МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Н.І.-В. Манько, М.О. Гречнєва, І.В. Зіновєєв

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Навчальний посібник
для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра
спеціальності «Математика»
освітньо-професійної програми «Математика»

Затверджено
вченою радою ЗНУ
Протокол № від

Запоріжжя
2025

УДК 514(075.8)
М247

Манько Н. І.-В., Гречнєва М. О., Зіновєєв І. В. Аналітична геометрія : навчальний посібник для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра спеціальності «Математика» освітньо-професійної програми «Математика». Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2025. 111с.

Навчальний посібник укладено відповідно до силабусу дисципліни «Аналітична геометрія» циклу професійної підготовки спеціальності. Він містить матеріал, необхідний для розуміння й свідомого засвоєння основних ідей цієї дисципліни.

Посібник містить теоретичний матеріал для актуалізації опорних знань, засвоєння основних понять, теорем, конструкцій. Викладення теоретичного матеріалу супроводжується достатньою кількістю прикладів з детальними та обґрунтованими поясненнями. Окремими розділами подано приклади розв’язання задач та задачі для самостійної роботи студентів. Вони можуть також бути використаними на практичних заняттях.

Видання призначене для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра спеціальності «Математика» освітньо-професійної програми «Математика». Воно може бути корисним для студентів інших спеціальностей, оскільки аналітична геометрія широко використовується в різних розділах математики, фізики, інженерії, архітектури тощо.

Рецензент

Кривохата А.Г., кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри програмної інженерії

Відповідальний за випуск

І. В. Зіновєєв, кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри загальної математики

ЗМІСТ

ВСТУП…… 4
Тема 1. Поняття вектора та лінійних операцій над ними. Властивості лінійних операцій……... 6
Тема 2. Лінійна залежність і незалежність векторів. Векторний простір. Поняття базису і координат вектора у базисі.…… 11
Тема 3. Кут між двома векторами. векторна та скалярна проєкції вектора на вісь. Ортогональна проєкція вектора……..…… 21
Тема 4. Скалярний добуток двох векторів, його властивості …….…….. 22
Тема 5. Векторний добуток двох векторів, його властивості……..... 27
Тема 6. Мішаний добуток трьох векторів, його властивості..…….. 32
Тема 7. Поняття поверхні та лінії в аналітичній геометрії. форми їх рівнянь. 36
Тема 8. Види рівнянь площини…….……... 38
Тема 9. Рівняння прямої у просторі…….…… 42
Тема 10. Рівняння прямої на площині...……. 53
Тема 11. Криві другого порядку…….…. 65
Тема 12. Загальне рівняння кривої другого порядку……..……...……. 78
Тема 13. Поверхні другого порядку…….…… 88
Індивідуальне завдання……...…….. 101
Використана література…… 109
Рекомендована література……. 110

ВСТУП

Аналітична геометрія є однією з фундаментальних математичних дисциплін, що формує базу для подальшого вивчення математики. Вона поєднує геометричні уявлення з алгебраїчними методами дослідження, що дозволяє глибше зрозуміти властивості та взаємозв'язки між геометричними об'єктами.

Основою аналітичної геометрії є використання координатного й векторного апарату для опису точок, прямих, площин, кривих та поверхонь. Завдяки цьому забезпечується можливість переходу від наочного образу до точного алгебраїчного рівняння, а також застосування чисельних та аналітичних методів розв'язування задач.

Вивчення даної дисципліни сприяє розвитку просторового та логічного мислення, формуванню навичок аналізу і синтезу, підвищує здатність до математичного моделювання реальних процесів і явищ.

Навчальний посібник містить систематизований виклад основних понять і методів аналітичної геометрії, приклади їх застосування та завдання для самостійної роботи.

Метою вивчення навчальної дисципліни є оволодіння математичним апаратом, що дозволяє описувати геометричні об'єкти та їх властивості за допомогою алгебраїчних методів, а також розвивати навички застосування цього апарату для розв'язування геометричних задач

Основними **завданнями** вивчення дисципліни «Аналітична геометрія» є:

- засвоєння системи основних понять, тверджень і методів аналітичної геометрії.
- оволодіння алгебраїчними методами опису та дослідження геометричних об'єктів за допомогою координатного й векторного апарату.
- розвиток умінь розв'язувати задачі, пов'язані з рівняннями ліній та поверхонь другого порядку, прямими, площинами, кривими та поверхнями.

Згідно з вимогами освітньої-професійної програми здобувачі освіти мають досягти таких компетентностей та програмних результатів навчання.

Компетентності:

- Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.
- Здатність формулювати проблеми математично та в символьній формі з метою спрощення їхнього аналізу й розв'язання.
- Здатність подавати математичні міркування та висновки з них у формі, придатній для цільової аудиторії, а також аналізувати та обговорювати математичні міркування інших осіб, залучених до розв'язання тієї самої задачі.
- Здатність здійснювати міркування та виокремлювати ланцюжки міркувань у математичних доведеннях на базі аксіоматичного підходу, а також розташовувати їх у логічну послідовність, у тому числі відрізняти основні ідеї від деталей і технічних викладок.
- Здатність конструювати формальні доведення з аксіом та постулатів і відрізняти правдоподібні аргументи від формально бездоганних.

• Здатність до аналізу математичних структур, у тому числі до оцінювання обґрунтованості й ефективності використовуваних математичних підходів.

Результати навчання:

• Знати принципи modus ponens (правило виведення логічних висловлювань) та modus tollens (доведення від супротивного) і використовувати умови, формулювання, висновки, доведення та наслідки математичних тверджень.

• Розуміти фундаментальну математику на рівні, необхідному для досягнення інших вимог освітньої програми.

• Розв’язувати задачі придатними математичними методами, перевіряти умови виконання математичних тверджень, коректно переносити умови та твердження на нові класи об’єктів, знаходити й аналізувати відповідності між поставленою задачею й відомими моделями.

• Розв’язувати конкретні математичні задачі, які сформульовано у формалізованому вигляді; здійснювати базові перетворення математичних моделей.

• Знати теоретичні основи і застосовувати методи аналітичної та диференціальної геометрії для розв’язування професійних задач.

1 ПОНЯТТЯ ВЕКТОРА І ЛІНІЙНИХ ОПЕРАЦІЙ НАД НИМИ. ВЛАСТИВОСТІ ЛІНІЙНИХ ОПЕРАЦІЙ

Вектором називається напрямлений відрізок. Якщо точка A – початок вектора, а точка B – кінець, то вектор будемо позначити так: $\overline{AB}$ або $\overrightarrow{AB}$ (рис. 1.1). Інакше вектор можна позначати символом $\bar{a}$ або $\vec{a}$.

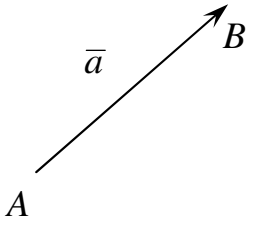
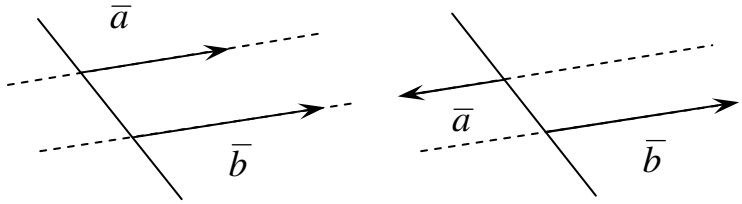


Рисунок 1.1 – Вектор $\overline{AB} = \bar{a}$

Відстань між кінцем і початком вектора $\bar{a}$ будемо називати ***довжиною*** або ***модулем вектора*** й позначати одним із символів: $|\bar{a}|$ або a. Якщо довжина вектора $\bar{a}$ дорівнює нулю, то вектор $\bar{a}$ називають ***нульовим*** і пишуть $\bar{a} = \bar{0}$.

Два ненульові вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називають ***колінеарними*** ($\bar{a} \parallel \bar{b}$), якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих. Нульовий вектор вважається колінеарним будь-якому вектору.

Два ненульові вектори мають ***однаковий напрямок*** ($\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$ – співспрямлені), якщо вони колінеарні та їх кінці лежать по одну сторону від прямої, що проходить через їх початки (рис. 1.2 а). Якщо ж по різні сторони, то вектори називають ***протилежно спрямованими*** ($\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{b}$ на рис. 1.2 б). Два вектори вважаються ***рівними***, якщо вони мають однакові довжини й однакові напрямки.

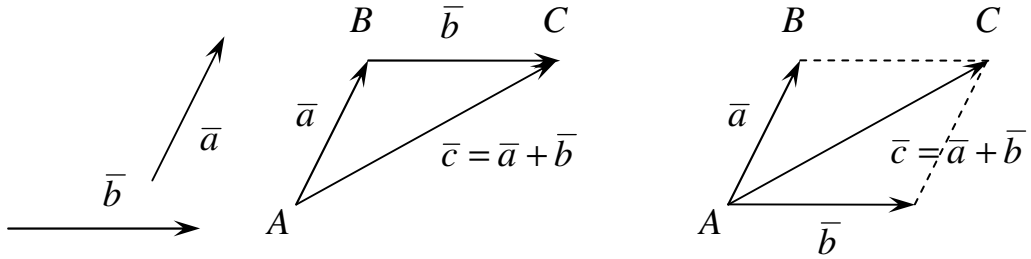


а) б)

Рисунок 1.2 – Однаково та протилежно спрямовані вектори

Під ***лінійними операціями*** над векторами розуміють операції додавання векторів і множення вектора на число.

Сумою векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називають вектор $\bar{c}$, який можна отримати в результаті таких дій: з довільної точки A простору відкладаємо вектор $\bar{a}$, а з кінця B цього вектора відкладаємо вектор $\bar{b}$, будемо вважати при цьому, що кінець вектора $\bar{b}$ розташовано в точці C, тоді вектор $\overline{AC}$ і є сумою векторів $\bar{a}$ і



а) правило трикутника б) правило паралелограма

Рисунок 1.3 – Додавання векторів

$\bar{b}$ (рис 1.3 а). У деяких випадках зручніше користуватися правилом паралелограма (рис. 1.3 б): якщо вектори відкласти від однієї точки, то вектор-сума – це діагональ паралелограма, що виходить з початку векторів-доданків.

За правилом трикутника поняття суми легко узагальнюється на випадок будь-якого скінченого числа векторів.

Вектор $\bar{b}$ будемо називати ***протилежним*** вектору $\bar{a}$, якщо $\bar{b} = -\bar{a}$. Вектор, протилежний вектору $\bar{a}$, позначають так: $-\bar{a}$. Напрямки векторів $\bar{a}$ й $-\bar{a}$ протилежні, а модулі однакові.

Теорема 1.1 (Властивості операції додавання векторів) Операції додавання векторів притаманні наступні властивості:

1. $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$ (комутативність).
2. $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$ (асоціативність).
3. $\bar{a} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{a}$.
4. $\bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{0}$, вектор $-\bar{a}$ є протилежним вектору $\bar{a}$.

Різницею $\bar{a} - \bar{b}$ векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називають вектор $\bar{c}$, який у сумі з вектором $\bar{b}$ дає вектор $\bar{a}$ (рис. 1.4). Легко отримати правило віднімання векторів, які відкладено від однієї точки. Воно виражається рівністю:

$$\overline{AC} - \overline{AB} = \overline{BC}.$$

Добутком вектора $\bar{a}$ на число α називають вектор, який має довжину $|\alpha| \cdot |\bar{a}|$; напрямок вектора $\alpha\bar{a}$ збігається з напрямком вектора $\bar{a}$, якщо $\alpha > 0$, і протилежний йому, якщо $\alpha < 0$. Якщо $\alpha = 0$, то $0 \cdot \bar{a} = \bar{0}$.

Теорема 1.2 Операції множення вектора на число притаманні наступні властивості. Для будь-яких векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ та будь-яких дійсних чисел α і β:

1. $(\alpha + \beta)\bar{a} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{a}$.
2. $\alpha(\bar{a} + \bar{b}) = \alpha\bar{a} + \alpha\bar{b}$.
3. $\alpha(\beta\bar{a}) = (\alpha\beta)\bar{a}$.
4. $1 \cdot \bar{a} = \bar{a}$.
5. $(-1) \cdot \bar{a} = -\bar{a}$.
6. $0 \cdot \bar{a} = \bar{a} \cdot 0 = \bar{0}$.
7. $(\alpha + \beta)\bar{a} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{a}$.
8. $\alpha(\bar{a} + \bar{b}) = \alpha\bar{a} + \alpha\bar{b}$.

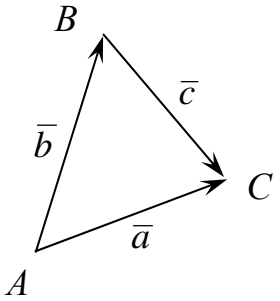


Рисунок 1.4 – Віднімання векторів

Нехай на площині або в просторі зафіксована точка *O*. Будемо називати її ***полюсом***. Вектор $\overline{OM}$ з початком у точці *O* та кінцем у деякій точці *M* площини або простору називається ***радіус-вектором*** точки *M* та позначається $\bar{r}_M$.або $\bar{r}(M)$.

Нехай дано три точки *A*, *B*, *C*, що лежать на одній прямій. Говорять, що точка *C* ***ділить*** напрямлений відрізок *AB* ***у відношенні*** λ, якщо $\overline{AC} = \lambda\overline{CB}$. Очевидно, що точка *C*, яка ділить *AB* у відношенні λ, лежить на відрізку тоді і тільки тоді, коли $\lambda > 0$, та поза ним на прямій *AB*, якщо $\lambda < 0$.

Теорема 1.3 Якщо точка *C* ділить напрямлений відрізок *AB* у відношенні

$\lambda \neq -1$, то радіус вектор $\bar{r}_C$ точки C виражається через радіус-вектори $\bar{r}_A$ і $\bar{r}_B$ точок A й B наступним чином:

$$\bar{r}_C = \frac{\bar{r}_A + \lambda \bar{r}_B}{1+\lambda},\ \lambda \neq -1 \qquad (1.1)$$

– ***формула ділення відрізка в даному відношенні***.

Приклади розв'язування задач

1. У трикутнику ABC пряма AM – бісектриса кута BAC, причому точка M належить стороні BC. Виразіть вектор $\overline{AM}$ через $\overline{AB} = \bar{b}$, $\overline{AC} = \bar{c}$ (рисунок 1.5)·

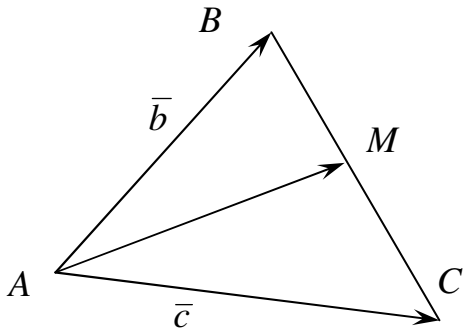


Рисунок 1.5 – Ілюстрація до прикладу 1

Розв'язання:

Вектор $\overline{BC} = \bar{c} - \bar{b}$. За властивістю бісектриси внутрішнього кута трикутника маємо:

$$\left|\overline{BM}\right| : \left|\overline{MC}\right| = \left|\bar{b}\right| : \left|\bar{c}\right|,$$

$$\left|\overline{BM}\right| : \left|\overline{BC}\right| = \left|\bar{b}\right| : \left(\left|\bar{b}\right| + \left|\bar{c}\right|\right).$$

Отже, $\overline{BM} = \dfrac{\left|\bar{b}\right|}{\left|\bar{b}\right| + \left|\bar{c}\right|}\left(\bar{c} - \bar{b}\right)$. Оскільки $\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{BM}$, то

$$\overline{AM} = \bar{b} + \frac{\left|\bar{b}\right|}{\left|\bar{b}\right| + \left|\bar{c}\right|}\left(\bar{c} - \bar{b}\right) = \frac{\bar{b}\left|\bar{c}\right| + \bar{c}\left|\bar{b}\right|}{\left|\bar{b}\right| + \left|\bar{c}\right|}.$$

2. Радіус-векторами вершин A, B, C трикутника ABC є $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$, $\bar{r}_3$ відповідно. Знайдіть радіус-вектор точки M перетину медіан трикутника (рисунок 1.6).

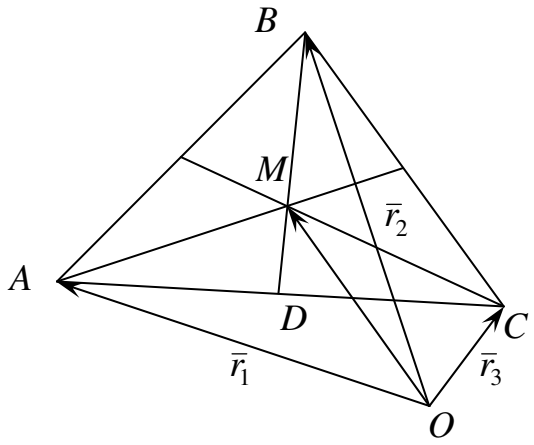


Рисунок 1.6 – Ілюстрація до прикладу 2

Розв'язання:

Оскільки $\overline{BC} = \bar{r}_3 - \bar{r}_2$, $\overline{BD} = \dfrac{\bar{r}_3 - \bar{r}_2}{2}$ (D – середина сторони BC), $\overline{AB} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$, $\overline{AD} = \overline{BD} + \overline{AB} = \dfrac{\bar{r}_3 - \bar{r}_2}{2} + \bar{r}_2 - \bar{r}_1 = \dfrac{\bar{r}_3 + \bar{r}_2 - 2\bar{r}_1}{2}$, $\overline{AM} = \dfrac{2}{3}\overline{AD}$, тому $\overline{AM} = \dfrac{\bar{r}_3 + \bar{r}_2 - 2\bar{r}_1}{3}$.

Отже, $\bar{r}_M = \bar{r}_1 + \overline{AM} = \dfrac{\bar{r}_1 + \bar{r}_2 + \bar{r}_3}{3}$.

3. У трикутнику ABC сторона AB точками M і N поділена на три рівні частини: $\left|\overline{AM}\right| = \left|\overline{MN}\right| = \left|\overline{NB}\right|$. Виразіть вектор $\overline{CM}$ через $\overline{CA} = \bar{a}$, $\overline{CB} = \bar{b}$.

Розв'язання:

Оскільки $\overline{AB}=\bar{b}-\bar{a}$, то $\overline{AM}=\dfrac{\bar{b}-\bar{a}}{3}$. Враховуючи, що $\overline{CM}=\overline{CA}+\overline{AM}$, маємо: $\overline{CM}=\bar{a}+\dfrac{\bar{b}-\bar{a}}{3}=\dfrac{2\bar{a}+\bar{b}}{3}$.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Дано правильний шестикутник $ABCDEF$, точка O – його центр. Виразіть вектори $\overline{OC}, \overline{OB}, \overline{AB}, \overline{BC}, \overline{DA}, \overline{CA}, \overline{CE}, \overline{AE}, \overline{FD}, \overline{FB}$ через вектори $\overline{OA}=\bar{a}, \overline{OB}=\bar{b}$.

2. Точка O – точка перетину медіан (центр тяжіння) трикутника ABC. Виразіть вектори $\overline{AC}, \overline{CB}, \overline{BO}, \overline{AO}, \overline{CO}$ через вектори $\overline{AB}=\bar{a}, \overline{BC}=\bar{b}$.

3. Виразіть вектори-медіани трикутника ABC через вектори $\overline{AB}=\bar{b}, \overline{AC}=\bar{c}$.

4. У тетраедрі $ABCD$ точки M і N є серединами ребер DA і BC відповідно, а точки P, Q поділяють сторону DC на три рівні частини. Виразіть вектори $\overline{CP}, \overline{MB}, \overline{PA}, \overline{QB}, \overline{NQ}, \overline{MN}, \overline{PN}, \overline{QA}$ через вектори $\overline{BA}, \overline{BC}, \overline{BD}$.

5. Діагоналі паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перетинаються в точці O, точка M – середина ребра AA_1, точка P – середина ребра CC_1. Доведіть, що $\overline{MO}=\overline{OP}$.

6. Точки C_1, C_2 поділяють сторону AB трикутника ABC на три рівні частини, а точка A_1 – сторону BC навпіл, а точки B_1, B_2, B_3 – сторону AC на чотири рівні частини. Виразіть вектори $\overline{AA_1}, \overline{BB_2}, \overline{CC_2}, \overline{B_1C_2}, \overline{B_3A_1}, \overline{BB_3}$ через $\overline{BC_2}=\bar{a}, \overline{BA_1}=\bar{b}$.

7. Доведіть, що середини основ трапеції та точка перетину продовжень її бокових сторін належать одній прямій.

8. Дано паралелограм $ABCD$. O – точка перетину діагоналей, K – середина сторони BC, L – середина сторони DC. Виразіть вектори $\overline{AB}, \overline{AD}, \overline{CA}, \overline{LK}, \overline{LB}, \overline{KD}, \overline{BD}, \overline{OB}, \overline{OA}, \overline{OL}$ через вектори $\overline{AK}$ і $\overline{AL}$.

9. Точки A_1, B_1, C_1 – середини сторін BC, CA, AB трикутника ABC. Доведіть, що $\overline{AA_1}+\overline{BB_1}+\overline{CC_1}=\bar{0}$.

10. Точка M_1 – середина відрізка A_1B_1, точка M_2 – середина відрізка A_2B_2. Доведіть векторну рівність $\overline{M_1M_2}=\dfrac{1}{2}\left(\overline{A_1A_2}+\overline{B_1B_2}\right)$.

11. На сторонах AB, BC, AD, DC паралелограма $ABCD$ обрано відповідно точки A_1, B_1, C_1, D_1 так, що $AA_1 = \frac{4}{9}AB$, $BB_1 = \frac{4}{13}BC$, $AD_1 = \frac{9}{13}AD$, $DC_1 = \frac{5}{9}DC$. Доведіть, що $A_1B_1C_1D_1$ – паралелограм.

12. На стороні AD та діагоналі AC паралелограма $ABCD$ задано відповідно точки M та N так, що $AM = \frac{1}{5}AD$, $AN = \frac{1}{6}AC$. Доведіть, що точки M, N, B лежать на одній прямій.

13. Дано чотирикутник $KLMN$. Знайдіть у площині цього трикутника таку точку O, щоб виконувалась векторна рівність $\overline{OK} + \overline{OL} + \overline{OM} + \overline{ON} = \overline{0}$.

14. Дано тетраедр $ABCD$, точки M та N є серединами ребер AB та CD. Доведіть, що середини відрізків MC, MD, NA, NB є вершинами паралелограма.

