

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

**С. М. Гребенюк,
Н. М. Д'яченко,
І. В. Красікова**

НАБЛИЖЕНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

**Методичні рекомендації до лабораторних занять
для здобувачів ступеня вищої освіти магістра
спеціальності «Математика» освітньо-професійної програми
«Математика»**

Затверджено
вченою радою ЗНУ
Протокол №__ від _____

Запоріжжя
2025

Гребенюк С.М., Д'яченко Н.М., Красікова І.В. Наближені методи розв'язання крайових задач : методичні рекомендації до лабораторних занять для здобувачів ступеня вищої освіти магістра спеціальності «Математика» освітньо-професійної програми «Математика». Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2025. 68 с.

У методичних рекомендаціях подано в систематизованому вигляді короткий теоретичний матеріал та зміст лабораторних робіт з дисципліни «Наближені методи розв'язання крайових задач». Основна увага приділяється засвоєнню знань про варіаційні, проекційні різницеві методи розв'язання крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь і рівнянь у частинних похідних та набуттю навичок використання здобутих знань для отримання наближених розв'язків крайових задач. До кожної теми підібрано теоретичний матеріал, надано рекомендації до виконання лабораторних робіт, наведено приклади написання програм, запропоновано запитання для самоперевірки. Надано список рекомендованої літератури.

Методичні рекомендації призначені для здобувачів ступеня вищої освіти магістра спеціальності «Математика» освітньо-професійної програми «Математика», однак можуть використовуватися й студентами інших спеціальностей та аспіранти.

Рецензент

С. І. Гоменюк, доктор технічних наук, професор, декан математичного факультету

Відповідальний за випуск

С.М. Гребенюк, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри фундаментальної та прикладної математики

ЗМІСТ

ВСТУП	5
ЗАГАЛЬНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ	7
1 ПОПЕРЕДНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ	8
Тема 1. Постановка крайової задачі	8
Крайові задачі для звичайних диференціальних рівнянь	8
Крайові задачі для рівнянь в частинних похідних	9
Тема 2. Класифікація методів розв'язання крайових задач	11
Контрольні питання	11
2 ВАРІАЦІЙНІ ТА ПРОЄКЦІЙНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ..	12
Тема 3. Основні теореми варіаційного методу розв'язання крайових задач	12
Поняття про функціонал і оператор	12
Постановка варіаційної задачі	14
Теорема про зведення крайової задачі до варіаційної	14
Тема 4. Зведення лінійної крайової задачі для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку до варіаційної задачі	15
Тема 5. Метод Рітца розв'язання крайової задачі для звичайного диференціального рівняння другого порядку	17
Ідея методу Рітца в загальному випадку	17
Застосування методу Рітца для розв'язання крайової задачі у випадку звичайного диференціального рівняння другого порядку	18
Лабораторна робота №1 Метод Рітца розв'язання крайової задачі для звичайного диференціального рівняння	19
Завдання до лабораторної роботи №1	19
Методичні рекомендації до лабораторної роботи №1	19
Контрольні питання	21
Тема 6. Застосування методу Рітца задачі Штурма-Ліувіля	21
Постановка задачі Штурма-Ліувіля	21
Застосування методу Рітца до наближеного розв'язання задачі Штурма-Ліувіля	22
Лабораторна робота №2 Метод Рітца розв'язання задачі Штурма-Ліувіля	23
Завдання до лабораторної роботи №2	23
Методичні рекомендації до лабораторної роботи №2	23
Контрольні питання	27
Тема 7. Варіаційний метод Рітца крайової задачі для рівняння в частинних похідних еліптичного типу	27
Постановка задачі	27
Зведення крайової задачі для рівняння Пуассона до варіаційної задачі	28
Метод Рітца для задачі Діріхле	28
Лабораторна робота №3 Варіаційний метод Рітца задачі Діріхле	29
Завдання до лабораторної роботи №3	29
Методичні рекомендації до лабораторної роботи №3	30
Контрольні питання	33
Тема 8. Проекційний метод Гальоркіна розв'язання крайової задачі для звичайного диференціального рівняння	33
Основні поняття та ключова теорема	33

Сутність проєкційного методу Гальоркіна розв'язання крайової задачі для звичайного диференціального рівняння.....	34
Лабораторна робота №4 Метод Гальоркіна розв'язання крайової задачі для звичайного диференціального рівняння	35
Завдання до лабораторної роботи №4	35
Методичні рекомендації до лабораторної роботи №4	36
Контрольні питання	39
Тема 9. Проєкційний метод Гальоркіна розв'язання крайової задачі для рівняння в частинних похідних.	39
Постановка задачі	39
Сутність проєкційного методу Гальоркіна розв'язання крайової задачі для рівняння в частинних похідних	39
Лабораторна робота №5 Метод Гальоркіна розв'язання крайової задачі для рівняння Пуассона	40
Завдання до лабораторної роботи №5	40
Методичні рекомендації до лабораторної роботи №5	42
Контрольні питання	43
3 РІЗНИЦЕВІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ.....	44
Тема 10. Різницевий метод розв'язання крайової задачі для звичайного диференціального рівняння.	44
Диференціальне рівняння другого порядку	44
Диференціальне рівняння четвертого порядку.....	45
Лабораторна робота №6 Метод скінченних різниць розв'язання крайової задачі для звичайного диференціального рівняння	47
Завдання до лабораторної роботи №6	47
Методичні рекомендації до лабораторної роботи №6	48
Контрольні питання	50
Тема 11. Різницевий метод розв'язання крайової задачі для рівнянь еліптичного типу.....	51
Сутність методу.	51
Лабораторна робота №7 Метод скінченних різниць розв'язання крайової задачі для рівняння Пуассона	52
Завдання до лабораторної роботи №7	52
Методичні рекомендації до лабораторної роботи №7	53
Контрольні питання	56
Тема 12. Різницевий метод розв'язання мішаної задачі для хвильового рівняння...56	56
Сутність методу	56
Лабораторна робота №8 Метод скінченних різниць розв'язання мішаної задачі для хвильового рівняння	58
Завдання до лабораторної роботи №8	59
Методичні рекомендації до лабораторної роботи №8	60
Контрольні питання	62
ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ.....	63
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	64
РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА	64
ДОДАТОК.....	67

ВСТУП

Курс «Наближені методи розв'язання крайових задач» є необхідною складовою частиною циклу професійної підготовки спеціальності. Він дає можливість закріпити і поглибити знання з основних і спеціальних розділів математичного, функціонального аналізу, диференціальних рівнянь, варіаційного числення та чисельних методів, а також навчитися їх застосовувати при наближеному розв'язанні крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь та рівнянь в частинних похідних.

Курс передбачає при реалізації наближених методів використання систем комп'ютерної алгебри, зокрема, Maple, що дозволяє позбавитися від громіздких обчислень інтегралів та розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь, використати засоби СКА для чисельного розв'язання крайових задач. Це дає змогу зосередитися суто на методах розв'язання саме крайових задач, що вивчаються в рамках курсу.

Метою вивчення навчальної дисципліни «Наближені методи розв'язання крайових задач» є отримання систематизованих теоретичних знань і отримання досвіду із застосування різницевих, варіаційних та проекційних методів розв'язання крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь та диференціальних рівнянь у частинних похідних..

Основними **завданнями** вивчення дисципліни є:

- засвоєння основних теоретичні положення щодо наближених методів розв'язання крайових задач;
- вивчення варіаційних, проекційних різницевих методів розв'язання крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь і рівнянь у частинних похідних;
- набуття навичок використання здобутих знань для отримання наближених розв'язків крайових задач;
- набуття вмінь використання спеціалізованого програмного забезпечення для наближеного розв'язання крайових задач;
- набуття здатності застосовувати набуті навички до розв'язання прикладних задач.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен **набути таких результатів навчання (знання, уміння тощо) та компетентностей:**

результати навчання:

- розуміти фундаментальну математику на рівні, необхідному для досягнення інших вимог освітньої програми;
- розв'язувати задачі придатними математичними методами, перевіряти умови виконання математичних тверджень, коректно переносити умови та твердження на нові класи об'єктів;
- вміти застосовувати та інтегрувати знання зі споріднених математичних напрямів до розв'язання складних математичних проблем;

- вміти розв'язувати крайові задачі, що виникають в різних розділах математики;
- демонструвати здатність до самонавчання, уміти організовувати власну діяльність;

компетентності:

- здатність вирішувати проблеми в професійній діяльності на основі абстрактного мислення, аналізу та синтезу;
- здатність застосовувати у професійній діяльності знання з галузей математичних наук;
- здатність до поглиблення знань і розуміння предметної області та професійної діяльності;
- здатність вчитися, здобувати нові знання та уміння.;
- здатність до пошуку, обробки та аналізу інформації з різних джерел, в тому числі іноземною мовою;
- здатність демонструвати теоретичні основи фундаментальних математичних дисциплін та застосовувати системний підхід під час виконання математичних досліджень та при розв'язанні конкретних прикладних задач;
- здатність досліджувати прикладні задачі за допомогою сучасних математичних методів, будувати математичні моделі об'єктів та процесів, проводити їх якісний та кількісний аналіз;
- здатність вибирати адекватний математичний апарат, використовувати відомі теоретичні поняття та факти для розв'язання конкретних дослідницьких задач та оцінювати обґрунтованість й ефективність використовуваних математичних підходів;
- здатність користуватися існуючими програмними засобами для пошуку інформації, проведення обчислень, статистичного аналізу та візуалізації даних.

Міждисциплінарні зв'язки. Даний курс ґрунтується на окремих розділах математичного, функціонального аналізу, диференціальних рівнянь, варіаційного числення та чисельних методів, використовує знання з окремих тем дисциплін «Вибрані питання теорії операторів», «Моделювання динамічних систем та процесів» та вміння, що набуваються в процесі вивчення дисципліни «Застосування сучасних мов програмування до розв'язування математичних задач». Теоретичні знання і практичні навички, надбані при вивченні курсу, застосовуються при розв'язанні звичайних диференціальних рівнянь і рівнянь у частинних похідних і у прикладних задачах, що зводяться до таких рівнянь, зокрема задач теорії пружності, механіки деформівного твердого тіла, теорії стійкості механічних систем. Матеріали, що надаються при вивченні курсу, використовуються при виконанні кваліфікаційних робіт магістрів робіт, наукових робіт.

ЗАГАЛЬНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ

Лабораторні заняття з дисципліни «Наближені методи розв’язання крайових задач» призначені для того, щоб студент під керівництвом викладача опрацьовував теоретичний матеріал, вчився застосовувати спеціальне програмне забезпечення для наближеного розв’язання крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь та рівнянь в частинних похідних.

Захист лабораторної роботи відбувається таким чином: студент демонструє етапи реалізації завдання та отримані результати, пояснює розв’язання завдань, відповідає на теоретичні запитання. Захист роботи – це презентація своїх результатів за допомогою комп’ютера, а також практичне виконання деяких елементів роботи у режимі реального часу. Після цього студент надсилає звіт з виконання лабораторної роботи до СЕЗН Moodle.

При виконанні кожної роботи необхідно ознайомитись із загальними теоретичними відомостями та матеріалами відповідної лекції (деякі моменти необхідно опрацьовувати самостійно); виконати практичні завдання; оформити звіт з виконання лабораторної роботи, який повинен містити:

- титульний аркуш;
- тему роботи;
- хід виконання відповідного завдання;
- файл з виконаним завданням.

Готовий звіт завантажується до СЕЗН Moodle у відведені викладачем терміни. Якщо розмір файлу перевищує 5Мб, то відповіді розміщуються на зовнішніх ресурсах, а до СЕЗН додається посилання на ці ресурси.

1 ПОПЕРЕДНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Мета: Ознайомитись з постановкою задачі та класифікацією методів розв'язання крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь та рівнянь в частинних похідних.

Тема 1. Постановка крайової задачі

Крайова задача – це задача теорії диференціальних рівнянь, в якій крайові умови задаються в точках межі області, на якій визначене відповідне диференціальне рівняння.

Наприклад, в задачі коливання струни крайові умови визначаються нульовими значеннями на кінцях відрізка. В задачі теплопровідності пластини крайові умови задаються на межі області, яка визначається такою пластиною.

Розрізняють крайові задачі для звичайних диференціальних рівнянь та рівнянь в частинних похідних.

Крайові задачі для звичайних диференціальних рівнянь

Розглянемо диференціальне рівняння n -го порядку

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (1.1)$$

Крайова задача передбачає пошук такої диференційовної n разів функції-розв'язку $y = y(x)$ рівняння (1.1), значення якої та її похідних

$$y_j^{(s)} = y^{(s)}(x_j) \quad (s = 0, 1, \dots, r_j)$$

в точках $x = x_j$ ($j = 1, 2, \dots, m$; $m \geq 2$) задовольняють n незалежні крайові умови

$$R_\nu(y_1, y_1', \dots, y_1^{(r_{1\nu})}, \dots, y_m, y_m', \dots, y_m^{(r_{m\nu})}) = 0 \quad (\nu = 1, 2, \dots, n), \quad (1.2)$$

де R_ν – лінійна або нелінійна функція, $r_{\nu s} \leq n - 1$.

Загальна крайова задача (1.1) – (1.2) може

- не мати розв'язків,
- мати один єдиний розв'язок,
- мати скінченну або нескінченну множину розв'язків.

Аналогічно ставлять крайові задачі для систем диференціальних рівнянь.

Найпростіші двоточкові крайові задачі для звичайних диференціальних рівнянь потребують пошуку функції $y = y(x)$, що задовольняє диференціальне рівняння другого порядку

$$y'' = f(x, y, y') \quad (1.3)$$

та одну з крайових умов, наведених нижче

- а) $y(a) = A, y(b) = B$,
- б) $y'(a) = A, y(b) = B$,
- в) $y(a) = A, y'(b) = B$,
- г) $y'(a) = A, y'(b) = B$.

Геометрична інтерпретація крайових умов показана на рис. 1.1 з однойменними підписами рисунків.

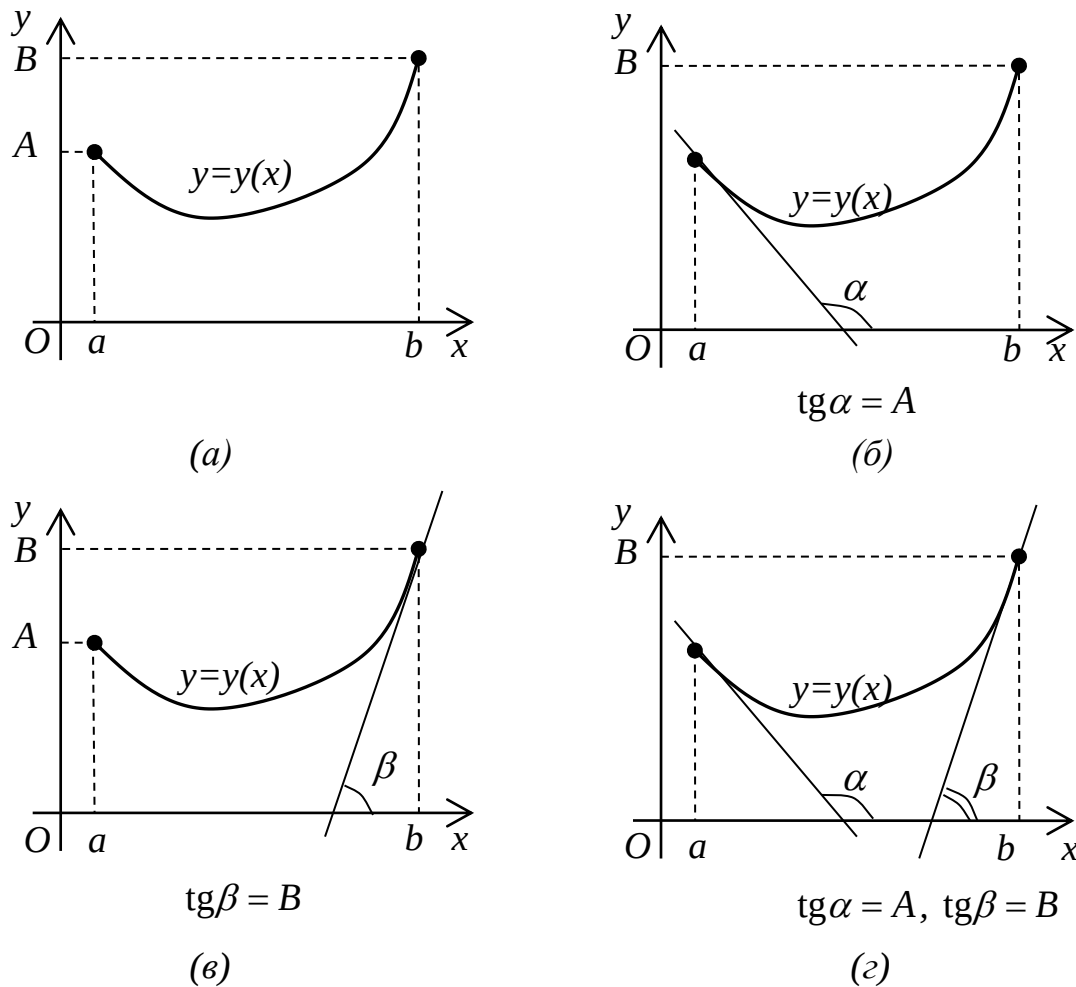


Рис. 1.1 – Геометрична інтерпретація крайових умов двоточкової крайової задачі

Окремий важливий клас крайових задач – *лінійні крайові задачі*. Вони передбачають лінійні диференціальні рівняння та крайові умови. Деякі випадки таких задач розглянемо в межах цього курсу.

Наступним важливим класом задач є такі, що вимагають пошуку нетривіальних розв'язків однорідних диференціальних рівнянь з однорідними крайовими умовами. В таких задачах наявний невідомий параметр, потрібно знайти таке його значення, щоб задача мала нетривіальні (ненульові) розв'язки. Відповідне значення параметра називається *власним значенням*, а розв'язки, що йому відповідають – *власними функціями*.

Прикладом задачі пошуку власних значень є дослідження стійкості стрижня, що вимагає пошуку такого значення тиску, за якого існує нетривіальний розв'язок відповідної крайової задачі. Найменше додатне значення тиску називають критичним.

Крайові задачі для рівнянь в частинних похідних

Розглянемо лише лінійні рівняння в частинних похідних другого порядку з двома змінними x, y

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0 \quad (1.4)$$

відносно невідомої двічі неперервно диференційовної функції $u = u(x, y)$ в області G , що має межу $\Gamma = \partial G$ (рис. 1.2).

Якщо рівняння (1.4) є лінійним зі змінними або сталими коефіцієнтами

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu = F(x, y) \text{ на } G, \quad (1.5)$$

то має місце поділ на класи:

- $D = AC - B^2 > 0$ – еліптичне рівняння;
- $D = 0$ – параболічне;
- $D < 0$ – гіперболічне;
- D не зберігає знак – мішане [5].

Тепер розглянемо крайові умови для рівняння еліптичного типу.

Перша крайова задача. На межі Γ області G (рис. 1.2) задана неперервна функція $\varphi(x, y)$.

Потрібно знайти функцію $u(x, y)$, що задовольняє рівняння (1.5) в області G , а на межі дорівнює $\varphi(x, y)$, тобто

$$u|_{\Gamma} = \varphi(x, y), (x, y) \in \Gamma.$$

Друга крайова задача. На $\Gamma = \partial G$ задана неперервна функція $\varphi_1(x, y)$. Знайти функцію $u(x, y)$, що задовольняє (1.5) на G , а на межі Γ її похідна вздовж нормалі до Γ (зовнішньої по відношенню до G) дорівнює $\varphi_1(x, y)$, тобто

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma} = \varphi_1(x, y), (x, y) \in \Gamma.$$

Третя крайова задача. На Γ області G задана неперервна функція $\varphi_2(x, y)$. Шукана функція $u(x, y)$ задовольняє (1.5) в G , а на межі справджує умову

$$\left(\alpha_0 u + \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial n} \right) \Big|_{\Gamma} = \varphi_3(x, y), (x, y) \in \Gamma,$$

де $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0$.

Для рівняння Лапласа

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

перша крайова задача називається *задачею Діріхле*, друга – *задачею Неймана*, третя – *мішаною крайовою задачею*. Зауважимо, що *розв'язок задачі Діріхле визначається однозначно*.

Деякі задачі, що визначаються диференціальними рівняннями в частинних похідних визначаються функціями, залежними від координат точок області G та часу t і передбачають наявність крайової та початкової умови.

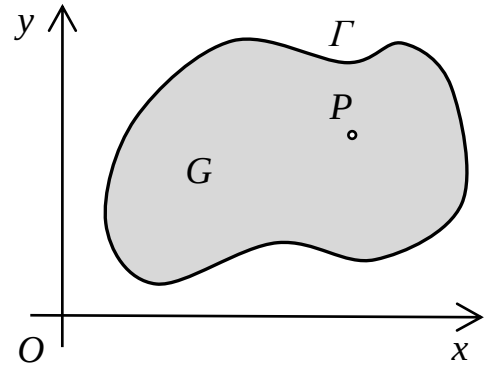


Рис. 1.2 – Схема області G

Тема 2. Класифікація методів розв'язання крайових задач

Якщо крайова задача має розв'язки, то він може бути або точними (аналітичними) або наближеними (чисельними).

Методи пошуку точних розв'язків вивчалися в рамках курсів диференціальних рівнянь та рівнянь математичної фізики. Тут будемо вивчати деякі наближені (чисельні) методи. Не вдаючись в деталі та не намагаючись осягнути всі методи наближеного розв'язання крайових задач, зазначимо лише деякі з них.

Деякі методи наближеного (чисельного) розв'язання крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь:

- зведення до задачі Коші двоточної крайової задачі для лінійних рівнянь другого порядку;
- варіаційний метод Рітца;
- проєкційний метод Гальоркіна;
- різницевий метод скінченних різниць;
- метод прогонки;
- метод колокації;
- метод найменших квадратів;
- інші.

