

Міністерство освіти і науки України
Запорізький національний університет

Н. І.-В. Манько, І. В. Зіновєєв, І. Г. Ткаченко

ШКІЛЬНИЙ КУРС МАТЕМАТИКИ ТА МЕТОДИКА ЇЇ ВИКЛАДАННЯ

Методичні рекомендації до практичних занять
для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра спеціальності «Математика»
освітньо-професійної програми «Математика»

Затверджено
Вченою радою ЗНУ
Протокол № 12 від 01.07.2025

Запоріжжя
2025

Манько Н. І.-В., Зіновєєв І. В., Ткаченко І. Г. Шкільний курс математики та методика її викладання : методичні рекомендації до практичних занять для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра спеціальності «Математика» освітньо-професійної програми «Математика». Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2025. 104 с.

Методичні рекомендації присвячені особливостям шкільного курсу математики та методиці його викладання у базовій середній школі. У першому розділі висвітлено загальні питання методики навчання математики: психолого-педагогічні засади, принципи й методи навчання, логіко-математичний аналіз означень, понять, об'єктів та речень, робота з теоремами, алгоритмами й правилами. Особливу увагу приділено ролі математичних задач у навчанні, методиці роботи з текстовими задачами, використанню моделювання, організації контролю та оцінювання результатів навчання, а також формам організації навчального процесу й структурі уроків різних типів.

Другий розділ зорієнтований на методику навчання математики у 5–6 класах відповідно до модельної навчальної програми (автори: А. Г. Мерзляк та ін.). Розглядаються особливості опрацювання основних змістових ліній: «Числа і дії з ними», «Вирази», «Рівняння», «Відношення і пропорції», «Геометричні фігури і величини», «Математичні задачі як спосіб дослідження реальних життєвих ситуацій та процесів».

Посібник призначений для студентів педагогічних спеціальностей, учителів математики, методистів та всіх, хто цікавиться питаннями удосконалення процесу навчання математики в закладах загальної середньої освіти.

Рецензент

А. М. Андрєєв, доктор педагогічних наук наук, професор, завідувач кафедри загальної та прикладної фізики

Відповідальний за випуск

С. М. Гребенюк, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри фундаментальної та прикладної математики

ЗМІСТ

Вступ.....	4
Модельна навчальна програма «Математика. 5-6 класи» для закладів загальної середньої освіти (автори Мерзляк А. Г. та ін.).....	5
Розділ 1 Загальна методика навчання математики в базовій середній школі.....	39
Практичне заняття 1 Психолого-педагогічні основи навчання математики. Принципи і методи навчання математики.....	39
Практичне заняття 2 Логіко-математичний аналіз означень, понять і об'єктів. Основні етапи їх формування.....	43
Практичне заняття 3 Логіко-математичний аналіз математичних речень і загальні прийоми роботи з теоремами.....	53
Практичне заняття 4 Логіко-математичний аналіз алгоритмів і правил шкільного курсу математики. Методика роботи в школі з алгоритмами і правилами.....	60
Практичне заняття 5 Задачі як засіб навчання математики.....	63
Практичне заняття 6 Методика роботи з текстовими математичними задачами в школі.....	66
Практичне заняття 7 Використання моделювання при навчанні математики в загальноосвітній школі.....	68
Практичне заняття 8 Форми, способи та засоби контролю й оцінки знань і умінь учнів. Норми оцінювання. Вимірювання навчальних досягнень учнів.....	70
Практичне заняття 9 Форми організації навчання.....	73
Практичне заняття 10 Урок, типи уроків. Структура уроків різних типів.....	76
Розділ 2 Методика навчання математики у 5-6 класах.....	80
Практичне заняття 11 Особливості вивчення змістової лінії «Числа і дії з ними».....	80
Практичне заняття 12 Особливості вивчення змістової лінії «Вирази»...	84
Практичне заняття 13 Особливості вивчення змістової лінії «Рівняння»..	87
Практичне заняття 14 Особливості вивчення змістової лінії «Відношення і пропорції».....	90
Практичне заняття 15 Особливості вивчення змістової лінії «Геометричні фігури і величини».....	93
Практичне заняття 16 Особливості вивчення змістової лінії «Математичні задачі як спосіб дослідження реальних життєвих ситуацій та реальних процесів».....	96
Список рекомендованої літератури.....	100
Корисні посилання.....	103

ВСТУП

Математика посідає особливе місце серед навчальних дисциплін шкільного курсу, адже вона є не лише засобом формування логічного мислення та інтелектуальних умінь учнів, а й важливою складовою їхнього світогляду та підготовки до життя у сучасному суспільстві. Вивчення математики сприяє розвитку здатності до аналізу й узагальнення, формуванню навичок розв'язування проблем, аргументованого висловлення власної думки та прийняття рішень.

Професійна діяльність майбутнього вчителя математики передбачає не лише ґрунтовне знання змісту шкільного курсу, а й володіння ефективними методами його викладання, розуміння психолого-педагогічних засад організації навчання, а також уміння використовувати сучасні освітні технології. Саме ці аспекти розкриваються у курсі «Шкільний курс математики та методика її викладання».

Методичне видання побудоване відповідно до Освітньо-професійної програми «Математика» і складається з двох розділів.

У першому розділі висвітлено загальні питання методики навчання математики в базовій середній школі: психолого-педагогічні основи, принципи й методи викладання, логіко-математичний аналіз понять, речень, алгоритмів та правил, методика роботи з текстовими задачами, використання моделювання, організація контролю й оцінювання, форми організації навчання та структура уроку.

Другий розділ присвячено методиці навчання математики у 5–6 класах на основі модельної навчальної програми «Математика. 5–6 класи» для закладів загальної середньої освіти (автори: А. Г. Мерзляк та ін.). У ньому розглянуто особливості опрацювання змістових ліній шкільного курсу: «Числа і дії з ними», «Вирази», «Рівняння», «Відношення і пропорції», «Геометричні фігури і величини», а також питання використання математичних задач як способу дослідження реальних життєвих ситуацій та процесів.

Видання має практичну спрямованість: кожна тема представлена у формі практичних занять, що забезпечує формування у студентів професійних умінь та навичок, необхідних для роботи вчителя математики.

Матеріали можуть бути корисними для студентів педагогічних університетів, викладачів методики математики, учителів-практиків, а також усіх, хто цікавиться проблемами вдосконалення процесу навчання математики в закладах загальної середньої освіти.

МОДЕЛЬНА НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА
«Математика. 5-6 класи»
для закладів загальної середньої освіти
(автори Мерзляк А. Г. та ін.)

«Рекомендовано Міністерством освіти і науки України»
(наказ Міністерства освіти і науки України від 12.07.2021 № 795)

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

I. Загальні відомості

Модельна навчальна програма з математики для 5–6 класів закладів загальної середньої освіти побудована відповідно до Закону України «Про повну загальну середню освіту» від 16 січня 2020 року № 463-IX, Державного стандарту базової середньої освіти, затвердженого постановою Кабінету Міністрів України від 30 вересня 2020 року № 898 (далі – Державний стандарт) і Типової освітньої програми для 5–9 класів закладів загальної середньої освіти, затвердженої наказом Міністерства освіти і науки України від 19 лютого 2021 року № 235, та спрямована на реалізацію вимог до обов’язкових результатів навчання, визначених Державним стандартом для математичної освітньої галузі.

II. Мета й завдання навчального предмета

1. Мета

Математична освітня галузь є складовою *базової середньої освіти*, метою якої є розвиток природних здібностей, інтересів, обдарувань учнів, формування компетентностей, необхідних для їх соціалізації та громадянської активності, свідомого вибору подальшого життєвого шляху та самореалізації, продовження навчання на рівні профільної освіти або здобуття професії, виховання відповідального, шанобливого ставлення до родини, суспільства, навколишнього природного середовища, національних та культурних цінностей українського народу. Випускник/випускниця закладу загальної середньої освіти – це патріот України, у світогляді якого розбудова українського суспільства й економіки та зайняття Україною гідного місця серед світових держав є однією з провідних цінностей.

Метою математичної освітньої галузі є розвиток особистості учня/учениці через формування математичної компетентності у взаємозв’язку з іншими ключовими компетентностями для успішної освітньої та подальшої професійної діяльності впродовж життя, що передбачає:

- засвоєння системи знань;
- набуття та вдосконалення вміння розв’язувати математичні та практичні задачі;
- розвиток логічного й математичного мислення;
- розуміння можливостей застосування математики в особистому та суспільному житті.

Зважаючи на сучасний стан розвитку суспільства та потреби сьогодення, одним із основних викликів є збереження та подальше підвищення статусу України як провідної світової держави в наукомістких галузях, зокрема в комп'ютерних та інформаційних дисциплінах, авіаційній та космічній галузях; проведення наукових досліджень і технічних розробок на сучасному світовому рівні; розвиток технологічного, економічного й оборонного потенціалу держави; інтенсивний розвиток усіх галузей народного господарства та оновлення виробничої бази на засадах сучасних технологій, автоматизації та роботизації; масова інформатизація та комп'ютеризація. Зазначені виклики можуть бути реалізовані виключно за умови масового набуття підростаючим поколінням компетенцій, що є чільними для професійної орієнтації в наукомістких областях, конструктивного логічного та алгоритмічного мислення, високого рівня технічної грамотності. І провідним інструментом для цього є навчання математики як мови науки, техніки та технологій.

З огляду на це нова українська школа в наш час має сформувати уявлення про математику як один із провідних інструментів пізнання навколишнього світу та керування ним, про важливість математичних знань і алгоритмічного мислення для самореалізації в сучасному світі на належному фаховому рівні; заохотити учнів/учениць до набуття математичних знань та активного їх застосування. Потрібна докорінна реформа, яка зупинить негативні тенденції і перетворить українську школу на важіль соціальної рівності та згуртованості, економічного розвитку та конкурентоспроможності України у світовій спільноті.

В основу побудови змісту та організації процесу навчання математики в закладах загальної середньої освіти покладено *компетентнісний підхід*, відповідно до якого кінцевим результатом навчання предмета є сформовані предметні та ключові компетентності, зокрема такі, як здатності учня/учениці застосовувати свої знання в навчальних і реальних життєвих ситуаціях, брати повноцінну участь у житті суспільства, нести відповідальність за свої дії.

Метою навчального предмета «Математика», який згідно з Державним стандартом входить до типової освітньої програми для 5–9 класів, є досягнення вищезазначеної мети математичної освітньої галузі, у тому числі формування в учнів/учениць предметної математичної компетентності, що передбачає здатність розвивати й застосовувати математичні знання та методи для розв'язання широкого спектра проблем у повсякденному житті; моделювання процесів та ситуацій із застосуванням математичного апарату; усвідомлення ролі математичних знань і вмінь в особистому та суспільному житті людини.

У 5–6 класах закладів загальної середньої освіти зазначеній меті слугує курс «Математика».

2. Завдання

Формування зазначеної компетентності підпорядковується реалізації загальних завдань математичної освіти, які полягають у формуванні в

учнів/учениць:

- ставлення до математики як до невід'ємної складової загальної культури людини, універсальної мови науки та техніки, ефективного засобу моделювання та дослідження процесів і явищ навколишнього світу, а отже, необхідної умови повноцінного життя людини в сучасному суспільстві;
- математичного мислення та мовлення, необхідного для опису математичних фактів і закономірностей та для створення математичних моделей;
- здатності до логічних міркувань, висновків, алгоритмічного мислення;
- здатності логічно обґрунтовувати та доводити твердження, оцінювати правильність і раціональність розв'язування задач, приймати рішення в умовах неповної, надлишкової, точної та ймовірнісної інформації;
- здатності та потреби застосовувати математичні методи під час розв'язування навчальних і практичних задач, використовувати математичні знання і вміння під час вивчення інших навчальних предметів;
- умінь працювати з підручником, опрацьовувати математичні тексти, шукати й використовувати додаткову навчальну інформацію, критично оцінювати здобуту інформацію та її джерела, виокремлювати головне, аналізувати, робити висновки, використовувати отриману інформацію в особистому житті.

У 5–6 класах закладів загальної середньої освіти мають бути реалізовані такі специфічні для даного етапу навчання математики освітні завдання:

- розширення знань про число (від натуральних чисел до звичайних і десяткових дробів, у тому числі нескінченних періодичних десяткових дробів, від'ємних чисел);
- формування культури усних і письмових обчислень, зокрема із застосуванням засобів обчислювальної техніки;
- формування початкових уявлень про залежності між величинами, подання та оброблення наборів даних, графічний спосіб характеристики залежностей між величинами, опису явищ і процесів;
- оволодіння мовою алгебри, уміннями здійснювати перетворення алгебраїчних виразів, розв'язувати рівняння;
- оволодіння вмінням моделювати за допомогою рівнянь реальні ситуації, співвідносити здобуті результати зі змістом модельної ситуації;
- оволодіння мовою геометрії, розвиток просторових уявлень і уяви;
- формування вміння виконувати найпростіші геометричні побудови за допомогою геометричних інструментів (лінійки з поділками, транспортира, косинця, циркуля та лінійки);
- формування знань про геометричні фігури на площині, їхні властивості, а також умінь застосовувати здобуті знання в навчальних і життєвих ситуаціях;

- формування уявлення про геометричні фігури в просторі та їхні властивості, а також первинних умінь застосовувати їх у навчальних і життєвих ситуаціях;
- формування знань про основні геометричні величини (довжину, площу, об'єм, міру кута), способи їх вимірювання й обчислення для планіметричних і стереометричних фігур, а також уміння застосовувати здобуті знання в навчальних і життєвих ситуаціях;
- вивчення геометричних перетворень на площині та їхніх найпростіших властивостей.

3. Вимоги до обов'язкових результатів навчання

Програма висуває вимоги до обов'язкових результатів навчання учнів на основі компетентнісного підходу.

Базові знання, що їх мають набути учні/учениці наприкінці навчання за програмою, визначені в додатку 7 до Державного стандарту. У курсі математики 5–6 класу до них належать:

- методологія математики: математична термінологія і символіка; математичні твердження; метод математичного моделювання;
- числа і вирази: числові множини; натуральні, цілі, раціональні числа, дії із ними та їх порівняння; десяткові дробы, округлення, прикидки; подільність натуральних чисел, відношення, відсотки, пропорції;
- рівняння;
- геометрія і вимірювання геометричних величин: первинні геометричні об'єкти (фігури та відношення); базові уявлення про найпростіші геометричні фігури; трикутники, багатокутники; основні геометричні форми: лінії, поверхні, тіла; коло і круг; многогранники і тіла обертання: призма, піраміда, циліндр, конус, куля; вимірювання відрізків та кутів; периметр многокутника, площа прямокутника; об'єм та площа поверхні прямокутного паралелепіпеда;
- наочні уявлення про дані, їх представлення та перетворення, діаграми і графіки;
- найпростіші елементи комбінаторики.

Вимоги до обов'язкових результатів навчання з математичної освітньої галузі, визначені в додатку 8 до Державного стандарту, передбачають, що учень/учениця:

- досліджує проблемні ситуації та виокремлює проблеми, які можна розв'язувати із застосуванням математичних методів;
- моделює процеси та ситуації, розробляє стратегії, плани дій для розв'язання проблем;
- критично оцінює процес і результат розв'язання проблем;
- розвиває математичне мислення для пізнання і перетворення дійсності, володіє математичною мовою.

4. Компетенції

Компетентнісний потенціал математичної освітньої галузі визначений у додатку 7 до Державного стандарту. Наприкінці навчання за програмою 5–6 класів в учня/учениці мають бути сформовані основи умінь та ставлень, що є наскрізними в усіх ключових компетентностях і що надалі стануть підґрунтям для остаточного формування цих компетентностей станом на кінець навчання в середній школі.

Для математичної компетентності мають бути сформовані:

▪ *уміння:*

- оперувати текстовою і числовою інформацією, геометричними об'єктами на площині та в просторі;
- встановлювати кількісні та просторові відношення між реальними об'єктами навколишньої дійсності (природними, культурними, технічними тощо);
- розв'язувати задачі, зокрема практичного змісту;
- обирати, створювати й досліджувати найпростіші математичні моделі реальних об'єктів, процесів і явищ, інтерпретувати та оцінювати результати;
- здійснювати прогнози в контексті навчальних і практичних задач;
- застосовувати логічні способи мислення під час розв'язування пізнавальних і практичних задач, пов'язаних з реальними об'єктами;
- використовувати математичні методи в життєвих ситуаціях;

▪ *ставлення:*

- усвідомлення важливості математики як мови науки, техніки та технологій, значення математики для повноцінного життя в сучасному суспільстві, розвитку технологічного, економічного й оборонного потенціалу держави, успішного вивчення інших дисциплін;
- потреба в об'єктивному оцінюванні висловлювань, поглядів, рішень, дій.

Навчальними ресурсами, що слугують зазначеній меті, є підручники, додаткова література, інтернет-ресурси; задачі, зокрема такі, що моделюють реальні життєві ситуації.

Компетентнісний потенціал математичної освітньої галузі визначає її здатність формувати всі інші ключові компетентності, які передбачено Державним стандартом, через розвиток насамперед таких умінь і ставлень, притаманних даній освітній галузі:

Таблиця – Ключові компетентності і компоненти навчання

Ключові компетентності	Компоненти
Вільне володіння державною мовою	<i>Уміння:</i> грамотно висловлюватися державною мовою; описувати мовними засобами інформацію, подану в різних формах (у формулах, таблицях, діаграмах, на графіках); розуміти, пояснювати й перетворювати тексти математичних задач у математичну модель (усно та письмово); здійснювати комунікацію в усній та письмовій формах з урахуванням особливостей стилю наукових і технічних текстів та мовних норм у спілкуванні; чітко й зрозуміло формулювати думки, аргументувати, ставити запитання та розпізнавати проблеми; здобувати та опрацьовувати інформацію з різних (аудіовізуальних, друкованих, цифрових) джерел; формулювати висновки на основі інформації, поданої в різних формах; доречно та коректно вживати в мовленні математичну термінологію; вести конструктивний діалог, доводити правильність тверджень; поповнювати свій словниковий запас. <i>Ставлення:</i> визнання важливості чітких і лаконічних формулювань; повага до державної мови. <i>Навчальні ресурси:</i> означення понять, формулювання властивостей.

Здатність спілкуватися рідною (у разі відмінності від державної) мовою	<i>Уміння:</i> розуміти й перетворювати тексти математичного змісту рідною мовою; зіставляти математичні терміни, поняття, числівники, тексти рідною та державною мовою; доречно та коректно вживати математичну термінологію; грамотно висловлюватися; здійснювати комунікацію в усній та письмовій формах з урахуванням особливостей стилю наукових і технічних текстів та мовних норм у спілкуванні; здобувати та опрацьовувати інформацію рідною мовою з різних (аудіовізуальних, друкованих, цифрових) джерел. <i>Ставлення:</i> розуміння цінності мовного різноманіття; повага до рідної мови. <i>Навчальні ресурси:</i> означення понять, формулювання властивостей, математичні тексти рідною мовою.
Здатність спілкуватися іноземними мовами	<i>Уміння:</i> поповнювати словниковий запас математичними термінами іноземного походження; зіставляти математичний термін, поняття, числівник з відповідним йому іноземною мовою; здійснювати пошук інформації в іноземних джерелах. <i>Ставлення:</i> усвідомлення важливості правильного використання математичних термінів та їх позначення в різних мовах у навчанні та повсякденному житті; усвідомлення важливості вивчення іноземних мов для розуміння математичних термінів та позначень;
	уявлення про математичні знання як продукт колективної діяльності людства, про внесок представників різних націй у становлення математичних знань; усвідомлення цінності математичного апарату в нівелюванні особливостей міжкультурної комунікації. <i>Навчальні ресурси:</i> додаткова література іноземною мовою за тематикою, що вивчається, статистичні дані, матеріали міжнародних математичних конкурсів, інтернет-ресурси.

Компетентності в галузі природничих наук, техніки і технологій	<i>Уміння:</i> будувати та досліджувати математичні моделі природних явищ і процесів; робити висновки на основі реальних даних, міркувань та свідчень; обґрунтовувати рішення. <i>Ставлення:</i> усвідомлення ролі математики як універсальної мови науки, техніки та технологій; усвідомлення важливості математичного апарату для опису й пізнання навколишнього світу та керування процесами і технологіями. <i>Навчальні ресурси:</i> науково-популярна література за дисциплінами природничого циклу, статистичні дані, інтернет-ресурси.
Інноваційність	<i>Уміння:</i> генерувати нові ідеї щодо розв’язання проблемної ситуації, аналізувати та планувати їх втілення; визначати та оцінювати ресурси, потрібні для реалізації інновацій. <i>Ставлення:</i> відкритість до інновацій; неупереджене оцінювання ідей інших осіб, підтримка конструктивних ідей; розуміння потреби в обґрунтуванні змісту інновацій. <i>Навчальні ресурси:</i> логічні задачі, текстові задачі, завдання, що відповідають достатньому та високому рівням навчальних досягнень, розвивальні задачі, задачі для позакласної роботи з математики.
Екологічна компетентність	<i>Уміння:</i> розпізнавати проблеми, що виникають у довкіллі, розв’язанню яких може сприяти використання математичного апарату;

	оцінювати, прогнозувати вплив людської діяльності на довкілля через збирання та оброблення відповідної статистичної інформації, побудову та дослідження математичних моделей природних процесів і явищ; оцінювати свій потенційний внесок у покращання екологічної ситуації та ощадливе використання природних ресурсів. <i>Ставлення:</i> усвідомлення необхідності дотримання умов екологічної безпеки; розуміння засобів, якими учень/учениця відповідного віку може сприяти екологізації довкілля; визнання ролі математики в розв'язанні проблем довкілля; орієнтація на здоровий спосіб життя. <i>Навчальні ресурси:</i> задачі екологічного змісту, оптимізаційні задачі, задачі, що сприяють усвідомленню цінності здорового способу життя.
Інформаційно-комунікаційна компетентність	<i>Уміння:</i> структурувати дані; визначати достатність даних для розв'язування задачі, формулювати вимоги до потрібних даних, визначати критерії, джерела та засоби їх пошуку, здійснювати пошук інформації з використанням інформаційно-комунікаційних засобів; використовувати різні знакові системи; зіставляти інформацію, отриману з різних джерел; оцінювати достовірність інформації; складати алгоритм та діяти за ним; оптимізувати свою діяльність шляхом використання сучасних засобів комп'ютерної техніки, інформаційно-телекомунікаційного середовища в навчанні та інших життєвих ситуаціях; дотримуватися вимог щодо безпечного використання інформаційно-комунікаційних засобів, захисту інформації та особистих даних. <i>Ставлення:</i> критичне осмислення інформації та джерел її отримання; усвідомлення важливості комп'ютерних та інформаційно-комунікаційних технологій для ефективного розв'язування математичних задач; усвідомлення важливості забезпечення достовірності інформації, запобігання викривленню, підробці, несанкціонованого доступу.