15. На ребрах чотирикутної призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ задано точки: K, L, M, N, P, Q, R так, що $AK:KD = 1:3$, $DL:LC = 2:1$, $C_1M:MC = 5:3$, $B_1N:NC_1 = 2:7$, $A_1P:PB_1 = 3:1$, $D_1Q:QC_1 = 1:1$, $AR:RA_1 = 1:3$; O – точка перетину його діагоналей. Через вектори а) $\overline{AD}$, $\overline{AB}$, $\overline{AA_1}$; б) $\overline{CB}$, $\overline{CD}$, $\overline{CC_1}$ виразіть вектори $\overline{KL}$, $\overline{AK}$, $\overline{LM}$, $\overline{B_1M}$, $\overline{MN}$, $\overline{CN}$, $\overline{NP}$, $\overline{A_1P}$, $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$, $\overline{ON}$, $\overline{OR}$, $\overline{CO}$, $\overline{BO}$.

2 ЛІНІЙНА ЗАЛЕЖНІСТЬ І НЕЗАЛЕЖНІСТЬ ВЕКТОРІВ. ВЕКТОРНИЙ ПРОСТІР. ПОНЯТТЯ БАЗИСУ І КООРДИНАТ ВЕКТОРА У БАЗИСІ

Нехай дано n векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n$ та n дійсних чисел $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, тоді вектор $\bar{b} = \alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + ... + \alpha_n\bar{a}_n$ називається ***лінійною комбінацією*** векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n$ (з коефіцієнтами $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in R$).

Лінійна комбінація $\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + ... + \alpha_n\bar{a}_n$ векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n$ називається ***тривіальною***, якщо $\forall i = \overline{1,n}\ \alpha_i = 0$.

Лінійна комбінація $\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + ... + \alpha_n\bar{a}_n$ векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n$ називається ***нульовою***, якщо $\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + ... + \alpha_n\bar{a}_n = \bar{0}$.

Система векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n$ називається ***лінійно залежною***, якщо хоча б один з її векторів лінійно виражається через інші вектори системи. В противному випадку ця система називається ***лінійно залежною***.

Лема 2.1 Система секторів, яка містить хоча б один нульовий вектор, лінійно залежна.

Лема 2.2 Система векторів, яка містить лінійно залежну підсистему, лінійно залежна.

Лема 2.3 Всяка підсистема лінійно незалежної системи сама лінійно незалежна.

Теорема 2.1 (Критерій лінійної залежності) Система векторів лінійно залежна тоді і тільки тоді, коли існує хоча б одна нульова, але нетривіальна лінійна комбінація всіх її векторів.

Наслідок (Критерій лінійної незалежності) Система векторів лінійно незалежна тоді і тільки тоді, коли довільна нульова лінійна комбінація її векторів тривіальна.

Теорема 2.2 Два вектори лінійно залежні тоді й тільки тоді, коли вони колінеарні.

Наслідок. Два неколінеарних вектори лінійно незалежні.

Три вектора $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ називаються компланарними, якщо вони паралельні одній площині.

Теорема 2.3 Три вектори лінійно залежні тоді й тільки тоді, коли вони компланарні.

Наслідок. Три некомпланарних вектори лінійно незалежні.

Векторним простором називається така непуста множина V векторів, у якій довільна лінійна комбінація векторів, що належать цій множині, також належить їй.

Теорема 2.4 Будь-які чотири і більше векторів у просторі геометричних векторів лінійно залежні.

Базисом векторного простору називається довільна впорядкована максимальна лінійно незалежна система його векторів. Інакше кажучи, базис векторного простору V – це така впорядкована система $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n$ його векторів, якій притаманні такі властивості:

1. система векторів $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n$ лінійно незалежна;

2. приєднання до системи $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n$ довільного вектора $\bar{x}$ простору V дає лінійно залежну систему $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n, \bar{x}$.

Число векторів базиса векторного простору V називається розмірністю простору V та позначається $dimV$.

Теорема 2.6 (Про розкладання вектору за базисом) Кожний вектор векторного простору V єдиним чином лінійно виражається через вектори довільного його базиса.

Теорема 2.7 Будь-які два базиси одного векторного простору мають однакову кількість векторів.

Нехай вектори $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n$ утворюють базис лінійного векторного простору V та для вектора $\bar{x} \in V$ маємо $\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + ... + x_n\bar{e}_n$. Остання рівність називається ***розкладом вектора*** $\bar{x}$ за базисом $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n$, а коефіцієнти $x_1, x_2, \ldots, x_n$ цього розкладу називаються ***координатами вектора*** $\bar{x}$ у цьому базисі.

Кожний вектор векторного простору єдиним чином визначається своїми координатами в якому-небудь базисі. Це дозволяє (при фіксованому базисі) ототожнювати вектор $\bar{x}$ з рядком $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ своїх координат у даному базисі. При цьому використовують запис $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Теорема 2.8 Нехай дано базис $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n$ лінійного векторного простору V. Тоді координати суми двох векторів дорівнюють сумі відповідних координат векторів-доданків, а координати добутку вектора на число відповідно дорівнюють добуткам координат вектора на дане число.

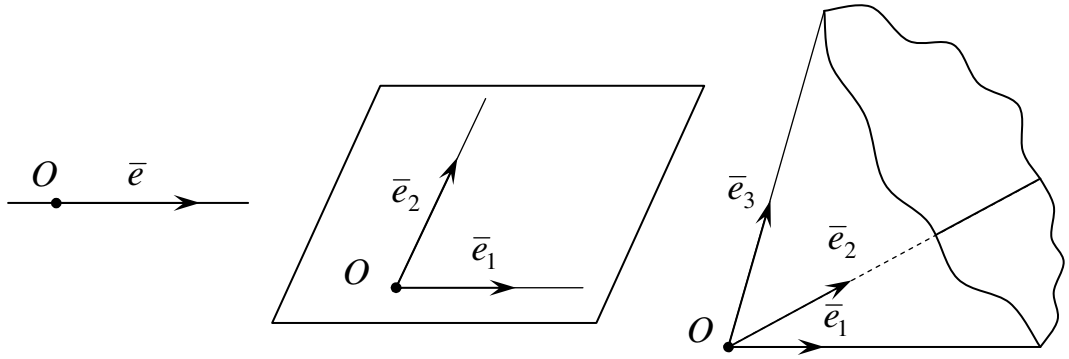
Базис векторного простору V називається ***прямокутним***, якщо всі його вектори взаємно перпендикулярні. У противному випадку базис називається ***косокутним***. Прямокутний базис, який складається з одиничних векторів, називається ***ортонормованим*** або ***декартовим***.

Репером (або ***афінним репером***) називається фігура, що складається з деякої точки O, яка називається початком репера, та деякого базиса. Репер називається косокутним, прямокутним, ортонормованим (декартовим) якщо таким є його базис (рис. 2.1).

Координатами точки M відносно афінного репера J називаються координати її радіус-вектора $\bar{r}_M$ відносно базиса цього репера. Нехай $J = \{O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ – репер у просторі. Нехай $\bar{r}_M = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3$ або $\bar{r}_M = (x_1, x_2, x_3)$. Тоді за означення M має координати x_1, x_2, x_3, що позначається так $M(x_1, x_2, x_3)$. Ясно, що для репера $J = \{O, \bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ на площині виникає відповідність між її точками та парами чисел (x_1, x_2), а для репера $J = \{O, \bar{e}\}$ на прямій – відповідність між її точками і числами, так що точка M має на площині дві координати, а на прямій – одну.

Взаємно однозначна відповідність між точками простору (площини чи прямої) і упорядкованими наборами дійсних чисел, називається ***системою координат*** у просторі (на площині чи на прямій). Якщо ця відповідність

визначається так, як було описано вище, за допомогою афінного репера J, то ця система координат називається ***афінною системою координат*** у просторі (на площині або прямій), що визначається даним афінним репером J. Якщо репер є прямокутним або декартовим, то ця афінна система координат називається прямокутною або декартовою.



$J=\{O,\bar{e}\}$ $J=\{O,\bar{e}_1,\bar{e}_2\}$ $J=\{O,\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$

Рисунок 2.1 – Афінні репери на прямій, площині та у просторі

Базисні вектори декартової системи координату просторі зазвичай позначають $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$, на площині – $\bar{i},\bar{j}$, на прямій – $\bar{i}$.

Прямі, що проходять через початок репера та визначаються векторами репера, називаються осями координат або ***координатними осями***. Початок репера називається також ***початком координат*** (рис. 2.1).

Теорема 2.9 Нехай у деякому афінному репері $J=\{O,\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$ точки $A(x_A,y_A,z_A)$ та $B(x_B,y_B,z_B)$ є початком та кінцем вектора $\overline{AB}$, тоді $\overline{AB}=(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A)$.

Теорема 2.10 (Про ділення відрізка у даному відношенні) Нехай точки $A(x_A,y_A,z_A)$, $B(x_B,y_B,z_B)$ і $C(x_C,y_C,z_C)$ лежать на одній прямій. Якщо точка C ділить відрізок AB у відношенні λ, то справедливі співвідношення (координатна форма рівності (1.1)):

$$x_C=\frac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda},\ y_C=\frac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda},\ z_C=\frac{z_A+\lambda z_B}{1+\lambda}.$$

Наслідок (Координати середини відрізка) Якщо точка $C(x_C,y_C,z_C)$ є серединою відрізка AB між точками $A(x_A,y_A,z_A)$ та $B(x_B,y_B,z_B)$, то мають місце рівності:

$$x_C=\frac{x_A+x_B}{2},\ y_C=\frac{y_A+y_B}{2},\ z_C=\frac{z_A+z_B}{2}.$$

Тест для самоконтролю

1. $ABCD$ – квадрат. Сума яких із зазначених векторів є нульовим вектором?

А. $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ **Б.** $\overline{DC}$ і $\overline{AB}$ **В.** $\overline{AC}$ і $\overline{DA}$ **Г.** $\overline{BC}$ і $\overline{AD}$

2. Виберіть правильне твердження:

А. якщо точка M ділить відрізок AB у відношенні λ, то точка M ділить відрізок BA у відношенні $(-\lambda)$;

Б. точка M, що належить прямій M_1M_2, може ділити відрізок M_1M_2 у відношенні $\lambda < 0$;

В. якщо точка M – середина відрізка AB, то точка M ділить відрізок AB у відношенні $\lambda = \frac{1}{2}$;

Г. якщо точка M ділить відрізок AB у відношенні λ, то $\frac{BM}{MA} = \lambda$.

3. $ABCD$ – квадрат. Укажіть пари рівних векторів.

А. $\overline{AB}$ і $\overline{DC}$ **Б.** $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ **В.** $\overline{BC}$ і $\overline{DA}$ **Г.** $\overline{BC}$ і $\overline{AC}$

4. Точка M – середина відрізка AB, тоді точка M ділить відрізок AB у відношенні:

А. $\lambda = -\frac{1}{2}$ **Б.** $\lambda = \frac{1}{2}$ **В.** $\lambda = 1$ **Г.** $\lambda = 2$

5. $ABCD$ – паралелограм. Укажіть пари колінеарних векторів.

А. $\overline{AC}$ і $\overline{BD}$ **Б.** $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ **В.** $\overline{AB}$ і $\overline{BC}$ **Г.** $\overline{DA}$ і $\overline{BD}$

6. Точка M – середина відрізка AB. Укажіть вірну векторну рівність.

А. $\bar{r}_M = \frac{1}{2}(\bar{r}_A - \bar{r}_B)$ **Б.** $\bar{r}_M = \bar{r}_A - \bar{r}_B$ **В.** $\bar{r}_M = \frac{1}{2}(\bar{r}_A + \bar{r}_B)$ **Г.** $\bar{r}_M = \bar{r}_A + \bar{r}_B$

7. $ABCD$ – паралелограм. Укажіть пари не колінеарних векторів.

А. $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ **Б.** $\overline{AC}$ і $\overline{BD}$ **В.** $\overline{AB}$ і $\overline{DC}$ **Г.** $\overline{DA}$ і $\overline{BC}$

8. Точка M ділить відрізок AB у відношенні $\lambda = -\frac{1}{2}$. Укажіть вірну векторну рівність.

А. $\bar{r}_M = 2\bar{r}_A - \bar{r}_B$ **Б.** $\bar{r}_M = \frac{1}{2}(\bar{r}_A + \bar{r}_B)$ **В.** $\bar{r}_M = \frac{1}{2}(\bar{r}_A - \bar{r}_B)$ **Г.** $\bar{r}_M = 2\bar{r}_A + \bar{r}_B$

9. Точка M ділить відрізок AB у відношенні $\lambda = \frac{3}{2}$. Укажіть вірну векторну рівність.

А. $\bar{r}_M = \frac{1}{5}(2\bar{r}_A - 3\bar{r}_B)$ **Б.** $\bar{r}_M = \frac{1}{5}(2\bar{r}_A + 3\bar{r}_B)$ **В.** $\bar{r}_M = \frac{3}{2}(\bar{r}_A - \bar{r}_B)$ **Г.** $\bar{r}_M = \frac{3}{2}(\bar{r}_A + \bar{r}_B)$

10. Виберіть неправильне твердження:

А. якщо точка M ділить відрізок AB у відношенні λ, то $\frac{BM}{MA} = \lambda$;

Б. точка M, що лежить на прямій M_1M_2, може ділити відрізок M_1M_2 у відношенні $\lambda < 0$;

В. якщо точка M – середина відрізка AB, то точка M ділить відрізок AB у відношенні $\lambda = 1$;

Г. якщо точка M ділить відрізок AB у відношенні λ, то точка M ділить відрізок BA у відношенні $\frac{1}{\lambda}$.

11. Відомо, що $\bar{r}_M = -2\bar{r}_A + 3\bar{r}_B$. У якому відношенні точка M ділить відрізок AB?

А. $\frac{3}{2}$ **Б.** $-\frac{2}{3}$ **В.** $-\frac{3}{2}$ **Г.** $\frac{2}{3}$

12. Відомо, що точка M ділить відрізок AB у відношенні λ. У якому відношенні ця точка ділить відрізок BA?

А. $-\lambda$ **Б.** $\lambda+1$ **В.** $1-\lambda$ **Г.** $\frac{1}{\lambda}$

13. $ABCD$ – паралелограм. Точки M і N ділять навпіл сторони AB і BC відповідно. Скільки із зазначених систем векторів є лінійно залежними: $\{\overline{AM}, \overline{AN}\}$, $\{\overline{AN}, \overline{AC}\}$, $\{\overline{AM}, \overline{AB}\}$, $\{\overline{AB}, \overline{CD}\}$?

А. 1 **Б.** 2 **В.** 3 **Г.** 4

14. $ABCD$ – паралелограм. Координатами вектора $\overline{AB}$ в базисі $\{\overline{AD}, \overline{DC}\}$ будуть:

А. $(1,0)$ **Б.** $(-1,0)$ **В.** $(0,-1)$ **Г.** $(0,1)$

15. Вершину A тетраедра $OABC$ прийнято за полюс, вектори $\overline{AO}$, $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ – за базис. Координатами радіус-вектора центру ваги грані OAB тетраедра будуть:

А. $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$ **Б.** $\left(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)$ **В.** $\left(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ **Г.** $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

16. При яких значеннях λ і μ вектори $\bar{a}(-1, 2\mu, 3)$ і $\bar{b}(\lambda, 3, -2)$ будуть колінеарні?

А. $\lambda = \frac{3}{2}$, $\mu = -\frac{9}{4}$ **Б.** $\lambda = -\frac{2}{3}$, $\mu = -\frac{9}{4}$ **В.** $\lambda = \frac{2}{3}$, $\mu = \frac{9}{4}$ **Г.** $\lambda = \frac{2}{3}$, $\mu = -\frac{9}{4}$

17. $ABCD$ – паралелограм. Точки M і N ділять навпіл сторони AB і BC відповідно. Скільки із зазначених систем векторів є лінійно незалежними: $\{\overline{AM}, \overline{AN}\}$, $\{\overline{AN}, \overline{AC}\}$, $\{\overline{AM}, \overline{AB}\}$, $\{\overline{AB}, \overline{CD}\}$?

А. 1 **Б.** 2 **В.** 3 **Г.** 4

18. Лінійно незалежною є система векторів ($\bar{a} \neq \bar{0}$) …

А. $\{\bar{d}_1 = \bar{a}, \bar{d}_2 = \bar{0}\}$ **Б.** $\{\bar{d}_1 = \bar{a}, \bar{d}_2 = -\bar{a}\}$ **В.** $\{\bar{d}_1 = \bar{a}\}$ **Г.** $\{\bar{d}_1 = \bar{0}, \bar{d}_2 = -\bar{a}\}$

19. Точка M ділить відрізок AB у відношенні $\lambda = -\frac{1}{2}$. Укажіть координати точки M, якщо $A(1; 2; 3)$, $B(-1; -2; -3)$.

А. $(0; 0; 0)$ **Б.** $(-3; -6; -9)$ **В.** $(1; 2; 3)$ **Г.** $(3; 6; 9)$

20. Точка M ділить відрізок AB у відношенні $\lambda = \frac{3}{2}$. Укажіть координати точки A, якщо $M(1; 2; 3)$, $B(-1; -2; -3)$.

А. $(-4; -8; -12)$ **Б.** $(1; 2; 3)$ **В.** $(4; 8; 12)$ **Г.** $(-2; -4; -6)$

21. Точка M ділить відрізок AB у відношенні $\lambda = -\frac{2}{3}$. Укажіть координати

точки B, якщо $A(1;\,2;\,3)$, $M(-1;\,-2;\,-3)$.

А. $(-2;\,-4;\,-6)$ **Б.** $(1;\,2;\,3)$ **В.** $(4;\,8;\,12)$ **Г.** $(2;\,4;\,6)$

22. На матеріальну точку діють дві сили $\overline{F}_1 = -2\overline{a}$ і $\overline{F}_2 = 3\overline{b}$, де $\overline{a}(5;-2;\,3)$, $\overline{b}(1;\,0;\,-4)$. Координатами їх рівнодійної будуть

А. $(-7;\,7;\,-18)$ **Б.** $(-7;\,4;\,6)$ **В.** $(-13;\,4;\,6)$ **Г.** $(-7;\,4;\,-18)$

23. Дано вектори $\overline{a}(-1;\,3;\,2)$, $\overline{b}(0;\,1;\,4)$. Координатами вектора $\dfrac{3\overline{a}-2\overline{b}}{4}$ будуть

А. $\left(-\frac{3}{4};\frac{7}{4};-\frac{1}{2}\right)$ **Б.** $\left(-\frac{3}{4};2;-\frac{1}{2}\right)$ **В.** $\left(\frac{3}{4};\frac{7}{4};-\frac{1}{2}\right)$ **Г.** $\left(-\frac{3}{4};\frac{7}{4};-\frac{1}{4}\right)$

24. Відомо, що $\dim V = 3$. Яку максимальну кількість лінійно незалежних векторів можна указати в цьому просторі?

А. 0 **Б.** 1 **В.** 2 **Г.** 3

Відповіді: 1. А. 2. Г. 3. А. 4. В. 5. Б. 6. В. 7. Б. 8. А. 9. Б. 10. Б. 11. В. 12. Г. 13. Б. 14. Г. 15. А. 16. Г. 17. Б. 18. В. 19. Г. 20. В. 21. Г. 22. Г. 23. А. 24. Г.

Приклади розв'язування задач

1. Система векторів $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ містить нульовий вектор. З'ясуйте, чи є вектори цієї системи лінійно залежними або лінійно незалежними?

Розв'язання:

Без обмеження загальності міркувань можна припустити, що $\overline{a}_1 = \overline{0}$, тоді, $1\cdot\overline{a}_1 + 0\cdot\overline{a}_2 + ... + 0\cdot\overline{a}_n = \overline{0}$. У цій лінійній комбінації векторів $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ коефіцієнт при першому векторі відмінний від нуля. Отже, за теоремою 2.1 розглянуті вектори лінійно залежні. Таким чином, система лінійно незалежних векторів не може містити нульовий вектор.

Висновок: система, що містить нульовий вектор, лінійно залежна.

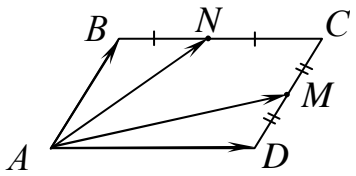


Рисунок 2.1 – Ілюстрація до прикладу 2

2. В паралелограмі $ABCD$ точка M – середина DC, N – середина BC. Знайдіть лінійну залежність векторів $\overline{AM}$, $\overline{AN}$, $\overline{CB}$.

Розв'язання:

Виходячи з геометричного змісту лінійної залежності трьох векторів, зрозуміло, що вектори $\overline{AM}$, $\overline{AN}$, $\overline{CB}$ лінійно залежні. Знайдемо яку-небудь нульову, але нетривіальну лінійну комбінацію цих векторів.

Виберемо базис $\{\overline{AB}, \overline{AD}\}$. Розкладемо вектори $\overline{AM}$, $\overline{AN}$, $\overline{CB}$ за базисом, отримаємо

$$\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AB} + \overline{AD},\ \overline{AN} = \frac{1}{2}\overline{AD} + \overline{AB},\ \overline{CB} = -\overline{AD}.$$

Складемо нульову лінійну комбінацію векторів $\overline{AM}$, $\overline{AN}$, $\overline{CB}$ з коефіцієнтами α, β, γ

$$\alpha\overline{AM} + \beta\overline{AN} + \gamma\overline{CB} = \overline{0}.$$

Підставимо в цю комбінацію знайдені розклади цих векторів за базисом та зберемо коефіцієнти при базисних векторах, отримаємо

$$\left(\frac{1}{2}\alpha+\beta\right)\overline{AB}+\left(\alpha+\frac{1}{2}\beta-\gamma\right)\overline{AD}=\bar{0}.$$

Так як вектори $\overline{AB}$ і $\overline{AD}$ лінійно незалежні, то будь-яка їх нульова лінійна комбінація повинна бути тривіальною. Тому маємо

$$\begin{cases}\frac{1}{2}\alpha+\beta=0,\\ \alpha+\frac{1}{2}\beta-\gamma=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-2\beta,\\ \alpha=\gamma-\frac{1}{2}\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-2\beta,\\ \gamma=-\frac{3}{2}\beta.\end{cases}$$

Нас цікавить який-небудь ненульовий набір чисел α,β,γ, що задовольняє системі, тому покладемо $\beta=-2$. Тоді $\alpha=4$, $\gamma=3$. Таким чином, знайдено нетривіальну нульову комбінацію векторів $\overline{AM}$, $\overline{AN}$, $\overline{CB}$: $4\overline{AM}-2\overline{AN}+3\overline{CB}=\bar{0}$.

3. Вектори $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ не компланарні. Чи будуть компланарними вектори $\bar{l},\bar{m},\bar{n}$: $\bar{l}=\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$, $\bar{m}=\bar{a}-\bar{b}$, $\bar{n}=3\bar{a}-\bar{b}+\bar{c}$. Якщо так, то знайдіть їх лінійну залежність.