Деякі методи наближеного (чисельного) розв'язання крайових задач для рівнянь в частинних похідних:

- варіаційний метод Рітца розв'язання задачі для рівнянь еліптичного типу;
- різницевий метод скінченних різниць – метод сіток;
- метод прогонки для рівняння теплопровідності;
- метод Монте-Карло розв'язання задачі Діріхле;
- інші.

Вивчення в рамках цього курсу акцентуємо на

- варіаційному методі Рітца,
- проєкційному методі Гальоркіна,
- різницевих методах

розв'язання крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь та рівнянь в частинних похідних.

Контрольні питання

1. Сформулювати постановку крайової задачі для звичайних диференціальних рівнянь.
2. Сформулювати постановку найпростішої двоточної крайової задачі. Дати геометричну інтерпретацію різних видів крайових умов.
3. Основні типи лінійних рівнянь в частинних похідних другого порядку.
4. Типи крайових умов для рівняння еліптичного типу. Задача Діріхле, задача Неймана.
5. Назвіть декілька методів розв'язання крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь та рівнянь в частинних похідних.

2 ВАРІАЦІЙНІ ТА ПРОЄКЦІЙНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

Мета: Засвоїти варіаційні та проєкційні методи розв'язання крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь та рівнянь в частинних похідних та навчитися їх застосовувати для конкретних крайових задач.

Тема 3. Основні теореми варіаційного методу розв'язання крайових задач

Поняття про функціонал і оператор

Розглянемо поняття функціонала і оператора, необхідні для формулювання крайових задач для диференціальних рівнянь [5].

Означення 2.1 Нехай $K = \{y(x)\}$ – множина функцій $y(x)$ незалежної змінної x або сукупності незалежних змінних $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Кажуть, що на множині K визначено *функціонал* Φ над полем дійсних чисел, якщо кожній функції $y(x) \in K$ ставиться у відповідність одне і лише одне число $\varphi \in \mathbb{R}$. Позначення: $\Phi : y(x) \rightarrow \varphi$; $\varphi = [\Phi y](x)$.

Множину $K = \{y(x)\}$ називають *областю визначення функціонала*.

Означення 2.2 Множину $K = \{y(x)\}$ називають *лінійною*, якщо

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall u, v \in K \quad \alpha u + \beta v \in K.$$

Означення 2.3 Функціонал Φ називають *лінійним*, якщо

- 1) його множина визначення K є лінійною;
- 2) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall u, v \in K \quad \Phi(\alpha u + \beta v) = \alpha \Phi(u) + \beta \Phi(v)$.

Приклад 2.1 Розглянемо множину $K = \{y(x)\}$ функцій, диференційовних в точці 0 та відповідність $[\Phi y](x) = y'(0)$ на K . Вона задає лінійний функціонал.

Означення 2.4 Кажуть, що на множині $K = \{y(x)\}$ визначено *оператор* L , якщо кожній функції $y(x) \in K$ ставиться у відповідність одна і лише одна функція $z(x)$, яка в загальному випадку може залежати від іншої змінної $t = (t_1, t_2, \dots, t_m)$. Позначення: $L : y(x) \rightarrow z(x)$; $z(x) = [Ly](x)$ або $z = Ly$.

Поняття *лінійного оператора* означається аналогічно до лінійного функціонала.

Приклад 2.2. Нехай $K = C^{(1)}[a; b]$ – простір неперервно диференційовних функцій на відрізку $[a; b]$. Тоді $[Ly](x) = \frac{d}{dx} y(x)$ – *оператор диференціювання*. Він є лінійним, а його значення – неперервні на $[a; b]$, тобто $[Ly](x) \in C[a; b]$.

Якщо $K = C^{(n)}[a; b]$ – простір неперервно диференційовних n разів функцій на відрізку $[a; b]$, а $p_k(x) \in C[a; b] \quad k = \overline{0, n}$, тоді відображення

$$[Ly](x) = p_0(x) + p_1(x) y'(x) + p_2(x) y''(x) + \dots + p_n(x) y^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n p_k(x) y^{(k)}(x)$$

є лінійним диференціальним оператором, причому $[Ly](x) \in C[a; b]$.

Запис лінійного диференціального рівняння в операторному вигляді:

$$[Ly](x) = f(x), \quad f(x) \in C[a; b].$$

Приклад 2.3 Розглянемо $K = \{u(x, y) \in C^{(2)}(G)\}$, G – область на площині.

На цій множині визначимо відображення

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Воно являє собою лінійний оператор, який називається *оператором Лапласа*.

Рівняння

$$\Delta u = f(x, y),$$

де $f(x, y)$ – задана функція, називається *рівнянням Пуассона*, а

$$\Delta u = 0$$

рівнянням Лапласа.

Розглянемо функцію на множині $K = \{y(x)\}$ неперервних на ω функцій, задану кратним або визначеним інтегралом, що має вигляд

$$(u, v) = \int_{\omega} u v d\omega.$$

Така функція є *скалярним добутком на K* .

Означення 2.5 Розглянемо лінійний оператор $L: K \rightarrow M$, де K, M – множини неперервних функцій на ω . Оператор називають *симетричним*, якщо $\forall u, v \in K \quad (u, Lv) = (v, Lu)$.

Оператор L (із зазначеними властивостями множини визначення та множини значень) називають *додатним*, якщо

$$1) (Lu, u) \geq 0 \quad \forall u \in K, \quad 2) (Lu, u) = 0 \Leftrightarrow u \equiv 0.$$

Приклад 2.4 Розглянемо множину $K = \{y(x) \in C^{(2)}[0; 1] : y(0) = 0, y'(1) = 0\}$, на якій визначимо оператор

$$[Ly](x) = -y''(x).$$

Тоді $[Ly](x) \in C[0; 1]$. Дослідимо його властивості. Оскільки

$$\begin{aligned} (u, Lv) &= -\int_0^1 u v'' dx = -uv' \Big|_0^1 + \int_0^1 u'v' dx = -\left(\underbrace{u(1)v'(1)}_{=0} - \underbrace{u(0)v'(0)}_{=0} \right) + u'v \Big|_0^1 - \int_0^1 v u'' dx = \\ &= \left(\underbrace{u'(1)v(1)}_{=0} - \underbrace{u'(0)v(0)}_{=0} \right) - \int_0^1 v u'' dx = (v, Lu), \end{aligned}$$

то оператор є симетричним. Тепер розглянемо (u, Lu) :

$$(u, Lu) = -\int_0^1 u u'' dx = -\left(\underbrace{u(1)u'(1)}_{=0} - \underbrace{u(0)u'(0)}_{=0} \right) + \int_0^1 (u')^2 dx = \int_0^1 (u')^2 dx \geq 0.$$

Оскільки u' – неперервна на відрізку $[0;1]$, то $(u, Lu) = \int_0^1 (u')^2 dx = 0$ тоді і тільки тоді, коли $u' = 0$ на $[0;1]$, тобто $u = \text{const}$. За умовою $u(0) = 0$, тому $u \equiv 0$.

Постановка варіаційної задачі

Нехай $[5]$ $K = \{y(x)\}$ – множина функцій, $\varphi = [\Phi y](x)$ – функціонал, заданий на K . Задачу, в якій потрібно знайти екстремум функціонала Φy називають *варіаційною*. Конкретизуємо дану постановку. Задача пошуку максимуму функціонала потребує визначення такої функції $\bar{y}(x) \in K$, що

$$\exists \varepsilon > 0 \forall y(x) \in K \quad 0 < \rho(y, \bar{y}) < \varepsilon \Rightarrow \Phi y \leq \Phi \bar{y}.$$

Задача на мінімум функціонала – функції $\bar{y}(x) \in K$, що має властивість:

$$\exists \varepsilon > 0 \forall y(x) \in K \quad 0 < \rho(y, \bar{y}) < \varepsilon \Rightarrow \Phi y \geq \Phi \bar{y}.$$

Функція ρ визначає метрику відповідного простору, в якому задається множина функцій K .

Теорема про зведення крайової задачі до варіаційної

Розглянемо область G з межею Γ . У випадку подальшого дослідження звичайного диференціального рівняння такі множини відповідно дорівнюють: $G = (a;b)$, $\Gamma = \{a;b\}$. У випадку рівняння в частинних похідних відносно n незалежних змінних, множина G – зв'язна відкрита множина евклідового простору $\mathbb{R}_2^n$ з множиною межових точок $\Gamma = \partial G$.

Припустимо, що диференціальне рівняння – звичайне або в частинних похідних – має неперервні коефіцієнти в $\bar{G} = G \cup \Gamma$ і неперервну функцію правої частини $f(P)$ на тій самій множині. Тут $P \in \bar{G}$ позначає точку в $\mathbb{R}$ або точку в $\mathbb{R}^n$, що задає сукупність незалежних змінних.

Розглянемо лінійну множину $K = \{y\}$ функцій y , що мають неперервні похідні потрібного порядку в $\bar{G}$. Задамо на K диференціальний оператор L , що визначає диференціальне рівняння, яке подається в операторному вигляді

$$Ly = f(P). \quad (2.1)$$

На межі Γ визначимо лінійні однорідні крайові умови

$$R[y] = 0. \quad (2.2)$$

Тут R – заданий лінійний функціонал або лінійний оператор нижчого порядку диференціювання за L .

Співвідношення (2.1) і (2.2) визначають крайову задачу з однорідними крайовими умовами.

Розв'язок крайової задачі з неоднорідними крайовими умовами

$$Ly = f(P), \quad (2.3)$$

$$R[y] = \varphi(P), P \in \Gamma \quad (2.4)$$

може бути знайдений як сума $y = z + y_1$ функції z , що є розв'язком однорідної задачі та функції y_1 потрібного рівня гладкості, що задовольняє крайову умову (2.4).

В реалізації варіаційного методу для наближеного розв'язання крайової задачі за мету ставиться зведення даної задачі до варіаційної.

Теорема 2.1 (про єдиність розв'язку крайової задачі у випадку його існування) [5]. Якщо оператор L має властивості:

вимога А) L – лінійний симетричний оператор;

вимога Б) L – додатний оператор, визначений на множині $K = \{y\}$,

тоді крайова задача, задана операторним рівнянням (2.1) і крайовою умовою (2.2), може мати один і лише один розв'язок на K , якщо він існує.

Теорема 2.2 (про зведення крайової задачі до варіаційної) [5].

Припустимо, що оператор L задовольняє властивості вимог А) і Б) на множині $K = \{y\}$. Розглянемо функціонал вигляду

$$\Phi[y] = (Ly, y) - 2(f, y) \equiv \int_{\omega} (Ly - 2f)y \, d\omega. \quad (2.5)$$

Якщо крайова задача (2.1) – (2.2) з однорідними крайовими умовами має за розв'язок функцію $\bar{y}$, тоді ця функція виступає мінімумом функціонала (2.5).

Також, якщо функція $\bar{y} \in K$ визначає мінімум функціонала (2.5), тоді вона є розв'язком рівняння (2.1).

Тема 4. Зведення лінійної крайової задачі для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку до варіаційної задачі

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння 2-го порядку із змінними коефіцієнтами

$$y'' + p_1(x)y' + q_1(x)y = f_1(x) \quad (2.6)$$

та лінійними крайовими умовами

$$\Gamma_a(y) \equiv \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A, \quad \Gamma_b(y) \equiv \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B, \quad (2.7)$$

де $p_1(x)$, $q_1(x)$, $f_1(x)$ – неперервні функції на $[a, b]$, α_i, β_i ($i = \overline{0, 1}$), $A, B \in \mathbb{R}$ – сталі, що задовольняють нерівності $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0$, $|\beta_0| + |\beta_1| \neq 0$.

Зведемо рівняння (2.6) до так званого самоспряженого вигляду [5]. Для цього помножимо обидві частини (2.6) на

$$p(x) = e^{\int p_1(x) \, dx}, \quad (2.8)$$

матимемо:

$$p(x)y'' + p(x)p_1(x)y' + p(x)q_1(x)y = p(x)f_1(x).$$

Оскільки

$$\frac{d}{dx}[p(x) \cdot y'] = \frac{d}{dx} \left(e^{\int p_1(x) dx} \right) \cdot y' + e^{\int p_1(x) dx} \cdot \frac{d}{dx}(y') \stackrel{(2.8)}{=} p_1(x) \cdot y' + p(x) \cdot y'',$$

то, вводячи нові функції

$$\boxed{q(x) = p(x)q_1(x), \quad f(x) = p(x)f_1(x)}, \quad (2.9)$$

отримаємо самоспряжене рівняння

$$\frac{d}{dx}[p(x)y'] + q(x)y = f(x), \quad (2.10)$$

де $p(x) > 0 \quad \forall x \in [a; b]$, $p'(x)$, $q(x)$, $f(x)$ – неперервні на $[a; b]$.

Уведемо оператор

$$Ly = -\frac{d}{dx}[p(x)y'] - q(x)y, \quad (2.11)$$

тоді рівняння (2.10) набуде операторної форми

$$Ly = -f(x). \quad (2.12)$$

Властивості оператора (2.11), що задовольняють однорідним крайовим умовам

$$\Gamma_a(y) = 0, \quad \Gamma_b(y) = 0 \quad (2.13)$$

1. Оператор, визначений співвідношенням (2.11), на множині K функцій, неперервно диференційовних функцій, що задовольняють однорідним крайовим умовам (2.13), є симетричним [5].
2. Якщо задовольняються умови

$$q(x) \leq 0 \quad \forall x \in [a; b], \quad \alpha_1 \leq 0, \quad \beta_1 \geq 0, \quad (2.14)$$

тоді оператор, визначений через (2.11) на зазначеній множині функцій, що задовольняють однорідні крайові умови (2.13), є додатним [5].

В [5], застосовуючи виписані властивості та теорему про зведення крайової задачі до варіаційної, прийшли до висновку, що крайова задача (2.11), (2.13) за умов (2.14) еквівалентна варіаційній задачі на мінімум функціонала

$$\Phi[y] = (Ly, y) + 2(f, y) \quad (2.15)$$

на множині функцій K із зазначеними вище властивостями.

У даному випадку функціонал (2.15) набуває вигляду [5]:

$$\begin{aligned} \Phi[y] = & p(a)y(a)y'(a) - p(b)y(b)y'(b) + \\ & + \int_a^b [p(x)y'^2 - q(x)y^2 + 2f(x)y] dx. \end{aligned}$$

Доданки, що не стоять під знаком інтеграла, не впливають на функцію, в якій функціонал досягає мінімуму, тому крайову задачу (2.11), (2.13) за умов (2.14) зведеться до задачі пошуку мінімуму функціонала

$$\boxed{\Phi_1[y] = \int_a^b [p(x)(y')^2 - q(x)y^2 + 2f(x)y] dx}. \quad (2.16)$$

Має місце аналогічний висновок для крайової задачі (2.11) за неоднорідної крайової умови (2.7) та у випадку, коли задовольняються

нерівності (2.14), що така задача еквівалентна задачі на мінімум для функціонала (2.16) [5].

Тема 5. Метод Рітца розв'язання крайової задачі для звичайного диференціального рівняння другого порядку

Ідея методу Рітца в загальному випадку

Метод Рітца використовується для наближеного розв'язання варіаційної задачі [5]. Розглянемо функціонал

$$\Phi[y] = (Ly, y) - 2(f, y), \quad (2.17)$$

визначений на лінійній множині функцій $K = \{y\}$, де L – додатний лінійний оператор на цій множині, а f – задана неперервна функція на множині $\bar{G}$. Припустимо також, що функції множини $K = \{y\}$ задовольняють лінійну крайову умову

$$R[y] = \varphi(P), P \in \Gamma, \quad (2.18)$$

де R – заданий лінійний функціонал, φ – задана функція, як правило, – неперервна на Γ .

Розглянемо скінченну сукупність достатньо гладких на $\bar{G}$ функцій $\{u_k(P)\}_{k=0}^n$ з властивостями:

- **властивість 1:** функція $u_0(P)$ задовольняє неоднорідні крайові умови (2.18);
- **властивість 2:** кожна з функцій $u_k(P), k = \overline{1, n}$ задовольняє однорідні крайові умови

$$R[u_k] = 0, k = \overline{1, n}. \quad (2.19)$$

Наближений розв'язок варіаційної задачі (2.17), (2.18) подається сумою

$$\bar{y}(P, C_1, C_2, \dots, C_n) = u_0(P) + \sum_{j=1}^n C_j u_j(P). \quad (2.20)$$

в якій коефіцієнти $\{C_j\}_{j=1}^n$ підлягають визначенню. Тоді

$$\forall \{C_j\} \quad R[\bar{y}] \equiv R[u_0] + \sum_{j=1}^n C_j R[u_j] = \varphi(P), P \in \Gamma.$$

Для визначення коефіцієнтів $\{C_j\}_{j=1}^n$ підставимо функцію (2.20) у функціонал (2.17):

$$\Phi[\bar{y}] = \bar{\Phi}(C_1, C_2, \dots, C_n).$$

Задовольняємо необхідну умову екстремуму функції багатьох змінних:

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial C_j} = 0, j = \overline{1, n}. \quad (2.21)$$

Точність методу залежить від кількості лінійно незалежних функцій n . Чим більше таких функцій використовується, тим краща точність наближеного розв'язку.

Застосування методу Рітца для розв'язання крайової задачі у випадку звичайного диференціального рівняння другого порядку

Розглянемо крайову задачу (2.6) – (2.7). в зазначених припущеннях [5].

- Вводимо заміни (2.8), (2.9).
- Розглядаємо варіаційну задачу на мінімум функціонала $\Phi_1[y]$, поданого формулою (2.16) за крайової умови (2.9).
- Наведемо приклад вибору лінійно незалежних функцій $\{u_j(x)\}_{j=0}^n$, що задовольняють властивості 1 та 2. Якщо крайова умова має вигляд

$$y(a) = A, \quad y(b) = B, \quad (2.22)$$

то за потрібну систему можна обрати

$$u_0(x) = A + \frac{B-A}{b-a}(x-a), \quad u_j(x) = (x-a)^j(x-b), \quad j = \overline{1, n} \quad (2.23)$$

або

$$u_0(x) = A + (B-A) \sin \frac{\pi(x-a)}{2(b-a)}, \quad u_j(x) = \sin \frac{\pi j(x-a)}{2(b-a)}, \quad j = \overline{1, n} \quad (2.24)$$

залежно від вигляду функцій $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ і передбачуваного вигляду розв'язку даної крайової задачі.

- Наближений розв'язок (2.2) шукаємо у вигляді

$$\bar{y}(x) = u_0(x) + \sum_{j=1}^n C_j u_j(x). \quad (2.25)$$

- Знаходимо образ функціонала (2.16) для функції (2.25)

$$\begin{aligned} \Phi_1[\bar{y}] = & \int_a^b \left[p(x) \left(u_0'(x) + \sum_{j=1}^n C_j u_j'(x) \right)^2 - q(x) \left(u_0(x) + \sum_{j=1}^n C_j u_j(x) \right)^2 + \right. \\ & \left. + 2f(x) \left(u_0(x) + \sum_{j=1}^n C_j u_j(x) \right) \right] dx = \bar{\Phi}(C_1, C_2, \dots, C_n). \end{aligned}$$

- Невідомі коефіцієнти шукаємо, розв'язуючи систему (2.21).

Зауваження 2.1 Якщо крайова умова має загальний характер (2.7), тоді систему лінійно незалежних функцій можна шукати у вигляді

$$u_j(x) = M + (x-a)^{j+1} + N(x-b), \quad j = \overline{0, n},$$

а коефіцієнти M і N шукати, підставляючи зазначене подання у неоднорідні або однорідні крайові умови відповідно:

$$\Gamma_a(u_0) = A, \quad \Gamma_b(u_0) = B; \quad \Gamma_a(u_j) = 0, \quad \Gamma_b(u_j) = 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Лабораторна робота №1 Метод Рітца розв'язання крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

Мета: навчитися застосовувати метод Рітца для розв'язання крайової задачі для звичайного диференціального рівняння другого порядку за допомогою СКА.

Завдання до лабораторної роботи №1

1. Знайти наближені розв'язки крайової задачі методом Рітца та побудувати графіки отриманих наближених розв'язків у випадку його подання лінійною комбінацією 3, 4 і 5 лінійно незалежних функцій простору $C^{(2)}[a, b]$.
2. Знайти точний або чисельний розв'язок засобами пакету комп'ютерної алгебри MAPLE (або ін.) і побудувати його графік.
3. Зробити висновок про збіжність послідовності наближених розв'язків до точного.

Варіанти завдань наведено в табл. 2.1.

Значення для s такі: $s = 2$ – для денної форми навчання, $s = 1$ – для заочної.

Таблиця 2.1 – Варіанти завдань до лабораторної роботи №1

Варі- ант	Крайова задача 1.1	Крайова задача 1.2
1	$y'' - x y + x = 0, \quad y(0) = y(1) = s$	$y'' - 2xy' - 2y = 5x + 1, \quad y(0) = 0, y(1) = s$
2	$y'' + 2xy + x = 0, \quad y(0) = y(1) = s$	$y'' + 2xy' - 4y = 2x, \quad y(0) = 0, y(1) = s$
3	$y'' + x y + x = 0, \quad y(0) = y(-1) = s$	$y'' - 2xy' - 3y + 2x = 0, \quad y(-1) = y(1) = s$
4	$y'' - 2xy - 2x = 0, \quad y(0) = y(1) = s$	$y'' - 2y' - 5xy = x, \quad y(0) = 0, y(1) = s$
5	$y'' + x y = x, \quad y(0) = y(-1) = s$	$y'' - 2xy' - 2y = 3x, \quad y(0) = 0, y(1) = s$
6	$y'' + 4xy = 4x, \quad y(0) = 0, y(-1) = s$	$y'' - x^2 y' - y = x, \quad y(0) = y(1) = s$
7	$y'' - 2x y = 3x, \quad y(0) = y(1) = s$	$y'' + x y' - 2xy = x - 2, \quad y(-1) = y(1) = s$
8	$y'' - xy = 5x, \quad y(0) = y(1) = s + 1$	$y'' - 2xy' - 2y = 5x, \quad y(0) = y(1) = s$
9	$y'' - 3x y = 2x, \quad y(0) = y(1) = s$	$y'' - 2xy' - 2y = 3x - 1, \quad y(0) = 0, y(1) = s$
10	$y'' - 2xy - 3 = 0, \quad y(0) = y(1) = s$	$y'' + 3y' - 4xy = 2x + 1, \quad y(0) = 0, y(1) = s$

Методичні рекомендації до лабораторної роботи №1

Задача 2.1 Розв'яжемо крайову задачу

$$y'' - (x+1)y' - 2x y = x - 5; \quad y(1) = -1; \quad y(3) = 2.$$

Розв'язання. У даному випадку відповідно до (2.6) і (2.22) маємо:

$$p_1(x) = -(x+1); \quad q_1(x) = -2x; \quad f_1(x) = x - 5, \quad (2.26)$$

$$a = 1; \quad b = 3; \quad A = -1; \quad B = 2. \quad (2.27)$$

Розв'язання проведемо в системі комп'ютерної алгебри Maple.