	<i>Навчальні ресурси:</i> сучасні засоби комп'ютерної техніки, зокрема мобільні пристрої, офісні пакети, пошукові системи, інтернет-ресурси.
Навчання впродовж життя	<i>Уміння:</i> визначати мету навчальної діяльності відповідно до довгострокових перспектив та нагальних потреб поточного моменту; моделювати власну освітню траєкторію, аналізувати, оцінювати результати своєї навчальної діяльності та відповідно коригувати освітню траєкторію; визначати й оцінювати власні потреби та ресурси для розвитку компетентностей; застосовувати різні засоби навчання та самонавчання для розвитку компетентностей і здійснювати вибір найдоречніших засобів; організовувати та планувати свою навчальну діяльність. <i>Ставлення:</i> зацікавленість у пізнанні світу; усвідомлення цінності нових знань і вмінь; усвідомлення власних освітніх потреб; розуміння важливості навчання впродовж життя; потреба в самонавчанні; прагнення вдосконалювати результати власної діяльності. <i>Навчальні ресурси:</i> власна освітня траєкторія; завдання, класифіковані за рівнями навчальних досягнень; додаткова та науково-популярна література, інтернет-ресурси.
Громадянські та соціальні компетентності	<i>Уміння:</i> формулювати власну думку; аргументовано доводити правильність або визнавати помилковість власного судження; сприймати аргументовані погляди інших осіб; співпрацювати в команді; узгоджувати спільну позицію на основі доказів; визначати причинно-наслідкові зв'язки, повноту та несуперечливість даних, на підставі яких мають бути прийняті рішення щодо проблемної ситуації; будувати таблиці, графіки, схеми, діаграми тощо для відображення процесів навколишнього середовища та власної діяльності; на їх підставі аналізувати й об'єктивно оцінювати зазначені процеси, зокрема з елементами прогнозування; враховувати правові, етичні та соціальні наслідки прийняття рішень;

	розпізнавати інформаційні маніпуляції; робити вибір у життєвих ситуаціях (соціальних, побутових), на основі чітких критеріїв, використовуючи математичні вміння для оцінки варіантів вибору, визначення та збирання даних з метою зменшення невизначеності. <i>Ставлення:</i> дбайливе ставлення до власного та соціального здоров'я; налаштованість на логічне обґрунтування своєї думки; рівне неупереджене ставлення до інших осіб; відповідальність за спільну справу; позитивне оцінювання та підтримка конструктивних ідей інших людей; неприйняття безпідставних висновків. <i>Навчальні ресурси:</i> задачі соціального змісту, статистичні дані, інтернет-ресурси.
Культурна компетентність	<i>Уміння:</i> визначати математичний апарат, використаний у творах мистецтва; здійснювати необхідні розрахунки для встановлення пропорцій, відтворення перспектив, створення об'ємно-просторових композицій; виконувати кількісні оцінки ресурсів для забезпечення культурних потреб на власному рівні, рівні сім'ї, дитячого колективу. <i>Ставлення:</i> усвідомлення культурного багатства рідної держави та людства, набутих історико-культурних цінностей та потреби в їх збереженні; шанобливе ставлення до культурних традицій; усвідомлення взаємозв'язку математики та культури на прикладах із живопису, музики, архітектури тощо; розуміння потреби в математичному апараті для розрахунку та забезпечення культурних потреб; розуміння важливості внеску математичної спільноти в загальносвітову культуру. <i>Навчальні ресурси:</i> задачі історико-культурного змісту, математичні моделі в різних видах мистецтва, статистичні дані, інтернет-ресурси.
Підприємливість та фінансова грамотність	<i>Уміння:</i> генерувати нові ідеї, аналізувати, ухвалювати оптимальні рішення; розв'язувати життєві проблеми;

	використовувати різні стратегії, шукати оптимальні способи розв’язання проблемних ситуацій; будувати та досліджувати математичні моделі економічних процесів на рівні власної діяльності, сім’ї, дитячого колективу; планувати та організовувати діяльність для досягнення цілей; аналізувати власну економічну ситуацію, родинний бюджет, використовуючи математичні методи; робити вибір у життєвих ситуаціях (соціальних, побутових, під час закупівлі товарів і послуг тощо); використовувати критерії раціональності, практичності, ефективності та точності, виконувати кількісну оцінку варіантів вибору та відповідних ризиків, зокрема прогнозувати витрати, доходи та збитки; обґрунтовувати прийняті рішення та брати відповідальність за них. <i>Ставлення:</i> відповідальність та ініціативність, впевненість у собі; ощадливість і поміркованість; розуміння важливості всебічного розгляду варіантів у ситуації вибору та застосування для об’єктивної оцінки математичного апарату. <i>Навчальні ресурси:</i> сюжетні задачі з фабулами реальних ситуацій фінансового, побутового, підприємницького змісту; оптимізаційні задачі, статистичні дані.
--	---

III. Шляхи реалізації програми

Курс математики в 5–6 класах закладів загальної середньої освіти логічно продовжує реалізацію завдань математичної освіти учнів/учениць, розпочату в початковій школі, розширюючи та доповнюючи ці завдання відповідно до вікових і пізнавальних можливостей школярів/школярок.

Зміст математичної освіти в 5–6 класах закладів загальної середньої освіти структурується за такими змістовими лініями:

- Числа і дії з ними.
- Вирази.
- Рівняння.
- Відношення і пропорції.
- Геометричні фігури і величини.
- Математичні задачі як засіб дослідження реальних життєвих ситуацій та реальних процесів.

Кожна з них розвивається з урахуванням завдань вивчення математики на відповідному ступені базової середньої освіти.

Курс математики 5–6 класів передбачає розвиток, збагачення та поглиблення знань учнів/учениць про числа і дії над ними, числові й буквені вирази, величини та їх вимірювання, рівняння, числові нерівності, а також уявлень про окремі геометричні фігури на площині та в просторі. Понятійний апарат, обчислювальні алгоритми, графічні уміння та навички, що мають бути сформовані на цьому етапі вивчення курсу, є тим підґрунтям, що забезпечує успішне вивчення в наступних класах алгебри і геометрії, а також інших навчальних предметів, де застосовуються математичні знання.

Основу курсу становить розвиток поняття числа та формування міцних обчислювальних і графічних навичок. У курсі математики 5–6 класів відбувається поступове розширення множини натуральних чисел до множини раціональних чисел шляхом послідовного введення дробів (звичайних і десяткових) і від’ємних чисел. Водночас має бути сформована культура усних і письмових обчислень, зокрема з використанням обчислювальної техніки.

Навчальний матеріал, що стосується виразів, величин, рівнянь і нерівностей, геометричних фігур, має загалом пропедевтичний характер. Ознайомлення з ним готує учнів/учениць до свідомого системного вивчення відповідних тем у курсах алгебри і геометрії. Зокрема, учні/учениці мають отримати уявлення про використання букв для запису законів арифметичних дій, формул, навчитись обчислювати значення простих буквених виразів, скласти за умовою задачі й розв’язувати нескладні рівняння першого степеня спочатку на основі залежностей між компонентами арифметичних дій, а згодом із використанням основних властивостей рівнянь. Важливе значення для підготовки учнів/учениць до систематичного вивчення алгебри, геометрії та інших предметів мають початкові відомості про метод координат, які одержують учні/учениці 5–6 класів: зображення чисел на координатній прямій, прямокутна система координат на площині, виконання відповідних побудов, побудова й аналіз окремих графіків залежностей між величинами.

Істотне місце займають текстові задачі, основною метою яких є розвиток логічного мислення учнів/учениць, навичок математичного моделювання, розвиток ключових компетентностей та ілюстрація практичного застосування математичних знань. Сюжети задач мають відтворювати як історико-культурні цінності, так і практичні ситуації.

Зміст геометричного матеріалу включає початкові відомості про планіметричні (відрізок, промінь, пряма, кут, трикутник, прямокутник, квадрат, коло, круг) і стереометричні (прямокутний паралелепіпед, куб, піраміда, циліндр, конус, куля) фігури. Учні/учениці набувають навичок вимірювання довжини відрізка й градусної міри кута, знаходження площі і об’ємів деяких фігур, побудови геометричних фігур за допомогою лінійки, косинця, транспортира та циркуля. Розширюються уявлення про вимірювання геометричних величин на прикладах вимірювання та порівняння відрізків і кутів, побудови відрізків даної довжини і кутів із заданою градусною мірою, оперування формулами периметрів, площі і об’ємів геометричних фігур. Побудова кута за допомогою транспортира або косинця (прямого кута), прямої та відрізка за допомогою лінійки використовується при побудові

трикутників, прямокутників, перпендикулярних і паралельних прямих.

Вивчення геометричних фігур має передбачати використання наочних ілюстрацій, прикладів із довкілля, життєвого досвіду учнів/учениць, виконання побудов і сприяти виробленню вмінь виділяти форму та розміри як основні властивості геометричних фігур. Закріплення понять супроводжується їх класифікацією (кутів, трикутників, взаємного розміщення прямих на площині). Властивості геометричних фігур спочатку обґрунтовуються дослідно-індуктивно, потім застосовуються в конкретних ситуаціях, що сприяє виробленню в учнів/учениць умінь доказово міркувати.

Основа інтеграції геометричного матеріалу з арифметичним і алгебраїчним – числові характеристики (довжина, площа, об'єм) геометричних фігур. Узагальнюються знання учнів/учениць про одиниці вимірювання довжини, площі, об'єму та вміння переходити від одних одиниць до інших. Ці знання і вміння використовуються під час вивчення предметів природничого циклу та циклу «Технології».

Важливим є формування в учнів/учениць умінь подавати дані у вигляді таблиць, графіків і діаграм та на основі їхнього аналізу робити відповідні висновки.

Вивчення математики в 5–6 класах здійснюється з переважанням індуктивних міркувань здебільшого на наочно-інтуїтивному рівні із залученням практичного досвіду учнів/учениць і прикладів із довкілля. Водночас відносна кількість теоретичного матеріалу, який вимагає обґрунтування тверджень, поступово збільшується. Це готує учнів/учениць до ширшого використання дедуктивних методів на наступному етапі вивчення математики.

Змістова лінія «Математичні задачі як засіб дослідження реальних життєвих ситуацій» передбачає як імплементацію наскрізних ліній ключових компетентностей, так і засвоєння учнями/ученицями практичної спрямованості навчального матеріалу.

IV. Особливості організації освітнього процесу під час вивчення навчального предмета

1. Форми проведення навчального процесу

На уроці математики та під час позакласної роботи застосовуються такі форми проведення навчального процесу:

- фронтальна, коли весь клас одночасно виконує загальну, поставлену перед усіма дітьми роботу: слухання пояснень учителя/вчительки, слухання та аналіз учнями/ученицями висловлювань своїх товаришів, колективне обговорення та розв'язання проблемних ситуацій;

- групова (колективна), зокрема робота в парах: виконання групою конкретного навчального завдання за участю кожного з учнів/учениць, індивідуальна допомога одне одному, заняття математичних гуртків; елементи проєктної роботи;
- індивідуальна: самостійна робота з підручником, самостійне виконання завдань у дошки або в зошиті під час уроку, виконання самостійних та контрольних робіт, виконання домашньої роботи, робота з додатковою літературою, відбір і порівняння матеріалу з різних джерел (зокрема пошук інформації в Інтернеті), написання рефератів, підготовка доповідей, елементи проєктної роботи, участь у математичних олімпіадах, участь у математичних заочних змаганнях (зокрема тих, що проводяться на міжнародному рівні засобами мережі Інтернет), індивідуальна робота вчителя/вчительки з обдарованими дітьми та дітьми з особливими потребами.

Реалії сьогодення та потреби побудови індивідуальних освітніх траєкторій потребують певного зміщення акцентів із суто фронтальної форми навчального процесу на групову та індивідуальну. Зокрема, уже в 5–6 класах варто залучати дітей до такого сучасного виду діяльності, як проєктна робота, який дає підвищені можливості вибудовування індивідуальних освітніх траєкторій, розвитку пізнавальної діяльності в галузі точних наук, установлення міжпредметних зв'язків, формування ключових компетентностей, опанування комп'ютерними та інформаційними технологіями.

2. Діяльнісна спрямованість навчання

Діяльнісна спрямованість навчання передбачає постійне залучення учнів/учениць до різних видів педагогічно доцільної активної навчально-пізнавальної діяльності як під час уроку, так і в позакласній та індивідуальній роботі.

3. Практична спрямованість навчання

Під час вивчення нового матеріалу доцільно пояснювати потребу виникнення відповідного математичного апарату на підставі певних практичних ситуацій, а після подання учням/ученицям теоретичних відомостей — ілюструвати їх застосування на практиці.

4. Міжпредметні зв'язки

Формуванню математичної та ключових компетентностей сприяє встановлення та реалізація міжпредметних і внутрішньопредметних зв'язків, а саме: змістово-інформаційних, операційно-діяльнісних і організаційно-методичних. Їх використання посилює пізнавальний інтерес учнів/учениць до навчання та підвищує рівень їхньої загальної культури, створює умови для систематизації навчального матеріалу та формування наукового світогляду. Учні/учениці набувають досвіду застосування знань на практиці та перенесення їх у нові ситуації.

Досвід математичної діяльності має бути застосований у вивченні предметів інших освітніх галузей шляхом:

- використання учнями/ученицями математичного апарату під час пі-

знавальної діяльності;

- математичного моделювання процесів, що вивчаються;
- розв'язування в курсі математики задач із фабулами інших навчальних предметів;
- виконання міжпредметних навчальних проєктів тощо.

5. Культурно-історична спрямованість

Систематичне використання історичного та культурного матеріалу під час вивчення математики виховує в учнях/ученицях патріотизм та інтернаціоналізм, повагу до загальнолюдських цінностей, підвищує інтерес до вивчення математики, стимулює потяг до наукової творчості, дає уявлення про математику як невід'ємну складову загальнолюдської культури.

Ознайомлення учнів/учениць з іменами та біографіями видатних учених, які створювали систему математичних знань, зокрема видатних українських науковців, сприятиме патріотичному вихованню школярів.

Відомості про історичний розвиток математичних понять, теорій і методів сприяють розумінню математики як універсального методу пізнання світу та науки, що постійно розвивається, заохочує учнів/учениць до творчого застосування набутих знань.

6. Комп'ютеризація та інформатизація

Використання комп'ютерної техніки, зокрема мобільних пристроїв, на уроках математики та в позакласній роботі має забезпечити формування в учнів/учениць:

- алгоритмічного стилю мислення;
- уміння виокремлювати із загального об'єму роботи суто технічну складову та оптимізувати її виконання;
- ставлення до комп'ютеризації та інформатизації як до необхідного інструменту пізнання світу та діяльності людини;
- комп'ютерної грамотності;
- навичок пошуку, оцінювання, відбору та фільтрування інформації;
- зацікавленості в якомога ширшому застосуванні комп'ютерних техно-логій у своїй діяльності;
- уміння організовувати спільну роботу з використанням сучасних комп'ютерних засобів, зокрема в умовах дистанційного навчання.

7. Наскрізні лінії та їх реалізація

Формування таких ключових компетентностей, як громадянські та соціальні компетентності, навчання впродовж життя, інноваційність, підприємливість та фінансова грамотність, екологічна компетентність, має здійснюватися під час вивчення всіх навчальних предметів. Зважаючи на це, передба-

чено виокремлення таких наскрізних ліній, як «Екологічна безпека й сталий розвиток», «Громадянська відповідальність», «Здоров'я і безпека», «Підприємливість і фінансова грамотність».

Зазначені наскрізні лінії є соціально значущими надпредметними темами, які допомагають формуванню в учнів/учениць уявлень про суспільство в цілому, розвивають здатність застосовувати отримані знання та вміння в реальних життєвих ситуаціях. Ці наскрізні лінії є засобом інтеграції ключових і загальнопредметних компетентностей, навчальних предметів та предметних циклів, а тому їх потрібно враховувати під час вивчення курсу математики.

Зміст та цілі наскрізних ліній враховуються при формуванні духовного, соціального й фізичного середовища навчання.

Виходячи з наскрізних ліній, при вивченні математики добираються відповідні трактування, приклади, фабули задач, реалізуються надпредметні, міжкласові та загальношкільні навчальні проєкти.

Проблематика наскрізної лінії «Екологічна безпека та сталий розвиток» реалізується в курсі математики насамперед через завдання з реальними даними про використання природних ресурсів, їх збереження та примноження. Під час розгляду цієї лінії важливе місце займають відсоткові обчислення, наочне подання економічної та природознавчої інформації.

Наскрізна лінія «Громадянська відповідальність» освоюється переважно через колективну діяльність (дослідницькі роботи, робота в групах, навчальні проєкти тощо), яка поєднує математику з іншими навчальними предметами й розвиває в учнів/учениць готовність до співпраці, толерантність щодо різноманітних способів діяльності та думок. Із цією наскрізною лінією пов'язані, наприклад, відсоткові розрахунки, елементи статистики, що дозволяють учням/ученицям зрозуміти значення кількісних показників при характеристиці суспільства та його розвитку.

Наскрізна лінія «Здоров'я і безпека» в курсі математики реалізується через завдання з реальними даними про безпеку й охорону здоров'я (текстові задачі, відсоткові розрахунки, оброблення і наочне подання даних відповідної змістовної спрямованості). Важливо під час виконання таких завдань звертати увагу на аналіз проблем, пов'язаних із ризиками для життя і здоров'я (наприклад, щодо тютюнопаління, перевищення швидкості як причини ДТП тощо).

Наскрізна лінія «Підприємливість і фінансова грамотність» реалізується шляхом розв'язування практичних задач щодо планування господарської діяльності та реальної оцінки власних можливостей, складання сімейного бюджету та інших практичних аспектів фінансових питань, до яких можуть бути залучені діти відповідного віку (закупівля продуктів харчування, оплата проїзду, комунальних послуг тощо).

Крім реалізації зазначених наскрізних ліній, у ході вивчення курсу математики формуються наскрізні вміння ключових компетентностей, визначені в Державному стандарті. Особливості формування цих вмінь під час

вивчення даного курсу та відповідні навчальні ресурси докладно розглянуто в розділі II даної Програми.

8. Оцінювання навчальних досягнень учнів/учениць

Навчальні досягнення учнів підлягають формувальному та підсумково-му (тематичному та завершальному) оцінюванню.

Формувальне оцінювання має на меті:

- вибудовувати індивідуальну освітню траєкторію учня/учениці;
- відстежувати навчальний прогрес учня/учениці;
- вчасно виявляти проблеми та вживати заходів для коригування індивідуальної освітньої траєкторії та методів навчання відповідно до індивідуальних потреб дитини;
- формувати в учня/учениці впевненість у власних силах, мотивацію на досягнення та зацікавленість у навчанні.

Підсумкове оцінювання має на меті установити відповідність очікуваних і реальних результатів навчання.

Орієнтирами оцінювання є очікувані результати навчання, визначені в другій частині цього документа.

V. Структура програми

Програму подано в табличній формі, що містить три частини: очікувані результати навчання, зміст навчального матеріалу, необхідний для їх досягнення, та відповідні види навчальної діяльності.

Очікувані результати навчання орієнтують на результати навчання, які є об'єктом контролю й оцінювання.

У рамках навчального року програма укладена за змістовими лініями. У середині змістової лінії зміст навчального матеріалу структуровано за темами в логічній послідовності їх вивчення.

Наведено рекомендовані форми організації освітнього процесу, вибір яких учитель/учителька може здійснювати на свій розсуд залежно від рівня підготованості класу, індивідуальних освітніх траєкторій учнів/учениць тощо.

Зазначені особливості побудови програми дають змогу педагогічному колективу швидко та своєчасно адаптувати реалізацію програми до реалій сьогодення та умов кожного навчального закладу, враховуючи вікові та індивідуальні особливості розвитку й потреби учнів/учениць, а також забезпечити просування індивідуальними освітніми траєкторіями.

5 клас
МАТЕМАТИКА

Очікувані результати навчання	Пропонований зміст навчального предмета	Види навчальної діяльності
Змістова лінія «Числа і дії з ними»		
Учень/учениця: розпізнає натуральні числа і число нуль; розрізняє цифри і числа; читає та записує натуральні числа в межах трильйона; визначає класи та розряди натурального числа; подає натуральні числа у вигляді суми розрядних доданків; порівнює натуральні числа з різною і однаковою кількістю цифр; розуміє сутність арифметичних дій додавання, віднімання, множення, ділення; володіє навичкою усного та письмового виконання арифметичних дій з натуральними числами; використовує властивості арифметичних дій з натуральними числами, зокрема для усного обчислення зручним способом; застосовує арифметичні дії з натуральними числами під час розв'язування задач та вправ; прогнозує результат обчислень; перевіряє правильність обчислень із використанням оберненої дії; розуміє сутність понять квадрата й куба натурального	Натуральні числа. Число Нуль Цифри. Десятковий запис натуральних чисел Порівняння натуральних чисел Арифметичні дії з натуральними числами. Властивості арифметичних дій Квадрат і куб натурального числа	Фронтальна форма навчання, яка включає слухання пояснень вчителя/вчительки, слухання та аналіз учнями/ученицями висловлювань інших учнів/учениць. Колективне розв'язання проблемних ситуацій. Групова робота. Робота в парах. Індивідуальна робота, яка включає самостійне виконання завдань біля дошки або в зошиті під час уроку, контрольні та самостійні роботи, самостійну роботу з підручником, пошук інформації в Інтернеті, виконання домашньої роботи

Очікувані результати навчання	Пропонований зміст навчального предмета	Види навчальної діяльності
числа — пояснює, що таке квадрат і куб числа; володіє навичкою обчислення квадрата й куба натурального числа; виконує ділення з остачею; розуміє, що остача має бути меншою від дільника; розуміє, як утворюються звичайні дроби; пояснює, що таке чисельник і знаменник дробу; користується розумінням сутності понять чисельника та знаменника дробу для знаходження частини від числа та числа за величиною його частини; розрізняє правильні і неправильні дроби; встановлює зв'язок між звичайними дробами і діленням натуральних чисел; розуміє сутність поняття мішаного числа — пояснює, яке число є мішаним, що являє собою ціла та дробова частина мішаного числа; перетворює мішане число в неправильний дріб та неправильний дріб у мішане число або натуральне число; порівнює звичайні дроби з однаковими знаменниками; застосовує поняття правильного і неправильного дробу для порівняння дробів; виконує додавання і віднімання звичайних дробів з однаковими знаменниками; застосовує прийоми раціональних обчислень при	Ділення з остачею Звичайні дроби Правильні і неправильні дроби. Звичайні дроби і ділення натуральних чисел. Мішані числа Порівняння звичайних дробів з однаковими знаменниками, правильних і неправильних дробів Додавання і віднімання звичайних дробів з однаковими знаменниками	

Очікувані результати навчання	Пропонований зміст навчального предмета	Види навчальної діяльності
додаванні і відніманні дробів з однаковими знаменниками; розуміє, як утворюються десяткові дробі; читає та записує десяткові дробі; визначає розряди десяткового дробу; володіє прийомами порівняння десяткових дробів; розуміє сутність поняття округлення чисел та важливість його практичного застосування — пояснює процес округлення чисел; володіє прийомами округлення натуральних чисел та десяткових дробів; уміє робити оцінки й прикидки результатів у задачах практичного змісту; володіє навичкою усного та письмового виконання арифметичних дій з десятковими дробами; використовує властивості арифметичних дій з десятковими дробами, зокрема для усного обчислення зручним способом; застосовує арифметичні дії з десятковими дробами під час розв’язування задач та вправ; розуміє, що таке середнє арифметичне і середнє значення величини; застосовує поняття середнього значення величини для розв’язування практичних задач;	Десятковий дріб. Запис десяткових дробів Порівняння десяткових дробів Округлення натуральних чисел і десяткових дробів Арифметичні дії з десятковими дробами. Властивості арифметичних дій Середнє арифметичне. Середнє значення величини	

Очікувані результати навчання	Пропонований зміст навчального предмета	Види навчальної діяльності
розуміє сутність поняття відсотка як однієї сотої числа або величини; користується розумінням сутності поняття відсотка для знаходження відсотка від числа та числа за його відсотком	Відсотки	
Змістова лінія «Вирази. Рівняння»		
Учень/учениця: розуміє, що таке числовий та буквений вирази; розрізняє числові та буквені вирази; читає числові та буквені вирази, використовуючи математичні терміни; записує числові та буквені вирази, подані в текстовій формі, з використанням математичної символіки; знаходить значення числового та буквеного виразу із заданим значенням букв; застосовує правила порядку виконання дій під час обчислень значень виразів, які містять дужки, та виразів, які не містять дужок; наводить приклади формул; розуміє, як користуватися формулами; володіє навичками обчислень величин за допомогою формул і складання формул за змістом задач; розуміє, що таке корінь рівняння; пояснює, що означає розв'язати рівняння;	Числові вирази. Буквені вирази Формули Рівняння	Фронтальна форма навчання, яка включає слухання пояснень вчителя/вчительки, слухання та аналіз учнями/ученицями висловлювань інших учнів/учениць. Колективне розв'язання проблемних ситуацій. Групова робота. Робота в парах. Індивідуальна робота, яка включає самостійне виконання завдань біля дошки або в зошиті під час уроку, контрольні та самостійні роботи, самостійну роботу з підручником, пошук інформації в Інтернеті, виконання домашньої роботи