Розв'язання:

Виходячи з геометричного змісту лінійної залежності трьох векторів, зрозуміло, що вектори $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ лінійно незалежні. Складемо нульову лінійну комбінацію векторів $\bar{l},\bar{m},\bar{n}$ з коефіцієнтами α,β,γ

$$\alpha\bar{l}+\beta\bar{m}+\gamma\bar{n}=\bar{0}.$$

Підставимо в цю комбінацію їх розклади і зберемо коефіцієнти при векторах $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$:

$$(\alpha+\beta+3\gamma)\bar{a}+(\alpha-\beta-\gamma)\bar{b}+(\alpha+\gamma)\bar{c}=\bar{0}.$$

Так як вектори $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ лінійно незалежні, то будь-яка їх нульова лінійна комбінація повинна бути тривіальною. Тому маємо

$$\begin{cases}\alpha+\beta+3\gamma=0,\\ \alpha-\beta-\gamma=0,\\ \alpha+\gamma=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=2\alpha,\\ \gamma=-\alpha.\end{cases}$$

Нас цікавить який-небудь ненульовий набір чисел α,β,γ, тому покладемо $\alpha=1$. Тоді $\beta=2$, $\gamma=-1$. Таким чином, вектори $\bar{l},\bar{m},\bar{n}$ компланарні та їх лінійну залежність можна записати у вигляді

$$\bar{l}+2\bar{m}-\bar{n}=\bar{0}.$$

4. Знайдіть вектор $\bar{a}=\overline{AB}$, якщо $A(1;3;2)$ і $B(5;8;-1)$.

Розв'язання:

Координати точки співпадають з координатами її радіус-вектора, тому можемо записати: $\bar{r}_A(1;3;2)$, $\bar{r}_B(5;8;-1)$. Знайдемо координати шуканого вектора:

$$\bar{a} = \overline{AB} = \bar{r}_B - \bar{r}_A = (4; 5; -3).$$

5. Знайдіть координати P – центру ваги трикутника ABC, якщо відомі координати його вершин: $A(-4; 2)$, $B(2; 0)$, $C(1; 3)$.

Розв'язання:

Центр тяжіння трикутника – це точка перетину його медіан. Тому спочатку знайдемо координати другого кінця однієї з медіан, наприклад CD:

$$x_D = \frac{x_A + x_B}{2} = -1,\ y_D = \frac{y_A + y_B}{2} = 1,\ D(-1; 1).$$

Центр ваги ділить кожну медіану у відношенні 2:1, рахуючи від вершини трикутника:

$$x_P = \frac{x_C + 2x_D}{1+2} = \frac{1 + 2\cdot(-1)}{3} = -\frac{1}{3},\ y_P = \frac{y_C + 2y_D}{1+2} = \frac{3 + 2\cdot 1}{3} = \frac{5}{3}.$$

Отже, $P\left(-\frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right)$.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Виразіть радіус-вектор $\bar{r}_D$ вершини D паралелограма $ABCD$ через радіус-вектори $\bar{r}_A$, $\bar{r}_B$, $\bar{r}_C$ вершин A, B, C.

2. Як записати умову колінеарності трьох точок A, B, C через радіус-вектори $\bar{r}_A, \bar{r}_B, \bar{r}_C$ цих точок? Перевірте, чи лежать точки A, B, C на одній прямій, якщо відомі радіус-вектори цих точок: $\bar{r}_A = 2\bar{i} + 4\bar{j} + \bar{k}$, $\bar{r}_B = 3\bar{i} + 7\bar{j} + 5\bar{k}$, $\bar{r}_C = 4\bar{i} + 10\bar{j} + 9\bar{k}$.

3. Доведіть, що відрізки, що сполучають середини протилежних ребер тетраедра, проходять через одну точку та поділяються в ній навпіл.

4. Як розташовані точки A, B, C, якщо їх радіус-вектори $\bar{r}_A, \bar{r}_B, \bar{r}_C$ пов'язані співвідношенням $\alpha\bar{r}_A + \beta\bar{r}_B + \gamma\bar{r}_C = \bar{0}$, причому $\alpha + \beta + \gamma = 0$ та $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \neq 0$?

5. Точки M та M_1 – центри тяжіння трикутників ABC та $A_1B_1C_1$ відповідно. Доведіть векторну рівність $\overline{MM_1} = \frac{1}{3}\left(\overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1}\right)$.

6. На сторонах CA і CB (або на їх продовженнях) трикутника ABC дано відповідно точки B_1 і A_1, які поділяють ці сторони у відношеннях $\overline{CB_1} : \overline{B_1A} = \lambda$, $\overline{CA_1} : \overline{A_1B} = \mu$. Доведіть, що при довільному виборі полюсу O у просторі радіус-вектор $\bar{r}$ точки перетину прямих AA_1 і BB_1 має вид $\bar{r} = \frac{\lambda\bar{r}_A + \mu\bar{r}_B + \bar{r}_C}{\lambda + \mu + 1}$, де $\bar{r}_A, \bar{r}_B, \bar{r}_C$ радіус-вектори точок A, B, C.

7. Дано довільний трикутник ABC зі сторонами $AB = c,\ BC = a,\ AC = b$. Доведіть, що радіус-вектор $\bar{r}$ точки перетину бісектрис трикутника ABC

можна виразити через радіус-вектори $\bar{r}_A, \bar{r}_B, \bar{r}_C$ вершин A, B, C таким чином: $\bar{r} = \dfrac{a\bar{r}_A + b\bar{r}_B + c\bar{r}_C}{a+b+c}$.

8. Виразіть вектор $\overline{CD}$ висоти прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90^\circ$) через вектори $\overline{CA}$ і $\overline{CB}$ та їх довжини a і b.

9. Два подібних трикутника мають спільну вершину $A(3;-6)$ та при ній спільний кут. Знайдіть дві інші вершини більшого трикутника, якщо відомі вершини меншого $B(6{,}2;-3{,}6)$ та $C(5;1)$, а відношення відповідних сторін дорівнює $5:2$.

10. Три вершини A_1, B_1, C_1 паралелограма $A_1B_1C_1D_1$ належать відповідно сторонам AB, BC, AC трикутника ABC, причому $AA_1 = 0{,}3AB$, $BB_1 = 0{,}6BC$, $AC_1 = 0{,}5AC$. Виразіть радіус-вектор $\bar{r}_{D_1}$ вершини D_1 через радіус-вектори $\bar{r}_A, \bar{r}_B, \bar{r}_C$.

11. На прямій AB знайдіть всі точки M, для яких:
а) $\overline{AM} : \overline{MB} = \overline{BM} : \overline{MA}$, б) $\overline{AM} : \overline{MB} = \left(\overline{BM} : \overline{MA}\right)^{-1}$.

12. Дано відрізки AC і CB. Точки $M \in AB, N \in CD$ ділять їх у відношенні k. Виразіть вектор $\overline{MN}$ через вектори $\overline{AC}$ і $\overline{BD}$.

13. У трикутнику ABC бісектриса AD ділить сторону BC у відношенні $\lambda = \dfrac{1}{2}$. У якому відношенні медіана CE ділить цю бісектрису?

14. Точки D, E, F, що лежать на сторонах трикутника ABC, поділяють відповідно сторони BC, CA, AB у відношеннях $\lambda_D = 3$, $\lambda_E = \dfrac{2}{3}$, $\lambda_F = \dfrac{1}{2}$. Доведіть, що прямі AD, BE, CF перетинаються в одній точці.

15. Спираючись на розв'язок задачі 1 пункту 1, знайдіть лінійну залежність векторів:
а) $\overline{CE}$, $\overline{AE}$, $\overline{FB}$; б) $\overline{DA}$, $\overline{CA}$, $\overline{FB}$.

16. Спираючись на розв'язок задачі 4 пункту 1, знайдіть лінійну залежність векторів:
а) $\overline{PA}$, $\overline{QB}$, $\overline{NQ}$, $\overline{MB}$; б) $\overline{MN}$, $\overline{PN}$, $\overline{QA}$, $\overline{CP}$.

17. Спираючись на розв'язок задачі 8 пункту 1, знайдіть лінійну залежність векторів:
а) $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{CA}$; б) $\overline{BD}$, $\overline{OB}$, $\overline{OA}$, $\overline{OL}$; в) $\overline{LK}$, $\overline{LB}$, $\overline{KD}$.

18. Знайдіть, якщо вона існує лінійну залежність векторів:
а) $\bar{l} = 2\bar{a} - \bar{b} - \bar{c}$, $\bar{m} = -\bar{a} + 2\bar{b} - \bar{c}$, $\bar{n} = -\bar{a} - \bar{b} + 2\bar{c}$;
б) $\bar{l} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$, $\bar{m} = \bar{a} - \bar{b}$, $\bar{n} = 3\bar{a} - \bar{b} + \bar{c}$;
в) $\bar{l} = 2\bar{a} - \bar{b} + \bar{c}$, $\bar{m} = \bar{a} + \bar{b} - 2\bar{c}$, $\bar{n} = \bar{a} - 2\bar{b} + 3\bar{c}$,
де вектори $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ не компланарні.

19. Знайдіть лінійну залежність векторів $\bar{a}(1,3,5)$, $\bar{b}(0,4,5)$, $\bar{c}(7,-8,4)$, $\bar{d}(2,-1,3)$.

20. Дано правильний шестикутник $ABCDEF$, точка O – його центр – прийнята за початок координат, а вектори $\overline{OA}, \overline{OB}$ – за базис. Знайдіть у цьому репері координати всіх вершин шестикутника.

21. У тетраедрі $ABCD$ точки M і N є серединами ребер DA і BC відповідно, а точки P, Q поділяють сторону DC на три рівні частини. Приймемо за початок координат точку B, а вектори $\overline{BM}$, $\overline{BP}$, $\overline{BC}$ – за базис. Знайдіть у цьому репері координати всіх вершин тетраедра.

22. Дано паралелограм $ABCD$. O – точка перетину діагоналей, K – середина сторони BC, L – середина сторони DC. Приймемо за початок координат точку B, а вектори $\overline{BK}$, $\overline{BO}$ – за базис. Знайдіть у цьому репері координати всіх вершин паралелограму, точок O та L.

23. На прямій, що визначається точками $A(1,0,4)$ та $B(3,-1,2)$, знайдіть таку точку C, щоб:
а) точка A лежала між C і B, причому $AC = 3AB$;
б) точка B лежала між A і C, причому $AC = 3AB$.

24. У якому відношенні площина Oxz ділить відрізок AB, якщо $A(2,-7,1)$, $B(4,5,-2)$.

25. Знайдіть координати точки B, якщо відомо відношення λ, у якому площина Oxz ділить відрізок AB: $\lambda = \frac{1}{2}$, $A(2,-7,1)$.

26. Чи лежать точки $A(4,-1)$, $B(6,-7)$, $C(3,2)$ на одній прямій?

27. Доведіть, що вектори $\bar{a}(1,-1,2)$, $\bar{b}(2,2,-1)$, $\bar{c}(3,7,-7)$ утворюють базис. Знайдіть координати вектора $\bar{d}(2,1,0)$ у цьому базисі.

28. Дано три вектори $\bar{a}(3,-1)$, $\bar{b}(1,-2)$, $\bar{c}(-1,7)$. Визначте коефіцієнти розкладу вектора $\bar{p} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$ за базисом $\{\bar{a}, \bar{b}\}$.

29. Знайдіть розклад вектора $\bar{c}(11,-6,5)$ за базисом $\bar{p}(3,-2,1)$, $\bar{q}(-1,1,-2)$, $\bar{r}(2,1,-3)$. Які координати має вектор $\bar{c}$ у базисі $\{\bar{q}, \bar{r}, \bar{p}\}$?

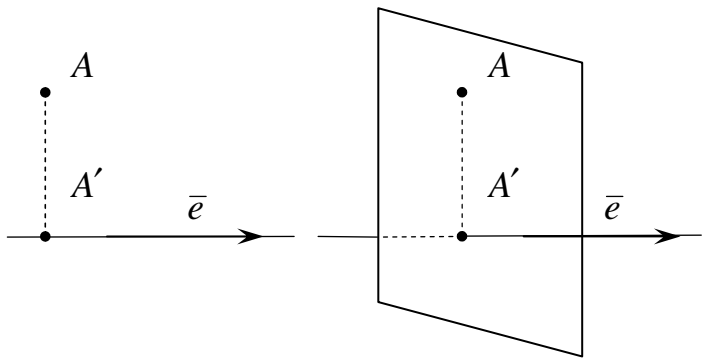
30. Дано вектори $\bar{a}(2,3)$, $\bar{b}(1,-3)$, $\bar{c}(-1,3)$. При якому значенні α вектори $\bar{p} = \bar{a} + \alpha\bar{b}$ та $\bar{q} = \bar{a} + \alpha\bar{c}$ колінеарні?

31. Знайдіть числа α, β, γ, для яких вектори $\alpha\bar{a}, \beta\bar{b}, \gamma\bar{c}, \bar{d}$ утворюють замкнену ламану лінію, де $\bar{a}(3,-2,1)$, $\bar{b}(-1,1,-2)$, $\bar{c}(2,1,-3)$, $\bar{d}(11,-6,5)$.

3 КУТ МІЖ ДВОМА ВЕКТОРАМИ. ВЕКТОРНА ТА СКАЛЯРНА ПРОЕКЦІЇ ВЕКТОРА НА ВІСЬ. ОРТОГОНАЛЬНА ПРОЕКЦІЯ ВЕКТОРА

Нехай дано одиничний вектор $\bar{e}$. ***Віссю вектора*** $\bar{e}$ називається всяка пряма, паралельна вектору $\bar{e}$. ***Напрямком осі*** називається напрямок вектора $\bar{e}$.

Ортогональною проекцією (або просто ***проекцією***) точки A на вісь вектора $\bar{e}$ називається основа перпендикуляра $A' = np_{\bar{e}}A$ перпендикуляра, який проведено з точки A на цю вісь (рис. 3.1 а).



а) б)

Рисунок 3.1 Побудова ортогональної проекції точки

Очевидно, що у просторі проекція $A' = np_{\bar{e}}A$ є точкою перетину осі з площиною, перпендикулярною цій осі, та такою, що проходить через точку A (рис 3.1 б).

Векторною проекцією вектора $\overline{AB}$ на вісь вектора $\bar{e}$ називається вектор $\overline{A'B'} = \overline{np}_{\bar{e}}\,\overline{AB}$, початок A' та кінець B' якого є відповідно проекціями на цю вісь початку та кінця вектора $\overline{AB}$ (рис. 3.2).

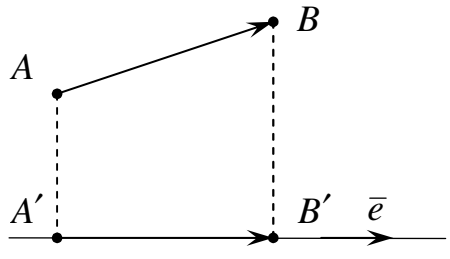


Рисунок 3.2 – Векторна проекція вектора $\overline{AB}$

Лема 3.1 (Про проекції вектора на різні осі) Векторні проекції одного і того ж вектора $\overline{AB}$ на різні осі вектора $\bar{e}$ дорівнюють одна одній.

Лема 3.2 (Про проекції рівних векторів) Векторні проекції рівних векторів на одну і ту саму вісь дорівнюють одна одній.

Скалярною проекцією (або просто ***проекцією***) вектора $\bar{a}$ на вісь $\bar{e}$ називається координата векторної проекції $\overline{np}_{\bar{e}}\bar{a}$ відносно базиса $\bar{e}$ осі.

Теорема (Властивості проекцій) Проекціям вектора на вісь притаманні такі властивості:

1. $np_{\bar{e}}\left(\bar{a}+\bar{b}\right) = np_{\bar{e}}\bar{a} + np_{\bar{e}}\bar{b}$;
2. $np_{\bar{e}}\left(\lambda\cdot\bar{a}\right) = \lambda\cdot np_{\bar{e}}\bar{a}$;
3. $np_{\bar{e}}\bar{a} = \left|\bar{a}\right|\cdot\cos\varphi,\quad \varphi = \angle\left(\bar{a},\bar{e}\right)$.

4 СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК ДВОХ ВЕКТОРІВ, ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

Скалярним добутком векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називається число

$$(\bar{a},\bar{b}) = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\varphi,$$

де $\varphi = \angle(\bar{a},\bar{b})$ – кут між векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$.

Теорема 4.1 (Властивості скалярного добутку) Скалярному добутку притаманні наступні властивості:

1. $(\bar{a},\bar{b}) = (\bar{b},\bar{a})$ (комутативність або симетричність).
2. $(\bar{a}_1 + \bar{a}_2,\bar{b}) = (\bar{a}_1,\bar{b}) + (\bar{a}_2,\bar{b})$.
3. $(\lambda\bar{a},\bar{b}) = (\bar{a},\lambda\bar{b}) = \lambda(\bar{a},\bar{b})$.
4. $|\bar{a}| = \sqrt{(\bar{a},\bar{a})}$.
5. $\cos\varphi = \dfrac{(\bar{a},\bar{b})}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|}$, $\varphi = \angle(\bar{a},\bar{b})$.
6. $(\bar{a},\bar{b}) = |\bar{a}| \cdot np_{\bar{a}}\bar{b} = |\bar{b}| \cdot np_{\bar{b}}\bar{a}$.
7. $(\bar{a},\bar{b}) = 0 \Leftrightarrow \bar{a} \perp \bar{b}$.

Теорема 4.2 (Про обчислення скалярного добутку в декартовому базисі) Скалярний добуток двох векторів, заданих у декартовому базисі, дорівнює сумі добутків відповідних координат співмножників, тобто для $\bar{a} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}$, $\bar{b} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}$:

$$(\bar{x},\bar{y}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \tag{4.1}$$

Наслідок 4.1 Необхідною та достатньою умовою ортогональності векторів $\bar{a} = (x_1, y_1, z_1)$ та $\bar{b} = (x_2, y_2, z_2)$ у декартовому базисі є рівність:

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0. \tag{4.2}$$

Наслідок 4.2 Довжина вектора $\bar{a} = (x, y, z)$ у декартовому базисі обчислюється за формулою:

$$|\bar{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{4.3}$$

Наслідок 4.3 У декартовому базисі кут між двома векторами $\bar{a} = (x_1, y_1, z_1)$ та $\bar{b} = (x_2, y_2, z_2)$ визначається за формулою:

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \tag{4.4}$$

Наслідок 4.4 Декартові координати вектора $\bar{a} = (x, y, z)$ дорівнюють скалярним добуткам цього вектора на одиничні вектори базису:

$$x = (\bar{x},\bar{i}),\ y = (\bar{y},\bar{j}),\ z = (\bar{z},\bar{k}).$$

Наслідок 4.5 Декартові координати вектора $\bar{a} = (x, y, z)$ дорівнюють проекціям цього вектора на осі декартової системи координат:

$$x = np_{\bar{i}}\bar{a},\ y = np_{\bar{j}}\bar{a},\ z = np_{\bar{k}}\bar{a}.$$

Наслідок 4.6 Напрямні косинуси вектора $\bar{a}=(x,y,z)$ у декартовому базисі визначаються за формулами:

$$cos\angle(\bar{a},\bar{i})=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},cos\angle(\bar{a},\bar{j})=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$cos\angle(\bar{a},\bar{k})=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Приклади розв'язування задач

1. Задано вектори $\bar{a}=m\bar{i}+8\bar{j}+4\bar{k}$ і $\bar{b}=4\bar{i}+m\bar{j}-7\bar{k}$, де $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ – ортонормований базис. При якому значенні m ці вектори перпендикулярні?

Розв'язання:

Скористаємось формулою (4.2):

$$4m+8m-28=0,\ m=\frac{7}{3}.$$

Відповідь: $m=\frac{7}{3}$.

2. Знайдіть кут між векторами $\bar{a}=\bar{i}+2\bar{j}+3\bar{k}$ і $\bar{b}=6\bar{i}+4\bar{j}-2\bar{k}$, де $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ – ортонормований базис.

Розв'язання:

Скористаємось формулою (4.4):

$$\cos\varphi=\frac{1\cdot6+2\cdot4+3\cdot(-2)}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}\cdot\sqrt{6^2+4^2+(-2)^2}}=\frac{8}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{56}}=\frac{2}{7},\ \varphi=\arccos\frac{2}{7}.$$

Відповідь: $\varphi=\arccos\frac{2}{7}$.

3. Знайдіть орт вектора $\bar{a}=2\bar{i}+4\bar{j}+4\bar{k}$.

Розв'язання:

Знайдемо довжину вектора $\bar{a}$ за формулою (4.3): $|\bar{a}|=\sqrt{2^2+4^2+4^2}=6$.

Оскільки орт вектора $\bar{a}_0=\frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}$, то $\bar{a}_0=\frac{1}{3}\bar{i}+\frac{2}{3}\bar{j}+\frac{2}{3}\bar{k}$.

Відповідь: $\bar{a}_0\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$.

4. До точки прикладені дві сили $\bar{P}$ і $\bar{Q}$, які діють під кутом 120°, причому $|\bar{P}|=7$, $|\bar{Q}|=4$. Знайдіть величину рівнодійної сили $\bar{R}$.

Розв'язання:

Оскільки $\bar{R}=\bar{P}+\bar{Q}$, то

$$|\bar{R}|=\sqrt{\bar{R}^2}=\sqrt{(\bar{P}+\bar{Q})^2}=\sqrt{\bar{P}^2+2\bar{P}\bar{Q}+\bar{Q}^2}=$$

$$= \sqrt{|\overline{P}|^2 + 2|\overline{P}| \cdot |\overline{Q}| \cdot \cos 120^\circ + |\overline{Q}|^2} = \sqrt{37}.$$

Відповідь: $|\overline{R}| = \sqrt{37}$.

5. Обчисліть роботу, що виконується силою $\overline{F} = (3; -5; 2)$, коли точка прикладання переміщується із початку в кінець вектора $\overline{S}(2, -5, 7)$.

Розв'язування:

Якщо вектор зображає силу $\overline{F}$, точка прикладання якої переміщується із початку в кінець вектора $\overline{S}$, то робота A цієї сили визначається рівністю

$$A = (\overline{F}, \overline{S}) = 3 \cdot 2 + (-5) \cdot (-5) + 2 \cdot 7 = 45.$$

Відповідь: $A = 45$.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ утворюють кут $\varphi = \frac{2\pi}{3}$. Знаючи, що $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 4$, обчисліть: 1) $\overline{a} \cdot \overline{b}$; 2) $\overline{a}^2$; 3) $\overline{b}^2$; 4) $(\overline{a} + \overline{b})^2$; 5) $(3\overline{a} - 2\overline{b}) \cdot (\overline{a} + 2\overline{b})$; 6) $(\overline{a} - \overline{b})^2$; 7) $(3\overline{a} + 2\overline{b})^2$.