- Спочатку потрібно ввести вхідні дані, визначені співвідношеннями (2.26) і (2.27).

- Далі визначаємо функції $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ через співвідношення (2.8) і (2.9). Звернемо увагу, що в умовах даної задачі буде здійснюватися нерівність $q(x) < 0$.
- Потім виписуємо функціонал

$$> F := \int (p(x) * (\text{diff}(y(x), x))^2 - q(x) * y(x)^2 + 2 * f(x) * y(x), x = a .. b):$$

- Коефіцієнти диференціального рівняння є многочленами, тому систему лінійно незалежних функцій задаємо формулами (2.23), що подається в СКА Maple операторами:

$$> u(x)[0] := A + (B - A) * (x - a) / (b - a):$$

$$> \text{for } j \text{ to } N \text{ do } u(x)[j] := (x - a)^j * (b - x) \text{ od:}$$

Тут $N = n$ – кількість лінійно незалежних функцій, що задовольняють однорідні крайові умови.

- Наближений розв'язок подамо формулою (3.9):

$$y(x) := u(x)[0] + \text{sum}(c[i] * u(x)[i], i = 1..N);$$

- Визначаємо невідомі сталі, розв'язуючи систему (2.21):

$$> \text{for } j \text{ to } N \text{ do } rr[j] := \text{evalf}(\text{diff}(F, c[j]), 16) \text{ od:}$$

$$> \text{sys} := \{\text{seq}(rr[jj] = 0, jj = 1 .. N)\}; \text{var} := \{\text{seq}(c[jj], jj = 1 .. N)\};$$

$$> R := \text{solve}(\text{sys}, \text{var});$$

- Якщо після розв'язання СЛАР застосувати оператор `assign`, то коефіцієнтам присвояться значення відповідних розв'язків системи, а наближений розв'язок набуде вигляду конкретного многочлен.
- Обираючи $N = 3$, отримаємо наближений розв'язок $y(x)$ у вигляді

$$-2.090999391 - 1.374881513x + 4.574097910x^2 - 2.552117410x^3 + 0.4439004054x^4$$

При $N = 10$, отримаємо наближений розв'язок $y(x)$ –

$$\begin{aligned} & -10.10241351x + 25.95759571x^2 - 0.9905584937 - 26.08542255x^3 + 11.95780095x^4 \\ & - 0.315937429x^5 - 2.261015088x^6 + 0.9675766774x^7 - 0.1113293363x^8 \\ & - 0.02217479881x^9 + 0.006181137721x^{10} - 0.0003032797005x^{11} \end{aligned}$$

- СКА Maple має інструмент для пошуку чисельного розв'язку диференціального рівняння, побудову графіку функції-розв'язку та ін. Застосувати зазначений інструмент можна в такий спосіб:

$$> \text{with}(\text{plots});$$

$$> eq := \text{diff}(\text{diff}(yy(x), x), x) + p1(x) * (\text{diff}(yy(x), x)) + q1(x) * yy(x) - f1(x);$$

$$> RR := \{eq, yy(a) = A, yy(b) = B\};$$

$$> RR1 := \text{dsolve}(RR, yy(x), \text{numeric}); G2 := \text{odeplot}(RR1);$$

- Для одночасного зображення трьох розв'язків використаємо оператор `display`. У даному випадку графіки набудуть вигляду, зображеному на рис. 2.1.

На рис. 2.1 суцільною чорною лінією побудовано графік функції, отриманий методом Рітца для $N=3$, точковою синьою – для $N=10$, а суцільною червоною – засобами чисельного інтегрування, закладеними в СКА Maple.

Збільшення кількості лінійно незалежних функцій зменшує відхилення між функціями-розв'язками, отриманими методом Рітца та чисельними розв'язками, знайденими засобами СКА. Це свідчить про збіжність послідовності наближених розв'язків до точного.

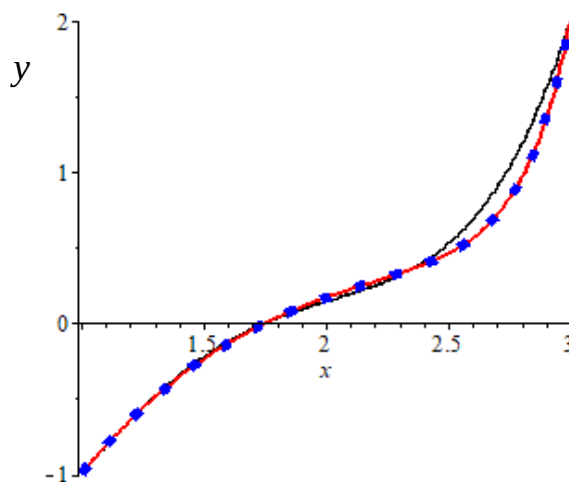


Рис. 2.1 – Графічне подання результатів розв'язання задачі 2.1

Контрольні питання

1. Дайте означення функціонала та оператора.
2. Сформулюйте постановку варіаційної задачі.
3. Сформулюйте теорему про зведення крайової задачі до варіаційної.
4. Опишіть ідею методу Рітца у загальному вигляді.
5. Яким властивостям мають задовольняти функції лінійно незалежної системи?
6. Опишіть послідовність дій для застосування методу Рітца до крайової задачі для звичайного диференціального рівняння.
7. Який фактор впливає на точність наближеного розв'язку крайової задачі, отриманого методом Рітца?

Тема 6. Застосування методу Рітца задачі Штурма-Ліувіля.

Постановка задачі Штурма Ліувіля

Розглянемо [5] однорідне самоспряжене диференціальне рівняння

$$\frac{d}{dx}[p(x) y'] + (q(x) + \lambda \rho(x))y = 0 \quad (2.28)$$

з однорідними крайовими умовами

$$\Gamma_a(y) \equiv \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = 0, \quad \Gamma_b(y) \equiv \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = 0 \quad (2.29)$$

де $p(x) > 0$, $q(x)$, $\rho(x)$ – неперервні функції на $[a, b]$, $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0$, $|\beta_0| + |\beta_1| \neq 0$, λ – параметр.

Вочевидь, така задача має нульовий розв'язок, проте задача Штурма-Ліувіля потребує пошуку нетривіальних розв'язків, а саме:

- потрібно знайти такі значення параметра λ , які називають власними значеннями задачі Штурма-Ліувіля, за якого існує ненульовий розв'язок задачі (2.28) – (2.29);
- також потрібно визначити ті нетривіальні розв'язки, які носять назву власних функцій, що відповідають власним значенням.

Система власних функцій є зчисленною системою лінійно незалежних функцій. Метод Рітца дозволяє знайти наближений розв'язок задачі Штурма-Ліувіля зі скінченної кількості власних чисел та власних функцій зазначеної системи.

Застосування методу Рітца до наближеного розв'язання задачі Штурма-Ліувіля

Розглянемо [5] окремий випадок однорідних крайових умов у вигляді:

$$y(a) = 0, y(b) = 0. \quad (2.30)$$

Задача зводиться до мінімізації функціонала

$$\Phi_1[y] = \int_a^b [p(x)y'^2 - (q(x) + \lambda \rho(x)) y^2] dx, \quad (2.31)$$

що передбачає пошук ненульових функцій $y(x, \lambda)$, що задовольняють крайові умови

$$y(a, \lambda) = 0, y(b, \lambda) = 0.$$

Наближені власні функції подаються лінійною комбінацією лінійно незалежних функцій $\{u_j(x)\}_{j=1}^n$, які задовольняють крайові умови (2.30), і записується у вигляді

$$\bar{y}(x, \lambda) = \sum_{j=1}^n C_j(\lambda) u_j(x). \quad (2.32)$$

Вибір лінійно незалежних функцій може бути реалізованим через подання (2.23) або (2.24).

Для визначення власних значень та власних функцій

- підставляємо функцію (2.32) у функціонал (2.31);
- мінімізуємо його з використанням необхідної умови локального екстремуму функції багатьох змінних, яка записуємо через співвідношення (2.21);
- приходимо до однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), яка має ненульовий розв'язок, якщо її визначник дорівнює нулю;

- прирівнюємо визначник однорідної СЛАР до нуля, розв'язуємо утворене рівняння і отримаємо наближені власні значення задачі Штурма-Ліувіля;
- підставляючи власне значення λ до однорідної СЛАР, знаходячи її фундаментальний розв'язок $\{C_j(\lambda)\}_{j=1}^n$, а разом з тим і наближену власну функцію, що відповідає власному значенню λ .

Точність наближеного розв'язку покращується із збільшенням кількості n лінійно незалежних функцій.

Лабораторна робота №2 Метод Рітца розв'язання задачі Штурма-Ліувіля

Мета: навчитися застосовувати метод Рітца для наближеного розв'язання задачі Штурма-Ліувіля за допомогою СКА.

Завдання до лабораторної роботи №2

Методом Рітца наближено розв'язати задачу Штурма-Ліувіля: визначити перші 2, 3 та 4 власні значення і власні функції задачі, що відповідають їм у задачі Штурма-Ліувіля для даного рівняння і даних крайових умов, наведених в табл. 2.2 індивідуальних варіантів.

Результати порівняти для перших двох власних значень та відповідних їм функцій. Значення для s такі:

$s = 2$ – для денної форми навчання, $s = 1$ – для заочної.

Таблиця 2.2 – Варіанти завдань до лабораторної роботи №2

Варіант	Крайова задача	
1	$y'' + (sx + \lambda)y = 0,$	$y(0) = y(1) = 0$
2	$y'' + 2s \times \lambda y = 0,$	$y(0) = y(1) = 0$
3	$y'' + (sx - \lambda)y = 0,$	$y(0) = y(1) = 0$
4	$y'' - (2s + \lambda)y = 0,$	$y(0) = y(1) = 0$
5	$y'' + (\lambda - s)y = 0,$	$y(0) = y(1) = 0$
6	$y'' + (4x + s\lambda)y = 0,$	$y(0) = y(1) = 0$
7	$y'' + (\lambda - 2s)y = 0,$	$y(0) = y(1) = 0$
8	$y'' + (x - s\lambda)y = 0,$	$y(0) = y(1) = 0$
9	$y'' - (3s + \lambda)y = 0,$	$y(0) = y(1) = 0$
10	$y'' + (\lambda s - 2x)y = 0,$	$y(0) = y(1) = 0$

Методичні рекомендації до лабораторної роботи №2

Задача 2.2 Методом Рітца наближено розв'язати задачу Штурма-Ліувіля
 $y'' + (-2x + \lambda)y = 0, \quad y(1) = y(3) = 0.$

Розв'язання.

- У даному випадку покладемо

$$p(x) = 1; \quad q_1(x) = -2x + \lambda; \quad a = 1; \quad b = 3.$$

- В СКА визначимо функціонал

$$> F := \int (p(x) * (\text{diff}(y(x), x))^2 - q_1(x) * y(x)^2, x = a .. b);$$

а лінійно незалежну систему функцій $\{u_j(x)\}_{j=1}^N$ задамо аналогічно, як в лабораторній роботі №1. Зверніть увагу, що нульова функція тут не визначається!

- Далі описуємо СЛАР, як в попередній лабораторній роботі. Щоб знайти матрицю СЛАР, можна використати зазначений нижче програмний код, який передбачає в рівняннях системи обнуління коефіцієнтів, що не відповідають місцю елемента матриці, та прирівнювання до 1 такого коефіцієнта у супротивному випадку:

```
> with(linalg): M := matrix(N, N);
  for i1 to N do
    for j to N do
      M[i1, j] := rr[i1];
      for l to N do
        if j = l then M[i1, j] := subs(c[l] = 1, M[i1, j]) fi;
        if j <> l then M[i1, j] := subs(c[l] = 0, M[i1, j]) fi
      od: od: od;
```

Пропонуємо студентам знайти інший спосіб пошуку матриці СЛАР в Maple.

- Знаходимо власні значення $\{\lambda_1(i)\}_{i=1}^N$ задачі Штурма-Ліувіля, розв'язуючи рівняння, в якому визначник матриці прирівнюємо до нуля:

```
> RR := solve(det(M), lambda);
> for i1 to N do lambda1[i1] := RR[i1] od;
```

- Тепер перейдемо до пошуку власних функцій, що відповідають власним значенням $\lambda_1(i), i = \overline{1, N}$. Запропонуємо один з можливих способів розв'язання даної задачі. Оператор `gausselim` дозволяє звести матрицю до діагональної методом Гаусса. Рядок, в якому діагональний елемент буде близьким до нуля, є лінійно залежним від інших рядків діагональної матриці. Тому такий рядок прибирається з розгляду для подальшого розв'язання системи. Отриманий розв'язок підставляємо у функцію (2.32) і отримаємо відповідну власну функцію. Нижче наведемо відповідний програмний код Maple з результатами (номер елемента, відповідне власне значення та власна функція) при $N = 4$.

>

```

M1 := matrix(N,N); C := vector(N);
for ll to N do
  for i1 to N do
    for j to N do
      M1[i1,j] := subs(lambda=lambdaI[ll],M[i1,j])
    od:od:
M2 := gausselim(M1); Eq := multiply(M2,C);
for i2 to N do
  if abs(M2[i2,i2]) < 10^(-3) then i0 := i2 fi;
od:
var := {seq(C[i],i=1..i0-1),seq(C[i],i=i0+1..N)};
sys := {seq(Eq[i],i=1..i0-1),seq(Eq[i],i=i0+1..N)};
Rs := solve(sys,var);
yy(x)[ll] := y(x);
for i3 to N do
  if i3 < i0 then yY := subs(c[i3]=rhs(Rs[i3]),yy(x)[ll]) fi;
  if i3 = i0 then yY := subs(c[i0]=C[i0],yy(x)[ll]) fi;
  if i3 > i0 then yY := subs(c[i3]=rhs(Rs[i3-1]),yy(x)[ll]) fi;
  yy(x)[ll] := yY od;
yy(x)[ll] := expand(yY/C[i0]); print(ll,lambdaI[ll],yy(x)[ll]) od:

```

$$1, 6.397504010, 87.50521519x^2 - 56.69306104x + 7.22229253 - 48.48333582x^3 + 11.44888915x^4 - x^5$$

$$2, 13.90326107, 57.99119281x^2 - 41.60066615x + 10.30917890 - 35.50459693x^3 + 9.804891375x^4 - x^5$$

$$3, 29.47845971, 254.2717212x^2 - 282.6531597x + 113.9743901 - 102.6031236x^3 + 18.01017205x^4 - x^5$$

$$4, 52.51258293, 71.52255250x^2 - 63.85967053x + 21.83560779 - 38.47070560x^3 + 9.972215831x^4 - x^5$$

Зауважимо, що наведений код не носить універсального характеру, тому для кожного варіанта потрібно написати власний код.

Порівняємо результати. В табл. 2.3 наведено два перших власних значення. На рис. 2.2 – графіки власних функцій, які попередньо нормовано, тобто поділено на найбільше значення модуля отриманої власної функції. Червоним суцільним лініям відповідають власні функції, отримані при $N = 2$, синіми пунктирними – $N = 3$, зеленим штрих-пунктирним – $N = 4$.

За наведеними результатами складно зробити висновок про точність наближеного розв'язку.

Таблиця 2.3 – наближені власні значення задачі 2.2

N	λ_1	λ_2
2	6.429198089	14.57084530
3	6.402671314	14.51075236
4	6.397516941	13.90387056

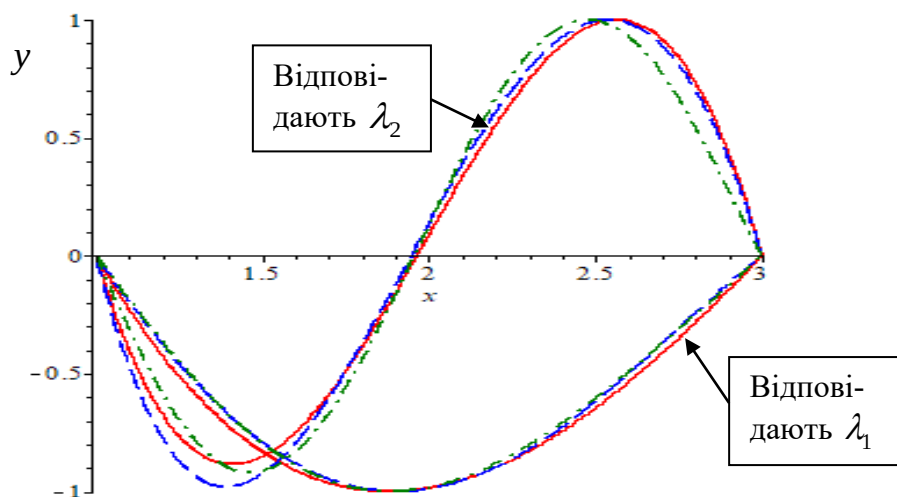


Рис. 2.2 – Власні функції задачі 2.2

Наступна задача дозволяє провести порівняння та зробити висновки, оскільки має точний розв'язок.

Задача 2.3 Методом Рітца наближено розв'язати задачу Штурма-Ліувіля $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = y(1) = 0$.

Розв'язання. Точний розв'язок даної задачі Штурма-Ліувіля:

власні значення – $\pi^2 j^2$, $j \in \mathbb{N}$, власні функції – $\sin(\pi j)$, $j \in \mathbb{N}$.

Використовуючи зазначену в задачі 2.2 схему, знайдемо результати. В табл. 2.4 та на рис. 2.3 наведено як результати наближених обчислень, так і точних.

Таблиця 2.4 – Наближені та точні власні значення задачі 2.3

N	λ_1	λ_2
2	10.00000000	41.99999836
3	9.869749582	42.00000568
4	9.869749123	39.50131998
точні	9.869604404	39.47841762

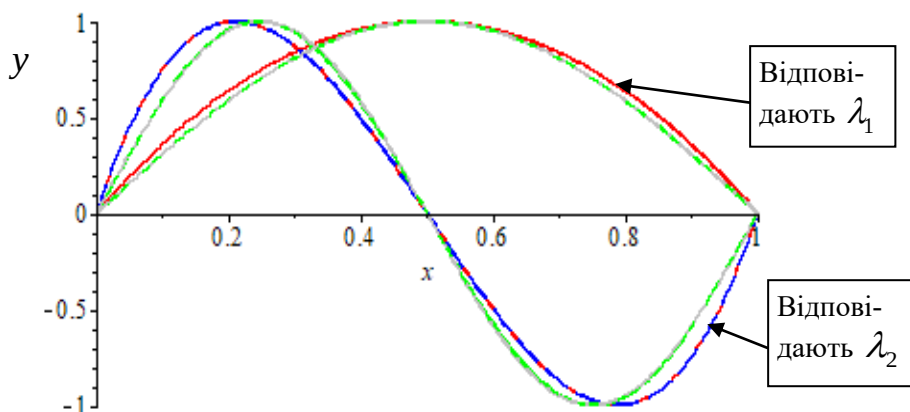


Рис. 2.3 – Власні функції задачі Штурма-Ліувіля

На рис. 2.3 використано аналогічну кольорову гаму для подання графіків, як і в задачі 2.2 на рис. 2.2, за винятком графіків, зображених сірими суцільними лініями, які відповідають точним розв'язкам. Найкраще узгоджується з точними результатами наближений розв'язок, знайдений при $N = 4$, тобто з використанням 4-х лінійно незалежних функцій.

Контрольні питання

1. Сформулювати постановку задачі Штурма-Ліувіля.
2. Означте поняття власних значень та власних функцій.
3. Опишіть ідею методу Рітца для наближеного розв'язання задачі Штурма-Ліувіля.
4. Яка потужність множини розв'язків задачі Штурма-Ліувіля для точного та наближеного розв'язку?
5. Які властивості функцій, що використовуються в лінійній комбінації для подання наближеного розв'язку?
6. Від чого залежить точність наближеного розв'язку задачі Штурма-Ліувіля.

Тема 7. Варіаційний метод Рітца крайової задачі для рівняння в частинних похідних еліптичного типу

Постановка задачі

Як вже було розглянуто в прикладі 2.3, введемо множину $K = \{u(x, y) \in C^{(2)}(\bar{G})\}$, де G – область на площині, тобто зв'язна відкрита множина евклідового простору $\mathbb{R}_2^2$, множина $\bar{G} = G \cup \Gamma$ є замиканням G , а $\Gamma = \partial G$ – межа G .

На множині K розглянемо оператор Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (2.33)$$

а разом з ним рівняння Пуассона

$$-\Delta u = f(x, y), \quad (2.34)$$

де $f(x, y) \in C(G)$ – задана неперервна на G функція. Окремим випадком (2.34) є рівняння Лапласа

$$\Delta u = 0. \quad (2.35)$$

Потрібно знайти розв'язок рівняння (2.34) або (2.35) в класі функцій K , який задовольняє крайову умову

$$u|_{\Gamma} = \varphi(P), P \in \Gamma. \quad (2.36)$$

Тут $P = (x, y)$ і $\varphi(P)$ задана неперервна функція.