Очікувані результати навчання	Пропонований зміст навчального предмета	Види навчальної діяльності
розв’язує рівняння, використовуючи правила знаходження невідомих компонентів арифметичних дій; володіє навичками складання рівнянь за змістом задач		
Змістова лінія «Геометричні фігури і величини»		
Учень/учениця: розпізнає на рисунках геометричні фігури, які вказано в змісті; співвідносить реальні об’єкти навколишнього середовища з моделями геометричних фігур; володіє практичними навичками побудови відрізків, ламаних, прямих, променів, кутів, трикутників, прямокутників; називає елементи геометричних фігур; позначає геометричні фігури; розуміє, які фігури називають рівними; розрізняє види кутів, трикутників; розуміє сутність процесу вимірювання довжини відрізка та величини кута; знає одиниці вимірювання довжини відрізка та співвідношення між ними; знає одиницю вимірювання величини кута; вибирає доцільні одиниці вимірювання для знаходження довжини відрізка; володіє практичними навичками вимірювання дов-	Точка, відрізок, ламана, пряма, промінь, площа, кут, багатокутник, трикутник, прямокутник, квадрат Довжина відрізка. Величина кута. Види кутів	Фронтальна форма навчання, яка включає слухання пояснень вчителя/вчительки, слухання та аналіз учнями/ученицями висловлювань інших учнів/учениць. Колективне розв’язання проблемних ситуацій. Групова робота. Робота в парах. Індивідуальна робота, яка включає само-стійне виконання завдань біля дошки або в зошиті під час уроку, контрольні та самостійні роботи, самостійну роботу з підручником, пошук інформації в Інтернеті, виконання домашньої роботи

Очікувані результати навчання	Пропонований зміст навчального предмета	Види навчальної діяльності
жини відрізка та величини кута й побудови відрізків і кутів за допомогою відповідних приладів; розуміє, що таке периметр многокутника; володіє навичкою обчислення периметра многокутників; користується формулами обчислення периметрів рівностороннього трикутника, прямокутника, квадрата в навчальних і реальних ситуаціях; розуміє сутність процесу вимірювання площі прямокутника; знає одиниці вимірювання площі та співвідношення між ними; обирає доцільні одиниці вимірювання для знаходження площі прямокутника; користується формулами для обчислення площ прямокутника та квадрата; розпізнає на рисунках прямокутний паралелепіпед, куб, піраміду; співвідносить реальні об'єкти навколишнього середовища з моделями просторових фігур, які вказано в змісті; називає елементи вказаних просторових фігур; позначає вказані просторові фігури; має уявлення про розгортки прямокутного паралелепіпеда та піраміди, яке форму-	Периметр многокутника Площа прямокутника Прямокутний паралелепіпед. Куб. Піраміда Розгортки прямокутного паралелепіпеда та піраміди	

Очікувані результати навчання	Пропонований зміст навчального предмета	Види навчальної діяльності
ється на реальних об'єктах навколишнього середовища; володіє навичкою обчислення площі поверхні прямокутного паралелепіпеда, зокрема за допомогою його розгортки; розуміє сутність процесу вимірювання об'єму прямокутного паралелепіпеда; знає одиниці вимірювання об'єму та співвідношення між ними; вибирає доцільні одиниці вимірювання для знаходження об'єму прямокутного паралелепіпеда; користується формулами обчислення об'ємів прямокутного паралелепіпеда та куба; володіє практичними навичками знаходження значень величин за показаннями шкал різних вимірювальних приладів; визначає координати точок на координатному промені; позначає на координатному промені точки із заданими координатами	Об'єм прямокутного паралелепіпеда Шкала. Координатний промінь	
Змістова лінія «Математичні задачі як засіб дослідження реальних життєвих ситуацій»		
Учень/учениця: описує проблемні життєві ситуації, які ґрунтуються на конкретних даних; читає, аналізує, порівнює інформацію, подану в таблицях і схемах;	Сюжетні задачі з реальними даними. Сюжетні задачі з історико-патріотичною складовою.	Фронтальна форма навчання, яка включає слухання пояснень вчителя/вчительки, слухання та аналіз учнями/уче-

Очікувані результати навчання	Пропонований зміст навчального предмета	Види навчальної діяльності
добирає дані, потрібні для розв’язання проблемних ситуацій; планує розв’язування задачі; створює математичну модель задачі; досліджує різні шляхи розв’язання проблемної ситуації, спираючись на наявні дані; обирає раціональний шлях розв’язання проблемних ситуацій з огляду на наявні дані; перевіряє правильність розв’язання задач; використовує досвід математичної діяльності в проблемних ситуаціях повсякденного життя; розв’язує сюжетні задачі з реальними даними щодо використання природних ресурсів рідного краю, безпеки руху; знаходження периметрів та площ земельних ділянок, підлоги приміщень, об’єму об’єктів, що мають форму прямокутного паралелепіпеда; розрахунку сімейного бюджету та комунальних платежів, можливості здійснення покупок; розрахунків, пов’язаних із календарем і годинником; обліку ресурсів, потрібних для вирішення побутово-господарчих задач, у тому числі з використанням прикидок	Сюжетні задачі на використання знань із суміжних дисциплін. Задачі геометричного змісту як моделі дослідження об’єктів навколишнього середовища. Компетентнісно зорієнтовані задачі. Задачі на дослідження оптимальних ситуацій. Робота з даними. Найпростіші комбінаторні задачі. Округлення чисел як оціночна модель реальних ситуацій. Прикидки та оцінки значень числових виразів. Відсоткові розрахунки	ниціями висловлювань інших учнів/учениць. Колективне розв’язання проблемних ситуацій. Групова робота. Робота в парах. Індивідуальна робота, яка включає виконання домашньої роботи, самостійне виконання завдань біля дошки або в зошиті під час уроку, контрольні та самостійні роботи, самостійну роботу з підручником, пошук інформації в Інтернеті, виконання домашньої роботи

6 клас
МАТЕМАТИКА

Очікувані результати навчання	Пропонований зміст навчального предмета	Види навчальної діяльності
Змістова лінія «Числа і дії з ними»		
Учень/учениця: розрізняє дільники і кратні натурального числа; розуміє, що таке дільник і кратне натурального числа; розпізнає парні і непарні числа; числа, які кратні 3, 5, 9, 10; використовує ознаки подільності для розв'язування задач, зокрема задач на реальні ситуації; розрізняє прості і складені числа; володіє алгоритмом розкладання чисел на прості множники; розуміє, що таке найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне; розпізнає пари взаємно простих чисел; володіє алгоритмами знаходження найбільшого спільного дільника та найменшого спільного кратного; розуміє, у чому полягає основна властивість дробу; уміє застосовувати основну властивість дробу для скорочення дробів; пояснює, що таке найменший спільний знаменник дробів; володіє алгоритмом зведення дробів до спільного знаменника;	Дільники та кратні натурального числа Ознаки подільності на 2, 3, 5, 9, 10 Прості та складені числа. Розкладання чисел на прості множники Найбільший спільний дільник. Найменше спільне кратне Основна властивість дробів. Скорочення дробів Найменший спільний знаменник дробів. Зведення дробів до спільного знаменника.	Фронтальна форма навчання, яка включає слухання пояснень вчителя/вчительки, слухання та аналіз учнями/ученицями висловлювань інших учнів/ учениць. Колективне розв'язання проблемних ситуацій. Групова робота. Робота в парах. Індивідуальна робота, яка включає: –самостійну роботу з підручником; –контрольні та самостійні роботи: – самостійне виконання завдань біля дошки або в зошиті під час уроку; – пошук інформації в Інтернеті; – виконання домашньої роботи; – роботу з додатковою літературою

Очікувані результати навчання	Пропонований зміст навчального предмета	Види навчальної діяльності
розуміє правило порівняння звичайних дробів; застосовує правило порівняння звичайних дробів; застосовує зведення дробів до спільного знаменника для порівняння дробів; розуміє правила додавання, віднімання, множення і ділення звичайних дробів; володіє навичкою усного та письмового виконання арифметичних дій зі звичайними дробами; використовує властивості арифметичних дій зі звичайними дробами, зокрема для усного обчислення зручним способом; застосовує арифметичні дії зі звичайними дробами під час розв'язування задач та вправ; прогнозує результат обчислень; перевіряє правильність обчислень із використанням оберненої дії; розуміє правила знаходження дроби від числа та числа за його дробом; користується діями множення і ділення дробів для знаходження дроби від числа та числа за його дробом і для знаходження відсотка від числа та числа за його відсотком; уміє перетворювати звичайний дріб у десятковий;	Порівняння дробів Арифметичні дії зі звичайними дробами Знаходження дроби від числа та числа за його дробом Перетворення звичайних дробів у десяткові.	

Очікувані результати навчання	Пропонований зміст навчального предмета	Види навчальної діяльності
розрізняє скінченні десяткові і нескінченні періодичні десяткові дроби; читає та записує нескінченні періодичні десяткові дроби; знаходить період нескінченного періодичного десяткового дробу; розуміє процес знаходження десяткового наближення звичайного дробу та важливість його практичного застосування; розуміє необхідність введення від'ємних чисел; читає та записує додатні і від'ємні числа; розрізняє додатні, від'ємні, невід'ємні, недодатні числа; наводить приклади протилежних чисел; розуміє, що таке модуль числа; уміє знаходити модуль числа; розуміє, як формуються множини цілих і раціональних чисел; порівнює раціональні числа; розуміє, як порівнювати раціональні числа за допомогою координатної прямої; розуміє правила додавання, віднімання, множення і ділення раціональних чисел; володіє навичкою усного та письмового виконання арифметичних дій з раціональними числами;	Нескінченні періодичні десяткові дроби. Десяткові наближення звичайного дробу Додатні і від'ємні числа, число нуль Протилежні числа. Модуль числа Цілі числа. Раціональні числа Порівняння раціональних чисел Арифметичні дії з раціональними числами. Властивості додавання і множення раціональних чисел	

Очікувані результати навчання	Пропонований зміст навчального предмета	Види навчальної діяльності
використовує властивості арифметичних дій з раціональними числами, зокрема для усного обчислення зручним способом; застосовує арифметичні дії з раціональними числами під час розв'язування задач та вправ; прогнозує результат обчислень; перевіряє правильність обчислень із використанням оберненої дії		
Змістова лінія «Відношення і пропорції»		
Учень/учениця: розуміє, що таке відношення, що показує відношення двох чисел; наводить приклади величин, які є відношенням двох інших величин; користується розумінням сутності поняття масштабу для розв'язування задач практичного змісту; розуміє, що таке пропорція; розрізняє крайні та середні члени пропорції; застосовує поняття пропорції та її основну властивість для розв'язування задач практичного змісту; розуміє, що таке відсоткове відношення; що показує відсоткове відношення двох чисел; використовує правило знаходження відсоткового відношення двох чисел для	Відношення. Масштаб Пропорція. Основна властивість пропорції Відсоткове відношення двох чисел	Фронтальна форма навчання, яка включає слухання пояснень вчителя/вчительки, слухання та аналіз учнями/ученицями висловлювань інших учнів/учениць. Колективне розв'язання проблемних ситуацій. Групова робота. Робота в парах. Індивідуальна робота, яка включає: – самостійну роботу з підручником; – контрольні та самостійні роботи; – самостійне виконання завдань біля дошки або в зошиті під час уроку; – пошук інформації в Інтернеті;

Очікувані результати навчання	Пропонований зміст навчального предмета	Види навчальної діяльності
розв'язування задач практичного змісту; наводить приклади зв'язків між величинами, пропорційних величин; розпізнає види пропорційних залежностей між величинами; використовує зв'язки між відповідними значеннями прямо пропорційних і обернено пропорційних величин для розв'язування задач практичного змісту; розуміє, як ділити величину на пропорційні частини; використовує поділ числа у даному відношенні для розв'язування задач практичного змісту	Пряма та обернена пропорційні залежності Поділ числа у даному відношенні	– виконання домашньої роботи; – роботу з додатковою літературою
Змістова лінія «Вирази. Рівняння»		
Учень/учениця: знаходить значення числового та буквеного виразу із заданим значенням букв; володіє навичками спрощення буквених виразів із використанням переставної та сполучної властивостей множення; розуміє, що таке коефіцієнт; розпізнає подібні доданки; користується розподільною властивістю множення для розкриття дужок і зведення подібних доданків; розуміє, що таке корінь рівняння; пояснює, що означає розв'язати рівняння; розв'язує рівняння на основі правил знаходження	Розкриття дужок. Подібні доданки. Зведення подібних доданків. Спрощення виразів Рівняння. Основні властивості рівнянь	Фронтальна форма навчання, яка включає слухання пояснень вчителя/вчительки, слухання та аналіз учнями/ ученицями висловлювань інших учнів/учениць. Колективне розв'язання проблемних ситуацій. Групова робота. Робота в парах. Індивідуальна робота, яка включає: – самостійну роботу з підручником; – контрольні та самостійні роботи; – самостійне виконання завдань біля

[illegible]

Очікувані результати навчання	Пропонований зміст навчального предмета	Види навчальної діяльності
називає елементи зазначених просторових фігур; розпізнає на рисунках перпендикулярні й паралельні прямі; співвідносить реальні об'єкти навколишнього середовища з моделями перпендикулярних і паралельних прямих; володіє практичними навичками побудови перпендикулярних і паралельних прямих за допомогою лінійки та косинця; будує координатну пряму, координатну площину; визначає координати точок на координатній прямій; позначає на координатній прямій точки із заданими координатами; визначає координати точок на координатній площині; позначає на координатній площині точки із заданими координатами	Перпендикулярні й паралельні прямі Координатна пряма. Координатна площина	
Змістова лінія «Математичні задачі як засіб дослідження життєвих ситуацій та реальних процесів»		
Учень/учениця: усвідомлює, що діаграми та графіки є засобами подання інформації в наочній формі; читає, аналізує, порівнює інформацію, подану в таблицях, на схемах, діаграмах, графіках; будує стовпчасті діаграми та графіки залежностей між величинами (відстань, час; температура, час);	Робота з даними. Стовпчасті та кругові діаграми. Приклади графіків залежностей між величинами	Фронтальна форма навчання, яка включає слухання пояснень вчителя/вчительки, слухання та аналіз учнями/ ученицями висловлювань інших учнів/учениць. Колективне розв'язання проблемних ситуацій.

Очікувані результати навчання	Пропонований зміст навчального предмета	Види навчальної діяльності
описує проблемні життєві ситуації, які ґрунтуються на конкретних даних; добирає дані, потрібні для розв’язання проблемних ситуацій; планує розв’язування задачі; створює математичну модель задачі; досліджує різні шляхи розв’язання проблемної ситуації, спираючись на наявні дані; вибирає раціональний шлях розв’язання проблемних ситуацій з огляду на наявні дані; перевіряє правильність розв’язання задач; використовує досвід математичної діяльності в проблемних ситуаціях повсякденного життя; розв’язує сюжетні задачі з реальними даними щодо використання природних ресурсів рідного краю, безпеки руху; розрахунку відсоткового відношення різних величин; прийняття рішень у сфері фінансових операцій, розрахунку сімейного бюджету та комунальних платежів, можливості здійснення покупок; розрахунків, пов’язаних із календарем і годинником; обліку ресурсів, потрібних для вирішення побутово-господарчих задач, у тому числі з використанням прикидок	Сюжетні задачі з реальними даними. Сюжетні задачі з історико-патріотичною складовою. Сюжетні задачі на використання знань із суміжних дисциплін. Задачі геометричного змісту як моделі дослідження об’єктів навколишнього середовища. Компетентнісно зорієнтовані задачі. Задачі на дослідження оптимальних ситуацій. Найпростіші комбінаторні задачі. Відсоткові розрахунки	Групова робота. Робота в парах. Індивідуальна робота, яка включає: –самостійну роботу з підручником; – контрольні та самостійні роботи; – самостійне виконання завдань біля дошки або в зошиті під час уроку; – пошук інформації в Інтернеті; – виконання домашньої роботи; – роботу з додатковою літературою

РОЗДІЛ 1 ЗАГАЛЬНА МЕТОДИКА НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ В БАЗОВІЙ СЕРЕДНІЙ ШКОЛІ

Практичне заняття 1

Психолого-педагогічні основи навчання математики.

Принципи і методи навчання математики

Мета заняття: ознайомитися з основними психолого-педагогічними засадами навчання математики в базовій школі; розкрити зміст і значення принципів навчання математики (науковості, доступності, системності, наочності, індивідуалізації, зв'язку з практикою); сформулювати уявлення про класифікацію та характеристику методів навчання математики; розвивати навички аналізу педагогічних ситуацій і застосування принципів та методів на практиці.



Теоретичні питання:

1. Психолого-педагогічні основи навчання математики:
 - особливості сприймання, мислення та пам'яті учнів 5–9 класів;
 - роль мотивації в опануванні математики;
 - індивідуальні відмінності школярів.
2. Принципи навчання математики:
 - науковість і доступність;
 - системність і послідовність;
 - зв'язок навчання з життям і практикою;
 - принцип наочності;
 - принцип індивідуалізації та диференціації.
3. Методи навчання математики:
 - словесні (пояснення, бесіда, робота з підручником);
 - наочні (демонстрація моделей, схем, ІКТ-засобів);
 - практичні (вправи, самостійна робота, розв'язування задач);
 - проблемне навчання та дослідницькі методи.

Математика у 5–9 класах основної школи – це період переходу від конкретного мислення до абстрактного, від елементарних обчислювальних дій до систематизованого вивчення понять, властивостей і закономірностей. Психолого-педагогічні засади навчання мають враховувати особливості підліткового віку, формування мотивації до навчання, розвиток логічного, критичного та творчого мислення.

В умовах Нової української школи (НУШ) акцент робиться не лише на засвоєнні знань, а на формуванні математичної та ключових компетентностей, уміння застосовувати математику в реальних життєвих ситуаціях.

Психолого-педагогічні особливості учнів 5–9 класів:

1. Мислення:
 - перехід від наочно-образного до абстрактно-логічного;
 - потреба в доказах і логічних аргументах;

- схильність до дискусії, бажання відстоювати власну думку.
- 2. Пам'ять і увага:
 - здатність до довготривалого запам'ятовування абстрактного матеріалу;
 - потреба у різноманітних формах роботи, щоб уникати перевантаження.
- 3. Мотивація:
 - важливо показувати практичну цінність математики;
 - учні цікавляться прикладними аспектами, життєвими задачами.
- 4. Емоційна сфера:
 - чутливість до оцінки, потреба в підтримці;
 - прагнення до співпраці в групах.

Принципи навчання математики:

1. Науковість і доступність — пояснення з опорою на строгість математичних понять, але з урахуванням вікових можливостей.
2. Систематичність і послідовність — поступове ускладнення матеріалу, зв'язок між 5–6 та 7–9 класами.
3. Зв'язок теорії з практикою — показ, як математика пояснює життєві явища, допомагає у побуті, техніці, природничих науках.
4. Активність і самостійність учнів — організація дослідницької діяльності, проєктів, евристичних бесід.
5. Наглядність і моделювання — широке використання графіків, схем, динамічних моделей, комп'ютерних програм.
6. Диференціація й індивідуалізація — завдання різного рівня складності, врахування здібностей та темпу навчання учнів.
7. Компетентнісний підхід — формування вмінь застосовувати знання для розв'язання задач реального життя.

Методи навчання математики:

1. Словесні методи:
 - пояснення, бесіда, евристична розмова;
 - використання математичної термінології у зв'язку з повсякденними поняттями.
2. Наочні методи:
 - демонстрація моделей, графіків, малюнків;
 - візуалізація через цифрові інструменти (GeoGebra, інтерактивні симуляції).
3. Практичні методи:
 - вправи, розв'язування задач, складання алгоритмів;
 - дослідження, мініпроєкти.
4. Проблемне навчання:
 - створення ситуацій, де учні самі шукають рішення;
 - формулювання і перевірка гіпотез.
5. Ігрові методи:
 - математичні ігри, квести, змагання;
 - рольові ситуації (наприклад, «ти — інженер, розрахуй площу»).
6. Інтерактивні методи:
 - робота в парах і групах, «навчи іншого»;

- дискусії, мозкові штурми.
- 7. Методи самоконтролю та формувального оцінювання:
 - взаємоперевірка, самооцінювання;
 - рубрики, чек-листи, критерії успіху.

Методичні рекомендації

1. Враховувати вікові особливості: чергувати абстрактні та наочні завдання, активно використовувати приклади з життя.
2. Забезпечувати практичну спрямованість: включати прикладні задачі (фінансові, побутові, природничі).
3. Розвивати дослідницькі навички: навчати формулювати питання, висувати гіпотези, перевіряти їх.
4. Інтегрувати ІКТ: застосовувати онлайн-середовища для візуалізації та дослідження.
5. Підтримувати мотивацію: підкреслювати роль математики у майбутніх професіях і щоденному житті.
6. Розвивати математичну мову: учні мають навчитися чітко формулювати думки, доводити твердження.
7. Залучати учнів до співпраці: організовувати групові форми навчання, взаємонавчання, обговорення різних способів розв'язань.

Ефективне навчання математики у 5–9 класах ґрунтується на поєднанні психолого-педагогічних закономірностей розвитку підлітків, принципів науковості, доступності та практичності із сучасними методами, що активізують пізнавальну діяльність учнів.

У рамках НУШ особлива увага приділяється компетентнісному підходу, дослідницькій діяльності, інтерактивності та формувальному оцінюванню, що робить математику цікавою, корисною й близькою до реального життя.



Практичні завдання:

1. Аналіз педагогічної ситуації. Дано приклади ситуацій. Визначте, які принципи і методи допоможуть організувати ефективне навчання. Варіанти ситуацій:
 1. Учні не розуміють суті поняття дробу.
 2. Клас має різний рівень підготовки з математики.
 3. Учні запам'ятовують правила, але не можуть застосувати їх на практиці.
 4. При вивченні теми «Рівняння» діти намагаються запам'ятати алгоритм, але не усвідомлюють логіку розв'язування.
 5. Частина учнів вважає, що математика відірвана від життя.
 6. Учні роблять багато механічних помилок у діях з багатозначними числами.
 7. Діти не вміють читати умову задачі й виділяти головне.
 8. Учні бояться робити помилки і уникають активності на уроці.
 9. Клас пасивний, відсутня мотивація до вивчення математики.
 10. Учні плутають математичні терміни («вираз», «рівняння», «тотожність» тощо).

11. У класі є учні, які швидко виконують завдання, і ті, хто потребує більше часу.
12. Учні не розуміють змісту дій з від'ємними числами.
13. Учні виконують завдання правильно, але не вміють пояснити свій розв'язок.
14. Під час групової роботи активними є лише кілька учнів, решта пасивні спостерігачі.
15. Учням складно переносити знання в нову ситуацію (наприклад, застосовувати пропорції для задач на відсотки).
16. Учні швидко втрачають інтерес, якщо завдання надто легкі або надто складні.
17. Діти не вміють будувати математичні моделі життєвих ситуацій.
18. Учні часто плутають одиниці вимірювання (довжини, площі, маси).
19. Класу важко зрозуміти геометричні означення без малюнків чи моделей.
20. Учні завчають теореми напам'ять, але не вміють користуватися ними в доведеннях чи задачах.

2. Оберіть тему (наприклад, «Множення натуральних чисел» у 5 класі) і складіть фрагмент уроку, де будуть чітко вказані:

- мета;
- принципи, що реалізуються;
- методи, які обирає вчитель.

3. На основі методичної літератури та лекційного матеріалу курсу коротко опишіть основні прийоми навчання (пояснення вчителя, робота з таблицею, тестування, постановка проблемного питання, складання опорного конспекту тощо). З'ясуйте, до яких методів навчання математики вони відносяться.

4. Розробіть та презентуйте приклад завдання для учнів 6 класу, яке поєднує принцип наочності та зв'язку з практикою.

Практичне заняття 2

Логіко-математичний аналіз означень, понять і об'єктів.

Основні етапи їх формування

Мета заняття: ознайомитися з методикою логіко-математичного аналізу понять і означень; розкрити особливості формування математичних понять у школярів (через етапи конкретизації та абстрагування); навчитися застосовувати аналіз означень і понять до різних математичних об'єктів; розвивати вміння формулювати означення, відрізняти істотні та неістотні ознаки математичних об'єктів; розвивати логічне мислення та методичну культуру.



