; Dd[2]:=0.7;
  for h from 1 to 2 do
  p[1](x):=Dd[h];
  for k from 2 to nn do
  C0:=abs(subs(x=0,p[k-1](x))):
  z(x):=evalf(C0^(alpha)*(1+sum((product((alpha-jj+1)/jj, jj = 1 ..
  s))*((p[k-1](x)-C0)/C0)^s, s = 1 .. nn)  )):
  p[k](x):=evalf(collect(simplify(-kappa*int(subs(x=xx,z(x)),xx=x..1)+Dd[h]-f(x)),{x}));
  od:
  v[h]:=evalf(int( p[nn](x),x=-1..1))-P:print( v[h]);
  od:
```

$$Dd_1 := .4$$

$$Dd_2 := .7$$

$$-.2824824919$$

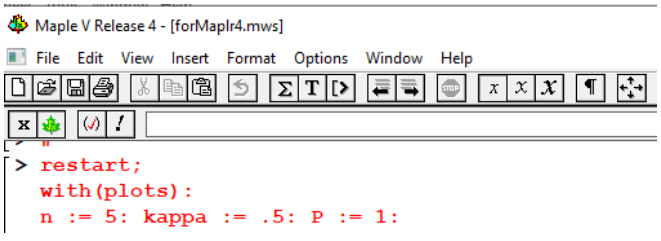
$$.258002050$$

```
> while abs(Dd[1]-Dd[2])>10^(-6) do
  Dd[3]:=evalf((Dd[1]+Dd[2])/(2)):print(Dd[3]);
  for h from 1 to 3 do
  p[1](x):=Dd[h];
  for k from 2 to nn do
  C0:=abs(subs(x=0,p[k-1](x))):
  z(x):=evalf(C0^(alpha)*(1+sum((product((alpha-jj+1)/jj, jj = 1 ..
  s))*((p[k-1](x)-C0)/C0)^s, s = 1 .. nn)  )):
  p[k](x):=evalf(collect(simplify(-kappa*int(subs(x=xx,z(x)),xx=x..1)+Dd[h]-f(x)),{x}));
  od:
  v[h]:=evalf(int( p[nn](x),x=-1..1))-P:
  od:
  if v[1]*v[3]<0 then Dd[1]:=Dd[1]: Dd[2]:=Dd[3]: fi:
  if v[2]*v[3]<0 then Dd[1]:=Dd[3]: Dd[2]:=Dd[2]: fi:
  print(Dd[1],Dd[2]);   od:
> subs(x = 0, p[nn](x));
```

$$.5159745473$$

```
> plot(p[nn](x), x = -1 .. 1); sr3 := plot(p(x)[nn], x = -1 .. 1, color = blue);
> for i to 21 do
  xx[i] := a+((b-a)*(1/20))*(i-1):
  www[i] := evalf(int(kappa*p[nn](x)^alpha, x = xx[i] .. 1)) od:
  grr := seq([xx[ii], www[ii]], ii = 1 .. 21):
  plot([grr]);
```

А.2.3 Перевірка правильності отриманих закономірностей коефіцієнтів степеневого ряду за допомогою системи комп'ютерної алгебри




```
> restart;
  with(plots):
  n := 5: kappa := .5: P := 1:
```

```
> for s to n do
  for m to s do
  PP[m, s] := product((alpha-j+1)/j, j = 1 .. s-m+1): od:
  PPP := seq(PP[jj, s], jj = 1 .. s):
  print(PPP); od:
```

$$\alpha$$

$$\alpha\left(\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\right), \alpha$$

$$\alpha\left(\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\alpha-\frac{2}{3}\right), \alpha\left(\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\right), \alpha$$

$$\alpha\left(\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\alpha-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\alpha-\frac{3}{4}\right), \alpha\left(\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\alpha-\frac{2}{3}\right), \alpha\left(\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\right), \alpha$$

$$\alpha\left(\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\alpha-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\alpha-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{5}\alpha-\frac{4}{5}\right), \alpha\left(\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\alpha-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\alpha-\frac{3}{4}\right), \alpha\left(\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\alpha-\frac{2}{3}\right), \alpha\left(\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\right), \alpha$$

```
> for s to n do
   A[s, s] := b[s]:
  for m to s-1 do
   A[s, m] := sum(A[s-j, m-j+1]*b[j], j = 1 .. m): od:
  PPP := seq(A[s, jj], jj = 1 .. s-1):
  print(PPP) od:
```

$$b_1^2$$

$$b_1^3, 2\,b_2\,b_1$$

$$b_1^4, 3\,b_2\,b_1^2, 2\,b_3\,b_1 + b_2^2$$

$$b_1^5, 4\,b_2\,b_1^3, (2\,b_3\,b_1 + b_2^2)\,b_1 + 2\,b_2^2\,b_1 + b_1^2\,b_3, 2\,b_4\,b_1 + 2\,b_3\,b_2$$