Крайова задача (2.35), (2.36) носить назву *задачі Діріхле*.

Розглянемо оператор

$$Lu = -\Delta u. \quad (2.37)$$

Властивості оператора (2.37), заданого на класі K функцій, що задовольняють однорідну крайову умову

$$u|_{\Gamma} = 0. \quad (2.38)$$

- оператор L симетричний;
- оператор L додатний [5].

Зведення крайової задачі для рівняння Пуассона до варіаційної задачі

Відповідно до теореми 2.2 про зведення крайової задачі до варіаційної, крайова задача (2.34), (2.37) еквівалентна варіаційній, про мінімум функціонала

$$\Phi[u] = (Lu, u) - 2(f, u) \equiv \iint_G (Lu - 2f)u \, dx \, dy.$$

Зазначений функціонал на класі K функцій, що задовольняють однорідну крайову умову, допускає зведення до вигляду [5].

$$\Phi[u] = \iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - 2fu \right] dx \, dy. \quad (2.39)$$

Задача (2.35), (2.36) з неоднорідною крайовою умовою так само еквівалентна варіаційній задачі на мінімум функціонала (2.39) в класі функцій K , що задовольняють умову (2.36).

Метод Рітца для задачі Діріхле

Розглянемо задачу Діріхле (2.35), (2.36) [5]; така задача еквівалентна варіаційній задачі на мінімум функціонала

$$\Phi[u] = \iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx \, dy \quad (2.40)$$

в класі функцій K , що задовольняють умову (2.36).

Побудуємо систему лінійно незалежних (координатних) функцій $\{u_j(x, y)\}_{j=0}^n \in C^{(2)}(\bar{G})$, що задовольняють умови на межі $\Gamma = \partial G$ області G :

$$u_0(x, y)|_{\Gamma} = \varphi(x, y), \quad u_j(x, y)|_{\Gamma} = 0 \quad \forall j = \overline{1, n}. \quad (2.41)$$

Тобто нульова функція задовольняє неоднорідну крайову умову, а інші координатні функції – однорідну.

Наближений розв'язок подаємо лінійною комбінацією координатних функцій

$$\bar{u}(x, y) = u_0(x, y) + \sum_{j=1}^n C_j u_j(x, y). \quad (2.42)$$

Внаслідок (2.41), $\bar{u}(x, y)|_{\Gamma} = \varphi(x, y)$, $\forall \{C_j\}_{j=1}^n$. Якщо покласти $C_0 = 0$, то після підстановки подання наближеного розв'язку (2.42) у функціонал (2.40), отримаємо:

$$\Phi[\bar{u}] = \iint_G \left[\left(\sum_{j=0}^n C_j \frac{\partial u_j}{\partial x} \right)^2 + \left(\sum_{j=0}^n C_j \frac{\partial u_j}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = F(C_1, C_2, \dots, C_n).$$

Щоб знайти мінімум функції багатьох змінних використаємо необхідну умову локального екстремуму:

$$\frac{\partial F}{\partial C_k} = 2 \iint_G \left[\left(\sum_{j=0}^n C_j \frac{\partial u_j}{\partial x} \right) \frac{\partial u_k}{\partial x} + \left(\sum_{j=0}^n C_j \frac{\partial u_j}{\partial y} \right) \frac{\partial u_k}{\partial y} \right] dx dy = 0, k = \overline{1, n} \quad (2.43)$$

або

$$\begin{cases} [u_0, u_1] + C_1[u_1, u_1] + \dots + C_1[u_n, u_1] = 0; \\ [u_0, u_2] + C_1[u_1, u_2] + \dots + C_1[u_n, u_2] = 0; \\ \dots \\ [u_0, u_n] + C_1[u_1, u_n] + \dots + C_1[u_n, u_n] = 0, \end{cases} \quad (2.44)$$

$$\text{де } [u_j, u_k] = \iint_G \left[\frac{\partial u_j}{\partial x} \frac{\partial u_k}{\partial x} + \frac{\partial u_j}{\partial y} \frac{\partial u_k}{\partial y} \right] dx dy = 0, j = \overline{0, n}, k = \overline{1, n}.$$

В наслідок лінійної незалежності координатних функцій, СЛАР (2.44) має єдиний розв'язок $\{C_j\}_{j=1}^n$, який визначає функцію (2.42), яка є наближеним розв'язком задачі Діріхле.

Наближене розв'язання методом Рітца крайової задачі для рівняння Пуассона аналогічне, але замість функціонала (2.40) використовується (2.39).

Лабораторна робота №3 Варіаційний метод Рітца задачі Діріхле

Мета: навчитися застосовувати варіаційний метод Рітца для наближеного розв'язання задачі Діріхле за допомогою СКА.

Завдання до лабораторної роботи №3

Методом Рітца розв'язати задачу Діріхле для рівняння Лапласа (рівняння еліптичного типу)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{на } G, \quad (2.45)$$

$$u(x, y)|_{\Gamma} = \varphi(x, y), \quad (2.46)$$

де G – деяка скінчена область, Γ – межа області G .

Індивідуальні варіанти наведено в табл. 2.5 [3]. Номер варіанта визначається за номером прізвища студента в журналі академічної групи з додаванням числа 0 – для денної форми навчання, 10 – для заочної.

Таблиця 2.5 – Варіанти завдань до лабораторної роботи №3

№1. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1(\Gamma),$ $u(x, y) _{\Gamma} = x + y .$	№2. $(x + 2)(y + 2) = 12(\Gamma),$ $u(x, y) _{\Gamma} = 2 x + y .$	№3. $\left. \begin{matrix} y = 4 - x^2 \\ x \in [-2, 2] \end{matrix} \right\}(\Gamma),$ $u(x, y) _{\Gamma} = x \cdot y .$
№4. $x^2 + y^2 = 16(\Gamma),$ $u(x, y) _{\Gamma} = x + 2 y .$	№5. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1(\Gamma),$ $u(x, y) _{\Gamma} = x \cdot y .$	№6. $\left. \begin{matrix} x = 4 - y^2 \\ y \in [-2, 2] \end{matrix} \right\}(\Gamma),$ $u(x, y) _{\Gamma} = x + y .$
№7. $(x + 2)(y + 2) = 12(\Gamma),$ $u(x, y) _{\Gamma} = x \cdot y .$	№8. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1(\Gamma),$ $u(x, y) _{\Gamma} = 2 x + y .$	№9. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1(\Gamma),$ $u(x, y) _{\Gamma} = x \cdot y .$
№10. $\left. \begin{matrix} y = 4 - x^2 \\ x \in [-2, 2] \end{matrix} \right\}(\Gamma),$ $u(x, y) _{\Gamma} = x + y .$	№11. $x^2 + y^2 = 16(\Gamma),$ $u(x, y) _{\Gamma} = 0,5 x + y .$	№12. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1(\Gamma),$ $u(x, y) _{\Gamma} = x + 0,5 y .$
№13. $\left. \begin{matrix} x = 4 - y^2 \\ y \in [-2, 2] \end{matrix} \right\}(\Gamma),$ $u(x, y) _{\Gamma} = x + \frac{y^2}{2}$	№14. $(x + 2)(y + 2) = 12(\Gamma),$ $u(x, y) _{\Gamma} = 2 x + 0,5 y .$	№15. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1(\Gamma),$ $u(x, y) _{\Gamma} = x + y .$
№16. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1(\Gamma),$ $u(x, y) _{\Gamma} = 2 x + 0,5 y .$	№17. $\left. \begin{matrix} y = 9 - x^2 \\ x \in [-3, 3] \end{matrix} \right\}(\Gamma),$ $u(x, y) _{\Gamma} = x + \frac{1}{2} y .$	№18. $x^2 + y^2 = 16(\Gamma),$ $u(x, y) _{\Gamma} = \frac{1}{2} x + 2 y .$
№19. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1(\Gamma),$ $u(x, y) _{\Gamma} = 0,5 x + y .$	№20. $\left. \begin{matrix} y = 9 - x^2 \\ x \in [-3, 3] \end{matrix} \right\}(\Gamma),$ $u(x, y) _{\Gamma} = 0,5 x + y .$	№21. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1(\Gamma),$ $u(x, y) _{\Gamma} = 0,5 x + 2 y .$

Методичні рекомендації до лабораторної роботи №3

Задача 2.4 Методом Рітца знайти наближений розв'язок задачі Діріхле для рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{на } G$$

з крайовою умовою

$$u(x, y)|_{\Gamma} = |x| \cdot |y|,$$

на межі $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ (Γ) області G .

Розв'язання. Знаходимо дві функції, що обмежують область:

$$y = y_1(x), y = y_2(x);$$

$$y_2(x) = 5\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}, y_1(x) = -y_2(x), x \in [-3; 3].$$

В кодї Maple записуємо у формі:

```
> y2 := 5*sqrt(1-(1/9)*x^2); y1 := -y2;
```

Координатні функції, що задовольняють (2.41), вибираємо з урахуванням умови задачі:

$$u_0(x, y) = |x| \cdot |y|, u_k(x, y) = x^i y^j \left(1 - \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} \right) \quad \left(i, j = \overline{0, n}, k = \overline{1, (n+1)^2} \right). \quad (2.47)$$

Тут індекс k носить характер лічильника. Фрагмент відповідного програмного коду Maple:

```
> u(x, y)[0] := abs(x)*abs(y);
  k := 0;
  for i from 0 to n do
    for j from 0 to n do
      k := k+1;
      u(x, y)[k] := x^i * y^j * ((1/9)*x^2+(1/25)*y^2-1);
    od: od;
```

Відповідно до (2.42), наближений розв'язок подаємо функцією

```
> U(x,y):=u(x,y)[0]+sum(C[jj]*u(x,y)[jj],jj=1..k);
```

Потім визначаємо функціонал, в який підставляється $U(x, y)$

```
> F := evalf(int(int((diff(U(x, y), x))^2+(diff(U(x, y), y))^2, y = y1 .. y2), x = -3 .. 3));
```

і утворюється функція багатьох змінних $C_1, \dots, C_k$. Для пошуку її мінімуму застосовуємо необхідну умову локального екстремуму

```
> for h to k do eq[h] := diff(F, C[h]) end do;
  sys := {seq(eq[hh], hh = 1 .. k)};
  var := {seq(C[hh], hh = 1 .. k)};
  RRR := solve(sys, var); assign(RRR);
```

Для аналізу точності отриманого розв'язку можна знайти нев'язку

$$(FU)(x, y) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad \text{для наближеного розв'язку в точках } (x, y) \text{ області } G.$$

При виборі $n = 4$ абсолютні значення нев'язки не перевищували 1.5. За даної умови, зважаючи на симетрію функцій, за координатні можна взяти функції

$u_k(x, y) = x^{2i} y^{2j} \left(1 - \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} \right)$, тоді при $n = 5$, модуль нев'язки не перевищить 0,3.

На рис. 2.4 побудовано графік функції, що визначає наближений розв'язок поставленої задачі Діріхле.

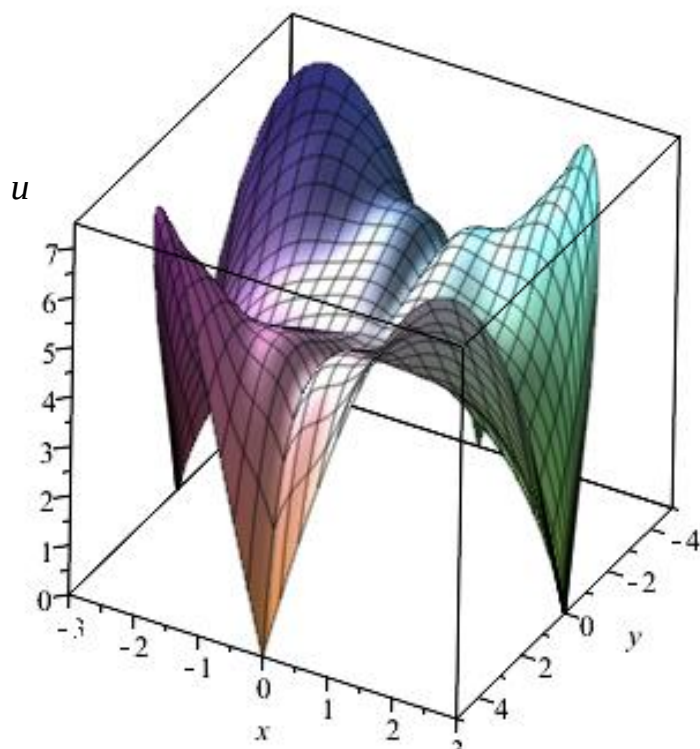


Рис. 2.4 – Наближений розв'язок задачі Діріхле для рівняння Лапласа

Задача 2.5 Розв'язати рівняння Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \text{ на } G$$

з функцією правої частини $f(x, y) = 0.6 \sin(x) - 1.25 y^2 + 1$, з крайовими умовами та областю, як в задачі 2.4.

Розв'язання. Зважаючи на відмінність знаку правої частини даного рівняння Пуассона від форми запису рівняння (2.34), функціонал, що підлягає мінімізації, має бути поданим у вигляді

$$\Phi[u] = \iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2 f u \right] dx dy.$$

Для спрощення процесу інтегрування, до тригонометричної функції застосуємо формулу Маклорена, тоді

$$f(x, y) \approx 0.6 \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \right) - 1.25 y^2 + 1.$$

Для подальшої реалізація методу Рітца використовуємо лінійно незалежну систему (2.47) і проводимо дії, аналогічні викладеним в задачі 2.4.

В результаті розрахунків при $n=5$ отримано функцію, зображену на рис. 2.5, обчислюємо нев'язку, яка не перевищила 1.3.

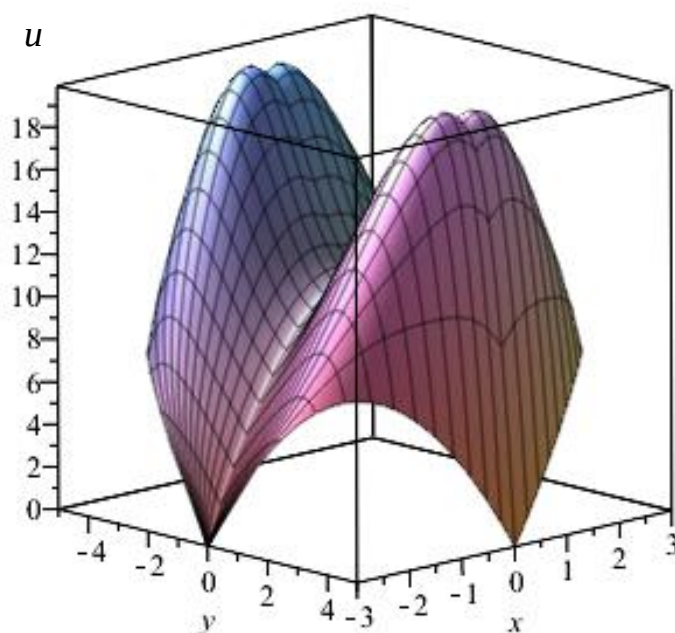


Рис. 2.5 – Наближений розв'язок крайової задачі для рівняння Пуассона

Контрольні питання

1. Виписати рівняння Пуассона і Лапласа.
2. Сформулювати постановку задачі Діріхле.
3. Запишіть, до якої варіаційної задачі зводиться крайова задача для рівняння Пуассона.
4. Яким властивостям мають задовольняти координатні функції, які визначають наближений розв'язок методом Рітца?

Тема 8. Проекційний метод Гальоркіна розв'язання крайової задачі для звичайного диференціального рівняння.

Основні поняття та ключова теорема

Наведемо деякі відомості із загальної теорії рядів Фур'є [3].

Означення 2.6 Ортогональна система функцій $\{\psi_j\}$ називається замкненою в евклідовому просторі X , якщо будь-яку функцію $f \in X$ можна наблизити з будь-яким степенем точності $\varepsilon > 0$ скінченною лінійною комбінацією елементів системи за нормою простору X , тобто

$$\forall f \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \{\psi_k\}_{k=1}^n \quad \exists \{C_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{R} : \left\| \sum_{k=1}^n C_k \psi_k - f \right\| < \varepsilon.$$

Означення 2.7 Ортонормована система функцій $\{\psi_j\}$ називається повною в евклідовому просторі X , якщо будь-яка функція $f \in X$, що є ортогональною до всіх елементів системи, є нульовою функцією.

Теорема 2.3 Будь яка замкнена ортонормована система $\{\psi_j\}$ є повною.

У випадку евклідового простору функцій, визначених на відрізьку $[a; b]$, для повної системи функцій $\{\psi_j\}$ справджується твердження:

$$\forall j \int_a^b f(x) \psi_j(x) dx = 0 \Rightarrow f(x) \equiv 0.$$

Зауваження 2.2 Обґрунтування зазначених тверджень засновано на загальній теорії рядів Фур'є, де функції $f \in X$ співствляється її ряд Фур'є

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} C_k \psi_k(x)$$

і доводиться, що у випадку ортогональності цієї функції всім елементам системи $\{\psi_j\}$, коефіцієнти ряду Фур'є дорівнюють нулю. Якщо функція $f \in X$ буде ортогональна скінченній множині елементів системи $\{\psi_k\}_{k=0}^n$, то відповідні їм коефіцієнти ряду Фур'є будуть дорівнювати 0, тобто $C_k = 0, k = 0, 1, \dots, n$, тому

$$\|f\|^2 = \int_a^b (f(x))^2 dx = \sum_{k=n+1}^{\infty} C_k^2 \|\psi_k\|^2.$$

Останнє відповідає залишку збіжного ряду, який можна зробити як завгодно малим при збільшенні кількості n елементів системи. Тому функція, що буде ортогональна до скінченного числа елементів повної системи, може стати як завгодно близькою до нульової при достатньо великому значенні n .

Сутність проєкційного методу Гальоркіна розв'язання крайової задачі для звичайного диференціального рівняння.

Розглянемо [5, 6] лінійну крайову задачу відносно невідомої n разів неперервно диференційовної функції $y(x)$ на відрізьку $[a; b]$

$$L[y] = f(x), \quad (2.48)$$

де

$$\begin{aligned} [Ly](x) &= p_0(x) y^{(n)}(x) + p_1(x) y^{(n-1)}(x) + \dots + p_{n-1}(x) y'(x) + p_n(x) y(x) = \\ &= \sum_{k=0}^n p_{n-k}(x) y^{(k)}(x), \end{aligned}$$

функції $p_k(x) (k = \overline{0, n})$ – неперервні на $[a; b]$, $p_0(x) \neq 0$ на $[a; b]$. Крайові умови задаються як

$$W_s[y] = \gamma_s, \quad s = \overline{1, m}, \quad (2.49)$$

тут

$$W_s[y] = \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_s^{(k)} y^{(k)}(a) + \beta_s^{(k)} y^{(k)}(b)), \quad s = \overline{1, m},$$

γ_s – задані числа. Ранг матриці, утвореної з коефіцієнтів $\{\alpha_s^{(k)} \beta_s^{(k)}, k = \overline{0, n-1}, s = \overline{1, m}\}$ має дорівнювати m , тоді рівняння в крайових умовах (2.49) лінійно незалежні відносно $y^{(k)}(a), y^{(k)}(b), s = \overline{1, m}$.

Виберемо скінченну систему $\{u_j(x)\}_{j=0}^N$ лінійно незалежних функцій, яка є частиною повної системи, причому функція $u_0(x)$ має задовольняти неоднорідні крайові умови $W_s[u_0] = \gamma_s, s = \overline{1, m}$, а інші функції системи $\{u_j(x)\}_{j=1}^N$ – однорідні умови $W_s[u_j] = 0, s = \overline{1, m}, j = \overline{1, N}$.

Наближений розв'язок (2.48), як і в методі Рітца, шукаємо у вигляді

$$\bar{y}(x) = u_0(x) + \sum_{j=1}^n C_j u_j(x). \quad (2.50)$$

Вочевидь, така функція задовольняє умови (2.49) незалежно від вибору коефіцієнтів $C_j (j = \overline{1, N})$.

Підставимо наближений розв'язок в (2.48), утворивши нев'язку

$$R(x, C_1, C_2, \dots, C_n) = L[u_0] + \sum_{j=1}^n C_j L[u_j] - f(x).$$

Щоб зробити нев'язку малою, відповідно до зауваження 2.2, потрібно взяти достатньо велику кількість n елементів системи й забезпечити їх ортогональність до нев'язки:

$$\int_a^b R(x, C_1, C_2, \dots, C_n) u_s(x) dx = 0, s = \overline{1, n}. \quad (2.51)$$

Зауваження 2.3 Функції системи $\{u_j(x)\}_{j=0}^N$ можна визначити аналогічно тому, як було зазначено в зауваженні 2.1. У випадку диференціального рівняння вищого порядку за другим, такі функції можна подати у вигляді

$$u_j(x) = (x-a)^{j+n-1} + \sum_{s=1}^m M_s (x-b)^{s-1}, j = \overline{0, N},$$

а коефіцієнти $\{M_s\}_{s=1}^m$ шукати, підставляючи зазначене функції в неоднорідні або однорідні крайові умови відповідно:

$$W_s[u_0] = \gamma_s, W_s[u_j] = 0, s = \overline{1, m}, j = \overline{1, N}.$$

Лабораторна робота №4 Метод Гальоркіна розв'язання крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

Мета: навчитися застосовувати метод Гальоркіна до наближеного розв'язання крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь другого та четвертого порядків за допомогою СКА.

Завдання до лабораторної роботи №4

Завдання №1. Розв'язати задачі із лабораторної роботи №1 методом Гальоркіна. Порівняти результати.

Завдання №2. Розв'язати методом Гальоркіна та за допомогою інструментів СКА крайову задачу, порівняти результати:

$$y^{(4)} + x \cdot y''' + r \cdot x \cdot y'' + (x-1)y' - 2x^2 y = 3x + 2,$$

$$y(a) = y(b) = s, y'(a) = y'(b) = s+1, a = s, b = s+2$$

де r – номер прізвища студента в списку академічної групи, $s=1$ для студентів заочної форми навчання, $s=2$ – денної.