Теоретичні питання:

1. Поняття як форма мислення: структура, ознаки, обсяг та зміст.
2. Логіко-математичний аналіз означень:
 - види означень (родо-видові, описові, операційні);
 - вимоги до означення (чіткість, несуперечливість, необхідність і достатність умов).
3. Основні етапи формування математичних понять у школі:
 - чуттєве сприйняття (наочні уявлення, приклади з життя);
 - виділення істотних ознак (порівняння, аналіз, узагальнення);
 - формування визначення (вербалізація, робота з підручником);
 - закріплення й застосування (вправи, задачі).
4. Методичні прийоми роботи з математичними поняттями (евристична бесіда, проблемне запитання, робота з контрприкладом тощо).

Питання про поняття, об'єкти і їх означення є дуже складним за змістом й може розглядатися з різних точок зору: логічної, змістовної (предметної), пізнавальної (гносеологічної) і ін., і в силу цього навіть у різних методичних посібниках даються різні його аспекти. Ми вважаємо, що як основу необхідно вибрати логічну структуру з урахуванням математичних трактувань. Враховуючи, що навчання можливе тільки в діяльності, необхідно розглядати дії, адекватні видам означень понять і об'єктів. Тому в зміст роботи буде входити актуалізація й систематизація знань за змістом операції «визначення понять», структурою означень (def) і їх видів.

Поняття – це форма мислення про цілісну сукупність істотних і несуттєвих властивостей об'єктів реального світу, зокрема й математичних об'єктів. Для формування математичних понять необхідне розуміння математичного об'єкта, який у понятті характеризується завдяки застосуванню певних розумових дій.

Коли ведеться мова про математичний об'єкт, наприклад, про ромб або квадратне рівняння й т.п., то мається на увазі конкретний емпіричний (реальний) об'єкт, представлений у вигляді малюнка, моделі або аналітичного запису, і одночасно теоретичний (ідеальний) об'єкт, що володіє всіма істотними властивостями. У прикладі з ромбом це не тільки намальований ромб, але й усі

об'єкти, які суть геометричні фігури із чотирма сторонами, протилежні з яких паралельні, усі сторони рівні, діагоналі перпендикулярні й т.п.

Сформуувати поняття про об'єкт – це означає розкрити всі суттєві властивості об'єкта в їхній цілісній сукупності. Діяльність учня (суб'єкта) при цьому спрямована на вивчення математичного об'єкта, а продуктом цієї діяльності буде правильне поняття.

Однією з дій вивчення математичного об'єкта для одержання поняття про нього є дія визначення.

Визначити об'єкт – це означає вибрати з його суттєвих властивостей такі й стільки, щоб кожна з них була необхідною, а всі разом достатніми для відмінності досліджуваного об'єкта від інших.

Виконується дія визначення різними шляхами (за допомогою різних розумових і предметних операцій) і результат його виконання фіксується в різного виду означеннях.

Логічна структура дії визначення математичних об'єктів, загалом кажучи, єдина.

Сутність дії визначення математичних об'єктів. Для розуміння сутності дії визначення математичних об'єктів необхідне розуміння структури аксіоматично побудованої теорії. Якщо навчальний предмет будується аксіоматично (або близько до аксіоматичного методу), то вибираються основні об'єкти (фігури) і їх суттєві властивості або зв'язки між ними розкриваються в системі аксіом. Так, у підручнику А. В. Погорелова ([113]) основні фігури в планіметрії «точка» і «пряма» і відносини між ними «належати» і «лежати між» розкриваються за допомогою чотирьох аксіом.

Потім на основі побічно охарактеризованих властивостей основних об'єктів (фігур) предмета й відносин визначаються наступні об'єкти (фігури) предмета.

Приклад 1. Промінь уже можна визначити через введення фігур «пряма» і «точка» і відношення «лежати по різні сторони» як еквівалентне відношення «лежати між» і загальні гносеологічні поняття «частини» і «множини».

Для конструювання означення фігури «промінь» на прямій вибирається її частина. Частина ця складається з таких точок, які лежать по одну сторону від фіксованої точки на прямій, яку називають початком променя. Тому що промінь – частина прямої, то більш широким поняттям для нього буде пряма; виходить, пряма – родове поняття, причому найближче. Видові відмінності: частина прямої; точка, що обмежує цю частину з однієї сторони.

Приклад 2. Кут – це фігура, яка складається із двох різних променів із спільною початковою точкою. Родовим найближчим об'єктом буде фігура; видові відмінності: два промені й спільний початок у цих променів.

Операції, що розкривають дію визначення об'єктів, будуть наступні: вибирається найближчий родовий об'єкт (фігура), потім на цей об'єкт накладаються як би обмеження, видові характеристики (відмінності). На основі видових характеристик (відмінностей) вводиться новий об'єкт, але з меншим обсягом, чим родовий, тому що в нього більше властивостей. От цього об'єкту

з більшим числом властивостей і меншим обсягом привласнюється нова назва (термін).

Приклад 3. З усіх рівностей рівнянням назвемо тільки такі рівності, у записі яких є змінні (букви). Із усіх рівнянь квадратними назвемо такі, які мають вигляд $ax^2 + bx + c = 0$, де x – змінна; a, b, c – деякі числа, причому $a \neq 0$. З усіх прямокутників квадратом назвемо такі прямокутники, у яких суміжні сторони рівні, і т.п.

Структура цієї дії може бути символічно виражена в такий спосіб:

$$\begin{array}{ccccc} \forall & x \in M & A(x) & \Leftrightarrow & B(x) \\ & \text{рід} & \text{термін} & & \text{Видові} \\ & & & & \text{відмінності} \end{array}$$

При виділенні видів означень математичних об'єктів часто ось цю загальну дію – визначення об'єктів – називають конкретним видом «визначення через найближчий рід і видові відмінності». Нам представляється більш правомірним вести мову про специфіку дій по виділенню видових відмінностей і залежно від цього розрізняти означення й називати їх означеннями об'єктів конкретного виду.

Відповідно до цього можна назвати наступні види означень математичних об'єктів залежно від специфіки дій, за допомогою яких виділяють родові об'єкти й видові відмінності. Інакше можна ще сказати, що означення через найближчий рід і видові відмінності мають наступну конкретизацію: 1) означення об'єктів шляхом вказівки їх характеристичної властивості; 2) заперечні означення. І окремо слід назвати неявні означення основних (вихідних) об'єктів (фігур) предмета через систему аксіом: 3) конструктивні й рекурсивні означення.

Означення математичних об'єктів шляхом опису характеристичної властивості. Цей вид означень побудований на логічних діях і операціях установлення найближчого роду, видових відмінностей і логічної природи зв'язку між родом і видовими відмінностями. Залежно від логічної природи зв'язку властивостей у шкільному курсі математики розрізняють **кон'юнктивні** та **диз'юнктивні** означення.

Приклад 4. Означення паралелограма.

Паралелограмом називається чотирикутник, у якого протилежні сторони паралельні.

Термін – паралелограм.

Рід – чотирикутник.

Видові відмінності: 1) одна пара протилежних сторін паралельна; 2) інша пара протилежних сторін паралельна.

Усі властивості в означенні з'єднані союзом «і»; виходить, маємо кон'юнктивне означення.

Приклад 5. Означення неправильного дробу.

Дріб, у якому чисельник більше знаменника або дорівнює йому, називається неправильним дробом.

Термін – неправильний дріб.

Рід – дріб.

Видові відмінності: 1) чисельник більше знаменника; 2) чисельник дорівнює знаменнику.

Видові відмінності з'єднані союзом «або». Означення диз'юнктивне.

Приклад 6. Означення зростаючої функції.

Функція називається зростаючою на деякому проміжку, якщо більшому значенню аргументу із цього проміжку відповідає більше значення функції.

Термін – зростаюча функція на проміжку.

Рід – функція.

Видові відмінності: якщо $x_1 > x_2$ й $x_2 \in D(f)$, $x_1 \in D(f)$, то $f(x_2) > f(x_1)$

Означення за формою записане у вигляді імплікації.

Його можна переформулювати в такий спосіб:

Видові відмінності: 1) $x_1 > x_2$, 2) $x_2 \in D(f)$, $x_1 \in D(f)$, 3) $f(x_2) > f(x_1)$.

Можна залишити тільки дві самостійні властивості: 1) $x_1 > x_2$ ($x_2 \in D(f)$, $x_1 \in D(f)$) і 2) $f(x_2) > f(x_1)$.

Означення такого виду або ті, що приводяться до них, становлять переважну більшість курсу.

Конструктивні й рекурсивні означення. Властивості об'єкта у такому означенні розкриваються шляхом показу операцій його конструювання, тобто його видові відмінності задані у вигляді дій.

Приклад 7. Поворотом навколо даної точки називається такий рух, при якому кожний промінь, що виходить із цієї точки, повертається на той самий кут у тому самому напрямку.

Термін – поворот.

Рід – рух.

Видові відмінності: 1) кожний промінь, що виходить із точки, повернути в тому самому напрямку; 2) кожний промінь повернути на той самий кут.

Приклад 8. Лінійною функцією називається функція, яку можна задати формулою виду $y = kx + b$, де x – незалежна змінна; k і b – числа.

Термін – лінійна функція.

Рід – функція.

Видові відмінності: x – незалежна змінна; k і b – числа й $y = kx + b$, тобто якщо ці дії між числами й змінною задані, то маємо лінійну функцію. Якщо дії інші, то немає лінійної функції.

Конструктивні дії можуть задаватися по-різному. Так, у рекурсивних означеннях вказуються деякі базисні об'єкти деякого класу й правила, що дозволяють одержати нові об'єкти цього ж класу.

Приклад 9. Означення арифметичної прогресії.

Арифметичною прогресією називається послідовність, у якій кожний член, починаючи з другого, дорівнює попередньому, складеному з одним і тим самим числом.

Термін – арифметична прогресія.

Рід – послідовність.

Видові відмінності: a_1 даний; $a_2 = a_1 + d$ (у загальному вигляді a_n) – даний; $a_{n+1} = a_n + d$.

Дії одержання наступного члена, якщо відомий попередній, зазначені у видових відмінностях.

Заперечні означення. Заперечні означення не задають властивості об'єкта. Вони виконують як би класифікаційну функцію. Якщо клас об'єктів розбитий на групи (множини) і об'єктам однієї групи, що володіють певними властивостями, привласнений термін і є об'єкти, які належать цьому класу, але відзначені властивості (усі або частина) їм не притаманні, то таким об'єктам дається заперечне означення.

Приклад 10. Мимобіжні прямі – це такі прямі, які не належать площині й не перетинаються.

Термін – мимобіжні прямі.

Рід – прямі.

Видові відмінності: 1) не належать одній площині; 2) не перетинаються.

Таким чином, логічна дія – визначення об'єкта – скрізь однакова, але змістовні (математичні) дії в кожному з відзначених видів означень різні. В одних видові відмінності перелічуються як описові характеристики (бути паралельними, бути більше й т.п.); в інших вказуються дії, які треба зробити, щоб одержати (сконструювати) об'єкт; у третіх перелічуються властивості, які заперечуються.

Таким чином, головне в типології шкільних означень по видах – це розуміння специфіки дій, що розкривають (що характеризують) видові відмінності.

Основним навчальним завданням при навчанні означенням математичних об'єктів буде формування логічної дії по розкриттю структури означення математичних об'єктів і дій, адекватних конкретному виду означень.

Дії, за допомогою яких буде вирішуватися це основне навчальне завдання, наступні:

- логічний аналіз структури означень різного виду (виділення логічної й змістовної функцій кожного слова в означенні об'єкта, відшукування зайвих слів в означеннях і ін.);
- підведення конкретного математичного об'єкта під означення;
- приведення конкретного прикладу, об'єкта, що ілюструє приналежність його даному означенню;
- заміна означення об'єкта еквівалентним означенням цього об'єкта. Іноді цю дію називають переформулюванням означення. Порівняння різних означень того самого об'єкта;
- одержання наслідків з факту, що об'єкт належить до класу об'єктів, охарактеризованих означенням;
- знаходження логічних і змістовних помилок у наведених означеннях.

Дія підведення під означення об'єкта складається з наступних операцій:

- 1) вичленовування всіх властивостей, зафіксованих в означенні;
- 2) установлення логічного зв'язку між родом і видовими відмінностями;

3) перевірка наявності у прикладі, що підводиться під означення об'єкта, відзначених властивостей і їх зв'язків;

4) одержання висновку – об'єкт належить до класу об'єктів, зафіксованих в означенні, чи ні.

Приклад 11. Означення рівнобедреного трикутника.

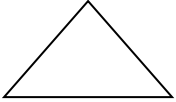
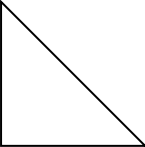
Трикутник називається рівнобедреним, якщо в нього дві сторони рівні.

Властивості рівнобедреного трикутника: 1) він трикутник, 2) дві сторони його рівні. Властивості з'єднані кон'юнктивно.

Дії підведення під поняття можна оформити в таблицю 1.

При з'єднанні видових відмінностей кон'юнктивно для приналежності конкретного об'єкта до класу певних об'єктів необхідне дотримання (наявність у прикладі) усіх властивостей одночасно.

Таблиця 1 – Рівнобедрений трикутник

№	Приклад	Властивості об'єкта		
		Трикутник	Дві сторони рівні	Висновок: даний об'єкт є рівнобедрений трикутник
1	2,5	–		–
2		+	–	–
3		+	+	+
4		+	+	+

Приклад 12. Дріб, у якого чисельник більше знаменника або дорівнює йому, називається неправильним.

Властивості неправильного дробу: дріб, чисельник більше знаменника або чисельник дорівнює знаменнику. Видові властивості з'єднані диз'юнктивно (табл. 2).

Таблиця 2 – Неправильний дріб

№	Приклад	Властивості об'єкта			
		Дріб	Чисельник більше знаменника	Чисельник дорівнює знаменнику	Вивід: даний об'єкт є неправильний дріб
1	$\frac{2}{3}$	+	–	–	–
2	100	–	–	–	–

3	$\frac{7}{3}$	+	+	-	+
4	$\frac{9}{9}$	+	-	+	+

Для приналежності конкретного об'єкта до класу, заданого в означенні, коли видові відмінності з'єднані диз'юнктивно, необхідне дотримання (наявність) родової властивості й хоча б однієї з видових відмінностей.

Приклад 13. Дано конкретний об'єкт паралелограм $ABCD$. Які наслідки можна вивести з факту, що даний паралелограм належить до теоретичного (абстрактному) об'єкту – паралелограму? Виконання дії одержання наслідків з факту приналежності конкретного об'єкта теоретичному досить плідно не тоді, коли введене тільки означення об'єкта, а коли вивчені основні його властивості.

Дану дію можна виконувати при завданнях наступного виду: дано паралелограм $ABCD$; що ви знаєте про цю фігуру?

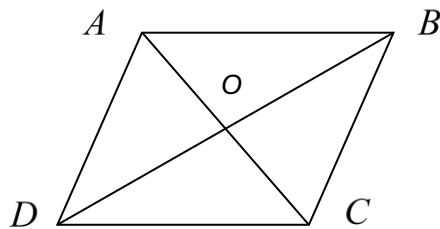


Рисунок 1 – Паралелограм

$ABCD$ – чотирикутник.

1. $BC = AD$ та $AB = CD$.

2. $BC \parallel AD$ та $AB \parallel CD$.

3. $\angle BAD = \angle BCD$ та $\angle ABC = \angle CDA$.

4. $\angle BAD + \angle CDA = 180^\circ$ та

$\angle BAD + \angle ABC = 180^\circ$.

5. $AO = OC$, $BO = OD$.

6. $\triangle ABC = \triangle ACD$, $\triangle BCD = \triangle ABD$.

7. $\triangle AOB = \triangle DOC$, $\triangle BOC = \triangle AOD$ і

т.п.

Виконання даної дії сприяє систематизації властивостей об'єкта й тим самим створює більш ефективні передумови для використання їх при пошуку розв'язку завдань, в умові яких буде цей об'єкт.

Раніше виконані завдання дозволяють визначити **основні етапи розкриття змісту математичного об'єкта** (формування означення):

1. Логічний аналіз структури означення об'єкта (виділення терміна, роду, видових відмінностей і логічного зв'язку властивостей).
2. Виконання дії підведення під поняття (приведення прикладів).
3. Виконання дій одержання наслідків з факту, що конкретний об'єкт належить до класу об'єктів, охарактеризованих означенням.
4. Якщо вимагає педагогічна ситуація, заміна означення еквівалентним йому.

Зауваження. Ряд математичних об'єктів, особливо на початкових етапах навчання математики (V-VI класи), не має в підручниках означень у вигляді конкретних речень. Звичайно в таких випадках властивості об'єктів (модуль числа, одночлен і ін.) розкриваються на конкретних прикладах і потім вводиться термін.

Неважко бачити, що й у цих випадках ведеться така ж робота, як показано вище, але в силу не підготовленості дітей до узагальнення й складності

структури означень об'єктів в етапах роботи над означенням об'єкта перший і четвертий етапи не виконуються, а другий виконується на емпіричному рівні.

У зв'язку з висловленим зауваженням необхідно особливо відзначити введення арифметичних дій додавання й множення. Визначення цих дій у математиці вводяться по-різному залежно від прийнятого трактування. Але всі вони складні й, звичайно ж, недоступні учням. Тому в підручниках найчастіше зміст цих дій показують на конкретних математичних завданнях, у змісті яких потрібно об'єднати об'єкти або знайти результат зміни або результати послідовних змін. Узагальненням, зокрема, названих дій виступає дія додавання. Для введення дії множення вживаються інші приклади. Тут важливо відзначити, що якщо визначається дія, то головне – показати операції, що їх реалізують. Ось їм у підручниках і надається істотне значення. Такий підхід до всіх дій існує й у курсі алгебри, й у курсі геометрії.



Практичні завдання:

1. Визначте, чи є наведені означення коректними. Поясніть, які вимоги до означень порушені. Варіанти означень:
 1. Натуральне число – це число, яке використовується при лічбі предметів.
 2. Парне число – це число, яке ділиться на 2 без остачі.
 3. Дробове число – це число, записане у вигляді $\frac{a}{b}$, де a і b – натуральні числа.
 4. Просте число – це число, яке ділиться тільки на 1 і на самого себе.
 5. Нуль – це найменше натуральне число.
 6. Змінна – це буква, що позначає будь-яке число з деякої множини.
 7. Рівняння – це рівність, що містить змінну.
 8. Тотожність – це рівність, яка виконується при будь-яких значеннях змінних.
 9. Функція – це правило, яке кожному елементу множини X ставить у відповідність єдиний елемент множини Y .
 10. Квадратне рівняння – це рівняння вигляду $ax^2 + bx + c = 0$, де a, b, c – дійсні числа.
 11. Трикутник – це многокутник, який має три сторони.
 12. Квадрат – це прямокутник, у якого всі сторони рівні.
 13. Ромб – це чотирикутник, у якого всі сторони рівні.
 14. Паралелограм – це чотирикутник, у якого протилежні сторони рівні.
 15. Коло – це множина всіх точок площини, які лежать на однаковій відстані від даної точки.
 16. Відрізок – це частина прямої, обмежена двома точками.
 17. Промінь – це частина прямої, яка має початок і не має кінця.
 18. Середнє арифметичне кількох чисел – це сума цих чисел, поділена на їх кількість.
 19. Пропорція – це рівність двох відношень.

20. Подібні трикутники – це трикутники, у яких відповідні кути рівні, а сторони пропорційні.

2. Дано поняття (див. варіанти). Наведіть 3 приклади об'єктів, що належать цьому класу; 5 контрприкладів (об'єктів, які близькі за ознаками, але не є).

1. Натуральне число.
2. Парне число.
3. Просте число.
4. Дільник числа.
5. Дробове число.
6. Рівняння.
7. Тотожність.
8. Функція.
9. Квадратне рівняння.
10. Пропорція.
11. Відрізок.
12. Промінь.
13. Трикутник.
14. Прямокутний трикутник.
15. Квадрат.
16. Ромб.
17. Паралелограм.
18. Коло.
19. Подібні трикутники.
20. Перпендикулярні прямі.

3. Розпишіть послідовність формування в учнів одного з понять (див. Варіанти вище):

- наочний етап (як показати учням?);
- виділення ознак;
- формулювання означення;
- закріплення у задачах.

4. Порівняйте поняття пари (варіанти нижче), використовуючи:

- спільні ознаки;
 - відмінні ознаки;
 - яке з понять ширше, яке вужче.
1. Натуральні числа, цілі числа.
 2. Парні числа, непарні числа.
 3. Прості числа, складені числа.
 4. Дільник, множник.
 5. Дробові числа, десяткові дробі.
 6. Рівняння, тотожність.
 7. Лінійне рівняння, квадратне рівняння.
 8. Функція, відношення.
 9. Пропорція, рівність дробів.
 10. Вираз числовий, вираз з буквою.
 11. Відрізок, промінь.

12.Промінь, пряма.

13.Трикутник, чотирикутник.

14.Прямокутний трикутник, рівнобедрений трикутник.

15.Квадрат, ромб.

16.Квадрат, прямокутник.

17.Ромб, паралелограм.

18.Коло, круг.

19.Паралельні прямі, перпендикулярні прямі.

20.Подібні трикутники, рівні трикутники.

5. Розробіть фрагмент уроку (5–7 хв) для формування заданого поняття (див. п. 2). Укажіть:

- які принципи навчання реалізуються;
- які методи та прийоми ви оберете;
- як організуєте роботу учнів.

Практичне заняття 3

Логіко-математичний аналіз математичних речень і загальні прийоми роботи з теоремами

Мета заняття: ознайомитися з видами математичних речень (означення, аксіоми, теореми, твердження, наслідки); розкрити логічну структуру математичних речень (умова, висновок); сформулювати уявлення про етапи роботи з теоремою (аналіз формулювання, добір прикладів і контрприкладів, доведення, застосування); навчитися виконувати логіко-математичний аналіз теорем та використовувати загальні прийоми їх вивчення в школі; розвивати критичне мислення, уміння доводити твердження та будувати власні міркування.



Теоретичні питання:

1. Види математичних речень: означення, аксіоми, твердження, теореми, наслідки.
2. Структура математичного речення:
 - умова;
 - висновок;
 - зв'язки «якщо ..., то ...», «тоді й тільки тоді, коли ...».
3. Особливості логіко-математичного аналізу теореми:
 - виділення умови та висновку;
 - можливість обернення, заперечення;
 - правильність і повнота формулювання.
4. Загальні прийоми роботи з теоремами:
 - робота з прикладами і контрприкладами;
 - аналіз формулювання (що буде, якщо змінити умову?);
 - доведення (різні методи);
 - застосування у вправах та задачах.

Виходячи з педагогічних цілей, у процесі навчання вважаємо за доцільне прийняти:

Твердження, істинність якого доводиться, називається теоремою.

Логіко-математичний аналіз структури твердження припускає:

- а) виділення роз'яснювальної частини, умови й висновку твердження;
- б) установлення факту, яке дано твердження – просте або складне.

Приклад 1. Виконаємо логіко-математичний аналіз наступного твердження:

Якщо сума цифр числа n ділиться на 3, то саме число n ділиться на 3.

Виділяємо **умову**: «Сума цифр числа n ділиться на 3».

Виділяємо **висновок**: «Саме число n ділиться на 3».

Роз'яснювальна частина: « n – будь-яке натуральне число».

Твердження сформульоване в імплікативній формі. Відзначимо, так як у твердженні одна умова й один висновок, то твердження просте.

Використовуючи логічні символи, твердження можна записати так:

$(\forall n \in N) (\text{сума цифр числа ділиться на 3}) \Rightarrow (\text{число } n \text{ ділиться на 3}).$

Результат аналізу можна оформити у вигляді таблиці (табл. 4).

Таблиця 4 – Аналіз твердження

$(\forall n \in N)$ (сума цифр числа ділиться на 3) $\Rightarrow$ (число n ділиться на 3)	
Структура твердження	Роз'яснювальна частина: твердження розглядається на множині натуральних чисел. Умова: сума цифр числа n ділиться на 3. Висновок: число n ділиться на 3.
Твердження просте, тому що містить одну умову й один висновок	

Приклад 2. Виконаємо логіко-математичний аналіз теореми:

Якщо три сторони одного трикутника відповідно дорівнюють трьом сторонам іншого, то такі трикутники рівні.

Короткий запис теореми може бути такий:

$$\forall \Delta ABC \wedge \Delta A_1 B_1 C_1 \quad AB = A_1 B_1 \wedge AC = A_1 C_1 \wedge BC = B_1 C_1 \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A_1 B_1 C_1.$$

Теорема сформульована в імплікативній формі.