```
> for s to n do gamma1[s] := sum(PP[mm, s]*A[s, mm], mm = 1 .. s) od;
```

$$\gamma 1_1 := \alpha\,b_1$$

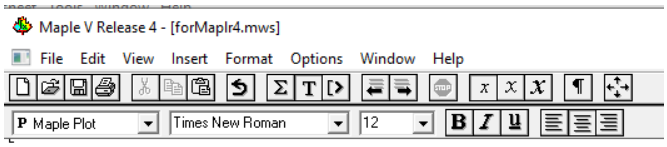
$$\gamma 1_2 := \alpha\left(\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\right)b_1^2 + \alpha\,b_2$$

$$\gamma 1_3 := \alpha\left(\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\alpha-\frac{2}{3}\right)b_1^3 + 2\,\alpha\left(\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\right)b_2\,b_1 + \alpha\,b_3$$

$$\gamma 1_4 := \alpha\left(\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\alpha-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\alpha-\frac{3}{4}\right)b_1^4 + 3\,\alpha\left(\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\alpha-\frac{2}{3}\right)b_2\,b_1^2 + \alpha\left(\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\right)(2\,b_3\,b_1 + b_2^2) + \alpha\,b_4$$

$$\gamma 1_5 := \alpha\left(\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\alpha-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\alpha-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{5}\alpha-\frac{4}{5}\right)b_1^5 + 4\,\alpha\left(\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\alpha-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\alpha-\frac{3}{4}\right)b_2\,b_1^3$$
$$+ \alpha\left(\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\alpha-\frac{2}{3}\right)((2\,b_3\,b_1 + b_2^2)\,b_1 + 2\,b_2^2\,b_1 + b_1^2\,b_3) + \alpha\left(\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\right)(2\,b_4\,b_1 + 2\,b_3\,b_2) + \alpha\,b_5$$

A.2.4 Програмний код отримання розв’язку інтегрального рівняння через застосування методу степеневих рядів




```
> restart;
  with(plots):
  n := 16: kappa := .1: P := 1: omega := .1:

> alpha := 1.4:
```

```
> for s to n do
  for m to s do
  PP[m, s] := product((alpha-j1+1)/j1, j1 = 1 .. s-m+1)
  od:
  od:
> for s to n do
  AA[s, s] := bb[s];
  for m to s-1 do
  AA[s, m] := sum(AA[s-j1, m-j1+1]*bb[j1], j1 = 1 .. m)
  od:
  od:
> for s to n do
  gamma1[s] := sum(PP[mm, s]*AA[s, mm], mm = 1 .. s)
  od:
> bb[1] := kappa*a00^(alpha-1):
  bb[2] := (1/2)*kappa*a00^(alpha-1)*gamma1[2-1]-omega/(2*a00):
  for j from 3 to n do
  bb[j] := kappa*a00^(alpha-1)*gamma1[j-1]/j
  od:
> Ddd := a00*(1+sum(bb[jj], jj = 1 .. n))+(1/2)*omega:
> for j to n do aa[j] := bb[j]*a00 od:
> nn := floor((1/2)*n);
  S := 2*a00+2*(sum(aa[2*k1]/(2*k1+1), k1 = 1 .. nn)):
> UR := S-P:
> UR1 := subs(a00 = tt, UR):
> tt1 := .1: tt2 := 1:
  v1 := subs(tt = tt1, UR1);
  v2 := subs(tt = tt2, UR1);
```

$$v1 := -0.8333339395$$

$$v2 := 0.967159358$$

```
> while abs(tt1-tt2) > 10^(-6) do
  tt3 := evalf((tt1+tt2)*(1/2)); print(tt3);
  v1 := subs(tt = tt1, UR1);
  v2 := subs(tt = tt2, UR1);
  v3 := subs(tt = tt3, UR1);
  if v1*v3 < 0 then tt1 := tt1; tt2 := tt3 fi:
  if v2*v3 < 0 then tt1 := tt3; tt2 := tt2 fi:
  od:
> a00 := tt3:
>
> ppp(x):=a00+sum(aa[jj]*x^jj, jj = 1 .. n):
  plot(ppp(x), x = -1 .. 1); sr4 := plot(ppp1, x = -1 .. 1, color = black):
> wWw :=
  evalf(kappa*a00^alpha*(1-x+sum(gamma1[jjj]/(jjj+1)-gamma1[jjj]*x^(jjj+1)/(jjj+1), jjj =
  1 .. n))):
> plot(wWw, x = -1 .. 1, color = gray); ss3 := plot(wWw, x = -1 .. 1, color = gray):
```

Декларація
академічної доброчесності
здобувача ступеня вищої освіти ЗНУ

Я, Дугієнко Олександр Едуардович, студент 2 курсу магістратури, денної форми навчання, математичного факультету, спеціальності 111 «Математика», адреса електронної пошти dugienko.alex@ukr.net,

– підтверджую, що написана мною кваліфікаційна робота бакалавра на тему «Дослідження методів розв'язання рівнянь задачі про зношування основи Вінклеерівського типу прямокутним в плані штампом» відповідає вимогам академічної доброчесності та не містить порушень, що визначені у ст. 42 Закону України «Про освіту», зі змістом яких ознайомлений;

– заявляю, що надана мною для перевірки електронна версія роботи є ідентичною її друкованій версії;

– згоден на перевірку моєї роботи на відповідність критеріям академічної доброчесності у будь-який спосіб, у тому числі за допомогою інтернет-системи, а також на архівування моєї роботи в базі даних цієї системи.

Студент

		О.Е. Дугієнко
(дата)	(підпис)	(ініціали, прізвище)

Науковий керівник

		Н.М. Д'яченко
(дата)	(підпис)	(ініціали, прізвище)