Методичні рекомендації до лабораторної роботи №4

Задача 2.6 Розв'язати методом Гальоркіна крайову задачу

$$y'' - (x+1)y' - 2x y = x - 5; \quad y(1) = -1; \quad y(3) = 2.$$

Розв'язання. Дана крайова задача має єдиний розв'язок.

- Визначимо функцію, що задаватиме нев'язку
- $$> eq := diff(y(x), x\$2) + p(x)*diff(y(x), x) + q(x)*y(x) - f(x);$$
- Функції $\{u_j(x)\}_{j=0}^N$ і наближений розв'язок обираємо так само, як у задачі 2.1.
 - Рівняння системи визначимо з умови ортогональності (2.51) нев'язки до кожної функції $u_s(x)$, $s = \overline{1, N}$:

```
> for s to N do
    rr[s] := int(eq*u(x)[s], x = a .. b)
od;
```

- Далі утворюємо систему рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів розкладу (2.50) аналогічно задачі 2.1. Для присвоєння коефіцієнтам значень розв'язку системи можна використати оператор assign.

На рис. 2.6 побудовано зіставлені наближені розв'язки, отримані при $N=5$ для крайової задачі методом Рітца (синя штрихова лінія) та методом Гальоркіна (червона суцільна).

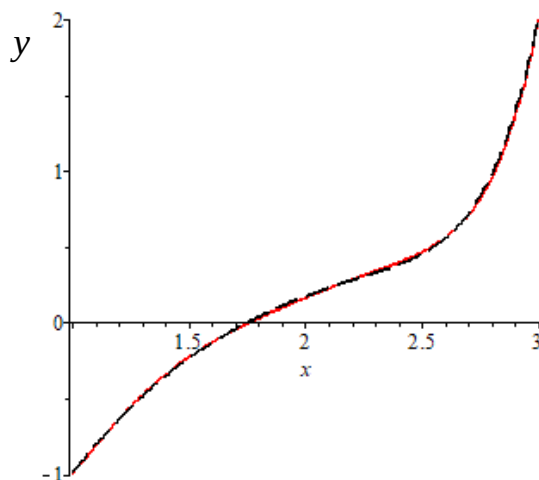


Рис. 2.6 – Зіставлення наближених розв'язків за методами Рітца в задачі 2.1 і Гальоркіна в задачі 2.6

Для даної задачі варіаційний метод Рітца та проєкційний Гальоркіна дають досить близькі результати при $N = 5$.

Задача 2.7 Розв'язати задачу (2.48) – (2.49) методом Гальоркіна, якщо

$$p(x) = -x, \quad q(x) = -\frac{x}{x^2 + 4.8^2}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad A = 0.5, \quad B = 0.5, \\ \alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = 2, \quad \beta_0 = -1, \quad \beta_1 = 0.$$

Розв'язання. Для пошуку системи лінійно незалежних функцій використаємо зауваження 2.1. Для реалізації зазначеної схеми можна використати код Maple:

```
> for j from 0 to N do
  mn := MM+(x-a)^(j+1)+NN*(x-b); mn1 := diff(mn, x);
  if j = 0 then A1 := A else A1 := 0 fi;
  q1 := alpha0*subs(x = a, mn)+alpha1*subs(x = a, mn1)-A1;
  if j = 0 then B1 := B else B1 := 0 fi;
  q2 := beta0*subs(x = b, mn)+beta1*subs(x = b, mn1)-B1;
  r := solve({q1, q2}, {MM, NN});
  u(x)[j] := subs(MM = rhs(r[1]), NN = rhs(r[2]), mn) od;
```

Подальші кроки методу не відрізняються від зазначених в задачі 2.6.

На рис. 2.7 наведено розв'язки, отримані методом Гальоркіна при $N = 5$ (суцільна зелена лінія), і чисельним інтегруванням диференціального рівняння засобами Maple (штрихова червона лінія).

Узгодженість результатів, отриманих різними методами, є високою.

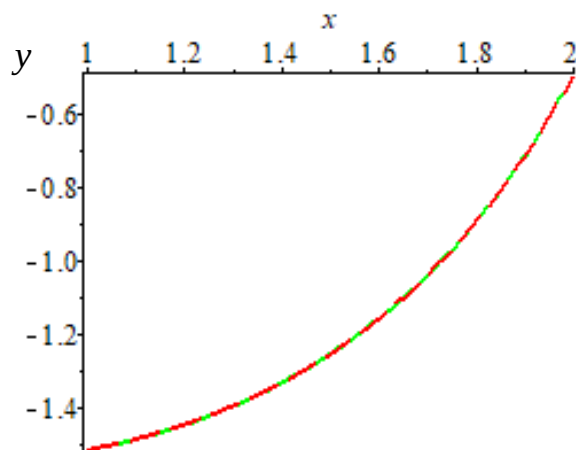


Рис. 2.7 – Зіставлення розв'язків, отриманих методом Гальоркіна та чисельними засобами Maple в задачі 2.7

Задача 2.8 Розв'язати методом Гальоркіна крайову задачу:

$$y^{(4)} + 13x^2 y''' + (x+1)y'' + (3-x^2)y' - xy = 5x - 6, \\ y(a) = y(b) = -1, \quad y'(a) = y'(b) = 1, \quad a = 1, \quad b = 3$$

Розв'язання. Спочатку визначаємо нев'язку та вхідні дані, уведемо масив А, що відповідатиме правим частинам крайових умов:

```

> eq := diff(y(x), x$4) + p1(x) * diff(y(x), x$3) + p2(x) * diff(y(x),
x$2) + p3(x) * diff(y(x), x) + p4(x) * y(x) - f(x);
p1(x) := 13 * x^2; p2(x) := x + 1; p3(x) := -x^2 + 3; p4(x) := -x; f(x) := 5 * x - 6;
a := 1; b := 3; por := 4;
A[1] := -1; A[2] := -1; A[3] := 1; A[4] := 1;

```

Систему лінійно незалежних функцій знайдемо, використовуючи зауваження 2.3, що може бути реалізовано за допомогою коду в Maple:

```

> # Лінійно незалежні функції з невідомими коефіцієнтами (зауваж. 2.3).
for j from 0 to N do
u(x)[j] := (x - a)^(j + por - 1) + sum(M[i] * (b - x)^(i - 1), i = 1 ..por)
od:
> # Утворення системи для кожної з лінійно незалежних функцій.
for j1 from 0 to N do
for j to por do
if j1 = 0 then B[j] := A[j] else B[j] := 0 fi:
if j = 1 then U[j1, j] := subs(x = a, u(x)[j1]) - B[j] fi:
if j = 2 then U[j1, j] := subs(x = b, u(x)[j1]) - B[j] fi:
if j = 3 then U[j1, j] := subs(x = a, diff(u(x)[j1], x)) - B[j] fi:
if j = 4 then U[j1, j] := subs(x = b, diff(u(x)[j1], x)) - B[j] fi:
od: od:
> # Визначення невідомих коефіцієнтів.
var := {seq(M[i], i = 1 ..por)} :
> for j1 from 0 to N do
sys := {seq(U[j1, i], i = 1 ..por)} : R := solve(sys, var);
for j to por do u(x)[j1] := subs(M[j] = rhs(R[j]), u(x)[j1]); od:
od:

```

Подальші кроки методу аналогічні задачі 2.6.

На рис. 2.8 наведено розв'язки, отримані методом Гальоркіна при $N = 5$ (штрихова синя лінія), при $N = 7$ (суцільна сіра), при $N = 10$ (точкова чорна), і чисельним інтегруванням засобами Maple (червона лінія).

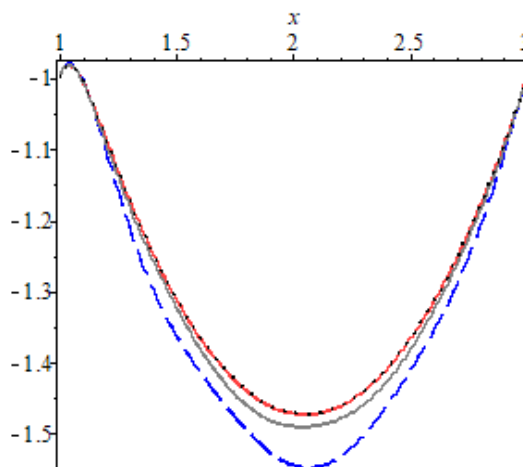


Рис. 2.8 – Зіставлення розв'язків, отриманих методом Гальоркіна та чисельними засобами Maple

Відхилення між чисельним розв'язком та наближеним, отриманим методом Гальоркіна, зменшується із збільшенням N . При $N=10$ відповідні графіки візуально близькі. Це свідчить про збіжність послідовності наближених розв'язків, отриманих методом Гальоркіна, до точного.

Контрольні питання

1. Дайте означення замкненої та повної системи функцій евклідового простору.
2. Сформулюйте теорему про зв'язок між замкненою та повною системами функцій.
3. Який висновок можна зробити про функцію, яка ортогональна до всіх функцій скінченної підмножини повної системи евклідового простору?
4. Зазначте властивості функцій лінійно незалежної системи, яку обирають для утворення наближеного розв'язку.
5. На основі якої властивості утворюється система лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів розкладу наближеного розв'язку?

Тема 9. Проекційний метод Гальоркіна розв'язання крайової задачі для рівняння в частинних похідних.

Постановка задачі

Розглянемо задачу, аналогічну до поставленої в темі 7. Відмінність застосування методу Рітца від методу Гальоркіна полягає у тому, що метод Рітца передбачає використання самоспряженого оператора або зведення до нього, у той час, як метод Гальоркіна не вимагає таких обмежень на оператор. Тому метод Гальоркіна може бути використаним для рівняння в частинних похідних не лише еліптичного типу.

Розглянемо [5, 7] лінійну крайову задачу відносно невідомої двічі неперервно диференційовної функції $u(x, y)$ в області $\bar{G}$

$$L[u] = f(P), P \in G, \quad (2.52)$$

де $f(P) \in C(G)$ – задана неперервна на G функція. Потрібно знайти розв'язок рівняння (2.52) в класі функцій $K = \{u(x, y) \in C^{(2)}(\bar{G})\}$, який задовольняє крайову умову

$$u|_{\Gamma} = \varphi(P), P \in \Gamma. \quad (2.53)$$

Тут $P = (x, y)$ і $\varphi(P)$ задана неперервна функція на G .

Сутність проекційного методу Гальоркіна розв'язання крайової задачі для рівняння в частинних похідних

Аналогічно до методу Рітца [5, 7] побудуємо систему таких координатних функцій $\{u_j(x, y)\}_{j=0}^n \in C^{(2)}(\bar{G})$, що на межі $\Gamma = \partial G$ області G нульова функція задовольняє неоднорідну крайову умову, а інші функції – однорідну, тобто:

$$u_0(x, y)|_{\Gamma} = \varphi(x, y), u_j(x, y)|_{\Gamma} = 0 \quad \forall j = \overline{1, n}. \quad (2.54)$$

Наближений розв'язок подаємо лінійною комбінацією координатних функцій

$$\bar{u}(x, y) = u_0(x, y) + \sum_{j=1}^n C_j u_j(x, y). \quad (2.55)$$

Утворимо нев'язку

$$R(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = L[u_0] + \sum_{j=1}^n C_j L[u_j] - f(x, y).$$

Щоб зробити нев'язку малою, потрібно взяти достатньо велику кількість n елементів системи й забезпечити їх ортогональність до нев'язки та утворити систему

$$\iint_G R(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) u_s(x, y) dx dy = 0, s = 1, 2, \dots, n,$$

яка після перетворення набуває вигляду

$$\iint_G (L[u_0] u_j(x, y) - f(x, y)) u_s(x, y) dx dy + \sum_{j=1}^n C_j \iint_G L[u_j] u_s(x, y) dx dy = 0, \quad (2.56)$$

$$s = 1, 2, \dots, n$$

Лабораторна робота №5 Метод Гальоркіна розв'язання крайової задачі для рівняння Пуассона

Мета: навчитися застосовувати метод Гальоркіна до наближеного розв'язання крайової задачі для рівняння Пуассона за допомогою СКА.

Завдання до лабораторної роботи №5

Методом Гальоркіна розв'язати крайову задачу для рівняння Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \text{ на } G,$$

$$u(x, y)|_{\Gamma} = \phi(x, y),$$

де G – деяка скінчена область, Γ – межа області G , $f(x, y)$ – функція, задана на Γ . Індивідуальні варіанти наведено в табл.2.6 [3]. Номер варіанта визначається за номером прізвища студента в журналі академічної групи з додаванням числа 0 – для денної форми навчання, 10 – для заочної.

Таблиця 2.6 – Варіанти лабораторної роботи №5

№1. $f(x, y) = 1 + 0,2y \sin x - y^2$; $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1(\Gamma)$, $\phi(x, y) = x + y $.	№2. $f(x, y) = \cos(x + y) + 0,5(x - y)$; $(x + 2)(y + 2) = 12(\Gamma)$, $\phi(x, y) = 2 x + y $.
№3. $f(x, y) = \frac{\cos x}{x + 1} - 0,5y^2$; $ y = 4 - x^2$ $x \in [-2, 2]\}(\Gamma)$, $\phi(x, y) = x \cdot y $.	№4. $f(x, y) = (1 - y^2) \cos x + 0,6y$; $x^2 + y^2 = 16(\Gamma)$, $\phi(x, y) = x + 2 y $.

Продовження таблиці 3.2

№5. $f(x, y) = 1 + 0,4y \sin x - 1,5y^2$; $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1(\Gamma)$, $\phi(x, y) = x \cdot y$.	№6. $f(x, y) = \frac{\cos y}{x+2} + 0,3y^2$; $x = 4 - y^2$ $y \in [-2, 2]$ } (Γ), $\phi(x, y) = x + y$
№7. $f(x, y) = \cos(1,5x + y) + (x - y)$; $(x + 2)(y + 2) = 12(\Gamma)$, $\phi(x, y) = x \cdot y$.	№8. $f(x, y) = 1 - \sin(x + y) + \frac{0,5y}{x+2}$; $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1(\Gamma)$, $\phi(x, y) = 2 x + y$.
№9. $f(x, y) = \frac{\cos y}{1,5+x} + 0,1y^2$; $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1(\Gamma)$, $\phi(x, y) = x \cdot y$.	№10. $f(x, y) = 0,6 \sin x - 1,25y^2 + 1$; $y = 4 - x^2$ $x \in [-2, 2]$ } (Γ), $\phi(x, y) = x + y$.
№11. $f(x, y) = \cos(2x + y) + 1,5(x - y)$; $x^2 + y^2 = 16(\Gamma)$, $\phi(x, y) = 0,5 x + y$.	№12. $f(x, y) = 1 - \frac{0,1y}{x+2} - \sin(2x + y)$; $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1(\Gamma)$, $\phi(x, y) = x + 0,5 y$
№13. $f(x, y) = \frac{\cos y}{1,25+x} - 0,1y^2$; $x = 4 - y^2$ $y \in [-2, 2]$ } (Γ), $\phi(x, y) = x + \frac{y^2}{2}$.	№14. $f(x, y) = 1 + 0,8y \sin x - 2y^2$; $(x + 2)(y + 2) = 12(\Gamma)$, $\phi(x, y) = 2 x + 0,5 y$
№15. $f(x, y) = \cos(1,5x + y) + 1,5(x - y)$; $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1(\Gamma)$, $\phi(x, y) = x + y$.	№16. $f(x, y) = 1 - \sin(2x + y) + \frac{0,3y}{x+2}$; $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1(\Gamma)$, $\phi(x, y) = 2 x + 0,5 y$.
№17. $f(x, y) = \frac{\cos y}{1,75+x} - 0,5y^2$; $y = 9 - x^2$ $x \in [-3, 3]$ } (Γ), $\phi(x, y) = x + \frac{1}{2} y$.	№18. $f(x, y) = 1 + (1 - x) \sin y - (2 + x)y$; $x^2 + y^2 = 16(\Gamma)$, $\phi(x, y) = \frac{1}{2} x + 2 y$.
№19. $f(x, y) = (0,8 - y^2) \cos x + 0,3y$; $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1(\Gamma)$, $\phi(x, y) = 0,5 x + y$.	№20. $f(x, y) = 1 + 2,2 \sin x + 1,5y^2$; $y = 9 - x^2$ $x \in [-3, 3]$ } (Γ), $\phi(x, y) = 0,5 x + y$.

Методичні рекомендації до лабораторної роботи №5

Задача 2.9 Методом Гальоркіна знайти наближений розв'язок крайової задачі для рівняння Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \text{ на } G$$

з функцією правої частини, крайовими умовами та областю, як в задачах 2.4 і 2.5 відповідно. Порівняти результати.

Розв'язання. Реалізація більшості кроків методом Гальоркіна в даній задачі збігається з задачами 2.4 та 2.5, зокрема визначення кривих, що задають обмеження області, системи лінійно незалежних функцій, підрахунок їхньої кількості k , а також визначення самої функції наближеного розв'язку.

Основною відмінністю методу Гальоркіна є визначення рівнянь системи, що дозволяють знайти невідомі коефіцієнти $C_1, \dots, C_k$. Вони мають забезпечувати ортогональність нев'язки до кожної координатної функції через рівняння (2.56) і подаються, наприклад, таким програмним кодом в Maple:

```
> for h to k do
  for h to k do
    F1 := evalf(int(int((diff(u(x, y)[0], x$2)+diff(u(x, y)[0], y$2)-f)*u(x,
y)[h], y = y1 .. y2), x = -3 .. 3));
    ss := 0;
    for j to k do
      sl := evalf(int(int((diff(u(x, y)[j], x%2)+diff(u(x, y)[j], y$2))*u(x,
y)[h], y = y1 .. y2), x = -3 .. 3)); ss := ss + sl*C[j]
    od;
    eq[h] := F1+ss;
  od;
```

Визначення системи рівнянь, її змінних $C_1, \dots, C_k$ та отримання розв'язку здійснюється аналогічно до всіх попередніх задач.

Аналіз нев'язки показав, що її абсолютне значення при $n=5$ не перевищує 0.6.

Звертає на себе увагу той факт, що в умовах даної задачі значення нев'язки в методах Рітца та Гальоркіна протилежні за знаком. Тому модуль очікуваного відхилення в значеннях функцій-розв'язків може становити близько 1, що й підтверджується після зіставлення графіків функцій на рис. 2.9.

На рис. 2.9 кольоровою поверхнею побудовано наближений розв'язок, знайдений методом Гальоркіна, прозорою з лініями сітки – методом Рітца.

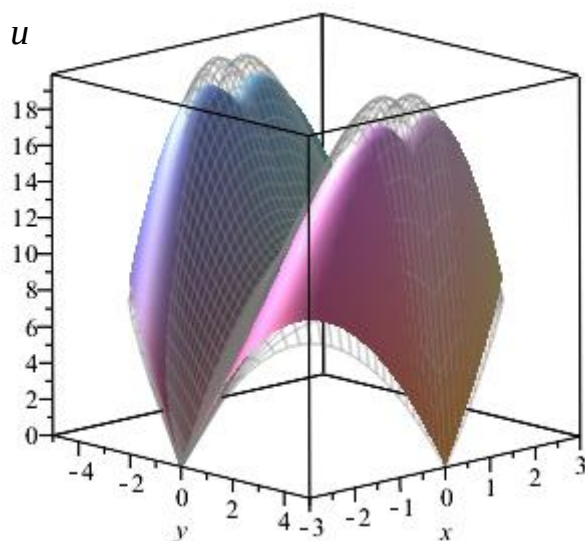


Рис. 2.9 – Зіставлення результатів, отриманих методом Рітца та методом Гальоркіна в задачі 2.9

Контрольні питання

1. Сформулюйте постановку крайової задачі для рівняння в частинних похідних. На якій множині функцій шукається розв'язок задачі?
2. Сутність методу Гальоркіна наближеного розв'язання крайових задач для рівнянь в частинних похідних.
 - В який спосіб вибирається система координатних функцій?
 - Яким чином задається наближений розв'язок в методі Гальоркіна?
 - Яка умова застосовується для утворення системи рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів подання наближеного розв'язку?

З РІЗНИЦЕВІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

Мета: засвоїти основні засади різницевих методів та навчитися їх застосовувати для розв'язання крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь та рівнянь у частинних похідних.

Тема 10. Різницевий метод розв'язання крайової задачі для звичайного диференціального рівняння.

Диференціальне рівняння другого порядку

Розглянемо [1, 2] лінійне диференціальне рівняння 2-го порядку із змінними коефіцієнтами

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x); \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A; \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B, \end{cases} \quad (3.2)$$

де $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ – неперервні функції на $[a, b]$, $\alpha_i, \beta_i, A, B \in \mathbb{R}$ – сталі, що задовольняють нерівності $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0, |\beta_0| + |\beta_1| \neq 0$.

Розіб'ємо відрізок $[a, b]$ на n рівних частин і побудуємо систему рівновіддалених вузлів

$$x_i = x_0 + i h \quad (i = 1, \dots, n-1); \quad x_0 = a; \quad x_n = b,$$

де $h = \frac{b-a}{n}$. Введемо позначення $y(x_i) = y_i$, $p(x_i) = p_i$, $q(x_i) = q_i$, $f(x_i) = f_i$.