Роз'яснювальна частина: теорема розглядається на множині будь-яких пар трикутників ABC і $A_1 B_1 C_1$.

Умова: 1) $AB = A_1 B_1$; 2) $AC = A_1 C_1$; 3) $BC = B_1 C_1$.

Висновок: $\Delta ABC = \Delta A_1 B_1 C_1$.

Так як в теоремі три умови, то теорема складна.

Для **одержання твердження, зворотного даному**, треба залишити без зміни роз'яснювальну частину, а умову й висновок поміняти місцями.

Приклад 3. Для твердження

$$(\forall n \in N) \text{ (сума цифр числа } n \text{ ділиться на 3)} \Rightarrow \text{(число } n \text{ ділиться на 3)}$$

зворотним буде твердження:

$$(\forall n \in N) \text{ (число } n \text{ ділиться на 3)} \Rightarrow \text{(сума цифр числа } n \text{ ділиться на 3)}.$$

Для **одержання твердження, протилежного даному**, треба залишити без зміни роз'яснювальну частину, а умову й висновок твердження замінити їхніми запереченнями.

Приклад 4. Для твердження

$$(\forall n \in N) \text{ (сума цифр числа } n \text{ ділиться на 3)} \Rightarrow \text{(число } n \text{ ділиться на 3)}$$

протилежним буде твердження:

$$(\forall n \in N) \text{ (сума цифр числа } n \text{ не ділиться на 3)} \Rightarrow \text{(число } n \text{ не ділиться на 3)}.$$

Для **одержання твердження, зворотного протилежному або протилежного зворотному**, треба залишити без зміни роз'яснювальну частину й поміняти місцями умову й висновок твердження, протилежного даному.

Приклад 5. Для твердження

$$(\forall n \in N) \text{ (сума цифр числа } n \text{ ділиться на 3)} \Rightarrow \text{(число } n \text{ ділиться на 3)}$$

протилежним зворотному буде твердження:

$(\forall n \in \mathbb{N})$ (число n не ділиться на 3) $\Rightarrow$ (сума цифр числа n не ділиться на 3).

Загальні прийоми роботи з теоремою. При індуктивному введенні теореми можна умовно виділити наступні етапи її вивчення:

- мотивація вивчення теореми й розкриття її змісту (розсуд геометричного факту й формулювання теореми);
- робота над структурою теореми;
- мотивація необхідності доведення теореми;
- побудова креслення й короткий запис змісту теореми;
- пошук доведення, доведення і його запис;
- закріплення теореми;
- застосування теореми.

Для мотивування необхідності вивчення теорем можна запропонувати такі прийоми:

Прийом 1. *Узагальнення спостережуваних у житті фактів і явищ і переклад їх на математичну мову.*

Приклад 6. Мотивувати необхідність вивчення властивості: "Дві різні прямі або не перетинаються, або перетинаються тільки в одній точці" можна, запропонувавши попередньо учням розв'язати вдома наступні завдання:

На плані місцевості чотири населені пункти відзначені точками A, B, C, K . З'ясуєте, чи перетнуться шляхи з пункту A в пункт C і з пункту K в пункт B (шляхи вважаємо прямолінійними). Якщо перетнуться, то в скількох точках? Розгляньте різні можливі випадки розташування населених пунктів. Чи можуть ці шляхи перетнутися у двох точках?

У класі вчитель з'ясовує отримані результати розв'язку завдання: у всіх випадках шляхи або мають одну спільну точку, або не мають ні однієї. Відзначивши, що шляхи руху в даних завданнях були відрізками, пропонується подумати над питанням: чи зміниться висновок, якщо замість двох відрізків брати дві прямі?

Відповіді можуть бути різними. Якщо відповіді різні, то відразу можна запропонувати з'ясувати, чи можуть дві прямі мати дві спільні точки, і тим самим перейти до доведення теореми, мотив вивчення якої став вже очевидним. Якщо ж відповідь одна, тобто дві різні прямі перетинаються в одній точці, то вчитель говорить, що в цьому завданні це дійсно так. При розв'язку інших завдань може бути по-іншому: адже ми не можемо розглянути всі конкретні життєві ситуації й розв'язати усі завдання! Як бути?

– Треба довести, причому так, щоб твердження було істинне для будь-якого випадку.

Цей прийом можна використовувати при вивченні багатьох теорем.

Прийом 2. *Показ необхідності знання тієї або іншої теореми для розв'язку практичних завдань.*

Приклад 7. Для мотивації вивчення теореми: "Якщо дві сторони й кут між ними одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам і куту між ними іншого трикутника, то такі трикутники рівні" можна використовувати наступне завдання:

Картографам необхідно було нанести на карту два населені пункти A та B . Виміряти відстань між пунктами виявилось неможливо, тому що між ними було озеро. Картографи поступили в такий спосіб: спочатку вибрали точку C , від якої можна виміряти відстань і до пункту A , і до пункту B . Виміряли ці відстані й побудували на папері відрізки AC і CB відповідної довжини (масштаб можна вказати за своїм розсудом), а потім продовжили лінії за точку C , відклали відрізки CD і CM , рівні відповідно відрізкам CB і CA , і з'єднали точки D і M відрізком. Картографи вважають, що відстань DM дорівнює відстані AB (у відповідному масштабі). Чи праві картографи?

- За умовою завдання відомо, що $AC = CM$, $BC = CD$ і, крім того, $\angle ACB = \angle DCM$ як вертикальні кути.
- Треба встановити, що $DM = AB$.
- Звідки може випливати рівність цих відрізків?
- Рівність відрізків DM і AB може випливати з рівності трикутників ACB і DCM .
- Але в рівних трикутниках відповідно рівні всі шість елементів (по три кути й по три сторони), а тут ми маємо тільки дві сторони й кут між ними одного трикутника, відповідно дорівнюють двом сторонам і куту між ними іншого трикутника. Як бути?
- Слід довести, що якщо дві сторони й кут між ними одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам і куту між ними іншого трикутника, то такі трикутники рівні.

Мотив вивчення й необхідність доведення теореми показані.

Прийом 3. Показ необхідності знання цієї або іншої теореми для розв'язку завдань і доведення інших теорем.

Приклад 8. Перед доведенням теореми 3.3 [113] "У рівнобедреному трикутнику кути при основі рівні" учнем пропонується розв'язати завдання:

У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = BC$) вершина кута B з'єднана із серединою K сторони AC відрізком. Доведіть, що трикутники ABK і CBK рівні. Чи досить цих даних, щоб встановити рівність названих трикутників?

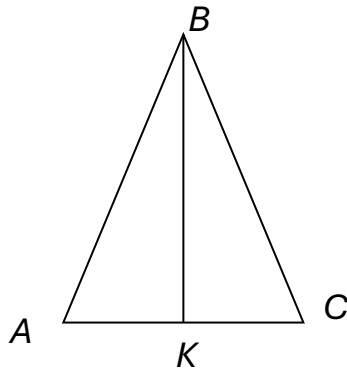
Так як третьої ознаки рівності трикутників за трьома сторонам в учнів поки немає, то дане завдання вони розв'язати не можуть. Створена проблемна ситуація дозволяє відразу мотивувати необхідність вивчення відразу трьох теорем 3.3, 3.5, 3.6 [113].

Прийом 4. Показ, як вирішувалася дана проблема в історії науки.

Очевидно, що перераховані вище прийоми для мотивації вивчення теорем служать одночасно й розкриттю змісту теореми. З інших прийомів розкриття змісту теорем можна назвати:

- спостереження наочного матеріалу, у тому числі рухливих моделей або ряду креслень;
- виконання побудов;
- розв'язок завдань на обчислення й доведення;
- виконання лабораторних або практичних робіт;
- розв'язок завдань на відшукування деяких залежностей.

Приклад 9. Зразок запису доведення теореми на прикладі теореми "У рівнобедреному трикутнику медіана, проведена до основи, є бісектрисою й висотою"



Дано:

$\triangle ABC$ – рівнобедрений;

AC – основа;

BK – медіана.

Довести:

1) BK – бісектриса;

2) BK – висота.

Доведення:

1. Розглянемо $\triangle ABK$ й $\triangle CBK$. У них:

1. $AK = KC$ (BK – медіана);

2. $AB = BC$ ($\triangle ABC$ – рівнобедрений);

3. $\angle BAK = \angle BCK$ (як кути при основі рівнобедреного трикутника);

Отже, $\triangle ABK = \triangle CBK$ за I ознакою рівності трикутників.

2. $\angle ABK = \angle CBK$ як відповідні кути рівних трикутників, а це означає, що BK – бісектриса.

3. $\angle BKA = \angle BKC$ як відповідні кути рівних трикутників,

$\angle BKA + \angle BKC = 180^\circ$ як суміжні, отже, $\angle BKA = \angle BKC = 90^\circ$ і BK – висота.

Теорему доведено.

Щоб теорема була засвоєна, необхідна робота з нею й після її доведення. Цьому сприяють завдання наступних видів:

1. Сформулюйте теорему.

2. Виділіть умову, виділіть висновок теореми. До яких фігур застосовна теорема?

3. Сформулюйте теорему зі словами: «Якщо..., то...» (якщо теорема сформульована в категоричній формі).

4. Сформулюйте твердження, зворотне (протилежне і т.д.) сформульованому.

5. Відтворіть доведення теореми за новим кресленням, змінивши його положення й позначення елементів.

6. Складіть план доведення.

7. Назвіть аргументи, які використовувалися при доведенні.

8. Доведіть теорему іншим способом. Розв'яжіть завдання на застосування теореми.

При цьому пропонуються **завдання на застосування** тільки що вивченої теореми: завдання на розпізнавання фігур або взаємного положення елементів фігур на кресленнях, до яких можна застосувати теорему, причому розв'язок завдання в цьому випадку до кінця можна й не доводити; завдання, для розв'язку яких використовується вивчена теорема поряд з іншими, раніше вивченими.

Зрозуміло, що ця робота проводиться не тільки на одному-двох уроках, коли вивчається та або інша теорема, а в міру можливості проводиться й при вивченні інших питань.



Практичні завдання

1. Дано твердження. В ньому:

- виділіть умову (умови) і висновок (висновки), чи є дане твердження простим (складним)?
- сформулюйте для нього обернене твердження;
- сформулюйте для нього протилежне твердження;
- сформулюйте обернене до протилежного твердження;
- наведіть приклад, що ілюструє твердження (теорему).

Варіанти тверджень:

1. Якщо число ділиться на 2 і 3, то воно ділиться на 6.
2. Якщо два числа кратні одному й тому ж числу, то їх сума також кратна цьому числу.
3. Якщо число ділиться на 9, то сума його цифр ділиться на 9.
4. Квадрат будь-якого парного числа ділиться на 4.
5. Якщо два кути трикутника рівні, то трикутник є рівнобедреним.
6. Якщо у рівнянні $ax^2 + bx + c = 0$ дискримінант дорівнює нулю, то рівняння має один корінь.
7. Якщо функція зростає, то для будь-яких $x_1 < x_2$ виконується $f(x_1) < f(x_2)$.
8. Добуток двох від'ємних чисел є додатним.
9. Якщо два рівняння мають однакові множини розв'язків, то вони рівносильні.
10. Якщо сума двох чисел непарна, то одне з них парне, а друге непарне.
11. Сума кутів трикутника дорівнює 180° .
12. Якщо у трикутнику два кути рівні, то протилежні їм сторони також рівні.
13. У прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів (теорема Піфагора).
14. Якщо паралельні прямі перетинаються січною, то відповідні кути рівні.
15. Якщо діагоналі ромба перетинаються, то вони є перпендикулярними.
16. У колі центральний кут у два рази більший за вписаний кут, що спирається на ту ж дугу.
17. Якщо в чотирикутнику протилежні сторони попарно паралельні, то він є паралелограмом.
18. У паралелограмі протилежні сторони і кути рівні.
19. Якщо у трикутнику одна сторона більша за іншу, то протилежний кут також більший.
20. Якщо в трикутнику проведено медіану, то вона ділить його на два трикутники рівної площі.

2. Знайдіть контрприклад до заданого твердження. Варіанти тверджень:

1. Будь-яке парне число ділиться на 4.
2. Сума двох простих чисел завжди є простим числом.
3. Будь-яке натуральне число можна поділити на 2 без остачі.
4. Добуток двох чисел завжди більший від кожного з них.
5. Усі натуральні числа діляться на 3.
6. Якщо добуток двох чисел дорівнює нулю, то кожне з них дорівнює нулю.
7. Якщо сума двох чисел парна, то обидва числа парні.
8. Якщо змінна x задовольняє рівняння $x^2 = 2x$, то $x = 2$.
9. Усі рівняння мають розв'язки.
10. Рівняння $2x + 3 = 3 + 2x$ має єдиний розв'язок.
11. Якщо чотирикутник має дві рівні сторони, то він є паралелограмом.
12. Якщо трикутник має два рівні кути, то він є рівностороннім.
13. Будь-який прямокутний трикутник є рівнобедреним.
14. Якщо діагоналі чотирикутника рівні, то він є квадратом.
15. Усі рівнобічні трапеції є квадратами.
16. Якщо в трикутнику одна сторона більша за іншу, то протилежний кут менший.
17. Якщо медіана проведена в трикутнику, то вона є бісектрисою.
18. Усі прямокутники є ромбами.
19. Якщо трикутник рівнобедрений, то всі його кути рівні.
20. Якщо чотирикутник має всі сторони рівні, то він є квадратом.

Практичне заняття 4

Логіко-математичний аналіз алгоритмів і правил шкільного курсу математики. Методика роботи в школі з алгоритмами і правилами

Мета заняття: ознайомитися із видами алгоритмів та правил, що застосовуються у шкільному курсі математики (5–9 класи); навчитися виконувати логіко-математичний аналіз алгоритмів: визначати умови застосування, послідовність кроків, очікуваний результат; сформувати навички виявлення можливих учнівських помилок при роботі з алгоритмами й правилами; розвинути вміння добирати приклади й контрприкладів до правил, адаптувати алгоритми для пояснення в класі.



Теоретичні питання:

1. Поняття алгоритму та правила в шкільному курсі математики.
2. Логіко-математичний аналіз алгоритмів: структура, кроки, умови застосування.
3. Типові алгоритми в арифметиці, алгебрі, геометрії (НСД, НСК, розв'язування рівнянь, побудови в геометрії тощо).
4. Класифікація правил: обчислювальні, перетворювальні, побудовні, логічні.
5. Прийоми методичної роботи в школі: пояснення алгоритму, робота з прикладами та контрприкладів, пошук типових помилок.
6. Проблеми засвоєння алгоритмів і правил учнями, шляхи їх подолання.

Поняття «алгоритм» є основним, невизначуваним. Суть його на змістовно-інтуїтивному рівні може бути описана таким чином: алгоритм – зрозуміле розпорядження, яке вказує, які операції і в якій послідовності необхідно виконати з даними, щоб розв'язати будь-яке завдання даного типу.

Відомо, що алгоритм володіє властивостями масовості, елементарності і дискретності кроків, детермінованості та результативності.

Властивість масовості припускає, що з допомогою даного алгоритму можуть бути розв'язані всі завдання певного типу.

Властивість дискретності і елементарності кроків полягає в тому, що при побудові алгоритму виділяються строго дискретні (окремі і закінчені) кроки (операції), кожний з яких у змозі виконати виконавець (у цьому сенсі кожен крок вважається елементарним). У записі алгоритму властивість дискретності виражається у виділенні окремих пунктів (вказівок) у словесній формі або блоків на мові алгоритмів.

Властивість детермінованості виражає те, що розв'язування задач за даним алгоритмом є процесом строго («жорстко») направленим: він однозначно визначає перший крок і кожен наступний.

Властивість результативності означає, що точне виконання вказівок алгоритму при розв'язанні будь-якої задачі з даного класу однотипних завдань завжди (через скінченне число кроків) повинне приводити до певного результату. Відмітимо, що цим результатом може бути також і встановлення

факту, що задача розв'язків не має. Перераховані властивості є характеристичними властивостями поняття алгоритму. Всякий алгоритм описує загальний метод розв'язування класу однотипних завдань, тобто алгоритм є формою виразу цього методу. Для опису загального методу розв'язування класу однотипних завдань у школі також часто використовуються правила. Правило — це «згорнутий» алгоритм. Окремі його кроки є блоками (системами операцій у «стислому» вигляді); деякі операції, необхідні на початковому етапі формування методу, взагалі не містяться у формулюванні правила. Правила в підручниках виражаються формулами і формулюваннями на природній мові. Використання правил має ту ж мету, що і використання алгоритмів: формування загальних методів розв'язування класу однотипних завдань. Будь-який алгоритм можна назвати правилом, але не всяке правило можна назвати алгоритмом: у формулюванні правила часто чітко не виділяються всі кроки — воно не володіє в цьому випадку властивістю детермінованості. Для того, щоб правильно організовувати роботу учнів з оволодіння алгоритмами шкільного курсу математики, вчителів необхідно опанувати умінням виконувати логіко-математичний аналіз алгоритмів (правил).

Логічний аналіз алгоритмів (правил) припускає: а) перевірку наявності у даного правила характеристичних властивостей алгоритму; б) виділення послідовності операцій і логічних умов у даному правилі; в) встановлення зв'язку алгоритму (правила) з іншим змістом матеріалу даного пункту (розділу, предмета).

Математичний аналіз алгоритмів (правил) полягає у встановленні математичної основи даного правила, тобто тих базових математичних положень, які дозволяють побудувати саме таке правило (вони зазвичай називаються обґрунтованими знаннями).

Логіко-математичний аналіз алгоритму дозволяє правильно здійснити відбір матеріалу для роботи з учнями з метою оволодіння алгоритмом. Робота з учнями із засвоєння алгоритму зазвичай включає три основні етапи: 1) введення алгоритму; 2) власне засвоєння алгоритму; 3) застосування алгоритму. Охарактеризуємо мету кожного з виділених етапів: мета першого етапу — актуалізація знань, необхідних для введення і обґрунтування алгоритму, а також формулювання алгоритму; мета другого етапу — відпрацювання операцій, що входять до алгоритму, і засвоєння їх послідовності; мета третього етапу — відпрацювання алгоритму в знайомих (при варіюванні початкових даних) і незнайомих ситуаціях. Основним засобом, який використовується на різних етапах формування алгоритму, є система вправ. Зміст її визначається на підставі логіко-математичного аналізу конкретного алгоритму.



Практичні завдання:

1. Для заданого алгоритму:
 - проведіть його логіко-математичний аналіз;
 - побудуйте його схему та визначте, які помилки можуть зробити учні;

- розробіть завдання для учнів відповідного класу на застосування заданого алгоритму;
- складіть фрагмент уроку: пояснення алгоритма з прикладами та контрприкладми, рисунками, схемами тощо.

Варіанти алгоритмів:

1. Алгоритм знаходження найбільшого спільного дільника (НСД) методом ділення з остачею.
2. Алгоритм знаходження найменшого спільного кратного (НСК) через розкладання на прості множники.
3. Правило: щоб додати дроби з однаковими знаменниками, треба додати чисельники й залишити знаменник тим самим.
4. Правило: щоб додати дроби з різними знаменниками, потрібно звести їх до спільного знаменника.
5. Правило: щоб помножити два дроби, треба перемножити чисельники й знаменники.
6. Алгоритм порівняння десяткових дробів.
7. Алгоритм обчислення відсотків від числа.
8. Алгоритм знаходження числа за його відсотком.
9. Правило: пропорція не змінюється, якщо помножити або поділити обидві частини на одне й те саме число.
10. Алгоритм розв'язування рівнянь виду $ax + b = c$.
11. Правило множення степенів із однаковими основами.
12. Правило ділення степенів із однаковими основами.
13. Алгоритм добування квадратного кореня за допомогою підбору або калькулятора.
14. Правило: квадрат від'ємного числа є додатним.
15. Алгоритм побудови бісектриси кута циркулем та лінійкою.
16. Алгоритм побудови перпендикулярної прямої до даної через точку на ній.
17. Алгоритм побудови паралельної прямої до даної через точку поза нею.
18. Алгоритм обчислення площі трикутника за формулою Герона.
19. Алгоритм обчислення площі круга за радіусом.
20. Алгоритм знаходження середньої лінії трикутника.

Практичне заняття 5

Задачі як засіб навчання математики

Мета заняття: розкрити значення математичних задач як основного засобу навчання математики; ознайомитися із класифікацією задач (за змістом, способом розв'язування, дидактичним призначенням); сформувані вміння здійснювати методичний аналіз задач: визначати їхню мету, місце у навчальному процесі, труднощі для учнів; розвивати навички добору й конструювання задач для формування понять, відпрацювання навичок і розвитку мислення школярів.



Теоретичні питання:

1. Поняття задачі у навчанні математики.
2. Роль задач у формуванні математичних знань і способів діяльності учнів.
3. Класифікація задач:
 - навчальні, тренувальні, творчі, проблемні;
 - текстові, сюжетні, комбінаторні, геометричні тощо;
 - задачі для формування умінь, для узагальнення й контролю.
4. Структура процесу розв'язування задачі: аналіз умови, пошук ідеї, побудова плану, виконання, перевірка.
5. Методичні прийоми роботи з задачами: колективне обговорення, евристична бесіда, використання опорних схем, поетапне ускладнення.
6. Типові труднощі учнів при розв'язуванні задач і шляхи їх подолання.

Для формування елементів теоретичних знань і оволодіння відповідними їм видами діяльності учням недостатньо одних задач. Повинно йтися про систему завдань, що забезпечує засвоєння навчального матеріалу. Перерахуємо загальні і специфічні особливості систем навчальних завдань, направлених на формування елементів теоретичних знань. Загальним для систем завдань, направлених на засвоєння учнями понять, теорем і правил, є наявність в них задач, що готують введення відповідного елементу теоретичних знань, пов'язаних з його аналізом (побудовою) та його застосуванням. Серед підготовчих задач зазвичай виділяються задачі на мотивацію вивчення понять, теорем, правил і задачі на актуалізацію знань, умінь і навичок, необхідних при роботі з новим навчальним матеріалом.

Особливості системи завдань на засвоєння поняття і його означення:

1. Наявність завдань, пов'язаних з ілюстрацією практичної значущості нового поняття або з його значущістю для подальшого вивчення математики.
2. Наявність завдань на актуалізацію знань і умінь, необхідних при формуванні даного поняття.
3. Наявність завдань на виділення істотних ознак поняття.
4. Наявність завдань на розпізнавання поняття, щоформується.
5. Наявність завдань на засвоєння тексту означення поняття.
6. Наявність завдань на використання символіки, пов'язаної з поняттям.
7. Наявність завдань на встановлення властивостей поняття.
8. Наявність завдань на застосування поняття.

Особливості системи завдань на засвоєння теореми і її доведення:

1. Наявність завдань на розкриття необхідності знання математичного факту, сформульованого в теоремі.

2. Наявність завдань на актуалізацію математичних фактів, що використовуються при доведенні даної теореми, або фактів, для яких дана теорема є узагальненням, а також на актуалізацію способів доведення, аналогічних тим, що використовуються в даній теоремі (наприклад, методу від супротивного).

3. Наявність завдань на обчислення і доведення або на побудову, які приводять учнів до усвідомлення факту, сформульованого в теоремі.

4. Наявність завдань на засвоєння формулювання теореми.

5. Наявність завдань на засвоєння окремих етапів доведення теореми.

6. Наявність завдань, в ході розв'язування яких повторюється хід доведення теореми (наприклад, при зміненому кресленні).

7. Наявність завдань на відшукування іншого способу доведення факту, сформульованого в теоремі.

8. Наявність завдань на застосування факту, сформульованого в теоремі, для отримання нових математичних фактів, установлення кількісних співвідношень між об'єктами або отримання способів побудови об'єктів.

Особливості системи завдань на засвоєння правил (алгоритмів):

1. Наявність завдань на обґрунтування необхідності розгляду правила.

2. Наявність завдань на актуалізацію знань, необхідних для обґрунтування правил, і умінь, необхідних для виконання правил.

3. Наявність завдань на виконання окремих операцій, що входять до правила (алгоритму).

4. Наявність завдань на застосування правил у різних ситуаціях (знайомих і незнайомих).