2. Дано, що $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 5$. Визначте, при якому значенні α вектори $\overline{a} + \alpha\overline{b}$ і $\overline{a} - \alpha\overline{b}$ будуть взаємно перпендикулярні.

3. Вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ взаємно перпендикулярні, вектор $\overline{c}$ утворює з ними кути, рівні $\frac{\pi}{3}$. Знаючи, що $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 5$, $|\overline{c}| = 8$, обчисліть: 1) $(3\overline{a} - 2\overline{b}) \cdot (\overline{b} + 3\overline{c})$; 2) $(\overline{a} + \overline{b} + \overline{c})^2$; 3) $(\overline{a} + 2\overline{b} - 3\overline{c})^2$.

4. Вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ утворюють кут $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Знаючи, що $|\overline{a}| = \sqrt{3}$, $|\overline{b}| = 1$, обчисліть кут між векторами $\overline{p} = \overline{a} + \overline{b}$ и $\overline{q} = \overline{a} - \overline{b}$.

5. Знайдіть кут між векторами $\overline{a} = 2\overline{e}_1 - \overline{e}_2 + 2\overline{e}_3$ та $\overline{b} = 4\overline{e}_1 + \overline{e}_2 - 3\overline{e}_3$, якщо $|\overline{e}_1| = 1, |\overline{e}_2| = 2, |\overline{e}_3| = 3, \angle(\overline{e}_1, \overline{e}_2) = \angle(\overline{e}_1, \overline{e}_3) = 60^\circ$, $\angle(\overline{e}_2, \overline{e}_2) = 90^\circ$.

6. Дано вектори $\overline{a}(4; -2; -4)$, $\overline{b}(6; -3; 2)$. Обчисліть: 1) $\overline{a} \cdot \overline{b}$; 2) $\sqrt{\overline{a}^2}$; 3) $\sqrt{\overline{b}^2}$; 4) $(2\overline{a} - 3\overline{b})(\overline{a} + 2\overline{b})$; 5) $(\overline{a} + \overline{b})^2$; 6) $(\overline{a} - \overline{b})^2$.

7. Дано точки $A(-1; 3; -7)$, $B(2; -1; 5)$ і $C(0; 1; -5)$. Обчисліть: 1) $(2\overline{AB} - \overline{CB}) \cdot (2\overline{BC} + \overline{BA})$; 2) $\sqrt{\overline{AB}^2}$; 3) $\sqrt{\overline{AC}^2}$.

8. Який кут утворюють одиничні вектори $\overline{s}$ та $\overline{t}$, якщо відомо, що вектори $\overline{p} = \overline{s} + 2\overline{t}$ та $\overline{q} = 5\overline{s} - 4\overline{t}$ взаємно перпендикулярні?

9. Чи рівносильні рівняння $\overline{a} = \overline{b}$ та $\overline{a} \cdot \overline{c} = \overline{b} \cdot \overline{c}$?

10. При якому взаємному розташуванні ненульових векторів $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ справедлива рівність $(\overline{a} \cdot \overline{b}) \cdot \overline{c} = (\overline{b} \cdot \overline{c}) \cdot \overline{a}$?

11. Якій умові повинні задовольняти вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$, щоб мала місце рівність

$\left|\bar{a}+\bar{b}\right|=\left|\bar{a}-\bar{b}\right|$?

12. Довжина гіпотенузи AB прямокутного трикутника ABC дорівнює c. Обчисліть суму $\overline{AB}\cdot\overline{AC}+\overline{BC}\cdot\overline{BA}+\overline{CA}\cdot\overline{CB}$.

13. У трикутнику ABC проведено медіани AD, BE, CF. Обчисліть $\overline{BC}\cdot\overline{AD}+\overline{CA}\cdot\overline{BE}+\overline{AB}\cdot\overline{CF}$.

14. Доведіть, що у трапеції сума квадратів діагоналей дорівнює сумі квадратів бічних сторін та подвоєного добутку основ.

15. Знайдіть суму квадратів медіан трикутника, якщо сума квадратів його сторін дорівнює k.

16. Знайдіть кути, що утворює діагональ куба з діагоналями якої-небудь його грані.

17. Знайдіть кут між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}(2;1;0)$ і $\bar{b}(0;-2;1)$.

18. Знайдіть таке число λ, щоб вектори $\bar{a}=\bar{i}+5\bar{j}-6\bar{k}$, $\bar{b}=2\bar{i}-\bar{j}+\lambda\bar{k}$ були ортогональні.

19. Знайдіть $np_{\bar{b}}\bar{a}$ та $np_{\bar{a}}\bar{b}$, якщо:

1) $\bar{a}(2,1)$, $\bar{b}(1,1)$; 2) $\bar{a}=2\bar{i}-\bar{j}$, $\bar{b}=\bar{i}+2\bar{j}$; 3) $\bar{a}(4,-3,2)$, $\bar{b}(1,1,1)$;

4) $\bar{a}=-4\bar{i}+\bar{j}-4\bar{k}$, $\bar{b}=2\bar{i}+2\bar{j}+\bar{k}$.

20. Дано два вектори $\bar{a}=2\bar{i}-\bar{j}+5\bar{k}$, $\bar{b}=3\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}$. Знайдіть вектор $\bar{x}$, що задовольняє умовам: $\bar{x}\cdot\bar{k}=0$, $\bar{x}\cdot\bar{a}=1$, $\bar{x}\cdot\bar{b}=4$.

21. Знайдіть вектор $\bar{x}$, який колінеарний вектору $\bar{a}=\bar{i}+\bar{j}-2\bar{k}$ та задовольняє умову $\bar{x}\cdot\bar{a}=3$.

22. Дано три вектори $\bar{a}(1,2,-3)$, $\bar{b}(5,1,2)$, $\bar{c}(-3,0,1)$. Знайдіть вектор $\bar{x}$, що задовольняє одночасно трьом умовам: $\bar{x}\cdot\bar{a}=-4$, $\bar{x}\cdot\bar{b}=5$, $\bar{x}\cdot\bar{c}=2$.

23. Дано два вектори $\bar{a}(8,4,1)$, $\bar{b}(2,-2,1)$. Знайдіть вектор $\bar{x}$, компланарний векторам $\bar{a}$ і $\bar{b}$, ортогональний вектору $\bar{a}$, рівний йому за довжиною та такий, що утворює з вектором $\bar{b}$ тупий кут.

24. Промінь утворює з векторами $\bar{i}$ та $\bar{j}$ кути, що дорівнюють відповідно $\frac{\pi}{4}$ та $\frac{\pi}{3}$, а з вектором $\bar{k}$ – тупий кут. Знайдіть цей кут.

25. Обчисліть координати вектора, довжина якого дорівнює 8, знаючи, що він утворює з вектором $\bar{i}$ кут $\frac{\pi}{4}$, а з вектором $\bar{k}$ – кут $\frac{\pi}{3}$, а з вектором $\bar{j}$ – гострий кут.

26. Дано вектори $\bar{a}(2;3;0)$, $\bar{b}(-1;2;2)$, $\bar{c}(3;1;0)$. Знайдіть:

1) $(3\bar{a}-4\bar{b})+(\bar{b}-3\bar{c})+(2\bar{c}-\bar{a})$; 2) $(\bar{a}+\bar{b}-\bar{c})(-2\bar{a}-3\bar{b})$; 3) $\left|\bar{a}+\bar{b}-\bar{c}\right|$;

4) $\angle(\bar{a},\bar{i})$; 5) $\angle(\bar{a}+\bar{b}-\bar{c},-2\bar{a}-3\bar{b})$;

27. Обчисліть проекцію вектора $\bar{a}=5\bar{i}+2\bar{j}+5\bar{k}$ на вісь, що визначається

вектором $\bar{b} = 2\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}$.

28. Дано три вектори $\bar{a}(7, -6, 1)$, $\bar{b}(2, -3, -6)$ і $\bar{c}(3, -4, 12)$. Обчисліть $np_{\bar{b}}(\bar{a} + \bar{c})$ та знайдіть $\overline{np}_{\bar{b}}(\bar{a} + \bar{c})$.

29. До однієї і тієї ж точки прикладені дві сили $\bar{f}_1$ та $\bar{f}_2$, кут між якими α. Знайдіть величину рівнодійної.

5 ВЕКТОРНИЙ ДОБУТОК ДВОХ ВЕКТОРІВ, ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

Трійка векторів називається ***упорядкованою***, якщо задано порядок слідування векторів один за одним. Тобто запис $\{\bar{a},\bar{b},\bar{c}\}$ означає, що в цій трійці вектор $\bar{c}$ слідує за вектором $\bar{b}$, який слідує за вектором $\bar{a}$.

Упорядкована трійка некомпланарних векторів у просторі називається ***додатно орієнтованою*** (або ***правою трійкою***), якщо найкоротший поворот від першого вектора трійки до другого видно з кінця третього вектора таким, що відбувається проти ходу годинникової стрілки (рис. 5.1). У противному випадку (рис. 5.2) (тобто коли поворот видно таким, що відбувається за годинниковою стрілкою) трійка називається ***лівою*** (або ***від'ємно орієнтованою***).

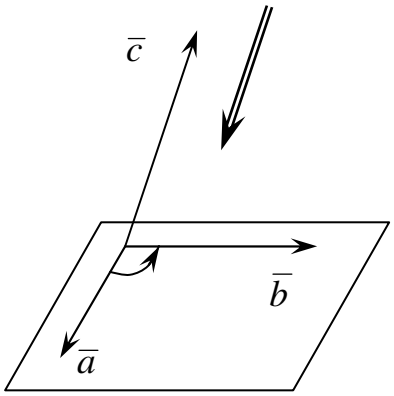


Рисунок 5.1 – Права трійка $\{\bar{a},\bar{b},\bar{c}\}$

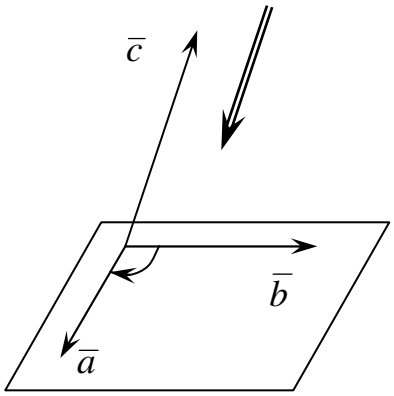


Рисунок 5.2 – Ліва трійка $\{\bar{a},\bar{b},\bar{c}\}$

Лема (Властивості орієнтованих трійок)

1. При множенні одного з векторів орієнтованої трійки на додатне число її орієнтація не змінюється, а при множенні на від'ємне – змінюється на протилежну.
2. При заміні одного з векторів трійки на протилежний її орієнтація змінюється на протилежну.
3. При перестановці довільних двох векторів трійки її орієнтація змінюється на протилежну.

Назвемо заміну порядку слідування векторів упорядкованої трійки векторів ***циклічною***, якщо при цій заміні номери всіх векторів , крім першого, зменшуються (збільшуються) на одиницю, а перший (останній) вектор становиться останнім (першим).

Наслідок (Про збереження орієнтації при циклічній заміні) При циклічній заміні порядку векторів трійки її орієнтація не змінюється.

Нехай дано два неколінеарних вектори $\bar{a}$ та $\bar{b}$. ***Векторним добутком*** векторів $\bar{a}$ та $\bar{b}$ називається вектор $\bar{c}$, який задовольняє наступним умовам:

1. вектор $\bar{c}$ перпендикулярний векторам $\bar{a}$ та $\bar{b}$;
2. довжина вектора $\bar{c}$ дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}$ та $\bar{b}$, як на сторонах ($|\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin\alpha,\ \alpha = \angle(\bar{a},\bar{b})$);
3. вектор $\bar{c}$ спрямований так, що трійка векторів $\{\bar{a},\bar{b},\bar{c}\}$ – права.

Векторний добуток колінеарних векторів за означенням вважається таким, що дорівнює $\bar{0}$.

Векторний добуток векторів $\bar{a}$ та $\bar{b}$ позначається так: $\bar{c} = [\bar{a}, \bar{b}]$ або $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$.

Нехай $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – правий декартовий базис у просторі. Тоді $\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}$. Дійсно, паралелограм, побудований на векторах $\bar{i}, \bar{j}$, є квадратом зі стороною, яка дорівнює одиниці. Тому вектор $\bar{i} \times \bar{j}$ є одиничним вектором, перпендикулярним площині векторів $\bar{i}, \bar{j}$ та спрямованим так, щоб трійка векторів $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{i} \times \bar{j}\}$ була правою. Це означає, що $\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}$. Аналогічно можна довести, що $\bar{k} \times \bar{i} = \bar{j}$, $\bar{j} \times \bar{k} = \bar{i}$.

Теорема (Про обчислення векторного добутку) Нехай дано два вектори $\bar{a}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ і $\bar{b}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ своїми декартовими координатами у деякому декартовому базисі $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$. Тоді їх векторний добуток можна представити у вигляді визначника:

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}. \qquad (5.1)$$

Наслідок (Таблиця векторних добутків векторів декартового базису) Нехай $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – декартовий базис у просторі. Тоді таблиця векторних добутків може бути представлена у вигляді:

2-й вектор / 1-й вектор	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{i}$	$\bar{0}$	$\bar{k}$	$-\bar{j}$
$\bar{j}$	$-\bar{k}$	$\bar{0}$	$\bar{i}$
$\bar{k}$	$\bar{j}$	$-\bar{i}$	$\bar{0}$

Теорема (Властивості векторного добутку) Векторному добутку двох векторів притаманні наступні властивості:

1. $[\bar{a}, \bar{b}] = -[\bar{b}, \bar{a}]$.
2. $[\bar{a}, \bar{b}] = \bar{0} \Leftrightarrow \bar{a} \| \bar{b}$.
3. $[\lambda \bar{a}, \bar{b}] = \lambda [\bar{a}, \bar{b}] = [\bar{a}, \lambda \bar{b}]$.
4. $[\bar{a}_1 + \bar{a}_2, \bar{b}] = [\bar{a}_1, \bar{b}] + [\bar{a}_2, \bar{b}]$, $[\bar{a}, \bar{b}_1 + \bar{b}_2] = [\bar{a}, \bar{b}_1] + [\bar{a}, \bar{b}_2]$.

Знайдемо векторний добуток векторів $\bar{a}$ та $\bar{b}$, після чого отриманий вектор $\bar{a} \times \bar{b}$ помножимо векторно на вектор $\bar{c}$. В результаті отримаємо вектор – ***подвійний векторний добуток*** $(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c}$. Помножуючи вектор $\bar{a}$ векторно на $\bar{b} \times \bar{c}$, отримаємо подвійний векторний добуток $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})$.

В загальному випадку $(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c} \neq \bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})$.

Теорема Мають місце тотожності:

$$(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c}=\bar{b}(\bar{a},\,\bar{c})-\bar{a}(\bar{b},\,\bar{c}),$$
$$\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})=\bar{b}(\bar{a},\,\bar{c})-\bar{c}(\bar{a},\,\bar{b}).$$

Теорема (Тотожність Якобі) Має місце тотожність:

$$\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})+\bar{b}\times(\bar{c}\times\bar{a})+\bar{c}\times(\bar{a}\times\bar{b})=\bar{0}.$$

Приклади розв'язування задач

1. Обчисліть площу паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}(1;1;1)$, $\bar{b}(3;2;1)$, якщо координати векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ задано в правому ортонормованому базисі $\bar{i},\,\bar{j},\,\bar{k}$.

Розв'язання:

У випадку правого ортонормованого базису $\bar{i},\,\bar{j},\,\bar{k}$ має місце формула (5.1), згідно з якою:

$$[\bar{a},\,\bar{b}]=\begin{vmatrix}\bar{i}&\bar{j}&\bar{k}\\ \alpha_1&\beta_1&\gamma_1\\ \alpha_2&\beta_2&\gamma_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\bar{i}&\bar{j}&\bar{k}\\ 1&1&1\\ 3&2&1\end{vmatrix}=-\bar{i}+2\bar{j}-\bar{k}.$$

Таким чином, $[\bar{a},\,\bar{b}]=(-1;2;-1)$. Визначимо модуль вектора $[\bar{a},\,\bar{b}]$ або, що теж саме, шукану площу паралелограма

$$S=\sqrt{(-1)^2+2^2+(-1)^2}=\sqrt{6}\ \text{(кв. од)}.$$

Відповідь: $S=\sqrt{6}$ кв. од.

2. Силу $\bar{P}=(2;-4;5)$ прикладено до точки $A(2;-1;1)$. Визначте момент цієї сили відносно початку координат.

Розв'язання:

Якщо вектор $\bar{f}$ зображає силу, що прикладена в деякій точці *M*, а вектор $\bar{S}$ виходить з деякої точки *B* в точку *M*, то вектор $[\bar{S},\,\bar{f}]=\bar{M}_B$ є моментом сили $\bar{f}$ відносно точки *B*, тут $[\bar{S},\,\bar{f}]$ – векторний добуток векторів $\bar{S}$ і $\bar{f}$.

Оскільки вектор $\overline{OA}(2;-1;2)$, то моментом сили $\bar{P}$ відносно початку координат буде:

$$\bar{M}_O=[\overline{OA},\,\bar{P}]=\begin{vmatrix}\bar{i}&\bar{j}&\bar{k}\\ 2&-1&2\\ 2&-4&5\end{vmatrix}=3\bar{i}-6\bar{j}-6\bar{k}.$$

Відповідь: $\bar{M}_O(3,-6,-6)$.

3. Обчисліть площу паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}+3\bar{b}$ і $3\bar{a}+\bar{b}$, якщо $|\bar{a}|=|\bar{b}|=1$, $\angle(\bar{a},\,\bar{b})=30^\circ$.

Розв'язання:

За властивостями векторного добутку:

$$(\bar{a}+3\bar{b})\times(3\bar{a}+\bar{b})=\bar{a}\times(3\bar{a})+(3\bar{b})\times(3\bar{a})+\bar{a}\times\bar{b}+(3\bar{b})\times\bar{b}=$$

$$= 3 \cdot \bar{0} - 9\bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{b} + 3 \cdot \bar{0} = -8\bar{a} \times \bar{b} .$$

Отже,

$$S = \left| -8\bar{a} \times \bar{b} \right| = 8\left| \bar{a} \times \bar{b} \right| = 8 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 30^\circ = 4 \text{ (кв. од.).}$$

Відповідь: $S = 4$ кв. од.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Дано три вектори $\bar{a}(7, -6, 1)$, $\bar{b}(2, -3, -6)$ і $\bar{c}(3, -4, 12)$. Обчисліть $np_{\bar{b}}(\bar{a} + \bar{c})$ та знайдіть $\overline{np}_{\bar{b}}(\bar{a} + \bar{c})$.

2. До однієї і тієї ж точки прикладені дві сили $\bar{f}_1$ та $\bar{f}_2$, кут між якими α. Знайдіть величину рівнодійної.

3. Дано точки $A(3, 1, 2)$, $B(4, 0, 1)$, $C(4, 5, 7)$. Обчисліть площу трикутника ABC.

4. Знайдіть орт вектора, перпендикулярного до векторів $\bar{a} = 2\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$ та $\bar{b} = 4\bar{i} + 5\bar{j} + 3\bar{k}$.

5. Обчисліть площу паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a} = \bar{m} + \bar{n}$ і $\bar{b} = 3\bar{m} + 2\bar{n}$, якщо $\left|\bar{m}\right| = \left|\bar{n}\right| = 1$, $\angle(\bar{m}, \bar{n}) = \dfrac{\pi}{6}$.

6. Вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ утворюють кут $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$. Знаючи, що $\left|\bar{a}\right| = 1$, $\left|\bar{b}\right| = 2$, обчисліть: 1) $\left(\bar{a} \times \bar{b}\right)^2$; 2) $\left((2\bar{a} + \bar{b}) \times (\bar{a} + 2\bar{b})\right)^2$; 3) $\left((\bar{a} + 3\bar{b}) \times (3\bar{a} - \bar{b})\right)^2$.

7. Вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ взаємно перпендикулярні. Знаючи, що $\left|\bar{a}\right| = 3$, $\left|\bar{b}\right| = 4$, обчисліть: 1) $\left|(\bar{a} + \bar{b}) \times (\bar{a} - \bar{b})\right|$; 2) $\left|(3\bar{a} - \bar{b}) \times (\bar{a} - 2\bar{b})\right|$.

8. Знаючи вектори $\overline{AB}(-3; -2; 6)$ та $\overline{BC}(-2; 4; 4)$, обчисліть довжину висоти $\overline{AD}$ трикутника ABC.

9. Обчисліть відстань між паралельними сторонами паралелограма $ABCD$, побудованого на векторах $\overline{AB}(6; 0; 2)$ та $\overline{AC}(1{,}5; 2; 1)$.

10. Переконайтеся, що вектори $\bar{a} = 2\bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$ та $\bar{b} = -2\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$, відкладені від однієї точки, можна взяти у якості ребер куба, та знайдіть третє ребро, що виходить з тієї ж вершини.

11. Дано два вектори $\bar{a}(2, 3, -1)$, $\bar{b}(1, -1, 3)$. Знайдіть вектор $\bar{x}$, знаючи, що він ортогональний цим векторам та задовольняє умову: $\bar{x} \cdot (2\bar{i} - 3\bar{j} + 4\bar{k}) = 51$.

12. Вектор $\bar{x}$ ортогональний векторам $\bar{a}(2, 3, -1)$, $\bar{b}(1, -1, 3)$, утворює з вектором $\bar{i}$ тупий кут. Знайдіть координати вектора $\bar{x}$, якщо $\left|\bar{x}\right| = \sqrt{138}$

13. Дано точки $A(2; -1; 2)$, $B(1\ 2; -1)$ і $C(3; 2; 1)$. Знайдіть координати векторних добутків: 1) $\overline{AB} \times \overline{BC}$; 2) $\left(\overline{BC} - 2\overline{CA}\right) \times \overline{CB}$.

14. Обчисліть площу паралелограма, побудованого на векторах $\overline{AB} = 6\bar{a} - 3\bar{b}$

та $\overline{AD} = 3\bar{a} + 2\bar{b}$, якщо $|\bar{a}| = 4, |\bar{b}| = 5, \angle(\bar{a}, \bar{b}) = 30^\circ$.

15. Доведіть, що якщо $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{c} \times \bar{d}$, $\bar{a} \times \bar{c} = \bar{b} \times \bar{d}$, то вектори $\bar{a} - \bar{d}$ та $\bar{b} - \bar{c}$ колінеарні.