В рівнянні (3.1) похідні замінимо скінченними різницями другого порядку точності. Випишемо розклади за формулою Маклорена до h^3 включно. Потім додамо і віднімемо відповідні рівності, отримаємо:

$$y_{i+1} = y_i + h y'(x_i) + \frac{h^2}{2!} y''(x_i) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_i) + o(h^3);$$

$$y_{i-1} = y_i - h y'(x_i) + \frac{h^2}{2!} y''(x_i) - \frac{h^3}{3!} y'''(x_i) + o(h^3);$$

$$y_{i+1} - y_{i-1} = 2h y'(x_i) + o(h^2) \Rightarrow y'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + o(h);$$

$$y_{i+1} + y_{i-1} = 2y_i + h^2 y''(x_i) + o(h^3) \Rightarrow y''(x_i) = \frac{y_{i+1} + y_{i-1} - 2y_i}{h^2} + o(h).$$

Підставляючи отримані подання похідних в рівняння (3.1), одержимо:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i \quad (i = 1, 2, \dots, n-1). \quad (3.3)$$

Тепер розглянемо крайові умови. Обчислимо значення похідної в лівій точці відрізка $x = a$ через скінченні різниці «вперед», а в правій $x = b$ – через різниці «назад»:

$$x = a = x_0:$$

$$y_1 = y_0 + h y'(x_0) + \frac{h^2}{2!} y''(x_0) + o(h^2) \Rightarrow 4y_1 = 4y_0 + 4h y'(x_0) + 2h^2 y''(x_0) + o(h^2);$$

$$y_2 = y_0 + 2h y'(x_0) + 2h^2 y''(x_0) + o(h^2);$$

$$4y_1 - y_2 = 3y_0 + 2h y'(x_0) + o(h^2) \Rightarrow$$

$$y'(x_0) = \frac{4y_1 - y_2 - 3y_0}{2h} + o(h);$$

$$x = b = x_n$$

$$y_{n-1} = y_n - h y'(x_n) + \frac{h^2}{2!} y''(x_n) + o(h^2) \Rightarrow 4y_{n-1} = 4y_n - 4h y'(x_n) + 2h^2 y''(x_n) + o(h^2);$$

$$y_{n-2} = y_n - 2h y'(x_n) + 2h^2 y''(x_n) + o(h^2);$$

$$4y_{n-1} - y_{n-2} = 3y_n - 2h y'(x_n) + o(h^2) \Rightarrow$$

$$y'(x_n) = -\frac{4y_{n-1} - y_{n-2} - 3y_n}{2h} + o(h).$$

Отримане дозволяє записати крайові умови у вигляді:

$$\begin{cases} \alpha_0 y_0 + \alpha_1 \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h} = A; \\ \beta_0 y_n + \beta_1 \frac{3y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2}}{2h} = B. \end{cases} \quad (3.4)$$

Таким чином (3.3) – (3.4) утворює систему $n+1$ лінійних алгебраїчних рівнянь з $n+1$ невідомими. Розв'язуючи систему, можна знайти значення функції $y(x)$ у вузлах розбиття. Різницєва система має єдиний розв'язок [7].

Диференціальне рівняння четвертого порядку

Розглянемо [6, 7] лінійну крайову задачу відносно невідомої 4 рази неперервно диференційовної функції $y(x)$ на відрізку $[a; b]$

$$L[y] = f(x), \quad (3.5)$$

де $[Ly](x) = p_0(x) y^{(4)}(x) + p_1(x) y'''(x) + p_2(x) y''(x) + p_3(x) y'(x) + p_4(x) y(x)$, функції $p_k(x), k = \overline{0, 4}$ – неперервні на $[a; b]$, $p_k(x), k = \overline{0, 4}$ – а крайові умови мають вигляд

$$U_s[y] = \gamma_s, s = \overline{1, 4}, \quad (3.6)$$

де $W_s[y] = \sum_{k=0}^3 (\alpha_s^{(k)} y^{(k)}(a) + \beta_s^{(k)} y^{(k)}(b)), s = \overline{1, 4}$, γ_s – задані числа. Ранг матриці, утвореної з коефіцієнтів $\{\alpha_s^{(k)} \beta_s^{(k)}, k = \overline{0, 3}, s = \overline{1, 4}\}$, дорівнює 4.

Поставлена крайова задача має єдиний розв'язок.

Розіб'ємо відрізок $[a, b]$ на n рівних частин з кроком h тими самими точками $\{x_i\}_{i=0}^n$, що і вище. Введемо позначення

$$f_i = f(x_i); p_{k,i} = p_k(x_i), k = \overline{0, 4}, i = \overline{0, n}.$$

Для отримання різницьових відношень у внутрішніх точках розбиття x_i , $i = \overline{1, n-1}$ випишемо розклади за формулою Маклорена до h^5 включно

$$y_{i+1} = y_i + h y'(x_i) + \frac{h^2}{2!} y''(x_i) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_i) + \frac{h^4}{4!} y^{(4)}(x_i) + \frac{h^5}{5!} y^{(5)}(x_i) + o(h^5);$$

$$y_{i-1} = y_i - h y'(x_i) + \frac{h^2}{2!} y''(x_i) - \frac{h^3}{3!} y'''(x_i) + \frac{h^4}{4!} y^{(4)}(x_i) - \frac{h^5}{5!} y^{(5)}(x_i) + o(h^5);$$

$$y_{i+2} = y_i + 2h y'(x_i) + \frac{4h^2}{2!} y''(x_i) + \frac{8h^3}{3!} y'''(x_i) + \frac{16h^4}{4!} y^{(4)}(x_i) + \frac{32h^5}{5!} y^{(5)}(x_i) + o(h^5);$$

$$y_{i-2} = y_i - 2h y'(x_i) + \frac{4h^2}{2!} y''(x_i) - \frac{8h^3}{3!} y'''(x_i) + \frac{16h^4}{4!} y^{(4)}(x_i) - \frac{32h^5}{5!} y^{(4)}(x_i) + o(h^5),$$

звідки виразимо похідні через y_{i+r} ($r = \overline{-2, 2}$)

$$y'(x_i) = \frac{1}{12h} (-y_{i+2} + 8y_{i+1} - 8y_{i-1} + y_{i-2}) + o(h^3);$$

$$y''(x_i) = \frac{1}{12h^2} (-y_{i+2} + 16y_{i+1} - 30y_i + 16y_{i-1} - y_{i-2}) + o(h^3);$$

$$y'''(x_i) = \frac{1}{2h^3} (y_{i+2} - 2y_{i+1} + 2y_{i-1} - y_{i-2}) + o(h);$$

$$y^{(4)}(x_i) = \frac{1}{h^4} (y_{i+2} - 4y_{i+1} + 6y_i - 4y_{i-1} + y_{i-2}) + o(h); \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Підставляючи отримані подання похідних в рівняння (3.5), одержимо:

$$\begin{aligned} p_{0,i} \frac{1}{h^4} (y_{i+2} - 4y_{i+1} + 6y_i - 4y_{i-1} + y_{i-2}) + p_{1,i} \frac{1}{2h^3} (y_{i+2} - 2y_{i+1} + 2y_{i-1} - y_{i-2}) + \\ + p_{2,i} \frac{1}{12h^2} (-y_{i+2} + 16y_{i+1} - 30y_i + 16y_{i-1} - y_{i-2}) + \\ + p_3(x) \frac{1}{12h} (-y_{i+2} + 8y_{i+1} - 8y_{i-1} + y_{i-2}) + p_{4,i} y_i = f_i, \quad i = \overline{1, n-1}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Для подання умов (3.6) через різницьові відношення застосуємо розклади за формулою Маклорена до членів з h^4 включно. В точці $x_0 = a$ вони матимуть вигляд

$$y_1 = y_0 + h y'(x_0) + \frac{h^2}{2!} y''(x_0) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_0) + \frac{h^4}{4!} y^{(4)}(x_0) + o(h^4);$$

$$y_1 = y_0 - h y'(x_0) + \frac{h^2}{2!} y''(x_0) - \frac{h^3}{3!} y'''(x_0) + \frac{h^4}{4!} y^{(4)}(x_0) + o(h^4);$$

$$y_2 = y_0 + 2h y'(x_0) + \frac{4h^2}{2!} y''(x_0) + \frac{8h^3}{3!} y'''(x_0) + \frac{16h^4}{4!} y^{(4)}(x_0) + o(h^4),$$

звідки

$$\begin{aligned}y'(x_0) &= \frac{-2y_{-1} - 3y_0 + 6y_1 - y_2}{6h} + o(h^2); \\y''(x_0) &= \frac{y_{-1} - 2y_0 + y_1}{h^2} + o(h); \\y'''(x_0) &= \frac{-y_{-1} + 3y_0 - 3y_1 + y_2}{h^3} + o(1).\end{aligned}\tag{3.8}$$

В точці $x_n = b$ використаємо розклади

$$\begin{aligned}y_{n+1} &= y_n + h y'(x_n) + \frac{h^2}{2!} y''(x_n) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_n) + \frac{h^4}{4!} y^{(4)}(x_n) + o(h^4); \\y_{n-1} &= y_n - h y'(x_n) + \frac{h^2}{2!} y''(x_n) - \frac{h^3}{3!} y'''(x_n) + \frac{h^4}{4!} y^{(4)}(x_n) + o(h^4); \\y_{n-2} &= y_n - 2h y'(x_n) + \frac{4h^2}{2!} y''(x_n) - \frac{8h^3}{3!} y'''(x_n) + \frac{16h^4}{4!} y^{(4)}(x_n) + o(h^4),\end{aligned}$$

тоді

$$\begin{aligned}y'(x_n) &= \frac{y_{n-2} - 6y_{n-1} + 3y_n + 2y_{n+1}}{6h} + o(h^2); \\y''(x_n) &= \frac{y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}}{h^2} + o(h); \\y'''(x_n) &= \frac{-y_{n-2} + 3y_{n-1} - 3y_n - y_{n+1}}{h^3} + o(1).\end{aligned}\tag{3.9}$$

Подання (3.8) і (3.9) підставляються в крайові умови (3.6). Отримані таким чином чотири рівняння разом з (3.7) утворюють систему з $n + 3$ рівнянь з такою є кількістю змінних $y_i = y(x_i)$, $i = -1, 0, 1, \dots, n-1, n, n+1$, розв'язуючи яку знаходять значення функції у вузлах сітки. Зазначена різницева система має єдиний розв'язок [7].

Лабораторна робота №6 Метод скінченних різниць розв'язання крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

Мета: навчитися застосовувати метод скінченних різниць для розв'язання звичайних диференціальних рівнянь другого та четвертого порядків за допомогою СКА.

Завдання до лабораторної роботи №6

Завдання №1. Методом скінченних різниць розв'язати крайову задачу

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{3.10}$$

$$\begin{cases} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A; \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B. \end{cases} \tag{3.11}$$

Завдання вибираються табл. 3.1 [3]. Номер варіанта визначається за номером прізвища студента в журналі академічної групи з додаванням числа 0 – для денної форми навчання, 10 – для заочної.

Завдання №2. Розв'язати методом скінченних різниць крайову задачу

$$y^{(4)} + x \cdot y''' + r \cdot x \cdot y'' + (x-1)y' - 2x^2y = 3x + 2,$$

$$y(a) = y(b) = s, y'(a) = y'(b) = s + 1, a = s, b = s + 2$$

де r – номер прізвища студента в списку академічної групи, $s = 1$ для студентів заочної форми навчання, $s = 2$ – денної. Обрати різні значення кроку h та порівняти результати з розв'язком, отриманим методом Гальоркіна в лабораторній роботі №4.

Таблиця 3.1 – Таблиця варіантів лабораторної роботи №6

Шифр по верти-калі	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
k_1	-1	2	-2	-1	-2	-4	-3	-4	2	-2.7
k_2	-4.8	-3.1	2.5	1.7	2	1.2	2	3.2	3	-1.3

Шифр по горизонталі	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	0.5	1.3	2.4	-1	0	1	0	0.8	-4	0
B	0.5	0.7	0	1	-2	0.5	0	0.3	-0.6	2
a	1	-1	-1	0.5	0	2	-1	-0.5	-1	0
b	2	0	1.4	1.5	1	3	0	1.5	1	1
α_1	2	0	0	-3	2	0	0	-1	0	0
α_0	0	2	-1	0	0	5	-4	0	1	-1
β_0	-1	0	0	3	-2	0	0	-1	0	0
β_1	0	-1	2	0	0	-5	4	0	1	-1
h	0.1	0.1	0.25	0.1	0.1	0.1	0.1	0.2	0.2	0.1
$p(x)$	k_1x	$\frac{k_1}{x+k_2}$	k_1x+k_2	k_2x	$k_2x^2-k_1$	k_1-x	k_2+x^2	k_1x^3	$k_2x^3-k_1$	$x^2k_1^2$
$q(x)$	$\frac{k_1x}{x^2+k_2^2}$	k_2x	k_1x^2	$k_2x^3+k_1$	k_2-x	k_2+x^3	k_2x	k_2x-k_1	k_1x+k_2	$\frac{k_2}{x+1}$
$f(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+k_1^2}}$	k_2+x^3	$\frac{k_2+x}{x^2-k_1}$	$\frac{x^2+k_2}{x}$	$\frac{1}{k_1x-k_2}$	$\sqrt{x^2+k_2^2}$	$\frac{k_1x^2}{k_2+x}$	$\frac{1}{k_2x^2-k_1}$	$k_2x^2+k_1x$	$\frac{k_1x+k_2}{(k_1-x)^3}$

h - крок розбиття відрізка $[a, b]$ в методі кінцевих різниць (див. індивідуальне завдання).

Методичні рекомендації до лабораторної роботи №6

Задача 3.1 Розв'язати задачу (3.5) – (3.6) методом скінченних різниць, якщо [1]

$$p(x) = -x, \quad q(x) = -\frac{x}{x^2 + 4.8^2}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad A = 0.5, \quad B = 0.5,$$

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = 2, \quad \beta_0 = -1, \quad \beta_1 = 0;$$

Розв'язання. Реалізуємо метод в системі Maple.

- Щоб знайти кількість проміжків розбиття N відрізка $[a; b]$, знаючи крок h , можна застосувати оператор $N := \text{trunc}((b - a) / h)$;
- Визначаємо вузли розбиття:

> for i from 0 to N do $X[i] := h*i+a$ od;

- Утворюємо рівняння (3.3), що відповідають даному звичайному диференціальному рівнянню:

>for i to N-1 do

$p_{ii} := \text{subs}(x = X[i], p(x))$;

$q_i := \text{subs}(x = X[i], q(x))$; $f_{ii} := \text{subs}(x = X[i], f(x))$;

$eq[i] := \text{evalf}((y[i+1]-2*y[i]+y[i-1])/h^2+p_{ii}*(y[i+1]-y[i-1])/(2*h)+q_i*y[i]-f_{ii})$

od:

- Доповнюємо систему рівняннями (3.4) що відповідають крайовим умовам:

> $eq[0] := \alpha_0*y[0]+\alpha_1*(-3*y[0]+4*y[1]-y[2])/(2*h)-A$;

$eq[N] := \beta_0*y[N]+\beta_1*(3*y[N]-4*y[N-1]+y[N-2])/(2*h)-B$;

- Таким чином утворено систему із $N+1$ рівняння $\{seq(eq[j], j=0..N)\}$ відносно такої ж кількості змінних $\{seq(y[j], j=0..N)\}$. СЛАР може бути розв'язаною за допомогою інструмента solve.
- Для порівняння результатів побудуємо графіки розв'язків, отриманих методом Гальоркіна в задачі 2.6 (суцільна зелена лінія на рис. 3.1), а також методом кінцевих різниць (точкова лінія, побудована за точками, що відповідають вузлам).
- Отже, спостерігаємо високу узгодженість результатів.

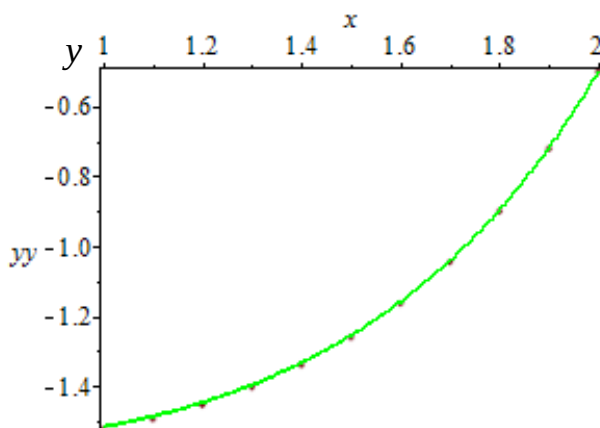


Рис. 3.1 – Подання результатів розв'язання задачі 3.1

Задача 3.2 Розв'язати методом скінченних різниць крайову задачу:

$$y^{(4)} + 13x^2 y''' + (x+1)y'' + (3-x^2)y' - xy = 5x - 6,$$

$$y(a) = y(b) = -1, y'(a) = y'(b) = 1, a = 1, b = 3.$$

Розв'язання. Така крайова задача вже була розв'язана методом Гальоркіна (задача 2.8), тому наприкінці проведемо порівняння результатів.

- При використанні Maple вхідні дані визначимо аналогічно задачі 2.8, кількість проміжків розбиття N та вузли розбиття, як в попередній задачі.
- Рівняння (3.7) у внутрішніх вузлах розбиття можна записати за допомогою коду

> for i to N-1 do

$p1i := \text{subs}(x = X[i], p1(x));$

$p2i := \text{subs}(x = X[i], p2(x));$

$p3i := \text{subs}(x = X[i], p3(x));$

$p4i := \text{subs}(x = X[i], p4(x));$

$fii := \text{subs}(x = X[i], f(x));$

$eq[i] := \text{evalf}((y[i-2]-4*y[i-1]-4*y[i+1]+y[i+2]+6*y[i])/h^4+p1i*(-$
 $(1/2)*(y[i-2]-2*y[i-1]+2*y[i+1]-y[i+2])/h^3)+p2i*(-(1/12)*(y[i-2]-$
 $16*y[i-1]-16*y[i+1]+y[i+2]+30*y[i])/h^2)+(1/12)*p3i*(y[i-2]-8*y[i-1]$
 $+8*y[i+1]-y[i+2])/h+p4i*y[i]-fii);$

od;

- Рівняння для крайових умов у даній задачі можуть бути записані як

> $eq[0] := y[0]-A[1];$ $eq[N] := y[N]-A[2];$

$eq[-1] := -(1/6)*(3*y[0]+2*y[-1]-6*y[1]+y[2])/h-A[3];$

$eq[N+1] := (1/6)*(3*y[N]+y[N-2]-6*y[N-1]+2*y[N+1])/h-A[4];$

- В результаті утворено систему із $N + 3$ рівнянь

> $\text{sys} := \{\text{seq}(eq[j], j = -1 .. N+1)\};$

відносно такої ж кількості змінних

> $\text{var} := \{\text{seq}(y[j], j = -1 .. N+1)\};$

Для розв'язання СЛАР використовуємо інструмент solve.

- На рис. 3.2 побудовано графіки розв'язків, отриманих методом скінченних різниць з вибором $h = 0.1$ (точковий синій графік), $h = 0.05$ (точковий червоний) та методом Гальоркіна (суцільний зелений) з використанням 11 лінійно незалежних функцій. Результати мають достатню узгодженість, якщо $h = 0.05$.

Контрольні питання

1. Викласти ідею виведення різницевого відношення. Яка формула покладена в основу виведення різницевого відношення? Яка точність різницевого відношення, що використовуються у внутрішніх вузлах та кінцевих? Чим суттєво відрізняються різницеві відношення у внутрішніх та кінцевих вузлах?
2. Сутність методу скінченних різниць.

3. Чим метод скінченних різниць відрізняється від наближених методів, що вивчалися в цьому курсі?

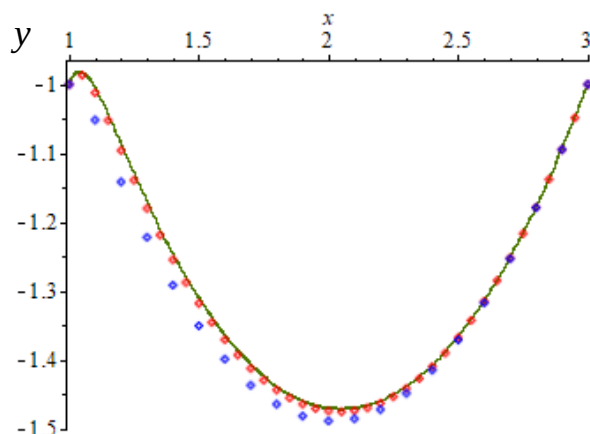


Рис. 3.2 – Зіставлення результатів, отриманих методом скінченних різниць та методом Гальорківна в умовах задачі 3.2

Тема 11. Різницевий метод розв'язання крайової задачі для рівнянь еліптичного типу

Сутність методу.

Розглянемо крайову задачу для рівняння Пуассона [2]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \text{ на } G, \quad (3.7)$$

$$u|_{\Gamma} = \phi(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma, \quad (3.8)$$

де G – деяка скінчена область (рис. 3.3), Γ – межа області G , $f(x, y)$ – задана на G функція, $\phi(x, y)$ – задана на Γ функція.

Суть різницевого методу розв'язання задачі (3.7), (3.8) полягає у наступному. Будуємо квадратну сітку з кроком $h=1/M$ (M – натуральне): $x_k = kh$, $y_m = mh$. В усіх розташованих в області G вузлах сітки, які можна з'єднати з чотирма найближчими вузлами відрізками прямих, не перетинаючи межу Γ , частинні похідні $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, що входять у рівняння (3.7), замінимо формулами

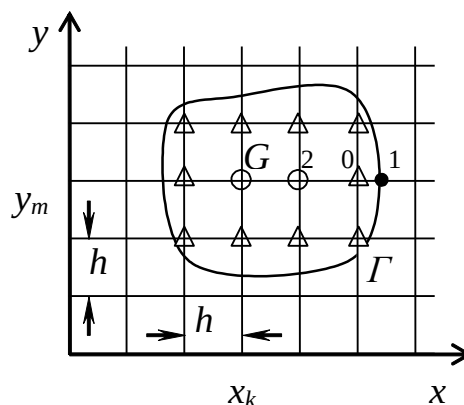


Рис.3.3 – Схема використання сітки в методі скінченних різниць

чисельного диференціювання другого порядку точності (порядку $O(h^2)$):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{V_{k-1,m} - 2V_{km} + V_{k+1,m}}{h^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{V_{k,m-1} - 2V_{km} + V_{k,m+1}}{h^2} \quad (3.9)$$

де $V_{km} = V(x_k, y_m)$ – наближений розв'язок задачі (3.7), (3.8).