Практичні завдання:

1. Проаналізуйте обрану самостійно задачу з підручника 6 класу: визначте її дидактичну мету (формування навички, закріплення правила, розвиток мислення).

2. Наведіть приклад навчальної задачі. Переформулюйте її умову в проблемну (змінить умову або запитання так, щоб учні мали зробити відкриття).

3. Доберіть три текстові задачі з арифметики, які ілюструють різні способи розв'язування.

4. Проведіть логіко-математичний аналіз обраної геометричної задачі: виділити умову, вимогу, побудувати план доведення.

5. Порівняйте дві задачі на однакову тему: яка з них тренувальна, а яка — проблемна? Чому?

6. Складіть власну задачу на довільну тему та обґрунтувати її навчальне призначення.

7. Доберіть приклади 3 «відкритих» задач (де можливі кілька способів розв'язування) та опишіть їхню методичну цінність.

8. Наведіть приклади типових помилок під час розв'язування задач. Проаналізуйте одну з них і запропонуйте методичні прийоми її подолання.
9. Розробіть поетапне пояснення однієї сюжетної задачі для 7 класу.
10. Скласти набір із трьох взаємопов'язаних задач (від простої до складної) на одну тему для формування в учнів системного бачення.

Практичне заняття 6

Методика роботи з текстовими математичними задачами в школі

Мета заняття: ознайомити студентів із видами текстових математичних задач та їх місцем у шкільному курсі математики; сформувати вміння аналізувати текстові задачі: виокремлювати дані, шукане, зв'язки між ними; розвинути навички методичного пояснення задач учням (поетапне читання, складання схем, таблиць, рівнянь); навчитися добирати й конструювати текстові задачі різних типів для 5–9 класів.



Теоретичні питання:

1. Поняття текстової математичної задачі.
2. Значення текстових задач у формуванні математичних знань і практичних умінь учнів.
3. Класифікація текстових задач: арифметичні, алгебраїчні, задачі на рух, роботу, відсотки, суміші, геометричні тощо.
4. Структура процесу розв'язування текстової задачі:
 - аналіз умови (дане – шукане);
 - вибір способу розв'язування;
 - складання рівняння чи системи рівнянь;
 - виконання розрахунків;
 - перевірка й інтерпретація результату.
5. Методичні прийоми роботи з текстовими задачами: малюнки, схеми, таблиці, поетапне заповнення, евристична бесіда.
6. Типові труднощі учнів при роботі з текстовими задачами та методи їх подолання.

У діяльності, пов'язаній з розв'язуванням текстових математичних задач, найчастіше виділяють чотири етапи.

1. Аналіз задачі, ознайомлення зі змістом задачі.
2. Пошук розв'язання — висунення плану розв'язування задачі.
3. Процес розв'язування — реалізація плану розв'язування.
4. Перевірка розв'язування, вивчення розв'язаної задачі.

Розв'язування задач в V–IX класах здійснюється в основному трьома способами: арифметичним, при якому всі логічні операції при розв'язуванні задачі проводяться над конкретними числами і основою міркування є знання змісту арифметичних дій; алгебраїчним, при якому складається рівняння (система рівнянь), розв'язування якого ґрунтується на властивостях рівнянь; комбінованим, який включає як арифметичний, так і алгебраїчний способи розв'язування.



Практичні завдання:

1. Оберіть текстову задачу. Проведіть її методичний аналіз: визначити її структуру, мету, можливі учнівські помилки. Перепишіть умову задачі так, щоб вона стала складнішою (додати зайві дані або ускладнити зв'язки).
2. Побудуйте таблицю (схему) до задачі на рух із двома тілами, що рухаються назустріч одне одному.
3. Складіть задачу на роботу та розв'яжіть її двома способами: арифметичним і алгебраїчним.
4. Оберіть дві задачі на відсотки різних типів. Порівняйте: яка з них тренувальна, а яка має проблемний чи прикладний характер.
5. Дайте приклад текстової геометричної задачі та покажіть, як перекласти її на мову рівнянь.
6. Доберіть задачу з «надлишком даних» і покажіть, як можна навчати учнів відсіювати зайве.
7. Складіть приклад задачі на суміші (розчини) для 8 класу та опишіть покрокове пояснення для учнів.
8. Розробіть два варіанти однієї й тієї самої задачі: простий (для 6 класу) і складніший (для 8 класу).
9. Складіть методичну інструкцію (план пояснення) для учнів: як розпочинати роботу з будь-якою текстовою задачею.

Практичне заняття 7

Використання моделювання при навчанні математики в загальноосвітній школі

Мета заняття: ознайомитися з поняттям математичного моделювання та його роллю у шкільному курсі математики; показати можливості використання моделей (наочних, символічних, комп'ютерних) у процесі формування понять і розв'язування задач; сформувати навички створення та аналізу навчальних моделей (схем, таблиць, графіків, геометричних побудов); розвинути вміння добирати й використовувати моделювання як метод навчання у 5–9 класах.



Теоретичні питання:

1. Поняття «модель» і «моделювання» у навчанні математики.
2. Види моделей у шкільній практиці: предметні, графічні, схематичні, алгебраїчні, комп'ютерні.
3. Етапи математичного моделювання:
 - постановка задачі;
 - побудова моделі;
 - робота з моделлю (обчислення, перетворення, побудови);
 - інтерпретація результатів.
4. Роль моделювання у формуванні просторових уявлень, логічного мислення, прикладних компетентностей учнів.
5. Методика використання моделювання у 5–9 класах (на прикладах: дробі, відсотки, рівняння, функції, геометричні фігури).
6. Типові помилки учнів при роботі з моделями та способи їх попередження.
Моделлю деякого об'єкта А (оригіналу) називають об'єкт В, в деякому відношенні подібний (аналогічний) оригіналу А, вибраний чи спеціально побудований людиною для однієї з поставлених цілей:
 - 1) замінити оригінал А в уявній чи реальній дії. Така заміна виконується тоді, коли для дії в даних умовах об'єкт В більш зручний (у цьому випадку ми маємо справу з моделлю-замінником);
 - 2) створити уявлення про оригінал А з допомогою об'єкта В (модельюуявлення);
 - 3) розтлумачити об'єкт А у вигляді об'єкта В (модель-інтерпретація);
 - 4) дослідити об'єкт А з допомогою об'єкта В (дослідницька модель).

Моделі можна розділити: за першою ознакою на логічні (за законами логіки у свідомості людини) і матеріальні (за об'єктивними законами природи) моделі; – у свою чергу, логічні моделі поділяються на образні, знакові, образно-знакові (змішані) моделі; – матеріальні моделі — на функціональні, геометричні, функціонально-геометричні моделі; – функціональні і функціонально-геометричні моделі в залежності від фізичної однорідності і різномірності з оригіналом розділяються на фізичні і формальні; за другою ознакою розрізняють умовні (на підставі умови чи угоди), аналогові (на підставі умовиводу за аналогією, неперервні) і математичні (математичні методи вираження) моделі.



Практичні завдання:

1. Наведіть приклад задачі з 6 класу, де розв'язання полегшує побудова схеми чи таблиці (запишіть модель).
2. Побудуйте графічну модель до задачі на рух (зобразити рух двох тіл в одному напрямку).
3. Перекладіть текстову задачу на відсотки у вигляд рівняння чи системи рівнянь (алгебраїчна модель).
4. Створіть геометричну модель (рисунок) до задачі на площі фігур і опишіть, як її пояснити учням.
5. Складіть задачу для 7 класу, яка потребує використання пропорційної моделі (схема «частина – ціле»).
6. Побудуйте модель лінійної функції у вигляді таблиці значень та графіка, покажіть взаємозв'язок.
7. Які помилки можуть допускати учні при інтерпретації моделі задачі на суміші? Запропонуйте методичні прийоми для уникнення помилок.
8. Виконати логіко-математичний аналіз задачі на роботу, записавши її алгебраїчну модель у вигляді рівняння.
9. Складіть навчальну задачу, де одна й та сама ситуація може бути змодельована різними способами (таблиця, рівняння, малюнок).
10. Розробіть короткий план пояснення учням 8 класу: «Що таке математична модель і як її будувати на прикладі задачі на спільну роботу».

Практичне заняття 8

Форми, способи та засоби контролю й оцінки знань і умінь учнів. Норми оцінювання. Вимірювання навчальних досягнень учнів

Мета заняття: ознайомитися із сучасними підходами до контролю та оцінювання навчальних досягнень учнів у математиці; розкрити відмінності між традиційним і формувальним оцінюванням у контексті Нової української школи; сформулювати вміння добирати адекватні форми й засоби контролю для перевірки знань і умінь учнів; навчитися використовувати оцінювання за групами результатів (знання, уміння, навички, ставлення, застосування); розвинути навички розробки діагностичних завдань та критеріїв оцінювання з математики.



Теоретичні питання:

1. Поняття контролю, перевірки, оцінювання у навчальному процесі.
2. Функції контролю: навчальна, діагностична, виховна, мотиваційна.
3. Форми контролю: усний, письмовий, тестовий, практичний, проєктний.
4. Засоби контролю: індивідуальні картки, тести, самостійні та контрольні роботи, математичні диктанти, онлайн-засоби.
5. Традиційне оцінювання та його обмеження.
6. Сутність формувального оцінювання: принципи, методи, роль зворотного зв'язку.
7. Оцінювання за групами результатів у НУШ: знання → уміння → застосування → ставлення → компетентність.
8. Норми оцінювання навчальних досягнень учнів (12-бальна система, дескриптори, рівні: початковий, середній, достатній, високий).
9. Вимірювання результатів навчання: кількісні та якісні показники.
10. Використання цифрових інструментів для оцінювання (Google Forms, Kahoot, Classtime тощо).

Види контролю:

1. За часом проведення:
 - Попередній – виявлення рівня знань на початку теми/курсу.
 - Поточний – систематична перевірка під час уроків.
 - Тематичний – узагальнення результатів після вивчення теми.
 - Підсумковий – наприкінці семестру, року чи навчального етапу.
 - Діагностичний (формувальний) – визначення індивідуальних потреб, прогалин, темпу навчання.
2. За метою:
 - Контролюючий – перевірка рівня знань та умінь.
 - Навчальний – спрямований на закріплення й систематизацію знань.
 - Розвивальний – стимулює мислення, самостійність, самооцінку.
 - Виховний – формує відповідальність, організованість, критичність.
 - Форми контролю:
 - Індивідуальні: усні відповіді, розв'язування задач, проєкти.

- Фронтальні: колективне опитування, інтерактивні вправи («мозковий штурм», «карусель»).
- Групові: робота в парах чи малих групах, взаємоперевірка.
- Тестові: використання друкованих або електронних тестів.
- Ігрові: квести, вікторини, математичні бої.
- Проектні та дослідницькі: захист мініпроектів, презентацій.
- Електронні: онлайн-платформи (Google Forms, Classtime, Kahoot, LearningApps).

Засоби контролю:

- Традиційні: підручники, зошити, картки-завдання, контрольні роботи.
- Візуальні: схеми, таблиці, плакати, дидактичні матеріали.
- Технічні: мультимедійні презентації, інтерактивні дошки.
- Цифрові: онлайн-тести, електронні журнали, освітні платформи («Всеосвіта», «На урок», Moodle, Classtime).
- Самоконтроль і взаємоконтроль: щоденники успіху, чек-листи, «світлофор настрою», рубрики оцінювання.

Сучасні тенденції (НУШ):

1. Формувальне оцінювання – постійний зворотний зв'язок «учень ↔ учитель». Не оцінка як «бал», а допомога у навчанні.
2. Оцінювання за групами результатів: знання, уміння, навички, цінності, ставлення.
3. Акцент на прогресі учня – оцінюється динаміка розвитку, а не лише кінцевий результат.
4. Компетентнісний підхід — завдання перевіряють не лише фактичні знання, а й уміння застосовувати їх на практиці.
5. Інтерактивність — використання онлайн-інструментів для швидкого й наочного контролю.
6. Партнерські стосунки — учні залучаються до процесу оцінювання (самооцінювання, взаємооцінювання).



Практичні завдання:

1. Порівняйте традиційне та формувальне оцінювання: складіть таблицю «Мета – способи – результат».
2. Проаналізуйте приклад завдання з математики 7 класу та запропонуйте критерії оцінювання за рівнями (початковий, середній, достатній, високий).
3. Складіть 3 приклади запитань для усного контролю та 3 для письмового.
4. Розробіть тест із 5 завдань з обраної теми 5-9 класів та визначте шкалу оцінювання.
5. Складіть математичний диктант для 6 класу (5 завдань) і пропишіть правильні відповіді. Як проводитиметься оцінювання його результатів?
6. Створіть приклад завдання, яке оцінює не тільки знання, а й уміння застосовувати знання в практичних ситуаціях.
7. Розробіть критерії оцінювання обраної задачі з геометрії за групами результатів (знання – уміння – застосування – пояснення).

- 8.** Складіть чек-лист для формувального оцінювання роботи учня під час групової діяльності.
- 9.** Підготуйте приклад завдання, де оцінювання здійснюється за дескрипторами (наприклад, пояснив алгоритм, зробив побудову, перевірів розв'язок).
- 10.** Створіть зразок «рубрикатора» для оцінювання міні-проекту учня з математики (структура, зміст, презентація, висновки).

Практичне заняття 9

Форми організації навчання

Мета заняття: ознайомитися із сучасними підходами до організації навчальної діяльності в умовах Нової української школи; показати різноманіття форм організації навчання та їхню роль у розвитку компетентностей учнів; сформулювати вміння добирати адекватні форми організації навчання залежно від змісту математичного матеріалу та вікових особливостей учнів; розвивати здатність інтегрувати групові, індивідуальні та інтерактивні форми роботи у навчальний процес.



Теоретичні питання:

1. Поняття форми організації навчання: урок, позакласна робота, індивідуальні та групові заняття.
2. Класифікація форм організації навчання:
 - фронтальні, групові, індивідуальні;
 - аудиторні та позааудиторні;
 - очні, дистанційні, змішані.
3. Особливості уроку в сучасній школі: інтегрованість, діяльнісний підхід, акцент на співпрацю.
4. Використання інтерактивних методів і технологій у сучасному уроці математики (робота в парах, дискусії, ігрові технології, проектна діяльність).
5. Форми організації навчання з позиції НУШ: навчання через діяльність, диференціація та індивідуалізація, навчальні центри / станції.
6. Дистанційне та змішане навчання як сучасні форми організації освітнього процесу.
7. Роль позакласної та позашкільної роботи з математики у формуванні ключових компетентностей.

У 5–9 класах сучасна школа, особливо в контексті НУШ, орієнтується на компетентнісний підхід, активні методи й розвиток самостійності учнів. Наведемо перелік **основних форм організації навчання** з короткими характеристиками.

1. Урок

- Основна форма навчання.
- Може бути комбінованим, інтегрованим, проєктним, практичним.
- Структура підпорядкована меті: освітній, розвивальній, виховній.
- У НУШ — акцент на діяльнісний та інтерактивний підхід, рефлексію.

Очікувані результати: засвоєння знань, розвиток умінь і навичок, формування ключових компетентностей.

2. Інтегрований урок

- Об'єднання знань з різних предметів (наприклад, математика + інформатика, історія + література).
- Сприяє цілісному світогляду, показує практичне застосування знань.

Очікувані результати: розвиток міжпредметних зв'язків, вміння застосовувати знання комплексно.

3. Практикум (практичні заняття)

- Орієнтований на виконання вправ, експериментів, досліджень.
- Розвиває вміння застосовувати знання у життєвих і навчальних ситуаціях.

Очікувані результати: формування практичних умінь, застосування знань у життєвих ситуаціях.

4. Семінар / навчальна дискусія

- Передбачає підготовку та активне обговорення матеріалу учнями.
- Формує навички аргументації, критичного мислення, роботи з джерелами.

Очікувані результати: розвиток критичного мислення, комунікативних навичок.

5. Проєктне навчання

- Учні працюють над довготривалою проблемою чи завданням.
- Результат — презентація, продукт, дослідження.
- Формує комунікативні, дослідницькі й практичні компетентності.

Очікувані результати: дослідницькі, комунікативні та організаційні компетентності.

6. Дослідницька діяльність

- Виконання міні-досліджень, експериментів, спостережень.
- Розвиває наукове мислення, вміння робити висновки.

Очікувані результати: розвиток наукового мислення, вміння робити висновки.

7. Групова та парна робота

- Учні об'єднуються в команди для спільного виконання завдань.
- Формує співпрацю, відповідальність, лідерські якості.

Очікувані результати: співпраця, відповідальність, навички лідерства.

8. Навчальні ігри, квести, дебати

- Ігрова форма засвоєння знань (вікторини, математичні бої, історичні дебати).
- Підвищує мотивацію, робить навчання емоційно насиченим.

Очікувані результати: мотивація до навчання, розвиток креативності, емоційна залученість.

9. Фліп-клас (перевернуте навчання)

- Учні спочатку самостійно опановують теорію (відео, статті), а на уроці застосовують знання у практиці.
- Розвиває самостійність і відповідальність.

Очікувані результати: розвиток самостійності, уміння працювати з інформацією.

10. Онлайн- та змішане навчання

- Використання цифрових платформ (Google Classroom, Classtime, Moodle).
- Поєднання очних занять з дистанційними елементами.

Очікувані результати: ІКТ-компетентності, індивідуалізація навчання.

11. Інтерактивні форми роботи

- «Мозковий штурм», «Акваріум», «Карусель», «Дискусійні кола».
- Забезпечують активну участь кожного учня.

Очікувані результати: активна участь усіх учнів, розвиток комунікації.

12. Позакласні та позаурочні форми

- Олімпіади, гуртки, факультативи, майстер-класи, навчальні екскурсії.
- Розширюють можливості навчання, підтримують інтерес до предмета.

Очікувані результати: розширення кругозору, формування інтересу до навчання.



Практичні завдання:

1. Складіть план уроку математики з використанням щонайменше двох форм організації навчальної діяльності (наприклад, фронтальна + групова).
2. Запропонуйте приклад завдання для роботи в парах у 6 класі.
3. Розробіть фрагмент уроку з використанням навчальних «станцій» (ротація груп).
4. Створіть схему, що показує відмінності між традиційним уроком і сучасним уроком у НУШ.
5. Підберіть приклад математичної задачі, яка підходить для організації проектної діяльності в 7 класі.
6. Розробіть приклад застосування технології «навчання у співпраці» під час вивчення обраної теми.
7. Складіть завдання для організації математичної гри (6–7 клас).
8. Запропонуйте приклад завдання для дистанційної роботи з використанням онлайн-платформи (Google Forms, Classtime).
9. Складіть план позакласного заходу «Математичний квест» для 8 класу.
10. Визначте, які форми організації навчання найбільш ефективні для різних етапів уроку (мотивація, пояснення нового, закріплення, контроль).

Практичне заняття 10

Урок, типи уроків. Структура уроків різних типів.

Мета заняття: ознайомити студентів із поняттям уроку як основної форми організації навчання у школі; розкрити класифікацію уроків та особливості структури різних типів (урок вивчення нового матеріалу, комбінований урок, урок узагальнення та систематизації знань, урок контролю); навчитися формулювати мету уроку з урахуванням освітнього, розвивального й виховного компонентів; сформувати вміння виділяти елементи структури уроку та добирати до них адекватні методи й прийоми; ознайомитися з прийомами рефлексії як важливого етапу уроку у НУШ; розвинути вміння проєктувати урок на засадах діяльнісного та компетентнісного підходів.



Теоретичні питання:

1. Поняття уроку в сучасній школі.
2. Типи уроків і їх класифікація: традиційна та сучасна.
3. Структура уроків різних типів: інваріантна та варіативна частина.
4. Формування мети уроку:
 - освітня (що учні мають знати і вміти після уроку);
 - розвивальна (які вміння мислення, уваги, пам'яті, креативності розвиваються);
 - виховна (які цінності, ставлення формуються).
5. Принципи постановки мети уроку за вимогами НУШ (SMART-мета, компетентнісний підхід).
6. Рефлексія на уроці: поняття, види, роль у формуванні навчальної мотивації.
7. Приклади прийомів рефлексії («Мікрофон», «Незакінчене речення», «Світлофор», «Сходи успіху», онлайн-інструменти).
8. Особливості уроку в НУШ: діяльнісність, інтегрованість, диференціація, акцент на співпраці та критичному мисленні.

У 5–9 класах НУШ урок зберігає роль основної форми організації навчання, але акцент робиться на компетентнісному підході, активності учнів, рефлексії та практичній спрямованості. Наведемо перелік типів сучасних уроків із коротким описом та стислим планом проведення.

1. Урок вивчення нового матеріалу

Опис: учні відкривають нові знання через спостереження, проблемні запитання, дослідди.

План:

1. Мотивація, постановка проблеми.
2. Актуалізація попередніх знань.
3. Відкриття нового (дослідження, обговорення).
4. Закріплення у практичних завданнях.
5. Рефлексія.

2. Урок формування та вдосконалення навичок

Опис: тренування у застосуванні знань, вправи різного рівня складності.

План:

1. Коротке повторення теорії.
2. Покрокове відпрацювання вправ.
3. Самостійна робота в парах/групах.
4. Обговорення результатів.
5. Рефлексія.

3. Урок узагальнення та систематизації знань

Опис: учні вибудовують цілісну картину теми, бачать міжпредметні зв'язки.

План:

1. Актуалізація основних понять.
2. Робота з узагальнюючими схемами, таблицями.
3. Виконання комплексних завдань.
4. Проблемне запитання для дискусії.
5. Підсумки й самооцінка.

4. Урок контролю та оцінювання результатів

Опис: перевірка знань, умінь, ставлення учнів.

План:

1. Налаштування на роботу (мотивація без стресу).
2. Виконання тестів, завдань, практичних вправ.
3. Самоперевірка / взаємоперевірка.
4. Аналіз помилок.
5. Формувальне оцінювання, зворотний зв'язок.

5. Інтегрований урок

Опис: поєднання кількох предметів для комплексного розуміння проблеми.

План:

1. Мотиваційна ситуація.
2. Представлення теми в контексті кількох дисциплін.
3. Робота над спільним завданням (кейс, мініпроект).
4. Представлення результатів групами.
5. Рефлексія, висновки.

6. Урок-практикум

Опис: навчання через виконання практичних завдань, експериментів.

План:

1. Постановка завдання/проблеми.
2. Виконання практичної роботи (індивідуально чи в групах).
3. Обговорення результатів.
4. Формулювання правил, висновків.
5. Рефлексія.

7. Урок-проект

Опис: робота над створенням конкретного продукту (презентація, макет, дослідження).

План:

1. Формулювання проблеми й мети проєкту.
2. Розподіл завдань у групах.
3. Пошук і опрацювання інформації.
4. Створення продукту.
5. Презентація й оцінювання результатів.

8. Урок-дослідження

Опис: учні самостійно висувують гіпотези, перевіряють їх і роблять висновки.

План:

1. Постановка проблеми.
2. Висунення припущень.
3. Дослідницька діяльність.
4. Обговорення висновків.
5. Рефлексія.

9. Урок-гра / квест

Опис: навчання через ігрову діяльність (рольова гра, змагання, квест).

План:

1. Оголошення правил гри/квесту.
2. Виконання завдань (етапи гри).
3. Підрахунок результатів.
4. Обговорення «чому вдалося/не вдалося».
5. Рефлексія та висновки.

10. Урок змішаного типу (комбінований)

Опис: поєднання кількох дидактичних цілей — вивчення нового, закріплення, контроль.

План:

1. Організація, мотивація.
2. Перевірка домашнього завдання.
3. Пояснення нового матеріалу.
4. Закріплення знань.
5. Контроль і рефлексія.

Усі ці типи уроків у НУШ обов'язково містять:

- мету з трьома складовими (освітня, розвивальна, виховна);
- активну діяльність учнів (групова, парна, індивідуальна);
- рефлексію (самооцінка, висновки, планування подальших кроків).



Практичні завдання:

1. Складіть порівняльну таблицю «Типи уроків – структура – приклади використання».
2. Проаналізуйте готовий план-конспект уроку математики (6 клас): визначити його тип, структуру та перевірте коректність формулювання мети.
3. Сформулюйте триєдину мету до уроку за обраною темою.
4. Розробіть структуру комбінованого уроку за обраною темою із зазначенням етапів та методів роботи.