16. Обчисліть $(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c}$, якщо

1) $\bar{a}(1, 2, -1)$, $\bar{b}(2, 1, -2)$, $\bar{c}(3, 1, -1)$; 2) $\bar{a}(3, 2, 1)$, $\bar{b}(0, 1, -1)$, $\bar{c}(-1, 1, 1)$.

17. Обчисліть $(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c} - \bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})$, якщо $\bar{a}(1, -1, 3)$, $\bar{b}(-2, 2, 1)$, $\bar{c}(3, -2, 5)$.

18. Доведіть, що вектори $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ компланарні, якщо виконується умова $\bar{a} \times \bar{b} + \bar{b} \times \bar{c} + \bar{c} \times \bar{a} = \bar{0}$.

19. У трикутнику ABC через точку H на стороні AC проведено пряму, паралельну BC до перетину зі стороною AB у точці M. Площа трикутника BHM у 4,5 рази менша площі трикутника ABC. Знайдіть відношення $AM : MB$.

20. Площа трапеції $ABCD$ дорівнює S, відношення довжин основ $AD : BC = 3 : 1$. Відрізок MN паралельний стороні CD та перетинає сторону AB. При цьому $AM : BN = 3 : 2$, $MN : CD = 1 : 3$, відрізок AM паралельний BN. Знайдіть площу трикутника BNC.

21. Знайдіть вектор $\bar{x}$ з рівняння $\bar{a} \times \bar{x} = \bar{b}$, де $\bar{a}$ та $\bar{b}$ – відомі взаємо ортогональні вектори.

6 МІШАНИЙ ДОБУТОК ТРЬОХ ВЕКТОРІВ, ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

Мішаним добутком $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$ трьох векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ називають число, яке дорівнює скалярному добутку $([\bar{a},\bar{b}],\bar{c})$ векторного добутку перших двох векторів $\bar{a}$ та $\bar{b}$ на вектор $\bar{c}$.

Теорема 6.1 (Геометричний смисл мішаного добутку) Мішаний добуток трьох векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ дорівнює орієнтованому об'єму V паралелепіпеда, побудованого на цих векторах. Інакше кажучи, якщо V – об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, то

$$(\bar{a},\bar{b},\bar{c})=\begin{cases}+V, & \text{якщо трійка } \{\bar{a},\bar{b},\bar{c}\} \text{ – права;}\\ -V, & \text{якщо трійка } \{\bar{a},\bar{b},\bar{c}\} \text{ – ліва;}\\ 0, & \text{якщо вектори } \bar{a},\bar{b},\bar{c} \text{ – компланарні.}\end{cases}$$

Наслідок 6.1 (Про перестановку квадратних дужок всередині круглих) $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})=([\bar{a},\bar{b}],\bar{c})=(\bar{a},[\bar{b},\bar{c}])$.

Наслідок 6.2 (Ознака компланарності) Три вектори компланарні тоді і тільки тоді, коли їх мішаний добуток дорівнює нулю.

Наслідок 6.3 (Ознака орієнтованості) Трійка векторів додатно (від'ємно) орієнтована тоді і тільки тоді, коли їх мішаний добуток додатний (від'ємний).

Теорема 6.2 (Властивості мішаного добутку) Мішаному добутку притаманні наступні властивості:

1. При циклічній перестановці векторів орієнтованої трійки їх мішаний добуток не змінюється:

$$(\bar{a},\bar{b},\bar{c})=(\bar{c},\bar{a},\bar{b})=(\bar{b},\bar{c},\bar{a}).$$

2. Для будь-яких векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ та для будь-якого числа λ:

$$(\lambda\bar{a},\bar{b},\bar{c})=\lambda(\bar{a},\bar{b},\bar{c}).$$

3. При перестановці будь-яких двох з трьох векторів орієнтованої трійки їх мішаний добуток $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$ змінює знак:

$$(\bar{a},\bar{b},\bar{c})=-(\bar{b},\bar{a},\bar{c}).$$

Теорема 6.3 (Про обчислення мішаного добутку) Мішаний добуток трьох векторів $\bar{a}(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)$, $\bar{b}(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)$, $\bar{c}(\alpha_3,\beta_3,\gamma_3)$, заданих своїми координатами в ортонормованому базисі $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$, дорівнює визначнику, рядками якого є координати цих векторів:

$$(\bar{a},\bar{b},\bar{c})=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3\end{vmatrix}. \qquad (6.1)$$

Тест для самоконтролю

1. При яких значеннях числа k вектор $k\bar{c}+\bar{c}$ $(\bar{c}\neq\bar{0})$ протилежно спрямовано

по відношенню до вектора $\bar{c}$?

А. $k<0$ **Б.** $k>-1$ **В.** $k<-1$ **Г.** $k>0$

2. $SABC$ – правильний тетраедр із ребром 1. Скалярний добуток $\overline{SA}\cdot\overline{SB}$ дорівнює:

А. 1 **Б.** 2 **В.** $\frac{1}{2}$ **Г.** $-\frac{1}{2}$

3. З рівності $\bar{a}\cdot\bar{c}=\bar{b}\cdot\bar{c}$ $(\bar{c}\neq\bar{0})$ випливає:

А. $\bar{a}=\bar{b}$ **Б.** $(\bar{a}-\bar{b})\perp\bar{c}$, $\bar{a}\neq\bar{b}$ **В.** $(\bar{a}-\bar{b})\parallel\bar{c}$ **Г.** $\bar{a}=\bar{b}$ чи $(\bar{a}-\bar{b})\perp\bar{c}$

4. Скільки існує векторів $\bar{a}$ у просторі таких, що $\bar{a}^2=\log_{0,3}2$?

А. жодного **Б.** один **В.** два **Г.** безліч

5. Дано ненульовий вектор $\bar{a}$ простору. Скільки існує векторів $\bar{x}$ таких, що $\bar{a}\cdot\bar{x}=-1$?

А. жодного **Б.** один **В.** два **Г.** нескінченно багато

6. Якщо для трьох ненульових векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ у просторі виконується рівність $\bar{a}\times\bar{c}=\bar{b}\times\bar{c}$, то...

А. $\bar{a}\parallel\bar{b}$ **Б.** $\bar{a}=\bar{b}$ **В.** $\bar{a}\perp\bar{b}$ **Г.** $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ – компланарні

7. Спростіть вираз $(\bar{i}\times(\bar{j}\times\bar{k}))\cdot\bar{i}$, де $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ – ортонормований базис.

А. 1 **Б.** 0 **В.** $\bar{i}^2$ **Г.** –1

8. Дано точки $A(-2;\ -3;\ -6)$, $B(3;\ 2;\ 5)$, $C(1;\ -1;\ 2)$, $D(3;\ -2;\ 4)$. Знайдіть $\text{пр}_{\overline{CD}}\overline{AB}$.

А. 9 **Б.** –3 **В.** $\sqrt{3}$ **Г.** 3

9. При яких значеннях p вектор $\bar{a}=\bar{i}+p\bar{j}+\bar{k}$ ортогональний до вектора $\bar{b}(-2;1;0)$?

А. –2 **Б.** 2 **В.** 1 **Г.** 0

10. Одиничний вектор, протилежний вектору (2; –1; 0), дорівнює:

А. (–2; 1; 0) **Б.** $\left(\frac{2}{\sqrt{5}};-\frac{1}{\sqrt{5}};0\right)$ **В.** $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}};\frac{1}{\sqrt{5}};0\right)$ **Г.** (–1; 1; 0)

11. Укажіть всі значення p і q при яких вектори $\bar{a}(1;0;p)$ і $\bar{b}(2;q;1)$ колінеарні?

А. $p=\frac{1}{2}$, $q=2$ **Б.** $p=2$, $q=\frac{1}{2}$ **В.** $p=\frac{1}{2}$, $q=0$ **Г.** $p=2$, $q=0$

12. Вектори простору $\bar{a}$ і $\bar{b}$ не колінеарні. Укажіть усі значення параметрів λ і μ, при яких компланарні вектори $\bar{a}$, $\bar{a}+\lambda\bar{b}$, $\mu\bar{a}-\bar{b}$.

А. $\lambda>0$, $\mu>0$ **Б.** $\lambda=0$, $\mu\in R$ **В.** $\lambda\in R$, $\mu=0$ **Г.** $\lambda\in R$, $\mu\in R$

13. Вектори простору $\bar{a}$ і $\bar{b}$ не колінеарні. При якому значенні параметру α вектори $\bar{p}=\alpha\bar{a}+5\bar{b}$ і $\bar{q}=3\bar{a}-\bar{b}$ будуть колінеарні?

А. 0 **Б.** –13 **В.** –15 **Г.** 1

14. Дано вектори $\overline{AB}(1;0;-2)$ і $\overline{AC}(-1;0;1)$. Площа трикутника ABC дорівнює:

А. 1 **Б.** $\frac{1}{2}$ **В.** $\sqrt{3}$ **Г.** 2

15. Як розміщені прямі AB і AC, якщо виконується рівність $\left(\overline{AB}+\overline{AC}\right)^2=\left(\overline{AB}-\overline{AC}\right)^2$?

А. паралельні **Б.** перпендикулярні

В. перетинаються **Г.** визначити неможливо

Відповіді: 1. В. 2. В. 3. Г. 4. А. 5. Г. 6. Б. 7. Б. 8. А. 9. Б. 10. В. 11. В. 12. Г. 13. В. 14. Б. 15. Б.

Приклади розв'язування задач

1. В ортонормованому базисі $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ задано вектори $\bar{a}(1; 2; 3)$, $\bar{b}(3; 2; 1)$, $\bar{c}(3; 2; 1)$. З'ясуйте, чи є трійка векторів $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ правою. Знайдіть об'єм паралелепіпеда, побудованого на цих векторах.

Розв'язання:

Обчислимо мішаний добуток векторів $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ за формулою (2.8):

$$\left(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\right)=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 1\end{vmatrix}=12.$$

Оскільки $\left(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\right)>0$, то за властивістю 1 мішаного добутку векторів, трійка векторів $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – права й об'єм паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, дорівнює $V=12$ (куб. од.).

Відповідь: трійка векторів $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – права і $V=12$ куб. од.

2. Знайдіть об'єм трикутної піраміди з вершинами $A(2; 2; 2)$, $B(4;3; 3)$, $C(4; 5; 4)$ і $D(5; 5; 6)$.

Розв'язання:

Знаходимо координати векторів $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ і $\overline{AD}$, які збігаються з ребрами піраміди, що виходять з вершини A: $\overline{AB}(2; 1; 1)$, $\overline{AC}(2; 3; 2)$, $\overline{AD}(3; 3; 4)$. Знайдемо мішаний добуток цих векторів за формулою (2.8):

$$\left(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}\right)=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 2\\ 3 & 3 & 4\end{vmatrix}=24+6+6-9-12-8=7.$$

Оскільки об'єм піраміди дорівнює $\frac{1}{6}$ частині об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ і $\overline{AD}$, то $V=\frac{7}{6}$ (куб. од.).

Відповідь: $V=\frac{7}{6}$ куб. од.

Задачі для самостійного розв'язування

1. З'ясуйте, праву чи ліву трійку утворюють вектори:
1) $\bar{a}(2, 1, 2)$, $\bar{b}(3, -2, 1)$ і $\bar{c}(3, -1, -2)$;
2) $\bar{a}(2, -2, -3)$, $\bar{b}(2, 0, 3)$ і $\bar{c}(1, 1, 1)$.

2. Знайдіть висоту, проведену з вершини A тетраедра $ABCD$, заданого координатами вершин $A(-5; -4; 8)$, $B(2; 3; 1)$, $C(4; 1; -2)$, $D(6; 3; 7)$.

3. Дано три вектори $\bar{a}(8, 4, 1)$, $\bar{b}(2, 2, 1)$ і $\bar{c}(1, 1, 1)$. Знайдіть одиничний вектор $\bar{d}$, що утворює з векторами $\bar{a}$ та $\bar{b}$ однакові кути, перпендикулярний до вектору $\bar{c}$ та спрямований так, що впорядковані трійки $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ та $\bar{a}, \bar{b}, \bar{d}$ мали однакову орієнтацію.

4. Дано три вектори $\bar{a}(8, 4, 1)$, $\bar{b}(2, -2, 1)$ і $\bar{c}(1, 1, 1)$. Знайдіть одиничний вектор $\bar{d}$, що компланарний векторам $\bar{a}$ та $\bar{b}$, ортогональний вектору $\bar{c}$ та спрямований так, що впорядковані трійки $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ та $\bar{a}, \bar{d}, \bar{c}$ мали протилежну орієнтацію.

5. Доведіть, що вектори $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ компланарні, якщо виконується умова $\bar{a} \times \bar{b} + \bar{b} \times \bar{c} + \bar{c} \times \bar{a} = \bar{0}$.

6. Доведіть, що:
1) якщо вектори $\bar{a} \times \bar{b}$, $\bar{b} \times \bar{c}$, $\bar{c} \times \bar{a}$ компланарні, то вектори $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ компланарні;
2) якщо вектори $\bar{a} \times \bar{b}$, $\bar{b} \times \bar{c}$, $\bar{c} \times \bar{a}$ компланарні, то вони колінеарні.

7. Точка M належить ребру BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, причому $BM : MB_1 = 2:1$. Довжина ребра куба дорівнює a. Знайдіть відстань між прямими CD_1 та MD.

8. Дано неколінеарні вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ та скаляр p.
1) Знайдіть який-небудь вектор $\bar{x}$, що задовольняє рівнянню $(\bar{x} \cdot \bar{a} \cdot \bar{b}) = p$.
2) Поясніть геометричний зміст всіх розв'язків рівняння $(\bar{x} \cdot \bar{a} \cdot \bar{b}) = p$, а також його частинного розв'язку, ортогонального векторам $\bar{a}$ і $\bar{b}$.

9. Вектори $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ некомпланарні. При яких значеннях скаляра λ компланарні вектори $\bar{a} + 2\bar{b} + \lambda\bar{c}$, $4\bar{a} + 5\bar{b} + 6\bar{c}$, $7\bar{a} + 8\bar{b} + \lambda^2\bar{c}$?

10. Доведіть тотожності:
1) $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot (\bar{c} \times \bar{d}) = (\bar{a} \cdot \bar{c}) \cdot (\bar{b} \cdot \bar{d}) - (\bar{a} \cdot \bar{d}) \cdot (\bar{b} \cdot \bar{c})$;
2) $(\bar{a} \times \bar{b}) \times (\bar{c} \times \bar{d}) = (\bar{a} \cdot \bar{c} \cdot \bar{d}) \cdot \bar{b} - (\bar{b} \cdot \bar{c} \cdot \bar{d}) \cdot \bar{a}$;
3) $(\bar{a} \times \bar{b}) \times (\bar{c} \times \bar{d}) = \bar{c}(\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{d}) - \bar{d}(\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c})$;
4) $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) \cdot (\bar{c} \times \bar{a}) = (\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c})^2$;
5) $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot (\bar{c} \times \bar{d}) + (\bar{a} \times \bar{c}) \cdot (\bar{d} \times \bar{b}) + (\bar{a} \times \bar{d}) \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = 0$;
6) $(\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c})^2 + |(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c}|^2 = |\bar{a} \times \bar{b}|^2 \cdot |\bar{c}|^2$.

7 ПОНЯТТЯ ПОВЕРХНІ ТА ЛІНІЇ В АНАЛІТИЧНІЙ ГЕОМЕТРІЇ. ФОРМИ ЇХ РІВНЯНЬ

Нехай матеральна точка M переміщується у просторі. Вона змінює своє положення у ньому так, що це положення залежить від часу t. Тоді її кординати токож є функціями часу , тобто

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \quad t \in [a,b]. \end{cases} \tag{7.1}$$

Таким чином, виникає відображення r відрізка $[a,b]$ у простір R^3:

$$r : [a,b] \to R^3 : \ t \to M(x(t), y(t), z(t)). \tag{7.2}$$

З механічного змісту випливає, що координати $x(t), y(t), z(t)$ точки M траекторії повинні бути неперервними функціями часу t.

Лінією (або ***кривою***) у просторі називається образ відрізка $[a,b]$ при неперерному відображенні його у простір. Система рівнянь (7.1) називається ***системою параметричних рівнянь*** лінії у просторі, а саме відображення (7.2) – ***параметризацією лінії*** або ***параметризованою кривою***. Позначимо через $\bar{r}(t)$ – радіус-вектор точки $r(t) = M(x(t), y(t), z(t))$ лінії. Помножимо рівняння системи (7.1) на вектори $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ відповідно та додамо. Отримаємо:

$$\bar{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k} \tag{7.3}$$

або

$$\bar{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}. \tag{7.4}$$

Рівняння (7.3) або (7.4) називається ***векторним рівнянням лінії*** (або її ***векторно-параметричним рівнянням***).

Вектор-функцією $\bar{r}(t)$ одного скалярного аргументу t називається співставлення кожному дійсному числу t з проміжка $[a,b]$ деякого вектора $\bar{r}(t)$. Якщо всі функції $x(t), y(t), z(t)$ неперервні, то вектор-функція $\bar{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$ називається ***неперервною***. Відкладемо всі вектори $\bar{r}(t)$ від початку координат O. Тоді множина кінців $M = r(t)$ векторів $\bar{r}(t)$, відкладених від точки O, визначається параметричними рівняннями (7.1), тобто представляє собою лінію у сенсі (7.1).

Зауваження На площині параметричні рівняння лінії мають вид:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t \in [a,b], \end{cases} \tag{7.5}$$

а векторне рівняння – вид

$$\bar{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} \tag{7.6}$$

або

$$\bar{r}(t) = \{x(t), y(t)\}. \tag{7.7}$$

За аналогією введемо поняття ***вектор-функції двох аргументів*** як відображення, яке ставить у відповідність кожній точці (u,v) деякої підмножини $D \subset R^2$ деякий вектор

$$\bar{r}(u,v) = \{x(u,v), y(u,v), z(u,v)\}. \tag{7.8}$$

Відкладемо всі вектори $\bar{r}(u,v)$ від однієї точки – початку координат O. Тоді множина кінців $M = r(u,v)$ векторів $\bar{r}(t)$, відкладених від точки O, представляє собою ***поверхню***.

Рівняння

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \\ z = z(u,v). \end{cases} \tag{7.9}$$

називаються ***параметричними рівняннями поверхні***, а рівняння (7.8) – ***векторним рівнянням поверхні***.

8 ВИДИ РІВНЯНЬ ПЛОЩИНИ

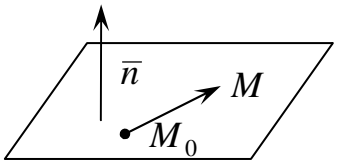


Рисунок 8.1 – Площина, що проходить через точку M_0 перпендикулярно вектору $\bar{n}$

Розглянемо площину α, перпендикулярну деякому вектору $\bar{n}(A,B,C)$, та таку, що проходить через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ (рис. 8.1). Нехай $M(x,y,z)$ – довільна точка площини α. Так як вектори $\bar{n}(A,B,C)$ та $\overline{M_0M}(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$ перпендикулярні, то їх скалярний добуток дорівнює нулю, отже

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \quad (8.1)$$

– ***рівняння площини за нормальним вектором та точкою***.

Розкриємо дужки у рівнянні (8.1) та прегрупуємо доданки:

$$Ax+By+Cz+(Ax_0+By_0+Cz_0)=0.$$

Введемо позначення $Ax_0+By_0+Cz_0=D$ та отримаємо ***загальне ріняння площини***

$$Ax+By+Cz+D=0. \quad (8.2)$$

Розділимо загальне рівняння площини на довжину її вектора нормалі

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}x+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}y+\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}z+\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0. \quad (8.3)$$

Рівняння (8.3) називається ***нормальним рівнянням площини***.

У рівнянні (8.3) множники при x,y,z називаються напрямними косинусами площини (α,β,γ – кути між площиною та осями Ox,Oy,Oz відповідно)

$$cos\alpha=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},cos\beta=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},cos\gamma=\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

а модуль числа $p=\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ дорівнює ***відстані площини від початку координат.*** У цих позначеннях рівняння

$$xcos\alpha+ycos\beta+zcos\gamma+p=0 \quad (8.4)$$

називається ***рівнянням площини з напрямними косинусами***.

Розділимо загальне рівняння площини (8.2) на $-D$ та введемо позначення $-\frac{D}{A}=a,-\frac{D}{B}=b,-\frac{D}{C}=c$. Отримаємо рівняння

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \quad (8.5)$$

Очевидно, що точки з координатами $(a,0,0)$, $(0,b,0)$, $(0,0,c)$ задовольняють цьому рівнянню. Тому воно називається ***рівнянням площини у відрізках на осях*** (рис. 8.3).

Розглянемо площину α, що проходить через три точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$,

$M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ (рис. 8.2). Нехай $M(x, y, z)$ – довільна точка цієї площини. Так як вектори

$$\overline{M_1M}(x - x_1, y - y_1, z - z_1),$$
$$\overline{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1),$$
$$\overline{M_1M_3}(x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$$

компланарні, то їх мішаний добуток дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (8.6)$$

Рівняння (8.6) називається ***рівнянням площини за трьома точками*** або ***детермінантним рівнянням площини***.

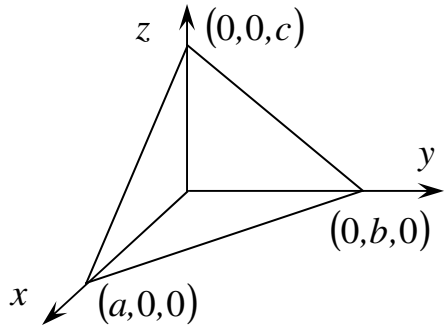


Рисунок 8.2 – Площина, що проходить через точки $(a,0,0)$, $(0,b,0)$, $(0,0,c)$

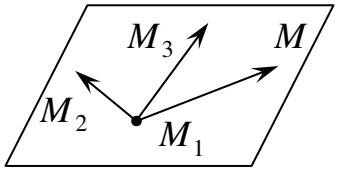


Рисунок 8.3 – Площина, що проходить через три точки M_1, M_2, M_3

Аналогічно, у випадках, коли площина паралельна вектору $\overline{q}(q_1, q_2, q_3)$ та проходить через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ (рис. 8.4) або паралельна двом векторам (бівектору) $\overline{p}(p_1, p_2, p_3)$ та $\overline{q}(q_1, q_2, q_3)$ і проходить через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ (рис. 8.5), з умов компланарності векторів отримаємо рівняння (8.7) та (8.8) відповідно:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix} = 0, \qquad (8.7)$$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (8.8)$$

Відстань від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ***до площини*** $Ax + By + Cz + D = 0$ можна обчислити за формулою:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{8.9}$$

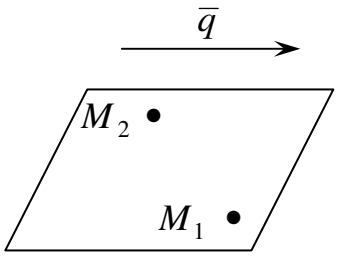


Рисунок 8.4 – Площина, що проходить через дві точки M_1, M_2 паралельно вектору $\overline{q}$

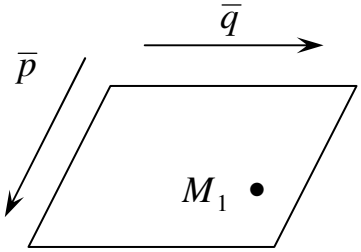


Рисунок 8.5 – Площина, що проходить через точку M_1 паралельно векторам $\overline{p}, \overline{q}$

Інакше рівняння площини, що паралельна двом векторам (бівектору) $\overline{p}(p_1, p_2, p_3)$ та $\overline{q}(q_1, q_2, q_3)$ і проходить через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ (рис. 8.5) можна представити у вигляді

$$\begin{cases} x = x_1 + p_1 t + q_1 s, \\ y = y_1 + p_2 t + q_2 s, \\ z = z_1 + p_3 t + q_3 s. \end{cases} \tag{8.10}$$

Тут $t, s \in R$ – параметри. Рівняння (8.10) називаються ***параметричними рівняннями площини.***

Нехай дано дві площини: $A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$ і $A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$.