Підставляючи (3.9) у (3.10), одержимо:

$$\frac{V_{k-1,m} - 2V_{km} + V_{k+1,m}}{h^2} + \frac{V_{k,m-1} - 2V_{km} + V_{k,m+1}}{h^2} = f_{km}, \quad (3.10)$$

де $f_{km} = f(x_k, y_m)$.

Для всіх внутрішніх вузлів області G поблизу її межі Γ (позначених на рис. 3.3 трикутниками), для формування різницьових рівнянь застосовується лінійна інтерполяція в напрямку осі Ox . Наприклад, у точці з номером 0 рівняння має вигляд

$$V_0 = \frac{\rho_1}{\rho_1 + \rho_2} V_2 + \frac{\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \phi_1, \quad (3.11)$$

де ρ_1 – відстань від точки 0 до точки 1 на межі Γ , у якій береться задане значення функції ϕ , позначене через ϕ_1 ; V_0, V_2 – невідомі в точках 0, 2; $\rho_2 = h$ – відстань між цими точками. Тут для простоти використовується один індекс. Формула (3.11) означає лінійну інтерполяцію між точками 1, 2 в точку 0.

Аналогічні різницьові рівняння задаються в інших вузлах, позначених трикутниками. При цьому відстань від точки, в яку відбувається інтерполяція, до обох крайніх точок не повинна перевищувати h і одна чи обидві крайні точки повинні лежати на межі Γ .

Отже, у кожному вузлі, позначеному кружком, задане рівняння (3.10), а в кожному вузлі, позначеному трикутником, рівняння має вид типу (3.11). Загальне число рівнянь збігається з числом невідомих. Отримана система лінійних алгебраїчних рівнянь має єдиний розв'язок V , для знаходження якого можуть бути застосовані прямі й ітераційні методи розв'язання систем рівнянь.

Якщо розв'язок крайової задачі (3.7), (3.8) $u(x, y) \in C^{(4)}(\bar{G})$, то має місце оцінка похибки

$$\max_{G_h} |u - V| = O(h^2),$$

де $\bar{G} = G \cup \Gamma$, G_h – множина усіх вузлів, позначених кружками й трикутниками.

Лабораторна робота №7 Метод скінченних різниць розв'язання крайової задачі для рівняння Пуассона

Мета: навчитися розв'язувати крайову задачу для рівняння Пуассона методом скінченних різниць за допомогою СКА.

Завдання до лабораторної роботи №7

Різницьовим методом розв'яжіть крайову задачу для рівняння Пуассона, поставлену в лабораторній роботі №5 з варіантами в табл. 2.5. Порівняйте отримані результати з наближеним розв'язком, знайденим методом Рітца.

Методичні рекомендації до лабораторної роботи №7

Задача 3.3 Методом скінченних різниць розв'язати крайову задачу (3.7) – (3.8), якщо

$$\phi(x, y) = |x| \cdot |y|, \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1 \quad (\Gamma)$$

у випадках **а)** $f(x, y) = 0$; **б)** $f(x, y) = 0.6 \sin(x) - 1.25 y^2 + 1$, $(x, y) \in G$.

Порівняти результати з отриманими методом Рітца.

Розв'язання. Реалізуємо метод скінченних різниць поетапно у загальному випадку рівняння Пуассона.

Спочатку задамо функції, що відповідають правим частинам (3.7) і (3.8), а також межі області

```
> psi1 := abs(X)*abs(Y):
  F := .6*sin(X)-1.25*Y^2+1:
> y2 := 5*sqrt(1-(1/9)*X^2);
  x2 := 3*sqrt(1-((1/5)*Y)^2);
```

Далі визначимо квадратну сітку на прямокутнику, що обмежує дану область, підрахувавши кількість вертикальних та горизонтальних відрізків:

```
> i := 1: x[i] := -3:
  while x[i] < 3 do i := i+1; x[i] := -3+(i-1)*h; nn := i od:
> i := 1: h := .25: y[i] := -4:
  while y[i] < 5 do i := i+1; y[i] := -5+(i-1)*h; mm := i od:
```

Визначаємо рівняння системи та її змінні, використовуючи лічильник *nom*. Нижче наведемо один з варіантів коду з коментарями

>

```
pr := 0; nom := 0;
for i from 2 to nn - 1 do
  for j from 2 to mm - 1 do
    fij := subs(X=x[i], Y=y[j], F) :
```

#` **Крок 1.** Перевіряємо, чи відповідає точка позначенню "кружок".

```
if abs(y[j-1]) < subs(X=x[i], y2) and abs(y[j+1]) < subs(X=x[i], y2) and abs(y[j])
  < subs(X=x[i+1], y2) and abs(y[j]) < subs(X=x[i-1], y2) then
  nom := nom + 1;
```

Для визначення утворення рівняння використовуємо формулу (3.10).

```
ur[nom] := -w[i,j] + 1/4*(w[i-1,j] + w[i+1,j] + w[i,j-1] + w[i,j+1]) - (1/4)*h
  ^2*fij;
w[i,j] := qw[nom] fi;
```

#` **Крок 2.** Перевіряємо точки, що мають позначку "трикутником".

Для утворення рівнянь використовуємо формулу (3.11).

Щоб виключити з розгляду вивчені точки, змінній *pr* присвоюємо значення 1 на подальших кроках.

```

# Перевіряємо такі точки на близькість до лінії верхньої межі.
if abs(y[j-1]) < subs(X=x[i],y2) and abs(y[j+1]) ≥ subs(X=x[i],y2) then
  yy := subs(X=x[i],y2);
  psij := subs(X=x[i],Y=yy,psi1);
  rho1 := abs(y[j]-yy);
  nom := nom + 1;
  ur[nom] := -w[i,j] + rho1*w[i,j-1]/(h + rho1) + h*psij/(h + rho1);
  # Відповідає (3.11).
  pr := 1;
  w[i,j] := qw[nom] fi;

# Перевіряємо такі точки на близькість до лінії нижньої межі.
if abs(y[j-1]) ≥ subs(X=x[i],y2) and abs(y[j+1]) < subs(X=x[i],y2) then
  yy := -subs(X=x[i],y2);
  psij := subs(X=x[i],Y=yy,psi1);
  rho1 := abs(y[j]-yy); nom := nom + 1;
  ur[nom] := -w[i,j] + rho1*w[i,j+1]/(h + rho1) + h*psij/(h + rho1);
  # Відповідає (3.11).
  pr := 1; w[i,j] := qw[nom] fi;

# Перевіряємо такі точки на близькість до лінії правої межі.
if pr ≠ 1 and abs(y[j]) < subs(X=x[i-1],y2) and abs(y[j]) ≥ subs(X=x[i+1],y2)
then
  xx := subs(Y=y[j],x2);
  psij := subs(X=xx,Y=y[j],psi1);
  rho1 := abs(x[i]-xx);
  nom := nom + 1;
  ur[nom] := -w[i,j] + rho1*w[i-1,j]/(h + rho1) + h*psij/(h + rho1);
  # Відповідає (3.11).
  w[i,j] := qw[nom] fi;

# Перевіряємо такі точки на близькість до лінії лівої межі.
if pr ≠ 1 and abs(y[j]) ≥ subs(X=x[i-1],y2) and abs(y[j]) < subs(X=x[i+1],y2)
then
  xx := -subs(Y=y[j],x2);
  psij := subs(X=xx,Y=y[j],psi1);
  rho1 := abs(x[i]-xx);
  nom := nom + 1;
  ur[nom] := -w[i,j] + rho1*w[i+1,j]/(h + rho1) + h*psij/(h + rho1);
  # Відповідає (3.11).
  w[i,j] := qw[nom] fi;
pr := 0 od od;

```

Після розв'язання системи

```
> var := {seq(qw[i], i = 1 .. nom)}; solve(sys, var); assign(%);
```

ідентифікуємо матрицю

```
> w := Matrix(1 .. nn, 1 .. mm);
```

в яку вносимо розв'язок системи, і фактично виконуємо зворотні кроки:

```

> pr := 0; nom := 0;
  for i from 2 to nn - 1 do
    for j from 2 to mm - 1 do
      if abs(y[j-1]) < subs(X=x[i],y2) and abs(y[j+1]) < subs(X=x[i],y2) and abs(y[j])
        < subs(X=x[i+1],y2) and abs(y[j]) < subs(X=x[i-1],y2) then
        nom := nom + 1;
        w[i,j] := qw[nom] fi;
      if abs(y[j-1]) < subs(X=x[i],y2) and abs(y[j+1]) ≥ subs(X=x[i],y2) then
        pr := 1;
        nom := nom + 1;
        w[i,j] := qw[nom] fi;
      if abs(y[j-1]) ≥ subs(X=x[i],y2) and abs(y[j+1]) < subs(X=x[i],y2) then
        pr := 1;
        nom := nom + 1;
        w[i,j] := qw[nom] fi;
      if pr ≠ 1 and abs(y[j]) < subs(X=x[i-1],y2) and abs(y[j]) ≥ subs(X=x[i+1],y2) then
        nom := nom + 1;
        w[i,j] := qw[nom] fi;
      if pr ≠ 1 and abs(y[j]) ≥ subs(X=x[i-1],y2) and abs(y[j]) < subs(X=x[i+1],y2) then
        nom := nom + 1;
        w[i,j] := qw[nom] fi;
      pr := 0
    od:od:

```

Для утворення таблиці результатів можна використати оператор

> data := [seq([seq([x[i], y[j], w[i, j]], i = 2 .. nn-1)], j = 2 .. mm-1)];

З такої таблиці визначимо деякі дані у вузлах сітки. Для відповідних координат вузлів знайдемо значення функції, що були отримані методом Рітца в задачах 2.4 і 2.5 для рівнянь Лапласа та Пуассона відповідно.

В табл. 3.3 зіставлено результати для випадку рівняння Лапласа, а в табл. 3.4 – Пуассона. Відхилення в результатах становить до 14%.

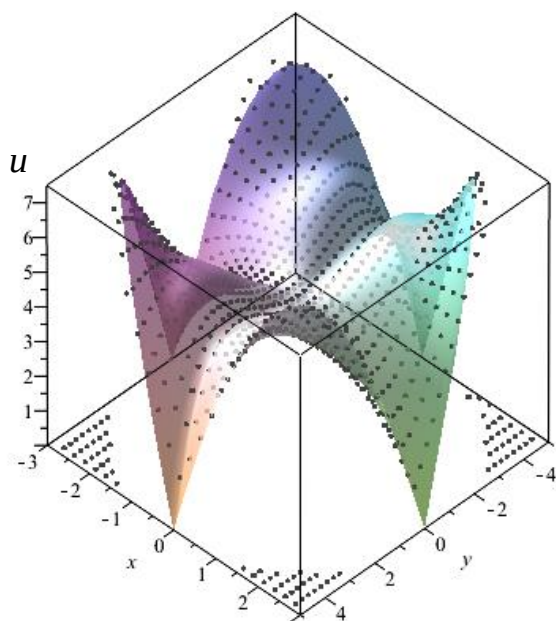
Таблиця 3.3 – Зіставлення результатів розв'язання задачі Діріхле для рівняння Лапласа, отриманих двома методами

x_i	y_j	Метод скінченних різниць	Метод Рітца
-1.25	4.25	5.822507010	5.850067812
-0.5	4	4.324959506	4.678348986
-1.5	-3.75	6.379314915	6.412557045

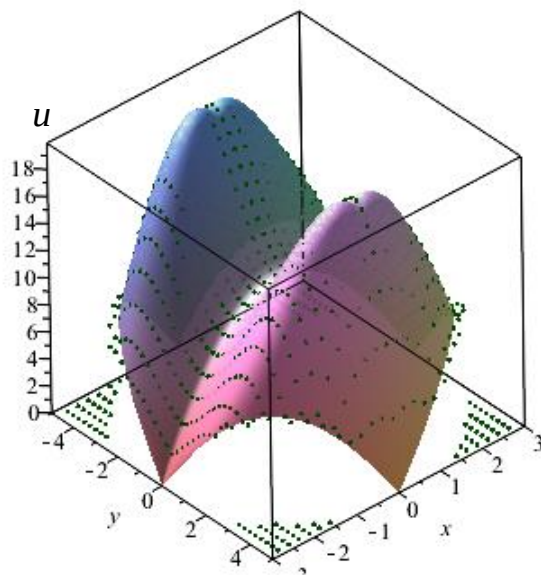
Таблиця 3.4 – Зіставлення результатів розв'язання крайової задачі для рівняння Пуассона, отриманих двома методами

x_i	y_j	Метод скінченних різниць	Метод Рітца
-1.25	3,5	15.47767245	15.65203466
0.75	3.25	18.1009523	18.62563842
1.25	3.75	13.86975877	14.05630631

На рис. 3.4 зображено графіки функцій-розв'язків, отриманих методом Рітца (кольорові прозорі поверхні) та методом скінченних різниць (точкові графіки). Випадок рівняння Лапласа відповідає рис. 3.4 (а), а випадок рівняння Пуассона – рис. 3.4 (б).



(а)



(б)

Рис. 3.4 – Зіставлення результатів, отриманих методом Рітца та методом скінченних різниць крайової задачі для рівняння Пуассона

Контрольні питання

1. Сутність різницевого методу розв'язання крайової задачі для рівняння еліптичного виду.
2. Яка похибка методу?

Тема 12. Різницевий метод розв'язання мішаної задачі для хвильового рівняння.

Сутність методу

Розглянемо мішану задачу для хвильового рівняння [3]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \quad (3.12)$$

$$u(x, 0) = p(x), \quad u'_t(x, 0) = q(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (3.13)$$

$$u(0, t) = \phi(t), \quad u(1, t) = \psi(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.14)$$

де $f(x, t)$, $p(x)$, $q(x)$, $\phi(t)$, $\psi(t)$ – задані досить гладкі функції, причому $p(0) = \phi(0)$, $p(1) = \psi(0)$.

Наближений розв'язок $y_k^v = y(x_k, t_v)$ будемо шукати різницевим методом на сітці (x_k, t_v) , де $x_k = kh$, $t_v = v\tau$, тут $h = 1/N$, $\tau = T/M$ – кроки за x і t ($N, M \in \mathbb{N}$).

Заміняючи в рівнянні (3.12) частинні похідні u''_{tt} , u''_{xx} різницевиими відношеннями другого порядку в напрямку t і x відповідно, перетворимо його до вигляду

$$\frac{y_k^{v+1} - 2y_k^v + y_k^{v-1}}{\tau^2} - \frac{y_{k-1}^v - 2y_k^v + y_{k+1}^v}{h^2} = f_k^v, \quad (3.15)$$

де $k=1,2,\dots, N-1$; $v=1,2,\dots, M-1$; $f_k^v = f(x_k, t_v)$.

Розв'язавши це рівняння явно відносно y_k^{v+1} , одержимо

$$y_k^{v+1} = \tau^2 \left[f_k^v + \frac{y_{k-1}^v + y_{k+1}^v}{h^2} \right] + 2 \left(1 - \frac{\tau^2}{h^2} \right) y_k^v - y_k^{v-1}, \quad (3.16)$$

$$k=1,2,\dots, N-1; v=1,2,\dots, M-1.$$

Формули (3.16) дозволяють заповнити комірки табл. 3.5, зафарбовані зеленим.

Але для того, щоб знайти значення різницевого розв'язку на $v+1$ -ому шарі, потрібно мати вже обчислені значення шуканого розв'язку на двох попередніх шарах. Тому для початку розрахунків потрібно одержати різницевий розв'язок окремо на шарах, що відповідають початковим значенням $v=0$ і $v=1$, тобто наближені розв'язки y_k^0 і y_k^1 .

З першої крайової умови (3.13) маємо:

$$y_k^0 = p_k, \quad k=1,2,\dots, N-1, \quad (3.17)$$

де $p_k = p(x_k)$. Формули (3.17) дозволяють заповнити комірки табл. 3.5, зафарбовані блакитним.

Таблиця 3.5 – Схема заповнення шарів значень функції в задачі для хвильового рівняння

$\begin{matrix} k \\ x_k \\ \nu \\ t_\nu \end{matrix}$		0	1	...	k	...	$N-1$	N
		x_0	x_1	...	x_k	...	x_{N-1}	x_N
0	t_0	y_0^0	y_1^0	...	y_k^0	...	y_{N-1}^0	y_N^0
1	t_1	y_0^1	y_1^1	...	y_k^1	...	y_{N-1}^1	y_N^1
2	t_2	y_0^2	y_1^2	...	y_k^2	...	y_{N-1}^2	y_N^2
...	...	...	...	...	...	...	...	...
$\nu-1$	$t_{\nu-1}$	$y_0^{\nu-1}$	$y_1^{\nu-1}$	...	$y_k^{\nu-1}$	...	$y_{N-1}^{\nu-1}$	$y_N^{\nu-1}$
ν	t_ν	y_0^ν	y_1^ν	...	y_k^ν	...	y_{N-1}^ν	y_N^ν
$\nu+1$	$t_{\nu+1}$	$y_0^{\nu+1}$	$y_1^{\nu+1}$	...	$y_k^{\nu+1}$	...	$y_{N-1}^{\nu+1}$	$y_N^{\nu+1}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...
$M-1$	t_{M-1}	y_0^{M-1}	y_1^{M-1}	...	y_k^{M-1}	...	y_{N-1}^{M-1}	y_N^{M-1}
M	t_M	y_0^M	y_1^M	...	y_k^M	...	y_{N-1}^M	y_N^M

Отримаємо y_k^1 при $k=1,2,\dots,N-1$. Для цього напишемо розклад за формулою Маклорена за змінною t , утримуючи три його перші члени:

$$u(x_k, t_1) = u(x_k, 0) + \tau u'_t(x_k, 0) + \frac{\tau^2}{2} u''_{tt}(x_k, 0) + o(h^2 + \tau^2). \quad (3.18)$$

Застосуємо: позначення для функцій у вузлах сітки

$$u(x_k, t_1) = y_k^1, \quad (3.19)$$

початкові умови (3.13)

$$u(x_k, 0) = y_k^0 = p_k, \quad u'_t(x_k, 0) = q(x_k), \quad (3.20)$$

де $q_k = q(x_k)$, рівняння (3.12) та умови (3.13)

$$u''_{tt}(x_k, 0) = f(x_k, 0) + u''_{xx}(x_k, 0) = f_k^0 + p''(x_k). \quad (3.21)$$

Використаємо подання $p''(x_k)$ різницеvim відношенням другого порядку

$$p''(x_k) = \frac{p_{k-1} - 2p_k + p_{k+1}}{h^2}. \quad (3.22)$$

Підставимо співвідношення (3.19) – (3.22) до подання (3.18), прийдемо до розрахункової формули

$$y_k^1 = p_k + \tau q_k + \frac{\tau^2}{2} \left(f_k^0 + \frac{p_{k-1} - 2p_k + p_{k+1}}{h^2} \right) \quad (k=1,2,\dots,N-1) \quad (3.23)$$

для заповнення комірок табл. 3.5, зафарбованих сірим.

Нарешті, відповідно до крайових умов (3.14) маємо

$$y_0^v = \phi^v, \quad y_N^v = \psi^v, \quad v=0,1,2,\dots,M, \quad (3.24)$$

де $\phi^v = \phi(t_v)$, $\psi^v = \psi(t_v)$. Відповідні комірки табл. 3.5 виділені помаранчевим та рожевим кольорами.

Тепер різницева схема (3.16), (3.17), (3.23), (3.24) цілком визначена і може застосовуватися для розрахунків. Відзначимо, що ця схема явна тришарова, умовно стійка.

Можна показати, що якщо $h \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow 0$, причому $\tau/h \leq c < 1$, $c = \text{const}$, то розв'язок різницевої схеми (5)-(8) збігається до розв'язку задачі (3.12) – (3.14) у наступному сенсі:

$$\|u - y\|_h = O(h^2 + \tau^2),$$

$$\text{де } \|u - y\|_h = \max_{0 \leq v \leq M} \left(h \sum_{k=1}^{M-1} (u_k^v - y_k^v)^2 \right)^{1/2}.$$

Отже, схема (3.16), (3.17), (3.23), (3.24) має другий порядок точності і за h , і за τ .

Лабораторна робота №8 Метод скінченних різниць розв'язання мішаної задачі для хвильового рівняння

Мета: навчитися застосовувати метод скінченних різниць до розв'язання мішаної задачі для хвильового рівняння.

Завдання до лабораторної роботи №8

Розв'яжіть мішану задачу для хвильового рівняння різницеvim методом при наступних значеннях вихідних параметрів для індивідуальних варіантів, причому $T = 0,5$; $h = 0,25$; $\tau = 0,1$.

Номер варіанта (табл. 3.6 [3]) визначається за номером прізвища студента в журналі академічної групи з додаванням числа 0 – для денної форми навчання, 10 – для заочної.