5. Доберіть прийоми рефлексії для уроку в 7 класі з обраної теми.
6. Складіть SMART-мету для інтегрованого уроку математики і фізики (8 клас).
7. Запропонуйте кілька методичних прийомів для досягнення виховної мети уроку математики.
8. Розробіть варіанти індивідуальної, парної та групової роботи для етапу «закріплення знань» у різних типах уроків.
9. Складіть приклад конспекту завершального етапу уроку з акцентом на рефлексію та підбиття підсумків.
10. Визначте, які особливості відрізняють сучасний урок НУШ від традиційного (коротка схема або міні-есе).

РОЗДІЛ 2 МЕТОДИКА НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ У 5-6 КЛАСАХ

Практичне заняття 11

Особливості вивчення змістової лінії «Числа і дії з ними»

Мета заняття: ознайомитися зі змістом та місцем лінії «Числа і дії з ними» у програмі математики 5–6 класів; розкрити методичні особливості формування понять про натуральні числа, дробі, відсотки, десяткові дробі, від’ємні числа; сформулювати вміння добирати приклади та завдання для розвитку обчислювальних умінь і логіко-математичного мислення учнів; навчитися проектувати навчальні ситуації, які сприяють розвитку в учнів компетентностей, передбачених НУШ; розвинути здатність аналізувати труднощі у засвоєнні числового матеріалу та пропонувати шляхи їх подолання.



Теоретичні питання:

1. Місце змістової лінії «Числа і дії з ними» у курсі математики 5–6 класів.
2. Формування уявлень про натуральні числа, нуль і від’ємні числа.
3. Поняття дробів: звичайні та десяткові дробі, відсотки.
4. Алгоритми арифметичних дій: додавання, віднімання, множення, ділення (натуральних чисел, дробів, десяткових дробів).
5. Проблеми, пов’язані з переходом від конкретних дій до абстрактних обчислень.
6. Методичні прийоми формування обчислювальних навичок (опорні схеми, алгоритми, ігрові методи, вправи).
7. Труднощі учнів у засвоєнні числових понять і способи їх подолання.
8. Використання задач практичного змісту для формування навичок роботи з числами.
9. Зв’язок числової лінії з іншими змістовими лініями (алгебра, геометрія).
10. Особливості організації уроків НУШ при вивченні числового матеріалу (компетентнісний підхід, диференціація, інтеграція).

У 5–6 класах математика стає для учнів основним предметом, що закладає фундамент подальшої алгебраїчної та геометричної підготовки. Центальною є змістова лінія «Числа і дії з ними», адже саме вона формує базові уявлення про числові множини, властивості дій, алгоритми обчислень і зв’язки математики з реальним життям.

У концепції Нової української школи наголос робиться на:

- компетентнісному підході;
- інтеграції знань з практикою;
- розвитку критичного мислення й математичної грамотності;
- формуванні умінь досліджувати й пояснювати явища за допомогою чисел та операцій.

Таким чином, вивчення цієї змістової лінії не зводиться до «сухих обчислень», а має стати засобом формування математичної культури та життєвих компетентностей учня.

Основні змістові акценти

1. **Натуральні числа і нуль.**
 - Повторення й розширення знань із початкової школи.
 - Уміння читати, записувати, порівнювати числа, працювати з великими числами.
 - Застосування чисел у вимірюваннях і підрахунках.
 2. **Дробові числа (звичайні та десяткові дробі).**
 - Поглиблення поняття дробу як частини цілого.
 - Операції з дробами, наближення до практичних ситуацій (поділ, вимірювання).
 - Використання дробів у задачах, що пов'язані з відсотками.
 3. **Цілі числа.**
 - Введення від'ємних чисел на основі життєвих прикладів (температура, фінанси).
 - Дії з цілими числами.
 - Зв'язок із координатною прямою.
 4. **Раціональні числа.**
 - Розширення множини чисел, формування уявлення про нескінченність множини.
 - Порівняння й упорядкування чисел.
 - Алгоритми дій з раціональними числами.
 5. **Закони й властивості арифметичних дій.**
 - Переставний, сполучний, розподільний закони.
 - Використання властивостей для раціональних обчислень.
 6. **Відсотки.**
 - Прикладні задачі: фінанси, знижки, податки, статистика.
 - Формування фінансової грамотності.
 7. **Зв'язки з іншими змістовими лініями.**
 - Вирази, рівняння (обчислення в контексті алгебри).
 - Відношення й пропорції.
 - Застосування чисел у геометрії та задачах на вимірювання.
- Методичні акценти й рекомендації.
1. **Діяльнісний підхід.**
 - Учні мають самостійно «відкривати» правила й закономірності через приклади.
 - Варто більше використовувати дослідницькі та проблемні завдання.
 2. **Використання наочності та моделей.**
 - Нумераційні таблиці, схеми, діаграми, координатна пряма.
 - Моделювання дробів за допомогою геометричних фігур, предметів побуту.
 - Використання інтерактивних програм (GeoGebra, віртуальні моделі).
 3. **Інтеграція з життям.**
 - Приклади з фінансової грамотності (знижки, кредити, податки).
 - Використання відсотків у статистиці, спорті, соціальних мережах.

- Завдання з реальними даними (наприклад, аналіз погоди, курсу валют).
- 4. Розвиток критичного мислення.
 - Аналіз правильних і неправильних тверджень («Чи завжди...?»).
 - Завдання з контрприкладми.
 - Математичні дискусії у групах.
- 5. Диференціація навчання.
 - Завдання різних рівнів складності.
 - Додаткові творчі задачі для сильних учнів.
 - Підтримка учнів, які мають труднощі з обчисленнями, через тренажери й ігрові вправи.
- 6. Формувальне оцінювання.
 - Використання чек-листів («Що я сьогодні зрозумів?»).
 - Самооцінювання й взаємооцінювання.
 - Замість лише «правильно/неправильно» — пояснення, що вдалося, а над чим треба попрацювати.
- 7. Інтерактивні методи.
 - «Математичні бої», вікторини, ігрові квести.
 - Використання онлайн-ресурсів: Kahoot, Classtime, LearningApps.

Висновки.

Змістова лінія «Числа і дії з ними» у 5–6 класах є ключовою для формування математичної компетентності учнів. Вона забезпечує не тільки розвиток обчислювальних навичок, а й уміння застосовувати математику у реальному житті.

Методика викладання цієї теми в умовах НУШ повинна:

- ґрунтуватися на діяльнісному підході;
- активно використовувати моделювання й наочність;
- інтегруватися з життям та іншими предметами;
- розвивати критичне мислення;
- орієнтуватися на особистісний розвиток учня, а не лише на результат у балах.

Саме таке викладання дозволяє зробити математику не набором абстрактних правил, а дієвим інструментом пізнання й пояснення світу.



Практичні завдання:

1. Складіть таблицю «Основні теми лінії «Числа і дії з ними» у 5–6 класах».
2. Розробіть приклади вправ для закріплення таблиці множення в 5 класі (з використанням ігрових елементів).
3. Складіть задачу на застосування відсотків у практичній ситуації (6 клас).
4. Побудуйте алгоритм додавання звичайних дробів із різними знаменниками.
5. Запропонуйте приклади помилок, які допускають учні при виконанні дій з десятковими дробами, та методи їх попередження.
6. Складіть завдання, що ілюструє практичне застосування від'ємних чисел.

7. Розробіть 3 приклади завдань для формування вмінь порівнювати дроби.
8. Складіть вправи для тренування навичок округлення чисел.
9. Побудуйте схему-зразок «Алгоритм ділення десяткових дробів на натуральне число».
10. Запропонуйте приклади застосування інтерактивних методів (робота в групах, математичні ігри, онлайн-вправи тощо) під час вивчення числового матеріалу.

Практичне заняття 12

Особливості вивчення змістової лінії «Вирази»

Мета заняття: ознайомитися із роллю та місцем змістової лінії «Вирази» в курсі математики основної школи; розкрити методичні особливості формування в учнів умінь працювати з числовими, буквеними, раціональними виразами; сформувані вміння добирати вправи для розвитку навичок обчислень та алгебраїчних перетворень; навчитися проектувати навчальні ситуації для формування у школярів розуміння сутності виразів і правил дій з ними; розвивати здатність помічати й долати типові труднощі учнів при роботі з виразами.



Теоретичні питання:

1. Місце змістової лінії «Вирази» у програмі математики.
2. Поняття виразу: числові, буквені, раціональні вирази.
3. Алгебраїчна символіка: змінна, коефіцієнт, степінь.
4. Основні дії з виразами: підстановка значень, обчислення, перетворення.
5. Спрощення виразів, розкриття дужок, зведення подібних доданків.
6. Використання властивостей арифметичних дій для роботи з виразами.
7. Вирази з дробами, степенями, коренями (у межах програми 6–7 класів).
8. Типові помилки учнів при роботі з виразами та методи їх попередження.
9. Зв'язок вивчення виразів із формуванням понять рівняння, функції, тотожності.
10. Особливості методики навчання роботи з виразами в умовах НУШ: діяльнісний та компетентнісний підходи, інтеграція з практичними задачами.

У 5–6 класах учні вперше систематично знайомляться з алгебраїчним підходом до математики. Важливим елементом стає вивчення змістової лінії «Вирази», що готує школярів до подальшого оволодіння алгеброю в середній школі.

Згідно з Концепцією Нової української школи, навчання має забезпечувати не лише формування вмінь обчислювати та спрощувати вирази, а й розвиток умінь моделювати реальні ситуації мовою математики, застосовувати вирази для розв'язування задач.

Ця змістова лінія є містком між арифметикою та алгеброю, і від того, наскільки вдало буде організоване навчання на цьому етапі, залежить подальший успіх учнів у вивченні математики.

Основні змістові акценти

1. Числові вирази.
 - Використання чисел і знаків дій.
 - Розуміння порядку виконання дій.
 - Обчислення складених виразів.
2. Алгебраїчні вирази.
 - Ознайомлення з буквеною символікою (букви як змінні).
 - Читання, запис і тлумачення виразів.

- Виконання підстановок числових значень змінних.
 - 3. Значення виразу.
 - Поняття «обчислити значення виразу при даних значеннях змінних».
 - Практичне застосування: задачі з фізики, економіки, побуту.
 - 4. Спрощення виразів.
 - Використання властивостей арифметичних дій (переставного, сполучного, розподільного законів).
 - Зведення подібних доданків (у найпростішій формі для 6 класу).
 - 5. Формули як різновид виразів
 - Ознайомлення з поняттям формули.
 - Використання формул у практичних завданнях (площа, периметр, шлях, швидкість).
 - 6. Застосування виразів для моделювання
 - Переклад текстових задач на мову виразів.
 - Складання виразів для розрахунків у побутових ситуаціях (вартість покупки, кількість товару, відстань).
- Методичні акценти та рекомендації.
1. Поступове введення буквенної символіки.
 - Починати з простих прикладів: «якщо довжина дорівнює a , а ширина b , то периметр прямокутника дорівнює...».
 - Наголосити, що букви можуть позначати будь-яке число.
 2. Інтеграція з реальним життям
 - Використовувати приклади з побуту: вартість покупки (ціна $\times$ кількість), розрахунок шляху (швидкість $\times$ час).
 - Включати завдання з інших предметів (фізика: $F = ma$, географія: розрахунок відстані).
 3. Наочність і моделювання.
 - Схеми, таблиці для демонстрації структури виразу.
 - Використання геометричних моделей (наприклад, вираз для площі).
 4. Розвиток мислення.
 - Завдання з аналізом: «чи однакові значення матимуть ці два вирази?».
 - Пошук і пояснення помилок у розрахунках.
 5. Вправи на формування навичок.
 - Спочатку – з конкретними числами.
 - Далі – з буквами.
 - Потім – із комбінованими завданнями (числа + букви).
 6. Формувальне оцінювання.
 - Використання чек-листів: «Я вмію: підставити значення у вираз / знайти значення виразу / скласти вираз за умовою задачі».
 - Самоперевірка через обмін зошитами, роботу в парах.
 7. Інтерактивні методи.
 - «Математичне доміно»: на картках записані вирази та їх значення.
 - Онлайн-тренажери (LearningApps, Classtime) для відпрацювання підстановки значень.
 - Математичні ігри-квести зі складанням виразів за підказками.

Отже, змістова лінія «Вирази» у 5–6 класах:

- формує перші уявлення про алгебраїчну мову математики;
- допомагає учням моделювати реальні ситуації;
- забезпечує перехід від арифметики до алгебри;
- розвиває логічне, критичне й абстрактне мислення.

Методика її викладання має ґрунтуватися на практичній спрямованості, наочності, поступовості та інтеграції з іншими предметами й життям. Таким чином, учні засвоюють не лише механічне обчислення, а й уміння застосовувати вирази як універсальний інструмент пізнання й розв’язування задач.



Практичні завдання:

1. Складіть таблицю «Типи виразів – приклади – методика пояснення».
2. Розробіть вправи для 5 класу: обчислення значення буквеного виразу при заданих значеннях змінних.
3. Побудуйте схему «Алгоритм спрощення виразів зі змінними».
4. Складіть вправи для розкриття дужок і зведення подібних доданків.
5. Доберіть приклади завдань на застосування властивостей дій для перетворення виразів.
6. Складіть завдання для учнів, яке демонструє помилку у спрощенні виразу, і запропонуйте правильний розв’язок.
7. Розробіть набір вправ для дій з дробовими виразами (6–7 клас).
8. Складіть приклад завдання практичного змісту, яке зводиться до обчислення або перетворення виразу.
9. Запропонуйте вправи для формування вміння знаходити значення многочлена при заданому значенні змінної.
10. Розробіть фрагмент уроку, де учні в групах працюють із завданнями на спрощення виразів і презентують результати.

Практичне заняття 13

Особливості вивчення змістової лінії «Рівняння»

Мета заняття: ознайомитися із місцем та значенням лінії «Рівняння» у курсі математики 5–6 класів; розкрити методичні підходи до формування в учнів умінь складати та розв’язувати рівняння; сформувати вміння використовувати рівняння як засіб моделювання прикладних і текстових задач; навчитися проектувати вправи різних рівнів складності для поступового формування понять; розвивати здатність враховувати труднощі учнів при роботі з рівняннями й знаходити способи їх подолання.



Теоретичні питання:

1. Місце теми «Рівняння» у курсі математики 5–6 класів.
2. Поняття рівняння. Лінійні рівняння з однією змінною.
3. Розуміння рівності та властивостей рівності як основа для роботи з рівняннями.
4. Основні прийоми розв’язування лінійних рівнянь: перенесення доданків, ділення обох частин на число.
5. Використання рівнянь для розв’язування текстових задач (на рух, роботу, відсотки, пропорції).
6. Методичні принципи поступового ускладнення: від простих прикладів до рівнянь з дужками, дробами.
7. Типові помилки учнів при роботі з рівняннями (неправильне перенесення доданків, порушення порядку дій).
8. Роль рівнянь у формуванні логіко-математичного мислення та уміння моделювати.
9. Зв’язок вивчення рівнянь із майбутніми темами (нерівності, системи рівнянь, функції).
10. Особливості методики НУШ: діяльнісний підхід, практична спрямованість, інтеграція з реальними ситуаціями.

Вивчення рівнянь у 5–6 класах має надзвичайно важливе значення, адже воно формує основи алгебраїчного мислення та вміння використовувати математику як інструмент моделювання реальних ситуацій.

Згідно з концепцією НУШ, акцент робиться не лише на алгоритмі розв’язування рівнянь, а й на розумінні їх суті: рівняння – це твердження про рівність двох виразів, яке може бути істинним або хибним залежно від значення змінної.

На цьому етапі важливо не перевантажувати учнів формальними технічними прийомами, а формувати інтуїтивне й поступово систематизоване розуміння рівнянь.

Основні змістові акценти.

1. Поняття рівняння.
 - Ознайомлення з рівнянням як рівністю, що містить змінну.
 - Приклади рівнянь з числами та буквами.

- Розуміння того, що розв'язання рівняння означає «знайти такі значення змінної, які перетворюють рівність на правильну».
 - 2. Перевірка правильності розв'язку.
 - Підстановка знайденого значення у рівняння.
 - Усвідомлення: розв'язок — це не процес, а результат (значення змінної).
 - 3. Прості рівняння.
 - Рівняння вигляду $x+5=12$, $x+5=12$, $7x=21$, $7x=21$.
 - Використання інтуїтивних підходів: «знайти невідомий доданок», «невідомий множник» тощо.
 - 4. Рівняння на основі властивостей рівності.
 - Поступове введення правил: якщо до обох частин рівняння додати (відняти) одне і те ж число — рівняння не змінюється.
 - Якщо обидві частини рівняння помножити або поділити на одне й те ж число (крім нуля) — рівняння не змінюється.
 - 5. Застосування рівнянь для розв'язування задач.
 - Складання рівнянь за умовою текстових задач.
 - Поступовий перехід від арифметичного способу до алгебраїчного.
 - 6. Розвиток уявлення про множину розв'язків
 - Початкове ознайомлення: рівняння може мати один розв'язок, кілька розв'язків або не мати їх зовсім.
- Методичні рекомендації.
1. Поєднання арифметики й алгебри.
 - Спершу пояснювати рівняння через конкретні арифметичні ситуації: «Яке число треба додати до 5, щоб отримати 12?»
 - Потім переходити до запису через букву: $x+5=12$, $x+5=12$.
 2. Наочність і моделі.
 - Використання «вагових терезів» як моделі рівняння (рівновага при додаванні чи відніманні предметів).
 - Схеми, таблиці для кроків розв'язання.
 3. Інтеграція з реальним життям.
 - Задачі на покупки, відстань, швидкість, вікові співвідношення.
 - Моделювання простих економічних і фізичних ситуацій.
 4. Формування алгоритму поступово.
 - Не починати з абстрактних правил.
 - Спершу — інтуїтивне знаходження невідомого, потім — узагальнення у вигляді правил.
 5. Робота з помилками та контрприкладми.
 - Завдання: «Учень розв'язав так: ... Чи правильно? Поясни».
 - Розвиток критичного мислення.
 6. Формувальне оцінювання.
 - Запитання для самооцінки: «Чи можу я пояснити, чому цей розв'язок правильний?», «Чи можу я скласти рівняння до задачі?».
 - Використання «дерева успіху» або карток із рівняннями різного рівня складності.

Таким чином, змістова лінія «Рівняння» у 5–6 класах:

- формує основи алгебраїчного мислення;
- розвиває здатність застосовувати математику для моделювання життєвих ситуацій;
- є логічним кроком від арифметики до алгебри;
- забезпечує розвиток критичного мислення та уміння перевіряти правильність власних рішень.

Методика її викладання має спиратися на практичні приклади, моделювання, поступовість і формувальне оцінювання, що відповідає сучасним підходам НУШ.



Практичні завдання:

1. Складіть таблицю «Типи рівнянь (5–6 клас) – приклади – методика пояснення».
2. Сформулюйте алгоритм розв’язування рівняння виду $ax + b = c$.
3. Доберіть 3 приклади простих рівнянь для 5 класу та поясніть методику їх подання учням.
4. Складіть задачу на рух і покажіть, як вона зводиться до лінійного рівняння.
5. Переробіть текстову задачу у вправу на складання рівняння (наприклад, «Знайди число, якщо його подвоєне значення на 7 більше від 25»).
6. Розробіть вправи для виявлення та виправлення типових помилок учнів у розв’язуванні рівнянь.
7. Побудуйте схему «Етапи навчання розв’язування рівнянь у 5–6 класах».
8. Складіть завдання на використання рівнянь для обчислення відсотків.
9. Запропонуйте вправи з поступовим ускладненням (від рівнянь без дужок до рівнянь із дужками та дробами).
10. Розробіть фрагмент уроку, де учні працюють у парах: один складає задачу, інший – записує рівняння та розв’язує.

Практичне заняття 14

Особливості вивчення змістової лінії «Відношення і пропорції»

Мета заняття: розкрити місце й роль теми «Відношення і пропорції» у курсі математики 5–6 класів; ознайомитися з методикою формування понять «відношення», «пропорція» та їх властивостей; сформувати уміння добирати завдання для пояснення й закріплення відношень і пропорцій; сприяти розвитку у студентів навичок виявлення й подолання типових помилок учнів; показати, як застосування відношень і пропорцій інтегрується з іншими темами й відповідає компетентнісному та діяльнісному підходам НУШ.



Теоретичні питання:

1. Місце теми «Відношення і пропорції» у програмі 5–6 класів.
2. Поняття відношення. Властивості відношень.
3. Поняття пропорції та її основна властивість.
4. Рівні та нерівні відношення.
5. Методи подання пропорцій (словесний, числовий, графічний).
6. Зв'язок пропорцій з поняттями відсотка, масштабу, швидкості, густини.
7. Методика формування навичок роботи з пропорціями.
8. Типові помилки учнів при складанні й розв'язуванні пропорцій.
9. Використання задач на пропорції як засобу прикладної спрямованості навчання математики.
10. Підходи НУШ: навчання через діяльність, інтегровані приклади з реального життя.

У 5–6 класах учні вперше системно знайомляться з поняттями відношення та пропорція, які мають велике значення не лише у математиці, а й у фізиці, хімії, біології, економіці та повсякденному житті.

Згідно з принципами НУШ, вивчення цієї змістової лінії має бути практично зорієнтованим, базуватися на конкретних прикладах з життя, сприяти формуванню математичної та міжпредметної компетентностей.

Учні повинні не просто вміти обчислювати відношення чи розв'язувати пропорції, а розуміти зміст цих понять і застосовувати їх у різних життєвих ситуаціях.

Основні змістові акценти.

1. Поняття відношення.
 - Визначення відношення двох чисел.
 - Різні способи запису (дробом, через «:»).
 - Тлумачення відношення як частки чисел.
2. Пропорція.
 - Визначення пропорції як рівності двох відношень.
 - Основна властивість пропорції (добуток крайніх членів дорівнює добутку середніх).
 - Використання пропорції для знаходження невідомого члена.
3. Масштаб, швидкість, густина, відсотки.

- Практичні застосування пропорцій у побуті, науці, техніці.
- Задачі на розрахунки за картами, кресленнями, рецептами.
- 4. Текстові задачі з використанням пропорцій
 - Задачі на прямо- та обернено пропорційні величини.
 - Вправи на складання й розв'язування пропорцій із реальних ситуацій.
- 5. Міжпредметні зв'язки
 - Фізика: швидкість, густина, тиск.
 - Географія: масштаб карти.
 - Хімія: масові частки, концентрації.

Методичні рекомендації:

1. Від конкретного до абстрактного.
 - Починати з наочних прикладів: співвідношення хлопців і дівчат у класі, кількість цукру та води в напої, відстань на карті та в реальності.
 - Лише після цього переходити до формального визначення.
 2. Розвиток вміння інтерпретувати відношення.
 - Завдання не лише на обчислення, а й на пояснення: «що означає відношення 2:5 у цій задачі?».
 - Використання діаграм і схем для візуалізації.
 3. Формування розуміння пропорційності.
 - Демонструвати на прикладах: «чим більша швидкість, тим менший час у дорозі».
 - Поступове введення прямо й обернено пропорційних величин.
 4. Робота з помилками.
 - Навчати учнів критично перевіряти результати: «чи логічний розв'язок?», «чи відповідає він умові задачі?».
 5. Формувальне оцінювання.
 - Картки «Я можу»: скласти відношення / прочитати пропорцію / знайти невідомий член / пояснити реальну ситуацію за допомогою пропорції.
 - Робота в парах і групах із взаємоперевіркою.
 6. Інтерактивні методи.
 - Математичні квести з використанням масштабів.
 - Онлайн-завдання (LearningApps, GeoGebra) для відпрацювання пропорцій.
 - Рольові ігри: «Я інженер — використовую масштаб для креслення».
- Таким чином, змістова лінія «Відношення і пропорції» у 5–6 класах:
- має практичну спрямованість і сприяє формуванню життєвих компетентностей;
 - закладає основу для подальшого вивчення відсотків, функцій, рівнянь;
 - розвиває вміння моделювати реальні ситуації;
 - інтегрує математику з природничими науками та побутом.

Ефективність її викладання забезпечується використанням прикладів з життя, наочності, інтерактивних методів і формувального оцінювання, що відповідає підходам НУШ.