Таблиця 8.1 – Формули для обчислення кута між двома площинами, взаємного розташування двох площин у просторі

Назва формули (умови)	**Формула**
Величина двогранного кута θ між двома площинами	$\cos\theta = \dfrac{\lvert A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 \rvert}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$
Умова перпендикулярності	$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0$
Умова паралельності	$\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} \neq \dfrac{D_1}{D_2}$
Умова співпадіння	$\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$

Жмутком площин називається множина площин, що проходять через пряму перетину основних площин $\alpha: A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$ і $\beta: A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$ (рис. 8.6). ***Рівнянням жмутка*** є рівняння:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + k\left(A_2x + B_2y + C_2z + D_2\right) = 0,\ k \in R,$$

або

$$m\left(A_1x + B_1y + C_1z + D_1\right) + n\left(A_2x + B_2y + C_2z + D_2\right) = 0,\ m,n \in R.$$

В'язкою площин називається множина площин, що проходять через точку перетину трьох основних площин: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ та $A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$ (рис. 8.7). ***Рівнянням в'язки*** є рівняння:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + k\left(A_2x + B_2y + C_2z + D_2\right) +$$
$$+ l\left(A_3x + B_3y + C_3z + D_3\right) = 0,\ k,l \in R$$

або

$$m\left(A_1x + B_1y + C_1z + D_1\right) + n\left(A_2x + B_2y + C_2z + D_2\right) +$$
$$+ p\left(A_3x + B_3y + C_3z + D_3\right) = 0,\ m,n,p \in R.$$

В'язка площин, що проходять через точку $\left(x_0, y_0, z_0\right)$ також може бути задана рівнянням:

$$A\left(x - x_0\right) + B\left(y - y_0\right) + C\left(z - z_0\right) = 0,\ \ A,B,C \in R.$$

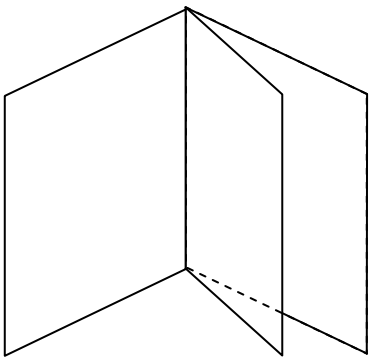


Рисунок 8.6 – Жмуток площин

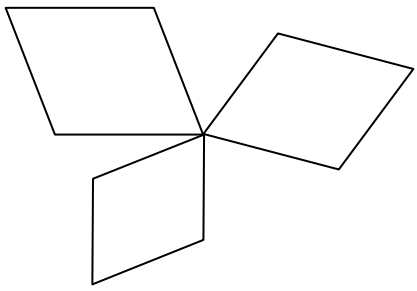


Рисунок 8.7 – В'язка площин

9 РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ У ПРОСТОРІ

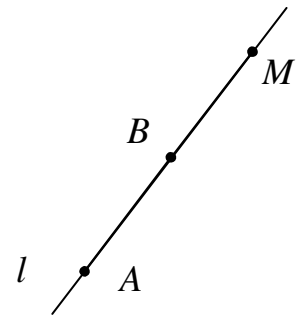


Рисунок 9.1 – Пряма l

Нехай у просторі дано пряму l, що проходить через точки $A(x_1, y_1, z_1)$ та $B(x_2, y_2, z_2)$ (рис. 9.1). Нехай $M(x, y, z)$ – довільна точка цієї прямої. Тоді вектори $\overline{AM}(x - x_1, y - y_1, z - z_1)$ та $\overline{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ колінеарні, отже, їх координати пропорційні, тобто

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \qquad (9.1)$$

– ***рівняння прямої, що проходить через дві точки***.

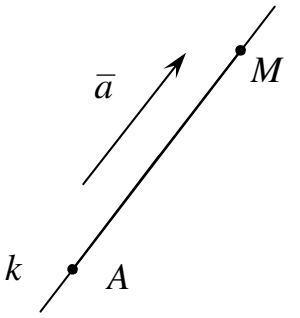


Рисунок 9.2 – Пряма l

Аналогічно, Нехай у просторі дано пряму k, що проходить через точку $A(x_1, y_1, z_1)$ паралельно вектору $\bar{a}(m, n, p)$. Нехай $M(x, y, z)$ – довільна точка цієї прямої. Тоді вектори $\overline{AM}(x - x_1, y - y_1, z - z_1)$ та $\bar{a}(m, n, p)$ колінеарні, отже, їх координати пропорційні, тобто

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p} \qquad (9.2)$$

– ***канонічне рівняння прямої*** (рвняння прямої, що проходить через точку паралельно заданому вектору). Вектор $\bar{a}$, паралельний прямій, називається ***напрямним вектором*** цієї прямої.

Розглянемо рівняння (9.2). Так як три дроби дорівнють один одному, то $\forall\ t \in R$

$$\frac{x - x_1}{m} = t,\ \frac{y - y_1}{n} = t,\ \frac{z - z_1}{p} = t.$$

Виразимо з цих рівнянь x, y, z. Отримаємо ***параметричні рівняння прямої*** у просторі:

$$\begin{cases} x = x_1 + mt, \\ y = y_1 + nt, \\ z = z_1 + pt, \quad t \in R. \end{cases} \qquad (9.3)$$

У випадку, коли пряма задається як перетин двох площин, рівняння прямої має вигляд

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$$

та називається ***неявним рівнянням прямої***. Для цієї прямої напрямний вектор можна знайти як векторний добуток нормальних векторів даних площин, тобто

$$m=\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix},\ n=\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix},\ p=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}.$$

Формула відстані від точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ***до прямої*** $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$:

$$d=\frac{\left|\overline{M_0M_1}\times\bar{a}\right|}{\left|\bar{a}\right|}.$$

Нехай задано дві прямі $l_1:\frac{x-x_1}{a_x}=\frac{y-y_1}{a_y}=\frac{z-z_1}{a_z}$ та $l_2:\frac{x-x_2}{b_x}=\frac{y-y_2}{b_y}=\frac{z-z_2}{b_z}$; $\bar{a}(a_x,a_y,a_z)$, $\bar{b}(b_x,b_y,b_z)$ – їх напрямні вектори; точки $M_1\in l_1$, $M_2\in l_2$.

Таблиця 9.1 – Формули для обчислення відстані й кута між двома прямими, взаємного розташування двох прямих у просторі

Назва формули	**Формула**
Відстань ρ між двома прямими	$\rho=\frac{\left\|\left(\overline{M_1M_2},\bar{a},\bar{b}\right)\right\|}{\left\|\bar{a}\times\bar{b}\right\|}$
Кут θ між двома прямими в просторі	$cos\,\theta=\frac{\left\|a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z\right\|}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$
Умова перпендикулярності прямих	$a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$
Умова паралельності прямих	$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z},\ M_1\notin l_2$
Умова перетину прямих у просторі	$\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}=0$

Нехай задано пряму її канонічним рівнянням $l:\frac{x-x_1}{a_x}=\frac{y-y_1}{a_y}=\frac{z-z_1}{a_z}$ та площину – загальним рівнянням $\alpha: Ax+By+Cz+D=0$.

Таблиця 9.2 – Формули для обчислення кута між прямою і площиною в просторі, взаємного розташування прямої і площини в просторі

Назва формули	**Формула**
Кут θ між прямою і площиною в просторі	$sin\theta = \frac{\left\|A \cdot a_x + B \cdot a_y + C \cdot a_z\right\|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$
Умова перпендикулярності прямої і площини	$\frac{A}{a_x} = \frac{B}{a_y} = \frac{C}{a_z}$
Умова паралельності прямої і площини	$\begin{cases} A \cdot a_x + B \cdot a_y + C \cdot a_z = 0, \\ A \cdot x_1 + B \cdot y_1 + C \cdot z_1 \neq 0 \end{cases}$,
Умова приналежності прямої площині	$\begin{cases} A \cdot a_x + B \cdot a_y + C \cdot a_z = 0, \\ A \cdot x_1 + B \cdot y_1 + C \cdot z_1 = 0 \end{cases}$,

Тест для самоконтролю

1. Рівняння прямої, яка проходить через точку $A(2; -3)$ і перпендикулярна до прямої $x - 4y + 7 = 0$, має вигляд

А. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{-4}$ **Б.** $\frac{x-2}{-4} = \frac{y+3}{1}$ **В.** $\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{-4}$ **Г.** $\frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{-4}$

2. Рівняння прямої, яка проходить через точку $A(-1; 4; -2)$ і перпендикулярна до площини $2x - y + 3z - 7 = 0$, має вигляд

А. $\frac{x+2}{3} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z+1}{2}$ **Б.** $\frac{x-1}{2} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z-2}{3}$

В. $\frac{x+1}{-3} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z+2}{2}$ **Г.** $\frac{x+1}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z+2}{3}$

3. Рівняння прямої, яка симетрична прямій $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1}$ відносно точки $(3; -1)$, має вигляд

А. $\frac{x+5}{2} = \frac{y-1}{1}$ **Б.** $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{1}$ **В.** $\frac{x-5}{2} = \frac{y+1}{1}$ **Г.** $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1}$

4. Рівняння площини, симетричної площині $x - y + 2z = 1$ відносно початку координат, має вигляд

А. $x - y - 2z = 1$ **Б.** $x - y + 2z = 1$

В. $x - y + 2z = -1$ **Г.** відмінне від наведених

5. Яка з наступних площин паралельна векторам $\bar{a}(-1; 0; 1)$ і $\bar{b}(0; -1; 2)$?

А. $x + 3y + z - 1 = 0$ **Б.** $x - 2y + z - 1 = 0$

В. $x + 2y + z - 1 = 0$ **Г.** $x - 2y - z - 1 = 0$

6. Як розміщені прямі AB та CD, якщо $A(1; 2; 3)$, $B(3; 2; 1)$, $C(-1; 2; -3)$, $D(-5; 2; -7)$?

А. перетинаються **Б.** паралельні **В.** збігаються **Г.** мимобіжні

7. Прямі, які задані рівняннями $\frac{x}{4}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{0}$ та $\frac{x}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-4}{0}$

А. паралельні **Б.** перетинаються **В.** мимобіжні **Г.** перпендикулярні

8. Прямі, які задані рівняннями $\frac{x}{4}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{0}$ та $\frac{x}{2}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-4}{1}$

А. перетинаються **Б.** паралельні **В.** мимобіжні **Г.** перпендикулярні

9. Встановіть взаємне розміщення площин $2x-y+3z-2=0$ і $x+y-z+2=0$.

А. паралельні **Б.** співпадають **В.** перетинаються **Г.** перпендикулярні

10. Встановіть взаємне розміщення площин $2x+3y-z+7=0$ і $4x+6y-2z+9=0$.

А. паралельні **Б.** співпадають **В.** перетинаються **Г.** перпендикулярні

11. Вкажіть усі значення параметра *p*, при яких прямі $\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{p}=\frac{z+1}{2}$ і $\frac{x+2}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{-1}$ паралельні.

А. 4 **Б.** –4 **В.** 2 **Г.** –2

12. Вкажіть усі значення параметра *p*, при яких прямі $\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{p}=\frac{z+1}{3}$ і $\frac{x+2}{-2}=\frac{y+1}{5}=\frac{z-1}{-6}$ перпендикулярні.

А. 4 **Б.** –4 **В.** 3 **Г.** –3

13. Вкажіть усі значення параметра *a*, при яких пряма $\frac{x}{1}=\frac{y}{a}=\frac{z-2}{-1}$ паралельна площині $3ax+ay+4z-4=0$.

А. 0 **Б.** –4, 1 **В.** –4 **Г.** 1

14. Вкажіть усі значення параметра *a*, при яких пряма $\frac{x-1}{a}=\frac{y+1}{a^2}=\frac{z}{3}$ перпендикулярна до площини $5a^2x-2ay-z+5=0$.

А. 0 **Б.** –1, 1 **В.** –1 **Г.** 1

15. Відстань між точками перетину прямої $\frac{x}{4}-\frac{y}{3}=1$ з осями координат дорівнює

А. 5 **Б.** 25 **В.** 12 **Г.** $\sqrt{5}$

16. Відстань між прямими $5(x-2)-12(y-3)=0$ і $5x-12y-13=0$ дорівнює

А. 1 **Б.** 3 **В.** 4 **Г.** $\sqrt{2}$

17. Кут між прямими $5(x-2)-12(y-3)=0$ і $5x-12y-13=0$ дорівнює

А. 90° **Б.** 0° **В.** $arctg\frac{5}{12}$ **Г.** $arctg\frac{12}{5}$

18. Відстань між прямою $\frac{x}{4}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z+5}{0}$ та площиною $x+3y-7z+2=0$ дорівнює

А. $\sqrt{59}$ **Б.** $\sqrt{17}$ **В.** $\frac{\sqrt{17}}{2}$ **Г.** 0

19. Кут між прямою $\frac{x}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z+2}{2}$ та площиною $2x-y+z+3=0$ дорівнює

А. 0° **Б.** $arcsin\frac{5}{3\sqrt{6}}$ **В.** 90° **Г.** $arccos\frac{5}{3\sqrt{6}}$

20. Відстань між прямою $\frac{x-7}{5}=\frac{y-4}{7}=\frac{z-5}{-4}$ та площиною $3x-y+2z-5=0$ дорівнює

А. $\frac{22}{\sqrt{14}}$ **Б.** $\frac{27}{\sqrt{14}}$ **В.** $\frac{22}{\sqrt{42}}$ **Г.** 0

21. Відстань між площинами $(x-1)+2(y-2)-2(z+1)=0$ і $x-2y-2z-6=0$ дорівнює

А. $\frac{1}{3}$ **Б.** 0 **В.** 13 **Г.** 1

22. Кут між площинами $(x+1)+3(y-1)-(z+5)=0$ і $x+3y-z+3=0$ дорівнює

А. $\arccos\frac{1}{\sqrt{11}}$ **Б.** 90° **В.** 0° **Г.** 60°

23. Укажіть усі значення параметра *p*, при яких точки *A*(–2; 3; *p)* і *B*(–1; –3; 2) розміщені на однаковій відстані від площини *xOz*.

А. $p=2$ **Б.** $p=-2$ **В.** $p\in R$ **Г.** не існує

Відповіді: 1. В. 2. Г. 3. В. 4. В. 5. Г. 6. Б. 7. А. 8. В. 9. В. 10. А. 11. Б. 12. А. 13. Б. 14. А. 15. А. 16. Б. 17. Б. 18. Г. 19. Б. 20. А. 21. В. 22. В.

Приклади розв'язування задач

1. Трикутна піраміда задана вершинами $A_1(-1,0,1)$, $A_2(1,-1,1)$, $A_3(-1,-2,0)$, $A_4(5,2,10)$. Знайдіть: 1) рівняння грані $A_1A_2A_3$; 2) рівняння висоти піраміди, яка проходить через вершину A_4; 3) довжину цієї висоти; 4) кут між ребром A_1A_4 і гранню $A_1A_2A_3$ в градусах.

Розв'язання:

1) Складемо детермінантне рівняння грані $A_1A_2A_3$:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-0 & z-1 \\ 1+1 & -1-0 & 1-1 \\ -1+1 & -2-0 & 0-1 \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} x+1 & y & z-1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix}=0,$$

Розкриємо визначник та зведемо подібні доданки в лівій частині рівняння. Отримаємо $x+2y-4z+5=0$ – рівняння грані $A_1A_2A_3$.

2) Висота піраміди, що виходить з вершин A_4, це перпендикуляр до грані $A_1A_2A_3$, тому її напрямний вектор колінеарний до нормального вектора грані $A_1A_2A_3$, тобто $\bar{a}_{A_4D}(1,2,-4)$. Складемо рівняння висоти A_4D за точкою та напрямним вектором:

$$A_4D:\ \frac{x-5}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-10}{-4}.$$

3) Довжину висоти A_4D знайдемо як відстань від вершини A_4 до грані $A_1A_2A_3$ за формулою відстані від точки до площини. Будемо мати:

$$d=\frac{|1\cdot 5+2\cdot 2-4\cdot 10+5|}{\sqrt{1^2+2^2+(-4)^2}}=\frac{26}{\sqrt{1+4+16}}=\frac{26}{\sqrt{21}}=\frac{26\sqrt{21}}{21}.$$

4) Знайдемо кут між ребром A_1A_4 і гранню $A_1A_2A_3$ за формулою:

$$sin\angle(A_1A_4,A_1A_2A_3)=sin\angle(\bar{a}_{A_1A_4},\bar{n}_{A_1A_2A_3})=\frac{|\bar{a}_{A_1A_4}\cdot\bar{n}_{A_1A_2A_3}|}{|\bar{a}_{A_1A_4}|\cdot|\bar{n}_{A_1A_2A_3}|}$$

Для цього спочатку знайдемо координати напрямного вектора ребра A_1A_4: $\bar{a}_{A_1A_4}(6,2,9)$.

Підставимо відповідні значення

$$sin\angle(A_1A_4,A_1A_2A_3)=\frac{|6\cdot 1+2\cdot 2+9\cdot(-4)|}{\sqrt{6^2+2^2+9^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+(-4)^2}}=\frac{26}{11\sqrt{21}}\approx 0{,}515,$$

$$\angle(A_1A_4,A_1A_2A_3)\approx 31^\circ.$$

2. Точка $M(x;\ y;\ z)$ рухається прямолінійно і рівномірно з початкової точки $M_0(11;-21;20)$ в напрямку вектора $\bar{s}(-1;2;-2)$ зі швидкістю $v=12$. Визначте, за який час вона пройде відрізок своєї траєкторії, який міститься між площинами $2x+3y+5z-41=0$, $2x+3y+5z+31=0$.

Розв'язання:

Рівняння траєкторії руху має вигляд

$$\frac{x-11}{-1}=\frac{y+21}{2}=\frac{z-20}{-2}\ \text{ або }\ \begin{cases}x=-t+11,\\ y=2t-21,\\ z=-2t+20.\end{cases}$$

Знайдемо координати точок перетину траєкторії з площинами. Для цього розв'яжемо системи (а та б):

$$\text{а)}\ \begin{cases}2x+3y+5z-41=0,\\ x=-t+11,\\ y=2t-21,\\ z=-2t+20.\end{cases}$$

Підставляючи вирази для x, y, z у перше рівняння, маємо:

$$-2t+22+6t-63-10t+100-41=0 \text{ або } 6t=18,\ t=3.$$

Отже, $x_1=8$, $y_1=-15$, $z_1=14$.

б) $\begin{cases} 2x+3y+5z+31=0, \\ x=-t+11, \\ y=2t-21, \\ z=-2t+20. \end{cases}$

Аналогічно знаходимо $t=15$, $x_2=4$, $y_2=9$, $z_2=-10$. Отже, точками перетину паралельних площин траєкторією будуть $A(8;-15;14)$, $B(-4;9;-10)$. Довжина відрізка

$$AB=\sqrt{(8+4)^2+(-15-9)^2+(14+10)^2}=36.$$

Оскільки час $t=\dfrac{AB}{v}$, то $t=\dfrac{36}{12}=3$.

3. Складіть рівняння площини, що проходить через точку $M(3;-1;-5)$ і перпендикулярна площинам $3x-2y+7=0$ і $5x-4y+3z+1=0$.

Розв'язання:

Оскільки шукана площина перпендикулярна даним площинам, то її нормальний вектор $\bar{n}$ перпендикулярний до нормальних векторів $\bar{n}_1(3;-2;2)$ і $\bar{n}_2(5;-4;3)$ площин, отже можна покласти:

$$\bar{n}=\bar{n}_1\times\bar{n}_2=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -4 & 3 \end{vmatrix}=2\bar{i}+\bar{j}-2\bar{k}\ .$$

Скористаємося рівнянням площини, що проходить через задану точку $M(3;-1;-5)$ перпендикулярно вектору $\bar{n}(2,1,-2)$. Отримаємо

$$2(x-3)+(y+1)-2(z+5)=0 \text{ або } 2x+y-2z-15=0.$$

4. Складіть рівняння площини, що проходить через початок координат і перпендикулярна до площин $2x-y+3z-1=0$ та $x+2y+z=0$.

Розв'язання:

Нехай рівняння шуканої площини має вигляд $Ax+By+Cz=0$, тоді нормальні вектори площин $\bar{n}_1(2;-1;3)$ і $\bar{n}_2(1;2;1)$ за умовою задачі будуть перпендикулярні до вектора $\bar{n}(A,B,C)$, тобто справедливі рівності

$$\begin{cases} 2A-B+3C=0, \\ A+2B+C=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-7/5\,C, \\ B=1/5\,C. \end{cases}$$

Нехай $C=-5$. Тоді шукане рівняння площини матиме вигляд $7x-y-5z=0$.

5. З початку координат опустіть перпендикуляр на пряму

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{1}.$$

Розв'язання:

Оскільки напрямний вектор прямої $\bar{a}(2;3;1)$ буде нормальним до площини, що проходить через початок координат, то рівняння такої площини має вигляд

$$2x+3y+z=0.$$

Знайдемо точку перетину прямої та площини. Для цього розв'яжемо систему:

$$\begin{cases}\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-3}{1},\\ 2x+3y+z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2t+2,\\ y=3t+1,\\ z=t+3,\\ 2x+3y+z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=-5/7,\\ x=4/7,\\ y=6/7,\\ z=16/7.\end{cases}$$

Складемо рівняння шуканої прямої. Вона проходить через точки $O(0,\ 0,\ 0)$ і $M(4/7;\ 6/7;\ 16/7)$:

$$\frac{x}{4/7}=\frac{y}{6/7}=\frac{z}{16/7}\ \text{ або }\ \frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{8}.$$

Задачі для самостійного розв'язування

1. Знайдіть довжину перпендикуляра, опущеного з точки $M_0(2;\ 3;\ -5)$ на площину $4x-2y+5z-12=0$.