Таблиця 3.6 Індивідуальні варіанти до лабораторної роботи №8

№ 1. $f(x,t) = 1 + 0,2t \sin x - t^2$, $p(x) = x(x+1)$, $q(x) = \cos x$, $\phi(t) = 0$, $\psi(t) = 2(t+1)$.	№2. $f(x,t) = \cos(x+t) + 0,5(x-t)$, $p(x) = x \cos \pi x$, $q(x) = x(2-x)$, $\phi(t) = 2t$, $\psi(t) = -1$.
№ 3. $f(x,t) = \frac{\cos x}{x+1} - 0,5t^2$, $p(x) = \cos \frac{\pi x}{2}$, $q(x) = x^2$, $\phi(t) = 1 + 2t$, $\psi(t) = 0$.	№ 4. $f(x,t) = (1-t^2) \cos x + 0,6t$, $p(x) = (x+0,5)(x-1)$, $q(x) = \sin(x+0,2)$, $\phi(t) = t - 0,5$, $\psi(t) = 3t$.
№ 5. $f(x,t) = 1 + 0,4t \sin x - 1,5t^2$, $p(x) = 2x(x+1) + 0,3$, $q(x) = 2 \sin x$, $\phi(t) = 0,3$, $\psi(t) = 4,3 + t$.	№ 6. $f(x,t) = \frac{\cos t}{x+2} + 0,3t^2$, $p(x) = (x+0,2) \sin \frac{\pi x}{2}$, $q(x) = 1 + x^2$, $\phi(t) = 0$, $\psi(t) = 1,2(t+1)$.
№ 7. $f(x,t) = \cos(1,5x+t) + (x-t)$, $p(x) = x \sin \pi x$, $q(x) = (x+1)^2$, $\phi(t) = 2t$, $\psi(t) = 0$.	№ 8. $f(x,t) = 1 - \sin(x+t) + \frac{0,5t}{x+2}$, $p(x) = 3x(1-x)$, $q(x) = \cos(x+0,5)$, $\phi(t) = 2t$, $\psi(t) = 0$.
№ 9. $f(x,t) = \frac{\cos t}{1,5+x} + 0,1t^2$, $p(x) = x(2x-0,5)$, $q(x) = \cos 2x$, $\phi(t) = t^2$, $\psi(t) = 4,5 - 3t$.	№ 10. $f(x,t) = 0,6 \sin x - 1,25t^2 + 1$, $p(x) = (x+1) \sin \pi x$, $q(x) = x^2 + x$, $\phi(t) = 0$, $\psi(t) = 0,5t$.
№ 11. $f(x,t) = \cos(2x+t) + 1,5(x-t)$, $p(x) = (1-x) \cos \frac{\pi x}{2}$, $q(x) = 2x+1$, $\phi(t) = 2t+1$, $\psi(t) = 0$.	№ 12. $f(x,t) = 1 - \frac{0,1t}{x+2} - \sin(2x+t)$, $p(x) = 0,5x(x+1)$, $q(x) = x \cos x$, $\phi(t) = 2t^2$, $\psi(t) = 1$.

№ 13. $f(x, t) = \frac{\cos t}{1,25 + x} - 0,1t^2$, $p(x) = 0,5(x^2 + 1)$, $q(x) = 0,5(x^2 + 1)$, $\phi(t) = 0,5 + 3t$, $\psi(t) = 1$.	№ 14. $f(x, t) = 1 + 0,8t \sin x - 2t^2$, $p(x) = (x + 1) \sin \frac{\pi x}{2}$, $q(x) = 1 - x^2$, $\phi(t) = 0,5t$, $\psi(t) = 2$.
№ 15. $f(x, t) = \cos(1,5x + t) + 1,5(x - t)$, $p(x) = x^2 \cos \pi x$, $q(x) = x^2(x + 1)$, $\phi(t) = 0,5t$, $\psi(t) = t - 1$.	№ 16. $f(x, t) = 1 - \sin(2x + t) + \frac{0,3t}{x + 2}$, $p(x) = (1 - x^2) \cos \pi x$, $q(x) = 2x + 0,6$, $\phi(t) = 1 + 0,4t$, $\psi(t) = 0$.
№ 17. $f(x, t) = \frac{\cos t}{1,75 + x} - 0,5t^2$, $p(x) = (x + 0,5)^2$, $q(x) = (x + 1) \sin x$, $\phi(t) = 0,5(0,5 + t)$, $\psi(t) = 2,25$.	№ 18. $f(x, t) = 1 + (1 - x) \sin t - (2 + x)t$, $p(x) = 1,2x - x^2$, $q(x) = (x + 0,6) \sin x$, $\phi(t) = 0$, $\psi(t) = 0,2 + 0,5t$.
№ 19. $f(x, t) = (0,8 - t^2) \cos t + 0,3t$, $p(x) = (x + 0,5)(x + 1)$, $q(x) = \cos(x + 0,3)$, $\phi(t) = 0,5$, $\psi(t) = 3 - 2t$.	№ 20. $f(x, t) = 1 + 2,2 \sin x + 1,5t^2$, $p(x) = 0,5(x + 1)^2$, $q(x) = (x + 0,5) \cos \pi x$, $\phi(t) = 0,5$, $\psi(t) = 2 - 3t$.

Методичні рекомендації до лабораторної роботи №8

Задача 3.4 Розв'язати хвильову задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \cos(x - t) + \frac{1,25t}{1,5 + x}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq 0,5;$$

$$u(x, 0) = (x + 0,6) \sin \frac{\pi x}{2}; \quad u'_t(x, 0) = 2,5 - 1,5x^2, \quad 0 \leq x \leq 1;$$

$$u(0, t) = t; \quad u(1, t) = 1,6 + 0,2t; \quad 0 \leq t \leq 0,5.$$

Розв'язання. Покладемо $N = 4, M = 5$, тоді $h = 0,25$, $\tau = 0,1$, і співвідношення $\frac{\tau}{h} < 1$ буде дотримано.

- Вводимо дані функції

$$> f := \cos(x - t) + 1,25 * t / (1,5 + x); \quad p := (x + 0,6) * \sin((1/2) * \text{Pi} * x); \quad q := 2,5 - 1,5 * x^2;$$

$$phi := t; \quad psi := 1,6 + 0,2 * t;$$

- Послідовно застосовуємо розрахункові формули:
спочатку формулу (3.17):

```
> for k from 0 to N do
  xx[k] := 0+h*k;
  pp[k] := evalf(subs(x = xx[k], p));
  y[0, k] := pp[k] od;
```

потім формули (3.24):

```
> for nu from 0 to M do
  tt[nu] := 0+tau*nu;
  y[nu, 0] := evalf(subs(t = tt[nu], phi));
  y[nu, N] := evalf(subs(t = tt[nu], psi)) od;
```

далі – (3.23):

```
> for k to N-1 do
  qk := evalf(subs(x = xx[k], q), 20);
  fk := evalf(subs(x = xx[k], t = tt[1], f), 20);
  y[1, k] := pp[k]+tau*qk+(1/2)*tau^2*(fk+(pp[k-1]-2*pp[k]+pp[k+1])/h^2)
od;
```

і нарешті – (3.16):

```
> for nu to M-1 do
  for k to N-1 do
    fknu := evalf(subs(x = xx[k], t = tt[nu], f));
    y[nu+1, k] := tau^2*(fknu+(y[nu, k-1]+y[nu, k+1])/h^2)+(2*(1-
tau^2/h^2))*y[nu, k]-y[nu-1, k] od: od;
```

- Для утворення таблиці з результатами використаємо код:

```
> for nu from 0 to M do print(seq(y[nu,kk],kk=0..N)) od;
```

Відповідні значення розміщено в табл. 3.7.

Таблиця 3.7 Значення функції $u(x, t)$, що є розв'язком хвильової задачі

$x_k \backslash t_v$	0	0,25	0,5	0,75	1
0	0	.325280917	0.7778174594	1.247237369	1.6
0,1	0.1	.581387365.	0.9965859338	1.40778798	1.62
0,2	0.2,	.837505603	1.224550576	1.545016586	1.64
0,3	0.3,	1.06496621	1.45266594	1.655804330	1.66
0,4	0.4	1.244194549	1.66292717	1.745432378	1.68
0,5	0.5	1.368093829	1.831842049	1.823006363	1.7

Можна також побудувати графік функції $u(x, t)$

```
> data := [seq([seq([xx[jj], tt[ii], y[ii, jj]], ii = 0 .. M)], jj = 0 .. N)];
```

для його зображення використаємо оператор `surfdata(data);`

На рис. 3.5 зображено два графіки, розраховані для $N = 4, M = 5$ (а) і $N = M = 50$ (б).

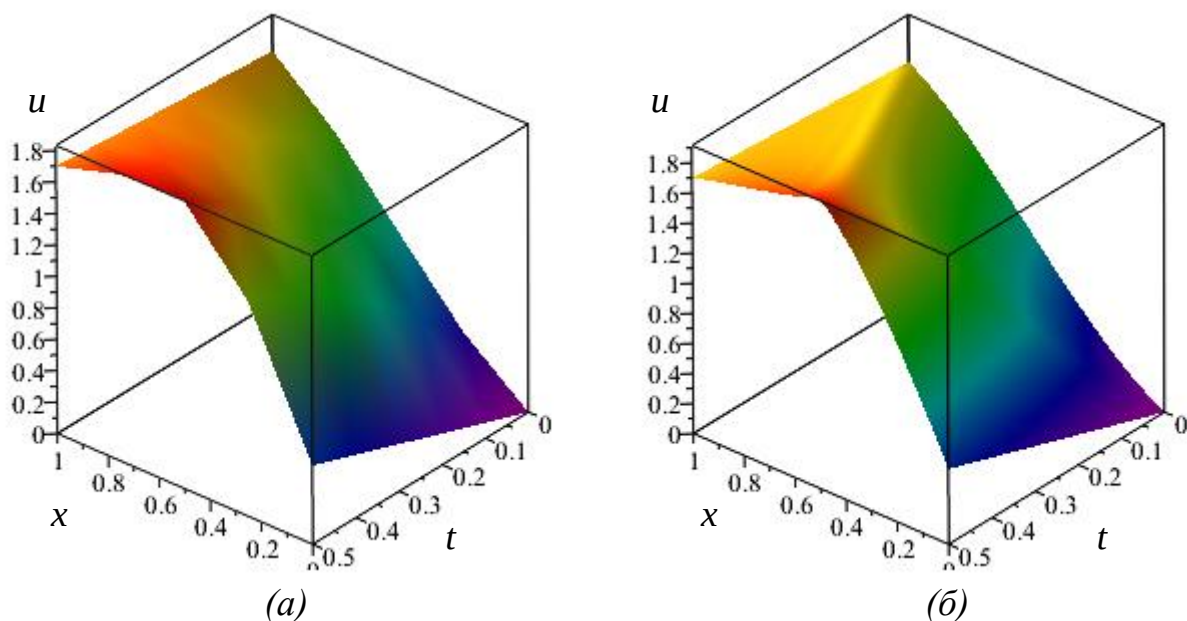


Рис. 3.5 – Функції-розв'язки задачі 3.4

Розрахунки в задачі 3.4 можна проводити в табличному процесорі. Пропонуємо студентам реалізувати такий спосіб розв'язання.

Контрольні питання

1. Опишіть постановку мішаної задачі для хвильового рівняння, метод розв'язання, похибку методу.
2. В чому полягає коректність постановки задачі (3.12)-(3.14)?
3. Наведіть розрахункову схему задачі.

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ

Мета: Закріпити вміння розв'язувати крайові задачі проєкційними, варіаційними та різницевими методами.

Номер варіанта визначається за номером прізвища студента в журналі академічної групи з додаванням числа 10 – для денної форми навчання, 0 – для заочної.

Завдання №1 Розв'яжіть методом Гальоркіна та методом скінченних різниць крайову задачу для звичайного диференціального рівняння, наведену в лабораторній роботі №5 з індивідуальними варіантами в табл. 3.1.

Порівняти результати, отримані двома методами.

Вказівка до завдання №1 Приклад із завданням такого типу був наведений в задачі 2.7. Порівняння результатів двома методами проведено в задачі 3.1.

Завдання №2 Розв'яжіть методом Рітца та методом скінченних різниць крайову задачу для рівняння Пуассона, наведену в лабораторній роботі №6 з індивідуальними варіантами в табл. 3.2.

Порівняти результати, отримані двома методами.

Вказівка до завдання №2 Приклад із розв'язанням завданням такого типу методом Рітца був наведений в задачі 2.5, а методом скінченних різниць – в задачі 3.2, де в тому числі проведено порівняння результатів двома методами.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- 1 Грищак В. З., Д'яченко Н. М., Панасенко Є. В. Застосування математичного апарату в прикладних дослідженнях : методичні рекомендації до самостійної роботи для здобувачів ст. вищ. освіти магістра спец. «Математика» освітньо-проф. пр. «Математика». Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2022. 75 с.
- 2 Грищак В. З., Гребенюк С. М., Левчук С. А. Методи обчислень: методичні вказівки до виконання лабораторних робіт для студентів освітнього ст. «бакалавр» напряму підготовки «Математика». Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2015. 86 с.
- 3 Методи обчислень : метод. вказівки до викон. лабор. робіт для студ. спец. "Математика" / Укл. В. В. Киричеський, С. А. Левчук. Запоріжжя : ЗДУ, 2005. 58 с.
- 4 Plyin V. A., Poznyak E. G. Fundamentals Of Mathematical Analysis Part 2. MIR Publishers, 1982. 438 p.
- 5 Demidovič B. P., Maron I. A., Šuvaloa E. Z. Numerische Methoden der Analysis. Deutscher Verlag d. Wiss., VEB, 1968. 420 p.
- 6 Kamke E. Differentialgleichungen, Bd. 1, Gewöhnliche Differentialgleichungen Hardcover – 1. Springer Fachmedien Wiesbaden GMBH, Jan., 1983. 696 p
- 7 Kantorovich L. V., Krylov V. I. Approximate Methods of Higher. New York: Interscience. 1958. 681p.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

- 1 Гоменюк С. І., Гребенюк С. М., Панасенко Є. В. Диференціальні рівняння : навч. посіб. для здобувачів ст. вищ. освіти бакалавра спец. 113 Прикладна математика освітньо-проф. пр. «Комп'ютерне моделювання». Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2025. 73 с.
- 2 Гребенюк С. М., Д'яченко Н. М., Красікова І. В. Математичний аналіз-2: Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних : методичні вказівки до самостійної роботи для здобувачів ст. вищ. освіти бакалавра спец. «Математика» освітньо-проф. пр. «Математика», «Комп'ютерна математика». Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2019. 130 с.
- 3 Гребенюк С. М., Д'яченко Н. М., Клименко М. І., Красікова І. В., Тітова О. О., Леонтєва В. В. Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної : навч. пос. Ч. 1. Запоріжжя: Запорізький національний університет, 2013. 231 с.
- 4 Гребенюк С. М., Клименко М. І., Д'яченко Н. М., Красікова І. В., Тітова О. О., Леонтєва В. В. Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної : навч. посіб. для студ. математ. фак-тів вищ. навч. закл. рек. МОНУ. Ч. 2. Запоріжжя: Запорізький національний університет, 2013. 499 с.

- 5 Грищак В.З., Д'яченко Н.М., Панасенко Є.В. Застосування математичного апарату в прикладних дослідженнях: методичні рекомендації до самостійної роботи для здобувачів ст. вищ. осв. магістра спец. «Математика» освітньо-проф. пр. «Математика». Запоріжжя: Запорізький національний університет, 2022. 75 с.
- 6 Грищак В. З., Гребенюк С. М., Левчук С. А. Методи обчислень: методичні вказівки до виконання лабораторних робіт для студентів освітнього ст. «бакалавр» напряму підготовки «Математика». Запоріжжя: Запорізький національний університет, 2015. 86 с.
- 7 Диференціальні рівняння: підруч. для математичних і фізичних спец. ун-тів / І. І. Ляшко, О. К. Боярчук, Я. Г. Гай, О. Ф. Калайда. Київ: Вища школа, 1981. 504 с.
- 8 Жалдак М. І., Рамский Ю. С. Чисельні методи математики: посібник для самоосвіти вчителів. Київ: Радянська школа, 1984. 206 с.
- 9 Лященко М. Я., Головань М. С. Чисельні методи: підручник. Київ: Либідь, 1996. 288 с.
- 10 Методи обчислень: метод. вказівки до викон. лабор. робіт для студ. спец. «Математика» / В. В. Киричеський, С. А. Левчук. Запоріжжя: ЗДУ, 2005. 58 с.
- 11 Нікітенко О.М. Maple. Розв'язання інженерних та наукових задач: навчальний посібник. Харків: ХНУРЕ, 2014. 289 с.
- 12 Призва Г. Й. Диференціальні рівняння та їх застосування. Київ: Вища школа, 1992. 96 с.
- 13 Самойленко А. М., Перестюк М. О. Диференціальні рівняння: підруч. для студ. мат. спец. вищ. навч. закл. доп. МОНУ. Київ: Либідь, 2003. 600 с.
- 14 Хусаїнов Д. Я., Шатирко А. В. Диференціальні рівняння. Київ: ВПЦ Київський університет, 2023. 414 с.
- 15 Шкіль М. І., Лейфура В. М., Самусенко П. Ф. Диференціальні рівняння: навч. посіб. для студ. мат. спец. вищ. навч. закл. реком. МОНУ. Київ: Техніка, 2003. 368 с.
- 16 Abell M. A., Braselton J. P. *Introductory Differential Equations*. London: Academic Press, 2025. 474 p.
- 17 Abell M. L., Braselton J. P. *Differential Equations with Mathematica*. London: Academic Press, 2023. 592 p.
- 18 Baburov V. V., Gristchak V. Z., Hryshchak D. D., Dyachenko N. M. The effect of the variability of external pressure on the local and overall buckling loads for the reinforced compound type “barrel-ogive” shell structure with compartments of different Gaussian curvatures. *Computer Science and Applied Mathematic.*, 2021, No. 2. P.5-13. Doi: <https://doi.org/10.26661/2413-6549-2021-2-01>.
- 19 Demidovič B. P., Maron I. A., Šuvaloa E. Z. *Numerische Methoden der Analysis*. Deutscher Verlag d. Wiss., VEB, 1968. 420 p.
- 20 Gristchak V. Z., Hryshchak D. D., Dyachenko N. . Efficient Approximate Analytic Solution for the Problem of Stability of a Three-Layer Conic Shell Under Combined Loading. *Journal of Mathematical Sciences*. 2021. Vol. 254. No. 1. P. 71-88. Doi: <https://doi.org/10.1007/s10958-021-05289-3>.

- 21 Gristchak V. Z., Hryshchak D. D., Dyachenko N. M. Efficient approximate analytic solution for the problem of stability of a three-layer conic shell under combined loading. *Journal of Mathematical Sciences*. 2021. Vol. 254, No. 1. P. 71–88. Doi: <https://doi.org/10.1007/s10958-021-05289-3>
- 22 Grishchak V. Z., Hryshchak D.V., Dyachenko N.M., Baburov V.V. The influence of the Gaussian curvature sign of the compound shell structure's middle surface on local and overall buckling under combined loading. *Space Science and Technology*. 2022. Vol. 28. Iss. 4. P. 31-38. Doi: <https://doi.org/10.15407/knit2022.04.031>
- 23 Gristchak V. Z., Hryshchak D. V., Dyachenko N. M., Sanin A. F., Sukhyy K. M. Bifurcation state and rational design of three-layer reinforced compound cone-cylinder shell structure un-der combined loading. *Space Science and Technology*. 2023. Vol. 29. No. 6. Iss. 145. P. 26—41. Doi: <https://doi.org/10.15407/knit2023.06.026>.
- 24 Ilyin V. A., Poznyak E. G. Fundamentals Of Mathematical Analysis Part 2. MIR Publishers, 1982. 438 p.
- 25 Kamke E. Differentialgleichungen, Bd. 1, Gewöhnliche Differentialgleichungen Hardcover – 1. Springer Fachmedien Wiesbaden GMBH, Jan., 1983. 696 p
- 26 Kantorovich L. V., Krylov V. I. Approximate Methods of Higher. New York: Interscience. 1958. 681p.
- 27 Li, R., Chen Z. , Wu W. Generalized Difference Methods for Differential Equations. New York, 2000. 441 p.
- 28 Raffoul Y. N. Advanced Differential Equations. London : Academic Press, 2023. 349 p.
- 29 Ricardo H. J. A Modern Introduction to Differential Equations. London : Academic Press, 2021. 539 p.
- 30 Грищак В. З., Грищак Д. В., Д'яченко Н. М., Купріков В. О. Біфуркаційні стани та візуалізація закритичної деформації тришарових складених конструкцій. *Computer Science and Applied Mathematics*. 2024. № 2. С. 39-53. Doi: <https://doi.org/10.26661/2786-6254-2024-2-05>
- 31 Дугієнко, О. Е., Д'яченко, Н. М. Задача про зношування основи вінклерівського типу прямокутним у плані штампом за степеневому закону. *Computer Science and Applied Mathematics*. 2025. №1. С. 19-32. Doi: <https://doi.org/10.26661/2786-6254-2025-1-03>

Інформаційні джерела:

1. Наукова бібліотека Запорізького національного університету. URL: <http://library.znu.edu.ua/>
2. Національна бібліотека України імені В. І. Вернадського. URL: <http://www.nbuv.gov.ua/>
3. Maplesoft Media Releases.
URL: <https://www.maplesoft.com/company/news/releases/2021/2021-03-10-maple-2021-provides-even-more-tools-to-help-students-learn-math.aspx>

ДОДАТОК

Система накопичення балів

Види робіт	Бали
Поточний контроль	
Розділ 1	
Тестування	3
Розділ 2	
Виконання та теоретичний захист лабораторної роботи №1	5
Виконання та теоретичний захист лабораторної роботи №2	7
Виконання та теоретичний захист лабораторної роботи №3	5
Виконання та теоретичний захист лабораторної роботи №4	10
Виконання та теоретичний захист лабораторної роботи №5	5
Розділ 3	
Виконання та теоретичний захист лабораторної роботи №6	7
Виконання та теоретичний захист самостійної роботи №1	5
Виконання та теоретичний захист лабораторної роботи №7	8
Виконання та теоретичний захист лабораторної роботи №8	5
Підсумковий контроль	
Індивідуальне завдання	
Виконання та теоретичний захист завдання №1	10
Виконання та теоретичний захист завдання №2	10
Екзамен	
Підсумковий тест	20

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНЕ ВИДАННЯ
(українською мовою)

Сергій Миколайович Гребенюк
Наталія Миколаївна Д'яченко
Ірина Володимирівна Красікова

НАБЛИЖЕНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

Методичні рекомендації до лабораторних занять
для здобувачів ступеня вищої освіти магістра
спеціальності «Математика» освітньо-професійної програми «Математика»

Рецензент *С.І. Гоменюк*
Відповідальний за випуск *С.М. Гребенюк*
Коректор *Н.М. Д'яченко*