Практичні завдання:

1. Складіть таблицю «Відношення – приклад – методика пояснення».
2. Наведіть приклади пропорцій, що ілюструють різні життєві ситуації (масштаб карти, суміш, швидкість тощо).
3. Розв'яжіть задачу на обчислення за пропорцією.
4. Складіть задачу з побутовим контекстом на використання пропорцій і покажіть методику пояснення.
5. Складіть вправи для учнів на перевірку основної властивості пропорції.
6. Доберіть завдання на обчислення відсотків через пропорцію.
7. Складіть задачу на пряму пропорційну залежність і покажіть методику пояснення.
8. Запропонуйте приклади для аналізу типових помилок.
9. Побудуйте схему «Етапи навчання теми „Відношення і пропорції“».
10. Розробіть фрагмент уроку з інтерактивним завданням (робота в групах: скласти власну задачу з пропорцією та розв'язати її тощо).

Практичне заняття 15

Особливості вивчення змістової лінії «Геометричні фігури і величини»

Мета завдання: визначити місце та значення змістової лінії «Геометричні фігури і величини» у курсі математики 5–6 класів; ознайомитися з методикою формування просторових уявлень і геометричної грамотності учнів; сформувати вміння підбирати вправи та задачі для введення понять геометричних фігур, їх властивостей і величин; показати методи інтеграції геометричного матеріалу з іншими лініями курсу математики (числа, вирази, відношення); розвивати навички роботи з вимірюваннями та побудовами, зокрема з використанням цифрових інструментів (геометричні програми, інтерактивні середовища); рахувати сучасні підходи НУШ: діяльнісне навчання, візуалізацію, практичну спрямованість.



Теоретичні питання:

1. Місце теми «Геометричні фігури і величини» в курсі 5–6 класів.
2. Базові поняття: точка, пряма, відрізок, кут, многокутники, коло і круг.
3. Поняття геометричних величин: довжина, площа, об'єм, периметр.
4. Методи введення понять (через спостереження, практичні вимірювання, побудови).
5. Основні властивості геометричних фігур у курсі 5–6 класів.
6. Алгоритми побудов (бісектриса, перпендикуляр, паралельна пряма).
7. Зв'язок між арифметичним і геометричним матеріалом (обчислення периметра, площі, застосування формул).
8. Типові помилки учнів при роботі з фігурами і величинами та методи їх подолання.
9. Використання наочності, моделей і цифрових засобів у навчанні геометрії.
10. Принципи НУШ: інтегроване навчання, практичні проєкти, математичні дослідження.

Вивчення геометричних фігур і величин у 5–6 класах закладає фундамент просторового мислення, яке є основою для подальшого засвоєння систематичного курсу геометрії в середній школі.

Згідно з концепцією Нової української школи, акцент робиться на практичному й діяльнісному підході: учні мають не тільки знати означення фігур і формули для обчислень, а й уміти застосовувати їх у життєвих ситуаціях.

Таким чином, ця змістова лінія є містком між арифметикою, алгеброю і геометрією, допомагає формувати вміння працювати з кресленнями, вимірюваннями, моделями.

Основні змістові акценти.

1. Ознайомлення з геометричними фігурами.
 - Точка, пряма, відрізок, промінь.
 - Кути та їх вимірювання.
 - Багатокутники (трикутники, чотирикутники).
 - Коло і круг.

2. Геометричні величини.
 - Довжина відрізка.
 - Величина кута (у градусах).
 - Периметр, площа, об'єм (на початковому рівні).
3. Креслення і побудови.
 - Використання лінійки, циркуля, транспортира.
 - Прості побудови: бісектриса, серединний перпендикуляр, коло за радіусом.
4. Формули для обчислень.
 - Периметри багатокутників.
 - Площа прямокутника, квадрата, трикутника, паралелограма, трапеції.
 - Довжина кола, площа круга.
5. Розв'язування практичних задач.
 - Обчислення площі земельної ділянки, кімнати, стола.
 - Використання масштабу в кресленнях і планах.
6. Міжпредметні зв'язки
 - Трудове навчання (робота з кресленнями).
 - Географія (карти, масштаби).
 - Фізика (кутові вимірювання, площа поверхні).

Методичні рекомендації:

1. Від наочного до абстрактного.
 - Використовувати предмети реального світу як приклади (тарілка — круг, зошит — прямокутник).
 - Малюнки й моделі допомагають уявити абстрактні поняття.
2. Робота з інструментами.
 - Навчати культури креслення: правильне користування лінійкою, циркулем, транспортиром.
 - Формувати точність і акуратність у виконанні побудов.
3. Інтеграція з життям.
 - Вправи на вимірювання площі класної кімнати, розрахунок фарби для стін, нитки для рамки тощо.
 - Задачі з практичним змістом мотивують учнів.
4. Поступовість у введенні формул.
 - Спочатку — відкриття формули через практичні дослідження (наприклад, площу прямокутника знайти як «довжина × ширина»).
 - Лише після цього формула записується у вигляді правила.
5. Розвиток просторового мислення.
 - Завдання на уяву: «Уяви куб, скільки в нього граней, ребер, вершин?»
 - Використання 3D-моделей, паперових фігур.
6. Формувальне оцінювання.
 - Самоперевірка креслень за чек-листом.
 - Обговорення розв'язання задач у парах.
 - Рефлексія: «Що сьогодні нового дізнався? Чи зможу застосувати ці знання вдома?».

Отже, змістова лінія «Геометричні фігури і величини» у 5–6 класах:

- формує перші уявлення про просторові об'єкти та їх властивості;
- розвиває вміння виконувати вимірювання та побудови;
- інтегрує математику з іншими предметами та практикою життя;
- сприяє формуванню логічного, абстрактного й просторового мислення.

Методика її викладання має базуватися на наочності, практичності, інтерактивності та діяльнісному підході, що відповідає сучасним вимогам НУШ.



Практичні завдання:

1. Складіть схему «Геометричні фігури і величини, які вивчаються у 5–6 класах».
2. Доберіть приклади задач на обчислення периметра й площі багатокутників.
3. Розробіть вправи для пояснення різниці між колом і кругом.
4. Побудуйте відрізок заданої довжини й поясніть методику роботи з лінійкою.
5. Запропонуйте задачу на знаходження площі прямокутника різними способами.
6. Розробіть приклади задач, де обчислення геометричних величин поєднується з арифметичними діями.
7. Опишіть типові помилки учнів при роботі над змістовою лінією «Геометричні фігури і величини». Доберіть вправи для виправлення указаних типових помилок.
8. Складіть інтерактивне групове завдання: «Знайди геометричні фігури в класі та виміряй їх параметри».
9. Створіть проєктне завдання для учнів: «Спроєктуй план кімнати у зошиті з використанням масштабу».

Практичне заняття 16

Особливості вивчення змістової лінії «Математичні задачі як спосіб дослідження реальних життєвих ситуацій та реальних процесів»

Мета заняття: показати значення математичних задач прикладного змісту у навчанні математики в 5–6 класах; ознайомитися з методикою добору й формулювання задач, пов'язаних із життям і досвідом дітей цього віку; сформувати навички створення математичних моделей простих побутових і навчальних ситуацій; навчитися використовувати задачі як засіб розвитку критичного мислення та практичної грамотності учнів; врахувати принципи НУШ: компетентнісний і діяльнісний підходи, міжпредметні зв'язки, навчання через дослідження.



Теоретичні питання:

1. Роль задач у формуванні практичних математичних компетентностей у 5–6 класах.
2. Задачі на відсотки, пропорції, масштаб, швидкість, площі й об'єми як приклади життєвих ситуацій.
3. Алгоритм складання математичної задачі з реальної ситуації (спостереження → формулювання → модель → розв'язання → інтерпретація).
4. Особливості добору задач для дітей 10–12 років (зв'язок із повсякденним життям, ігровий та інтерактивний характер).
5. Типові труднощі учнів при роботі з прикладними задачами та методи їх подолання.
6. Принципи подання задач у НУШ: дослідницький підхід, групова робота, інтеграція з іншими предметами.

Математичні задачі в курсі 5–6 класів посідають центральне місце. У межах Нової української школи вони розглядаються не лише як тренування обчислювальних умінь, а як засіб формування компетентностей, критичного мислення, уміння досліджувати життєві ситуації.

Важливо, щоб учні бачили у задачах зв'язок із реальністю: покупки, подорожі, ремонт, спорт, природа. Задача стає не штучним прикладом, а моделлю ситуації, де математика допомагає знайти відповідь.

Основні змістові акценти:

1. Задачі як моделі реальних процесів.
 - Переклад життєвої ситуації на математичну мову.
 - Використання числових даних, виразів, рівнянь.
2. Типи задач.
 - Текстові (побутові, фінансові, транспортні).
 - Прикладні (з елементами фізики, хімії, географії).
 - Дослідницькі (задачі на пошук закономірностей, формулювання гіпотез).
3. Етапи роботи із задачею.
 - Аналіз умови, виділення суттєвих даних.

- Складання моделі (схема, таблиця, вираз, рівняння).
 - Виконання розрахунків.
 - Перевірка й інтерпретація результату в контексті реальної ситуації.
- 4.** Задачі як засіб розвитку мислення.
- Формування вміння аналізувати й узагальнювати.
 - Пошук різних способів розв'язання.
 - Робота з надлишковими або відсутніми даними.
- 5.** Використання ІКТ.
- Онлайн-середовища для моделювання (GeoGebra, Desmos).
 - Візуалізація процесів за допомогою таблиць і діаграм.

Методичні рекомендації:

- 1.** Реальність і практичність.
 - Задачі слід пов'язувати з життям дітей: розрахунок вартості покупок, планування часу, вимірювання швидкості бігу.
 - Використовувати приклади з найближчого оточення учнів (шкільні події, сімейні ситуації, спорт).
- 2.** Диференціація завдань.
 - Прості задачі на відпрацювання навичок.
 - Ускладнені — на пошук різних способів чи створення власної моделі.
- 3.** Інтерактивність.
 - Робота в парах і групах: колективне обговорення розв'язків.
 - Рольові ігри: «ти — касир, порахуй решту», «ти — мандрівник, розрахуй відстань».
- 4.** Формувальне оцінювання.
 - Самоперевірка: «Чи правильно я зрозумів умову? Чи відповідає результат реальності?».
 - Критерії: правильність, логічність, доцільність способу.
- 5.** Розвиток математичної мови.
 - Учні мають навчитися формулювати задачу словами й математичною мовою.
 - Практика складання власних задач.

Таким чином, Змістова лінія «Математичні задачі як спосіб дослідження реальних життєвих ситуацій та процесів» у 5–6 класах:

- розкриває практичну цінність математики;
- формує навички аналізу, узагальнення та моделювання;
- інтегрує математику з іншими предметами та життям учнів;
- сприяє розвитку критичного мислення та творчого підходу.

Ефективність її викладання забезпечується завдяки зв'язку з життям, інтерактивним методам, формувальному оцінюванню та використанню ІКТ, що повністю відповідає сучасним підходам НУШ.



Практичні завдання:

- 1.** Складіть 3 побутові задачі для 5 класу.

2. Складіть 3 задачі для 6 класу на застосування відсотків та пропорцій у життєвих ситуаціях.
3. Розробіть задачу на використання масштабу карти.
4. Складіть задачу з екологічним змістом (наприклад, підрахунок використаної води чи паперу).
5. Переробіть деяку стандартну задачу з підручника у прикладну (замість абстрактних чисел – сюжет зі школи чи побуту).
6. Доберіть приклади задач із теми «Рух» (подорож велосипедом, автобусом, пішки).
7. Складіть завдання для роботи в групах: «Придумайте задачу про шкільний буфет і розв'яжіть її».
8. Проаналізуйте помилки учнів у задачах на відсотки (наприклад, неправильне тлумачення «збільшити на 20 %»).
9. Розробіть фрагмент уроку з використанням прикладної задачі (наприклад: «Скільки книжок у середньому читає клас за місяць?»). Варіанти задач:
 1. У шкільному буфеті купили 3 булочки по 12 грн і сік за 18 грн. Скільки грошей витратили?
 2. Зошит коштує 18 грн. Скільки зошитів можна купити за 100 грн? Скільки грошей залишиться?
 3. Ціна куртки 1600 грн. У магазині діє знижка 20 %. Скільки коштуватиме куртка зі знижкою?
 4. У класі 28 учнів, з них 16 займаються спортом. Яку частину класу становлять спортсмени?
 5. У шкільній бібліотеці 1200 книжок, з них 35 % — дитячі. Скільки дитячих книжок у бібліотеці?
 6. На контрольній роботі 15 завдань. Андрій виконав 12. Який відсоток завдань він виконав?
 7. Автобус рухається зі швидкістю 60 км/год. Яку відстань він подолає за 3 години?
 8. Велосипедист їхав 2 години зі швидкістю 12 км/год. Яку відстань він подолав?
 9. Відстань між містами – 240 км. Поїзд проходить її за 4 години. З якою швидкістю рухається поїзд?
 10. На карті масштаб 1 : 200 000. Відстань між двома містами на карті – 6 см. Яка реальна відстань?
 11. Дерево поглинає 20 кг вуглекислого газу за рік. Скільки дерев потрібно, щоб поглинути 200 кг вуглекислого газу?
 12. Родина витрачає в середньому 250 л води на добу. Скільки води витратиться за тиждень?
 13. Якщо один пакетик насіння дає 40 рослин, то скільки рослин виросте з 6 пакетиків?
 14. Для приготування компоту потрібно 2 кг яблук і 1 кг груш. Скільки фруктів знадобиться для 3 таких компотів?
 15. Для пирога потрібно 0,5 кг борошна. Скільки пирогів можна спекти з 4 кг борошна?

- 16.** У 1 л соку міститься 120 г цукру. Скільки цукру міститься в 2,5 л соку?
- 17.** Учень поклав 2000 грн у банк під 10 % річних. Скільки грошей він матиме через рік?
- 18.** Вартість квитка в кіно – 80 грн. Скільки коштуватиме похід у кіно для 4 учнів?
- 19.** Турист витратив 6000 грн на подорож, з яких 40 % пішло на проживання. Скільки витратили на проживання?
- 20.** Клас зібрав 240 кг макулатури. Це становить 30 % від усієї макулатури, зібраної школою. Скільки всього макулатури збрала школа?
- 10.** Побудуйте таблицю «Тип задач – реальна ситуація – математична модель – очікувані труднощі».

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Білик М., Калашніков І. Вплив цифровізації середовища, яке оточує учня, на його компетентнісний рівень з математики / Дидактика математики: теорія, досвід, інновації. – Вінниця. – 2024. С. 89-97.
2. Букалова Л., Васильєва Д. Групові форми роботи на уроках математики : методичний посібник. Київ: Видавничий дім «Освіта». – 2023.
3. Голодюк Л. Викладання математики у процесі організації адаптаційного навчання (5-6 класи) // Розвиток професійної компетентності педагогічних працівників в умовах неперервної освіти: Науково-методичний вісник № 57. – Кропивницький: КЗ «КОППО імені Василя Сухомлинського», 2021. – С. 89-101.
4. Голодюк Л. Навчання математики на засадах компетентнісного підходу (5-6 класи),
5. Голодюк Лариса. Формування геометричних знань засобами мислительної діяльності учнів // Педагогічний вісник. – 2021. – № 1-2. – С. 3-8. 12.
6. Канівець І. М. Сучасні методи викладання фізико-математичних дисциплін на засадах інтегративного підходу. – Дніпро. 2024. – 64 с.
7. Лов'янова І. В. Методика навчання математики у запитаннях і відповідях : навчальний посібник для підготовки студентів до атестації здобувачів вищої освіти. Базовий рівень підготовки / І. В. Лов'янова. – 3-тє видання, доповнене і перероблене. – Кривий Ріг : Криворізький державний педагогічний університет, 2022. – 128 с.
8. Лук'янова С. Використання методу доцільних задач задля надолуження освітніх втрат учнівства з математики / Дидактика математики: теорія, досвід, інновації. – Вінниця. – 2024. С. 42-52.
9. Насадюк Т. О. Методика реалізації прикладної спрямованості навчання математики учнів 5-6 класів URL: <https://uacademic.info/ua/document/0423U100169>
10. Недялкова К. В., Іванова С.В., Тумбуракі А. В. Методика навчання здобувачів середньої освіти доводити математичні твердження: навчальний посібник з дисципліни «Методика навчання математики» для здобувачів вищої освіти за першим (бакалаврським) рівнем спеціальностей: А4 Середня освіта (Математика. Інформатика), А4 Середня освіта (Математика. Англійська мова), А4 Середня освіта (Фізика. Математика). Одеса: Університет Ушинського, 2025. 152 с. URL: <http://dspace.pdpu.edu.ua/bitstream/123456789/21769/1/%D0%9D%D0%B0%D0%B2%D1%87%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B8%D0%B9%20%D0%BF%D0%BE%D1%81%D1%96%D0%B1%D0%BD%D0%B8%D0%BA%20%D0%9D%D1%94%D0%B4%D1%8F%D0%BB%D0%BA%D0%BE%D0%B2%D0%B0%2C%20%D0%86%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%BE%D0%B2%D0%B0%2C%20%D0%A2%D1%83%D0%BC%D0%B1%D1%80%D1%83%D0%BA%D0%B0%D0%BA%D1%96%202025.docx.pdf>

11. НУШ: навчально-методичний довідник для педагогів закладів загальної середньої освіти (базова освіта): математична освітня галузь. [Електронний ресурс]. Режим доступу: <https://sites.google.com/view/math5-12>
12. Сухойваненко Л. Ф. Міжпредметні зв'язки у навчанні елементарної математики майбутніх учителів математики. [Електронне видання] URL: https://npu.edu.ua/images/file/vidil_aspirant/dicer/%D0%94_26.053.03/Sukhoivanenko.pdf
13. Рекомендації до викладання математики з досвіду педагогів-тренерів НУШ. ІПО Київського столичного університету імені Бориса Грінченка / за загальною редакцією Л. Гетманенко. – 37 с.
14. Риндюк В. Навчання математики з використанням цифрових навчальних платформ: аналіз вітчизняного досвіду Дидактика математики теорія досвід інновації. 2024. DOI:10.31652/3041-2277-2024-1-72-80.
15. Яковлєва О., Каплун В., Анісімова Т. Деякі нотатки щодо введення в курсі математики 5 класу алгебраїчного методу розв'язування текстових задач. *Фізико-математична освіта*, 27(1), 2021. 107–111. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2021-027-1-017>
16. AbuAssaly-George L., Bunney K., De V. C., Mead T. Foundations of Education. 2023. 239 p. URL: <http://files.znu.edu.ua/files/Bibliobooks/Inshi81/0061032.pdf>.
17. Al-Thani N. J., Ahmad Z. Teaching and Learning with Research Cognitive Theory: Unlocking Curiosity and Creativity for Problem-Solving Skills. Cham : Springer, 2025. 115 p. (SpringerBriefs in Education). URL: <http://files.znu.edu.ua/files/Bibliobooks/Inshi82/0062147.pdf>.
18. Differentiated Instruction in Teaching from the International Perspective: Methodological and empirical insights / R. Maulana, M. Helms-Lorenz, P. Moorer [et al.]. Groningen : University of Groningen Press, 2023. 318 p. URL: <http://files.znu.edu.ua/files/Bibliobooks/Inshi74/0054407.pdf>.
19. Effective Teaching Around the World: Theoretical, Empirical, Methodological and Practical Insights / R. Maulana, M. Helms-Lorenz, R. M. Klassen (eds.). Cham : Springer, 2023. 799 p. URL: <http://files.znu.edu.ua/files/Bibliobooks/Inshi74/0054402.pdf>.
20. Jacka L., Lindsay J. HyFlex Learning and Teaching: A Guide for Educational Innovation. Toowoomba : y University of Southern Queensland, 2025. 132 p. URL: <http://files.znu.edu.ua/files/Bibliobooks/Inshi82/0062241.pdf>.
21. Lickteig A. Effective Teaching in the Secondary Classroom. EdTech Books, 2023. 124 p. URL: <http://files.znu.edu.ua/files/Bibliobooks/Inshi82/0062235.pdf>.
22. Proctor J. Teaching Methods & Practices: A Resource for Novice Teachers. Northeastern State University, 2022. 143 p. URL: <http://files.znu.edu.ua/files/Bibliobooks/Inshi82/0062246.pdf>.
23. The Evolution of Research on Teaching Mathematics: International Perspectives in the Digital Era / A. Manizade, N. Buchholtz, K. Beswick (eds.). Cham : Springer, 2024. 381 p. URL: <http://files.znu.edu.ua/files/Bibliobooks/Inshi82/0062255.pdf>.
24. Schoolteachers and the Nordic Model: Comparative and Historical Perspectives / ed. by J. E. Larsen, B. Schulte, F. W. Thue. London : Routledge, 2022. 245 p. URL: <http://ebooks.znu.edu.ua/files/Bibliobooks/Inshi69/0050341.pdf>.

25. Students' Collaborative Problem Solving in Mathematics Classrooms: An Empirical Study / Y. Cao (ed.). Cham : Springer, 2024. 297 p. URL: <http://files.znu.edu.ua/files/Bibliobooks/Inshi82/0062254.pdf>.

КОРИСНІ ПОСИЛАННЯ

1. Всеукраїнська школа онлайн. URL: <https://lms.e-school.net.ua/>
2. Електронна бібліотека НАПН України/ URL: https://eduglos.iitta.gov.ua/index.php/%D0%95%D0%BB%D0%B5%D0%BA%D1%82%D1%80%D0%BE%D0%BD%D0%BD%D0%B0_%D0%B1%D1%96%D0%B1%D0%BB%D1%96%D0%BE%D1%82%D0%B5%D0%BA%D0%B0_%D0%9D%D0%90%D0%9F%D0%9D_%D0%A3%D0%BA%D1%80%D0%B0%D1%97%D0%BD%D0%B8
3. Закон України про освіту. URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/2145-19#Text>
4. Модельні навчальні програми для 10-12 класів Нової української школи. Профільна школа (з 2027 року). URL: <https://mon.gov.ua/osvita-2/zagalna-serednya-osvita/osvitni-programi/modelni-navchalni-prohramy-dlia-10-12-klasiv-novoi-ukrainskoi-shkoly-profilna-shkola-z-2027-roku>
5. Навчальні програми для 10-11 класів. URL: <https://mon.gov.ua/osvita-2/zagalna-serednya-osvita/osvitni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv>
6. Математика в школі онлайн. URL: <https://sites.google.com/site/matematikaonlajn>
7. Методичні рекомендації щодо викладання математики у 2025/2026 н.р. URL: <https://www.schoollife.org.ua/metodychni-rekomendatsiyi-shhodo-vykladannya-matematyky-u-2025-2026-n-r/>
8. Про деякі питання державних стандартів повної загальної середньої освіти. Постанова Кабінету Міністрів № 898 від 30 вересня 2020 р. — «Державний стандарт базової середньої освіти». URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/898-2020-%D0%BF>
9. Про затвердження Державного стандарту базової і повної загальної середньої освіти. Постанова Кабінету Міністрів № 1392 від 23 листопада 2011 р. (зі змінами № 538 від 07.08.2013, № 143 від 26.06.2020). URL: <https://zakon.rada.gov.ua/go/1392-2011-%D0%BF>
10. Типова освітня програма для 10-12 класів закладів загальної середньої освіти, які забезпечують здобуття профільної середньої освіти за академічним спрямуванням. URL: <https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/zagalna%20serednya/2025/06/25/top-dlya-10-12-kl-zzso-yaki-zabezp-zdob-prof-osvity-25-06-2025-1.pdf>
11. Desmos. URL: <https://www.desmos.com>
12. GeoGebra. URL: <https://www.geogebra.org>
13. Prometheus. URL: <https://prometheus.org.ua/courses-catalog>

Навчальне видання
(українською мовою)

Манько Наталія Іванівна-Володимирівна
Зіновєєв Ігор Валерійович
Ткаченко Ірина Григорівна

ШКІЛЬНИЙ КУРС МАТЕМАТИКИ ТА МЕТОДИКА ЇЇ ВИКЛАДАННЯ

Методичні рекомендації до практичних занять
для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра спеціальності «Математика»
освітньо-професійної програми «Математика»

Рецензент *А. М. Андрєєв*
Відповідальний за випуск *С. М. Гребенюк*
Коректор *Н. І.-В. Манько*