2. Перевірте, які з точок $A(-1;\ 2;\ 3)$, $B(1;\ -2;\ 1)$, $C(0;\ 1;\ 2)$, $D(3;\ 0;\ 3)$ та $E(5;\ -7;\ 11)$ належать площині $2x-3y+z-9=0$.

3. Визначте координати нормального вектора площини, яка проходить через точки $A(2;\ -1;\ 1)$, $B(3;\ 1;\ 0)$ і $C(1;\ 5;\ -2)$.

4. Площина проходить через точки $A(1;\ 2;\ 1)$ та $B(0;\ 3;\ -1)$ паралельно до осі Oz. Напишіть її рівняння.

5. Чи проходить площина $4x-y+3z+1=0$ через точки: $A(-1;6;3)$; $B(3;-2;-5)$; $C(0;4;1)$; $D(2;0;5)$; $E(2;7;0)$; $F(0;1;0)$?

6. Укажіть особливості розміщення площин у просторі:

1) $3x-5z+1=0$; 2) $9y-2=0$;

3) $x+y-5=0$; 4) $2x+3y-7z=0$;

5) $8y-3z=0$.

7. Запишіть загальне рівняння площини, що проходить через точки $A(-1;6;3)$; $B(3;-2;-5)$; $C(0;4;3)$. Зведіть його до нормального виду. Запишіть рівняння площини у відрізках на осях.

8. Чи можна провести площину через наступні чотири точки: (3;1;0), (0;7;2), (–1;0;–5), (4;1;5)?

9. Обчисліть відстань від точки до площини:

а) $A(3;1;-1)$, $22x+4y-20z-45=0$;

б) $B(4;3;-2)$, $3x-y+5z+1=0$.

10. Знайдіть відстань між паралельними площинами: $3x-y+5z+1=0$ та $3x-y+5z+12=0$.

11. Обчисліть висоту піраміди h_S з вершинами $S(0;6;4)$, $A(3;5;3)$, $B(-2;11;-5)$, $C(1;-1;4)$.

12. Обчисліть кути між площинами:

а) $4x-5y+3z-1=0$ і $x-4y-z+9=0$;

б) $3x-y+2z+15=0$ і $5x+9y-3z-1=0$.

13. Складіть рівняння площини, що проходить:

а) через точку (–2;7;3) паралельно площині $x-4y+5z-1=0$;

б) через початок координат і перпендикулярної площинам $2x-y+5z+3=0$ та $x+3y-z-7=0$;

в) через точки $E(0;0;1)$ і $K(3;0;0)$ та утворює кут 60° з площиною Oxy.

14. Складіть рівняння площини, що проходить через точку $P(-1;\ 2;\ 3)$ і відтинає від осей Ox та Oy відрізки $a=2$, $b=-1$.

15. Через точку $P(1;\ 2;\ -1)$ проведіть площину, що відтинає від осей координат рівні відрізки.

16. Знайдіть відстань між площинами $2x+2y-z-15=0$ і $4x+4y-2z+11=0$.

17. Дано точки $A(1;\ -1;\ 1)$, $B(1;\ 3;\ 1)$, $C(4;\ 3;\ 1)$, $D(4;\ -1;\ 1)$. Складіть рівняння:

1) площини, що проходить через точки A, B, C;
2) прямої, яка проходить через точку A й паралельна прямій BC;
3) прямої, яка проходить через точки C і D.

18. Дано площини $\alpha:\ 2x-y+z+3=0$, $\beta:\ 3x-2y-z-1=0$, $\gamma:\ -4x+2y-2z+1=0$ і прямі $l_1:\ \dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z}{-1}$, $l_2:\ \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$.

1) Знайдіть відстань від точки $A(2;\ -1;\ 1)$ до площини α;
2) встановіть взаємне розташування площин α і β, α і γ, β і γ; прямої l_2 і площини β; прямих l_1 і l_2;
3) знайдіть відстань між площинами α і γ;
4) при яких значеннях параметра m площина α паралельна площині $2x-my+z=0$;
5) знайдіть кути між площинами α і β, прямими l_1 і l_2;
6) при яких значеннях параметра p площини γ і $px-2y+pz-1=0$ перпендикулярні.
7) знайдіть відстань між прямими l_1 і l_2.

19. Знайдіть координати центру та радіус шару, вписаного в тетраедр, обмежений координатними площинами та площиною $11x-10y-2z-57=0$.

20. Чи мають точку перетину дані площини:

а) $5x+8y-z-7=0$, $x+2y+3z-1=0$, $2x-3y+2z-9=0$;

б) $5x-y+3=0$, $2x-y-4z+5=0$, $3y+2z-1=0$, $3x+4y+5z-3=0$?

21. Через лінію перетину площин $4x-y+3z-1=0$ та $x+5y-z+2=0$ проведіть площину:

а) що проходить через початок координат;

б) що проходить через точку (1;1;1);

в) паралельну осі Oy;

г) перпендикулярну площині $2x-y+5z-3=0$.

22. У жмутку, що визначається площинами $3x+y-2z-6=0$ та $x-2y+5z-1=0$, знайдіть площини, перпендикулярні цим основним площинам.

23. У жмутку, що визначається площинами $2x+y-3z+2=0$ та $5x+5y-4z+3=0$, знайдіть дві перпендикулярні одна одній площини, одна з яких проходить через точку (4;–3;1).

24. У жмутку $\alpha(x+3y-5)+\beta(x-y-2z+4)=0$ знайдіть площину, що відтинає рівні відрізки від осей Ox та Oy.

25. Через лінію перетину площин $x+5y+z=0$ і $x-z+4=0$ проведіть площину, що утворює кут $\frac{\pi}{4}$ з площиною $x-4y-8z+12=0$.

26. Перевірте, що площини $3x-4y+5=0$, $x-2z+1=0$ і $2y-3z-1=0$ належать одному і тому ж жмутку площин.

27. При яких значеннях параметрів A та D площини $2x+y-z+3=0$, $x-3y+5=0$ і $Ax+y-2z+D=0$ належать одному і тому ж жмутку?

28. У в'язці, що визначається площинами $x+y-z+2=0$, $4x-3y+z-1=0$ та $2x+y-5=0$, знайдіть площину:

а) що проходить через вісь абсцис;

б) паралельну площині Oxz;

в) що проходить через початок координат і через точку (1;3;2).

29. Складіть параметричні та канонічне рівняння прямої $\begin{cases} 5x+y+z=0, \\ 2x+3y-2z+5=0. \end{cases}$

30. Доведіть, що прямі перетинаються та знайдіть координати їх точки перетину: $x=-3t$, $y=2+3t$, $z=1$ й $x=1+5t'$, $y=1+13t'$, $z=1+10t'$.

31. Знайдіть відстань між мимобіжними прямими $x=2-3t$, $y=-1+t$, $z=-2t$ та $x=1+5t'$, $y=3+4t'$, $z=4+2t'$.

32. Встановіть взаємне розміщення прямої та площини; у випадку перетину знайдіть їх спільну точку:

а) $x=2+4t$, $y=-1+t$, $z=2-t$ й $4x+y-z+13=0$;

б) $x=2-3t$, $y=-1+t$, $z=-2t$ й $x+y-z+3=0$;

в) $x=t$, $y=-8-4t$, $z=-3-3t$ й $x+y-z+5=0$;

г) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z+2}{5}$ й $4x+3y-z+3=0$;

д) $\frac{x-7}{5}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-5}{4}$ й $3x-y+2z-5=0$;

е) $\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z}{5}$ й $3x-3y+2z-5=0$;

ж) $\begin{cases} 2x-y+3z+4=0, \\ x-2y-2z+2=0 \end{cases}$ й $4x-5y-z+8=0$;

з) $\begin{cases} 2x-3y-3z-9=0, \\ x-2y+z+3=0 \end{cases}$ й $x-2y+z-1=0$;

і) $\begin{cases} 3x+5y-7z+16=0, \\ 2x-y+z-6=0 \end{cases}$ й $5x-z-4=0$.

33. Знайдіть кут між прямою $\begin{cases} x+4y-2z+7=0, \\ 3x+7y-2z=0. \end{cases}$ та площиною $3x+y-z+1=0$.

34. Знайдіть точку, симетричну точці $P(6;-5;5)$ відносно площини $2x-3y+z-4=0$.

35. Знайдіть проекцію прямої $x=1+2t,\ y=3+t,\ z=2+t$ на площину $3x-2y-z+15=0$.

36. Переконайтеся, що прямі $x=8+5t,\ y=1+2t,\ z=6+4t$ та $x=11+3t',\ y=2+t',\ z=4-2t'$ перетинаються і знайдіть рівняння площини, якій вони належать.

37. Напишіть рівняння площини, що проходить через точку $A(4;-1;3)$, паралельно прямим $x=t,\ y=2t,\ z=-3t$ та $x=1+5t',\ y=3+4t',\ z=4+2t'$.

38. Напишіть рівняння площини, що проходить через пряму $x=-5+4t,\ y=2+7t,\ z=1+2t$ паралельно до прямої $x=t',\ y=1-2t',\ z=-3t'$.

39. Напишіть рівняння площини, паралельної площині $x+y+z-2=0$ та такої, що містить пряму $x=2t,\ y=5-t,\ z=-1-t$.

40. Чи можна через пряму $x=1-t,\ y=-3+t,\ z=5-4t$ провести площину, паралельну площині $2x+3y-4z+2=0$?

41. Через точку $A(1;0;7)$ паралельно площині $6x-2y+4z-11=0$ проведіть пряму так, щоб вона перетнула пряму $x=5+4t,\ y=5+2t,\ z=1+t$.

42. На прямій $x=2t,\ y=4t,\ z=3+5t$ знайдіть точку, рівновіддалену від точок $A(3;1;-2)$ та $B(5;3;-2)$.

43. Знайдіть точку, симетричну точці $P(-3;1;-1)$ відносно прямої $\begin{cases} 4x-3y-13=0, \\ y-2z+5=0. \end{cases}$

44. Напишіть рівняння прямої, що проходить через точку перетину площини $x+y+z-1=0$ з прямою $x=t,\ y=1,\ z=-1$, що належить цій площині та перпендикулярна даній прямій.

45. Напишіть рівняння спільного перпендикуляру до прямих $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{2}$ й $x=-1+3t,\ y=2+2t,\ z=1$.

10 РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ НА ПЛОЩИНІ

Розглянемо пряму, що проходить через точки $M_1(x_1, y_1)$ та $M_2(x_2, y_2)$ (рис. 10.1). Нехай $M(x, y)$ – довільна точка цієї прямої. Тоді вектори $\overline{M_1M}(x-x_1, y-y_1)$ та $\overline{M_1M_2}(x_2-x_1, y_2-y_1)$ колінеарні, отже, їх координати пропорційні. З цієї умови отримаємо ***рівняння прямої, що проходить через дві точки***

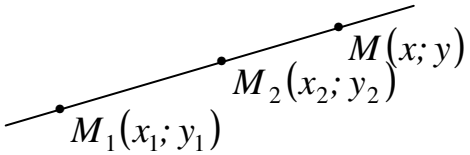


Рисунок 10.1 – Пряма, що проходить через дві точки

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \qquad (10.1)$$

Аналогічно, коли дано пряму, що проходить через точку $M_1(x_1, y_1)$ паралельно вектору $\bar{a}(m,n)$ (рис. 10.2), з умови колінеарності векторів $\overline{M_1M}(x-x_1, y-y_1)$ і $\bar{a}(m,n)$ отримаємо ***канонічне рівняння прямої***

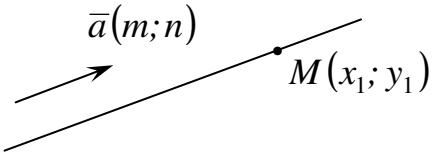


Рисунок 10.2 – Пряма, що проходить через точку паралельно вектору

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}. \qquad (10.2)$$

Вектор $\bar{a}(m,n)$, паралельний прямій, називається ***напрямним вектором*** цієї прямої.

Дорівняємо дроби рівняння (10.2) до деякого параметра $t \in R$, виразимо змінні x, y. Отримаємо ***параметричні рівняння прямої***

$$\begin{cases} x = x_1 + mt, \\ y = y_1 + nt. \end{cases} \qquad (10.3)$$

Перетворимо рівняння (10.2) наступним чином

$$n(x-x_1)=m(y-y_1),$$
$$nx-my+(-nx_1+my_1)=0.$$

Введемо позначення $A=n, B=-m, C=-nx_1+my_1$. Отримаємо ***загальне рівняння прямої***

$$Ax+By+C=0. \qquad (10.4)$$

Так як їх скалярний добуток векторів $\bar{a}(m,n)$ і $\bar{n}(A,B)$ дорівнює нулю, то вектори $\bar{a}$ і $\bar{n}$ перпендикулярні та вектор $\bar{n}(A,B)$ називається ***нормальним вектором прямої*** або ***нормаллю прямої***.

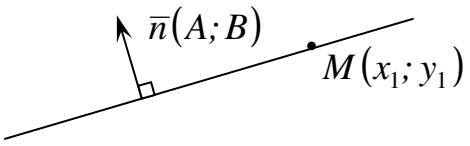


Рисунок 10.3 – Пряма, що проходить через точку перпендикулярно вектору

Розглянемо випадок, коли відомі точка $M_1(x_1, y_1)$ та нормаль $\bar{n}(A,B)$ прямої (рис. 10.3). Нехай $M(x, y)$ – довільна точка цієї прямої. Тоді вектори $\bar{n}(A,B)$ та $\overline{M_1M}(x-x_1, y-y_1)$ перпендикулярні, отже, їх скалярний добуток дорівнює нулю. З цієї умови отримаємо

рівняння прямої, що проходить через точку перпендикулярно заданому вектору

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)=0. \tag{10.5}$$

Розділимо рівняння (10.4) на довжину вектора нормалі $\sqrt{A^2+B^2}\neq 0$. Отримаємо ***нормальне рівняння прямої***

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y+\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}=0. \tag{10.6}$$

Введемо позначення

$$cos\alpha=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, cos\beta=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}, p=\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

У цих позначеннях рівняння (10.5) приймає вигляд

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+p=0 \tag{10.7}$$

та називається ***рівнянням прямої з напрямними косинусами*** (α,β – кути між прямою та осями Ox та Oy відповідно).

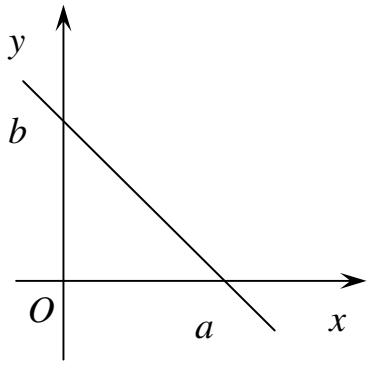


Рисунок 10.4 – Рівняння прямої у відрізках на осях

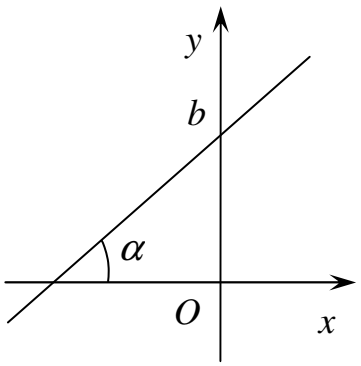


Рисунок 10.5 – Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом $k=tg\alpha$

Розділимо загальне рівняння (10.4) на $-C\neq 0$ та введемо позначення $-\frac{C}{A}=a, -\frac{C}{B}=b$. Отримаємо рівняння

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \tag{10.7}$$

Легко бачити, що точки з координатами $(a,0)$ та $(0,b)$ задовольняють рівнянню (10.7). Тому воно називається ***рівнянням прямої у відрізках на осях*** (рис. 10.4).

Розділимо загальне рівняння (10.4) на $B\neq 0$ та введемо позначення $-\frac{A}{B}=k, -\frac{C}{B}=b$. Отримаємо рівняння

$$y=kx+b. \tag{10.8}$$

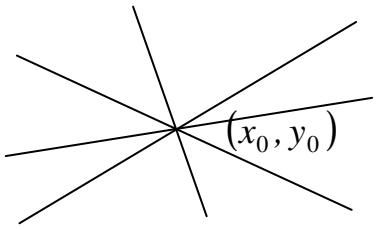
У ньому k – кутовий коефіцієнт, який дорівнює тангенсу кута нахилу прямої по відношенню до додатного напряму осі Ox.. Тому рівняння (10.8) називається ***рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом*** (рис. 10.5).

Нехай дано загальне рівняння прямої $Ax+By+C=0$. Тоді ***відстань від точки*** $M_0(x_0,y_0)$ ***до прямої*** обчислюється за формулою:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Таблиця 10.1 – Формули для обчислення кута між двома прямими й умов взаємного розташування двох прямих

Назва формули (умови)	**Види рівнянь прямих**		
	Загальний: $A_1x+B_1y+C_1=0$ і $A_2x+B_2y+C_2=0$	**Канонічний:** $\frac{x-x_1}{a_x}=\frac{y-y_1}{a_y}$ і $\frac{x-x_2}{b_x}=\frac{y-y_2}{b_y}$	**З кутовим коефіцієнтом:** $y=k_1x+b_1$ і $y=k_2x+b_2$
Кут θ між двома прямими	$cos\,\theta=\frac{\lvert A_1A_2+B_1B_2\rvert}{\sqrt{(A_1^2+B_1^2)(A_2^2+B_2^2)}}$	$cos\,\theta=\frac{\lvert a_xb_x+a_yb_y\rvert}{\sqrt{(a_x^2+b_x^2)(a_y^2+b_y^2)}}$	$tg\,\theta=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$
Умова перпендикулярності	$A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2=0$	$a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y=0$	$k_1\cdot k_2=-1$
Умова паралельності	$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$	$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}$, $\frac{x_1-x_2}{b_x}\neq\frac{y_1-y_2}{b_y}$	$k_1=k_2$, $b_1\neq b_2$
Умова співпадіння	$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$	$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}$, $\frac{x_1-x_2}{b_x}=\frac{y_1-y_2}{b_y}$	$k_1=k_2$, $b_1=b_2$



Сукупність всіх прямих, що проходять через одну і ту саму точку, називають ***пучком прямих***, а їх спільну точку – ***центром пучка***. Якщо (x_0, y_0) – центр пучка, то рівняння $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$ визначає довільну пряму пучка. Якщо дано дві прямі $A_1x+B_1y+C_1=0$ і $A_2x+B_2y+C_2=0$, то всяка пряма, що проходить через точку їх перетину, зобразиться рівнянням:

$$A_1x+B_1y+C_1+k(A_2x+B_2y+C_2)=0,\ k\in R$$

або

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2)=0,\ \ \alpha,\beta\in R.$$

Кожному значенню параметра пучка відповідає певна пряма пучка.

Приклади розв'язування задач

1. Напишіть рівняння прямої:

а) яка має кутовий коефіцієнт $k=-3$ і такої, що проходить через точку $A(1,-2)$;

б) що проходить через дві точки $A(1;5)$ і $B(2;3)$.

Розв'язання:

а) Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом k має вигляд (10.8). Підставивши $k=-3$ в рівняння (10.8), одержуємо $y=-3x+b$. Вільний член b знайдемо, підставивши в рівняння координати точки A:

$$-2=-3\cdot 1+b,\ b=1.$$

Тоді рівняння прямої запишемо так $y=-3x+1$.

б) Рівняння прямої за двома точками має вигляд (10.1):

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1},$$

де $(x_1;y_1)$ – координати першої точки та $(x_2;y_2)$ координати другої.

Підставивши в рівняння (10.1) координати точок $A(1;5)$ та $B(2;3)$, одержуємо:

$$\frac{x-1}{2-1}=\frac{y-5}{3-5}\Rightarrow\frac{x-1}{1}=\frac{y-5}{-2}\ \Rightarrow\ -2(x-1)=1(y-5)\ \Rightarrow\ -2x-y+8=0.$$

2. Через точку перетину прямих $2x-y-8=0$ і $4x+3y+4=0$ проведіть пряму, яка проходить через точку $A(4;3)$.

Розв'язання:

Цю задачу розв'яжемо двома способами.

І спосіб. Знайдемо координати точки B – точки перетину прямих $2x-y-8=0$ і $4x+3y+4=0$. Для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases}2x-y-8=0,\\4x+3y+4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=2x-8,\\y=-\frac{4}{3}x-\frac{4}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2,\\y=-4\end{cases}\Rightarrow B(2;-4).$$

Маємо дві точки: $A(4;3)$ і $B(2;-4)$. Підставивши їх координати у формулу (10.1), одержимо шукане рівняння:

$$\frac{x-4}{2-4}=\frac{y-3}{-4-3}\ \Rightarrow\ -7x+2y+22=0.$$

ІІ спосіб. Усяка пряма, що проходить через точку перетину двох даних прямих, задається рівнянням пучка прямих:

$$A_1x+B_1y+C_1+k(A_2x+B_2y+C_2)=0. \qquad (10.9)$$

У нашому випадку: $2x-y-8+k(4x+3y+4)=0$. Потрібно тільки підібрати значення параметра k так, щоб пряма пройшла через точку $A(4;3)$, тобто щоб координати цієї точки задовольняли рівнянню прямої. Підставляючи їх у рівняння пучка, одержимо:

$$2\cdot 4-1\cdot 3-8+k(4\cdot 4+3\cdot 3+4)=0\Rightarrow k=\frac{3}{29}.$$

Отже, рівняння прямої буде мати вигляд:

$$2x-y-8+\frac{3}{29}(4x+3y+4)=0\Rightarrow 7x-2y-22=0.$$

3. Складіть загальне рівняння прямої, перпендикулярної вектору $\bar{a}(-4;4)$ й такої, що проходить:

а) через початок координат;

б) через точку $A(-1;7)$.

*Розв'язання***:**

Загальне рівняння прямої має вигляд (10.4). Якщо пряма перпендикулярна вектору, то його координати можна підставити замість коефіцієнтів при відповідних змінних у загальне рівняння прямої. Підставивши координати вектора $\bar{a}$ в (10.4), одержуємо:

$$4x-4y+C=0.$$

а) Використовуючи умову проходження шуканої прямої через початок координат, одержимо, що коефіцієнт $C=0$, тобто рівняння прямої буде мати вигляд:

$$4x-4y=0 \Rightarrow x-y=0.$$

б) Підставивши координати точки $A(-1;7)$ в рівняння $4x-4y+C=0$, одержимо:

$$4\cdot(-1)-4\cdot 7+C=0 \;\Rightarrow\; C=32,$$

$$4x-4y+32=0 \;\Rightarrow\; x-y+8=0.$$

4. Дано вершини трикутника $A(4;6)$, $B(-4;0)$ і $C(-1;0)$. Складіть рівняння:

а) його сторін;

б) медіани, проведеної з вершини C;

в) бісектриси кута B;

г) висоти, опущеної з вершини B на сторону AC.

*Розв'язання***:**

а) Складемо рівняння сторін трикутника за двома точкам, використовуючи формулу (10.1).

$$AB:\ \frac{x-4}{-8}=\frac{y-6}{-6} \;\Rightarrow\; 3x-4y+12=0,\quad BC:\ \frac{x+4}{3}=\frac{y}{0} \;\Rightarrow\; y=0,$$

$$AC:\ \frac{x-4}{-5}=\frac{y-6}{-6} \;\Rightarrow\; -6x+5y-6=0.$$

б) Знайдемо рівняння медіани CM. Точка M – середина сторони AB. Її координати знайдемо за формулами:

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2},\ y_M=\frac{y_A+y_B}{2}$$

$$x_M=\frac{4+(-4)}{2}=0,\ y_M=\frac{6+0}{2}.$$

Отже, $M(0,3)$.

Складемо рівняння медіани за двома точками C та M:

$$\frac{x+1}{0+1}=\frac{y-0}{3-0}\Rightarrow 3x-y+3=0.$$

в) Складемо рівняння бісектриси кута B. Для цього знайдемо координати точки P – точки перетину бісектриси із протилежною стороною за формулами:

$$x_P = \frac{m \cdot x_1 + n \cdot x_2}{m+n},\ y_P = \frac{m \cdot y_1 + n \cdot y_2}{m+n}$$

де $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ – координати кінців протилежної сторони, а m і n – довжини сторін, прилеглих до кута.

Обчислимо довжини сторін AB і BC:

$$m = |AB| = \sqrt{(-1-4)^2 + (0-6)^2} = 10,\ n = |BC| = \sqrt{(-1+4)^2 + (0-0)^2} = 3.$$

Підставивши ці результати в (10.10), одержимо

$$x_P = \frac{10 \cdot 4 + 3 \cdot (-1)}{10+3} = \frac{37}{13},\ y_P = \frac{10 \cdot 6 + 3 \cdot 0}{10+3} = \frac{60}{13}.$$

Точка P має координати $\left(\frac{37}{13}; \frac{60}{13}\right)$.

Координати точок B і P підставимо у формулу (10.1):

$$BP:\ \frac{x+4}{\frac{37}{13}+4} = \frac{y}{\frac{60}{13}} \quad \Rightarrow \quad 60x - 89y + 240 = 0.$$

г) Знайдемо рівняння висоти, опущеної з вершини B на сторону AC.

Приведемо рівняння сторони AC до виду (10.8):

$$y = \frac{6}{5}x + \frac{6}{5}.$$

Умова перпендикулярності двох прямих, заданих рівнянням (10.8):

$$1 + k_1 k_2 = 0,$$

де k_1, k_2 – кутові коефіцієнти цих прямих. Замість k_1 підставимо кутовий коефіцієнт прямої AC та знайдемо k_2:

$$1 + \frac{6}{5}k_2 = 0, \quad k_2 = -\frac{5}{6}.$$

Рівняння висоти h_B буде мати вигляд:

$$y = -\frac{5}{6}x + b.$$

Вільний член знайдемо, підставивши в це рівняння координати точки B:

$$b = -\frac{10}{3} \text{ та } y = -\frac{5}{6}x - \frac{10}{3}.$$

5. Доведіть, що опуклий чотирикутник $PQRS$, де $P(0;-6)$, $Q(-6;0)$, $R(0;12)$ і $S(12;0)$ – трапеція. Знайдіть її висоту, складіть рівняння середньої лінії й з'ясуєте, чи будуть діагоналі трапеції перпендикулярними.

*Розв'язання***:**

Трапеція – це чотирикутник, у якого дві сторони паралельні, а дві інші непаралельні. Для того, щоб визначити чи є наш чотирикутник трапецією, складемо рівняння його сторін. Скористаємося формулою (10.1):

$$PQ:\ \frac{x-0}{-6}=\frac{y+6}{6}\Rightarrow x+y+6=0,$$

$$RS:\ \frac{x-0}{12}=\frac{y-12}{-12}\Rightarrow x+y-12=0.$$

Так як виконуються умови $\frac{1}{1}=\frac{1}{1}\neq\frac{6}{-12}$ (див. табл. 10.1), то $PQ\,||\,RS$. Складемо рівняння двох інших сторін.

$$QR:\ \frac{x+6}{6}=\frac{y}{12}\Rightarrow 2x-y+12=0,\quad PS:\ \frac{x}{12}=\frac{y+6}{6}\Rightarrow x-2y-12=0.$$

З рівнянь видно, що ці дві прямі не будуть паралельними. Отже, даний чотирикутник є трапецією.

Складемо рівняння прямої MK – середньої лінії трапеції. Для цього знайдемо середини сторін QR і PS:

$$x_M=\frac{x_Q+x_R}{2}=-3,\ y_M=\frac{y_Q+y_R}{2}=6\ \Rightarrow\ M(-3;6),$$

$$x_K=\frac{x_P+x_S}{2}=6,\ y_K=\frac{y_P+y_S}{2}=-3\ \Rightarrow\ K(6;-3),$$

$$MK:\ \frac{x+3}{9}=\frac{y-6}{-9}\ \Rightarrow\ x+y-3=0.$$

Складемо рівняння діагоналей PR і QS:

$$PR:\ \frac{x-0}{0}=\frac{y+6}{6}\Rightarrow x=0,\ QS:\ \frac{x+6}{6}=\frac{y-0}{0}\Rightarrow y=0.$$

З рівнянь бачимо, що діагоналі трапеції перпендикулярні.

Довжину висоти h знайдемо як відстань від точки (x_0,y_0) до прямої $Ax+By+C=0$ за формулою:

$$h=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Підставимо координати точки P, та коефіцієнти рівняння сторони RS у формулу (3.8). Отримаємо:

$$h_P=\frac{|1\cdot 0+1(-6)-12|}{\sqrt{1^2+1^2}}=9\sqrt{2}.$$

6. Обчисліть кут між двома прямими:

1) $y=\frac{1}{2}x+1$ і $y=-3x+2$;

2) $y=-\frac{3}{4}x-4$ і $\begin{cases}x=4+7t,\\ y=-3+2t;\end{cases}$

3) $y=\frac{2}{5}x+3$ і $-8x+3y-12=0$;

4) $2x+20y-3=0$ і $x-\frac{2}{3}y-6=0$;

5) $\begin{cases} x = 3t, \\ y = -1 + 2t \end{cases}$ і $\begin{cases} x = 1 - 2t', \\ y = -5 + t'. \end{cases}$

Розв'язання:

1) Кут між цими прямими будемо шукати за формулою:

$$tg\varphi = \frac{|k_2 - k_1|}{1 + k_1 k_2}, \tag{10.11}$$

де k_1, k_2 – кутові коефіцієнти прямих (див. табл. 10.1). У рівняннях $y = \frac{1}{2}x + 1$ і $y = -3x + 2$: $k_1 = \frac{1}{2}$ і $k_2 = -3$. Підставимо їх в (10.11):

$$tg\varphi = \left| \frac{-3 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2} \cdot (-3)} \right| = 7 \Rightarrow \varphi = arctg\,7.$$

2) Приведемо рівняння $\begin{cases} x = 4 + 7t, \\ y = -3 + 2t \end{cases}$ до виду (10.8):

$$\begin{cases} x = 4 + 7t, \\ y = -3 + 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{x\text{-}4}{7}, \\ t = \frac{y+3}{2} \end{cases} \Rightarrow \quad y = \frac{2}{7}x - \frac{29}{7}.$$

Користуючись формулою (10.11), одержимо кут між прямими:

$$tg\varphi = \left| \frac{-\frac{3}{4} - \frac{2}{7}}{1 + \frac{3}{4} \cdot (-\frac{2}{7})} \right| = \frac{29}{22} \Rightarrow \varphi = arctg\,\frac{29}{22}.$$

3) Приведемо друге рівняння до виду (10.8):

$$-8x + 3y - 12 = 0 \Rightarrow \quad y = \frac{8}{3}x + 4.$$

Користуючись формулою (10.11), одержимо кут між прямими:

$$tg\varphi = \left| \frac{\frac{8}{3} - \frac{2}{5}}{1 + \frac{8}{3} \cdot \frac{2}{5}} \right| = \frac{36}{31} \Rightarrow \varphi = arctg\,\frac{36}{31}.$$

4) Обидва рівняння мають загальний вигляд: $2x + 20y - 3 = 0$ і $x - \frac{2}{3}y - 6 = 0$;

Кут між цими прямими знайдемо за формулою:

$$tg\varphi = \frac{A \cdot B' - A' \cdot B}{A \cdot A' + B \cdot B'}, \tag{10.12}$$

де A, B й A', B' – координати нормалей даних прямих (коефіцієнти при невідомих у першому й другому рівняннях відповідно).

$$tg\varphi = \frac{2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)-1\cdot 20}{2\cdot 1+20\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{16}{9} \Rightarrow \varphi = arctg\frac{16}{9}.$$

5) Перетворимо систему параметричних рівнянь прямої l_1 так, щоб утворювалося рівняння, не залежне від t.

$$\begin{cases} x = 3t, \\ y = -1+2t \end{cases} \Rightarrow y = \frac{2}{3}x - 1.$$

Аналогічно перетворюємо друге:

$$\begin{cases} x = 1-2t', \\ y = -5+t' \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x - \frac{9}{2}.$$

Тоді тангенс кута між прямими дорівнює:

$$tg\varphi = \frac{\left|-\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right|}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}} = \frac{7}{4} \Rightarrow \varphi = arctg\frac{7}{4}.$$

Задачі для самостійного розв'язування

1. Визначте, які з точок $A_1(1;-2)$, $A_2(1;1)$ та $A_3(3;-4)$ належать прямій $x+2y-3=0$.

2. Дано точки $A(-3;6)$, $B(4;-1)$, $C(-3,-5)$, $D(-1,2)$. Складіть рівняння:

1) прямої, що проходить через точки B і C;
2) прямої, що проходить через точку A й утворює кут 135° з віссю x;
3) прямої, що проходить через точку D перпендикулярно до прямої BC;
4) прямої, що проходить через точку A паралельно прямій BC;
5) прямої, яка проходить через точку B і точку, що поділяє відрізок AD у відношенні 1:3, рухаючись від точки A.

3. Напишіть рівняння прямої, що:

1) має кутовий коефіцієнт $k=-5$ і такої, що проходить через точку $A(1,-2)$;
2) має кутовий коефіцієнт $k=8$ та відтинає на осі Oy відрізок довжини 2;
3) проходить через дві точки $B(1,5)$ й $C(2,3)$;
4) проходить через точку $D(-2,3)$ й складає з віссю Ox кут 60°;
5) проходить через точку $E(1,7)$ ортогонально вектору $\bar{n}(4,3)$;
6) проходить через точку $F(-2,5)$ та відтинає на координатних осях відрізки рівної довжини;
7) проходить через точку $K(12,6)$ так, щоб площа трикутника, утвореного нею й координатними осями, дорівнювала 150 кв. од.

4. Знайдіть відрізки, що відтинає пряма $x-3y+6=0$ на осях координат.

5. Складіть рівняння прямої, що проходить під кутом $\varphi = 150^\circ$ до осі Ox і відтинає на осі Oy відрізок довжини 3.

6. Під яким кутом до осі Ox нахилена пряма, що проходить через точки $A(-1;\ 3)$ та $B(4;-2)$?

7. Силу прикладено в початку координат. Складові її на координатних осях відповідно дорівнюють 5 і –2. Знайдіть рівняння прямої, вздовж якої напрямлена сила.

8. Через точку $P(-1;3)$ проведіть пряму, перпендикулярну до прямої $4x - 2y + 3 = 0$.

9. Обчисліть відстань від точки P до прямої:

1) $P(-2;1)$, $4x - 3y - 2 = 0$;

2) $P(3;-2)$, $12x + 5y - 3 = 0$;

3) $P(0;1)$, $x - 2y + 1 = 0$.

10. Через точку $P(1;2)$ проведіть пряму, паралельну до прямої $5x + 2y - 11 = 0$.

11. Знайдіть проекцію точки $P(1;-2)$ на пряму $3x - y - 9 = 0$.

12. Промінь світла, що має напрямок прямої $x + 5y = 0$, падає на дзеркало, що визначається рівнянням $2x - y + 5 = 0$. Напишіть рівняння відбитого променя.

13. Через точку перетину прямих $x + 2y - 1 = 0$ і $2x + y - 4 = 0$ проведіть пряму, яка:

1) проходить через точку $M(-1;3)$;

2) паралельна осі Oy;

3) перпендикулярна до прямої $x - 2y + 11 = 0$.

14. Зведіть до нормального вигляду такі рівняння:

1) $4x + 3y + 11 = 0$; 2) $x + 2y - 1 = 0$; 3) $x + 2 = 0$.

15. Дано прямі $l_1 : 2x - 3y + 1 = 0$, $l_2 : 3x - y - 4 = 0$. Знайдіть:

1) відстань від точки $A(2; -1)$ до прямої l_1;

2) кут між прямими l_1 і l_2;

3) значення параметра m, при яких пряма $2x + my + 4 = 0$ перпендикулярна до прямої l_2;

4) значення параметра p, при яких пряма $px - y - p = 0$ збігається з прямою l_2.

16. Дано дві прямі $Ax + By + C = 0$ й $x = x_0 + lt,\ y = y_0 + mt$. Знайдіть необхідні й достатні умови, при яких прямі:

а) перетинаються;

б) паралельні;

в) збігаються.

17. Установіть, які з пар прямих паралельні, перетинаються, збігаються; у випадку перетину знайдіть спільну точку:

а) $2x + 3y = 0$ і $x = 3 + t,\ y = 2 - t$;

б) $x+2y-15=0$ і $x=5+4t,\ y=-2-2t$;

в) $3x+4y-20=0$ і $x=4-8t,\ y=2+6t$;

г) $x-2y+4=0$ і $-3x+6y+12=0$;

д) $x-5y=0$ і $2x-10y=0$;

е) $2x+3y-8=0$ і $x+y-3=0$.

18. Дано рівняння $x+y-2=0,\ 2x-y+5=0$ двох сторін паралелограма й точка $M(3,1)$ перетину його діагоналей. Напишіть рівняння двох інших сторін паралелограма.

19. Складіть рівняння сторін паралелограма, знаючи координати точки перетину його діагоналей $M(1,6)$, а сторони AB, BC, CD, DA проходять через точки $P(3,0)$, $Q(6,6)$, $R(5,9)$, $S(-5,4)$.

20. Знайдіть координати точки, симетричної точці $P(10,10)$ відносно прямої $3x+4y-20=0$.

21. Дано дві вершини трикутника $A(-6,2)$, $B(-2,2)$ і точка $H(1,-2)$ перетину його висот. Знайдіть координати третьої вершини C.

22. Знайдіть рівняння прямих, що містять катети прямокутного трикутника, площа якого 20 кв. од., якщо відомо, що його гіпотенуза лежить на осі Ox, а вершина прямого кута збігається із точкою $C(1,-4)$.

23. Складіть рівняння прямих, що проходять через точку $A(3,1)$ й нахилені до прямої $2x+3y-1=0$ під кутом 45°.

24. Складіть рівняння бісектрис кутів, утворених при перетині прямих $x=3t,\ y=-t$ і $x-y+8=0$.

25. Складіть рівняння катетів прямокутного рівнобедреного трикутника, знаючи рівняння гіпотенузи $y=3x+5$ й однієї його вершини $(4,-1)$.

26. Знаючи рівняння бічних сторін рівнобедреного трикутника $6x-2y+5=0$ й $x+3y-1=0$, знайдіть рівняння його третьої сторони за умови, що вона проходить через точку $A(1,1)$.

27. Складіть рівняння сторін квадрата, знаючи координати однієї з його вершин $A(-4,5)$ і рівняння діагоналі $7x-y+8=0$.

28. Знайдіть відстань між паралельними прямими:

а) $x-2y+3=0$ і $2x-4y+7=0$;

б) $3x-4y+1=0$ і $x=1+4t,\ y=3t$.

29. Із точок перетину прямої $3x+5y-15=0$ з осями координат відновлені перпендикуляри. Знайдіть їх рівняння.

30. Складіть рівняння сторін ромба, знаючи координати його протилежних вершин $A(-3,1)$, $C(5,7)$. Площа ромба $S=25$ кв. од.

31. Трикутник заданий своїми сторонами $x+2y+3=0$, $3x-7y+9=0$ і $5x-3y-11=0$. Перевірте, що його висоти перетинаються в одній точці.

32. Обчисліть площу ромба, знаючи одну його вершину $A(0,-1)$, точку перетину діагоналей $M(4,4)$ і точку $(2,0)$ на стороні AB.

33. У прямокутній декартовій системі координат дано вершини трикутника $A(-6,-3)$, $B(-4,3)$, $C(9,2)$. На внутрішній бісектрисі кута A знайдіть таку точку M, щоб чотирикутник $ABMC$ виявився трапецією.

34. Знаючи рівняння $3x-2y+6=0$ однієї зі сторін кута й рівняння його бісектриси $x-3y+5=0$ складіть рівняння другої сторони.

35. При яких значеннях a і b прямі $ax+by+1=0$, $2x+3y-5=0$ і $x-1=0$ проходять через ту саму точку?

36. У трикутнику ABC відомі: сторона AB: $4x+y-12=0$, висота BH: $5x-4y-15=0$ і висота AH: $2x+2y-9=0$. Запишіть рівняння двох інших сторін і висоти.

37. Через точку перетину прямих $2x+5y-8=0$ і $x-3y+4=0$ проведіть пряму, яка:

а) проходить через початок координат;

б) паралельна осі абсцис;

в) паралельна осі ординат;

г) проходить через точку $(4,3)$.

38. Не обчислюючи координат вершин трикутника, напишіть рівняння прямих, що проходять через ці вершини паралельно протилежним сторонам. Сторони трикутника задано рівняннями: $5x-2y+6=0$, $4x-y+3=0$, $x+3y-7=0$.

39. Знайдіть рівняння прямих, що належать пучку $(x+2y-7)+q(3x-y+5)=0$ й перпендикулярних до кожної з основних прямих пучка.

40. Знайдіть пряму, яка належить одночасно двом пучкам $\alpha_1(x+y-1)+\beta_1(x-1)=0$ і $\alpha_2(2x-3y)+\beta_2(y+1)=0$.

41. Знайдіть рівняння прямої, знаючи, що осі координат відтинають від неї у першому квадранті відрізок, удвічі більше її відстані від початку координат, а площа утвореного таким чином трикутника дорівнює 4,5 кв. одиниць.

42. Знайдіть центр вписаного кола й центр ваги рівнобедреного трикутника, якщо відомі рівняння бічних сторін трикутника $7x-y-9=0$ і $x+y-7=0$ та точка $M(3,-8)$, що лежить на його основі.

43. У рівнобедреному трикутнику відомі рівняння основи $x-2y+3=0$, однієї бічної сторони $4x-y+5=0$ та точка $P(1{,}2;\ 5{,}6)$ на іншій бічній стороні. Обчисліть:

а) відстань бічної сторони від протилежної вершини;

б) координати центру ваги трикутника;

в) площу трикутника.

44. Прямі $3x+4y-30=0$ й $3x-4y+12=0$ дотикаються кола радіуса $R=5$. Обчисліть площу чотирикутника, утвореного цими прямими й радіусами кола, проведеними в точки торкання.

11 КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Еліпсом називається геометричне місце точок площини, для кожної з яких сума довжин до двох фіксованих точок F_1 та F_2 є величина стала, що дорівнює $2a$. Точки F_1 та F_2 називаються *фокусами* еліпса, відстань між ними $F_1F_2 = 2c$ – *фокусною відстанню*. В канонічній системі координат, початок якої співпадає з серединою відрізка F_1F_2, а вісь абсцис проходить через точки $F_1(-c;0)$ та $F_2(c;0)$, рівняння еліпса має вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (11.1)$$

і називається *канонічним рівнянням* еліпса. У цьому рівнянні $b^2 = a^2 - c^2$. Точки $A_1(-a,0),\ A_2(a,0),\ B_1(0,-b),\ B_2(0,b)$ перетину еліпса з осями координат називаються *вершинами* еліпса. Відрізки $A_1A_2 = 2a,\ B_1B_2 = 2b$ – відповідно *велика (фокальна) і мала осі* еліпса. *Ексцентриситетом* ε еліпса називається відношення $e=\frac{c}{a}$. Очевидно, що для еліпса $0<e<1$. Відстані довільної точки $M(x,y)$ еліпса до фокусів називаються *фокальними радіусами* r_1 та r_2 і обчислюються за формулами

$$r_1 = a - ex,\ r_2 = a + ex.$$

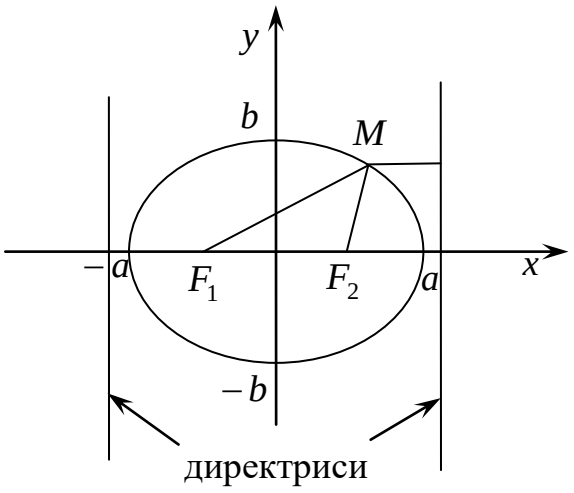


Рисунок 11.1 – Еліпс

Директрисами еліпса називаються дві прямі, перпендикулярні великій осі еліпса та такі, що відстоять від його центру на відстані $\frac{a}{e}$. Таким чином, рівняння директрис еліпса записуються у вигляді: $x=-\frac{a}{e}$, $x=\frac{a}{e}$.

Нехай $N(x_0,y_0)$ – довільна точка еліпса. *Дотична* до еліпса у цій точці задається рівнянням $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$. У випадку, коли дотична має проходити через точку $N(x_0,y_0)$, що не належить еліпсу, для відшукання кутового коефіцієнту дотичної треба скористатися умовою, що дотична $y-y_0=k(x-x_0)$ та еліпс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ повинні мати лише одну спільну точку.

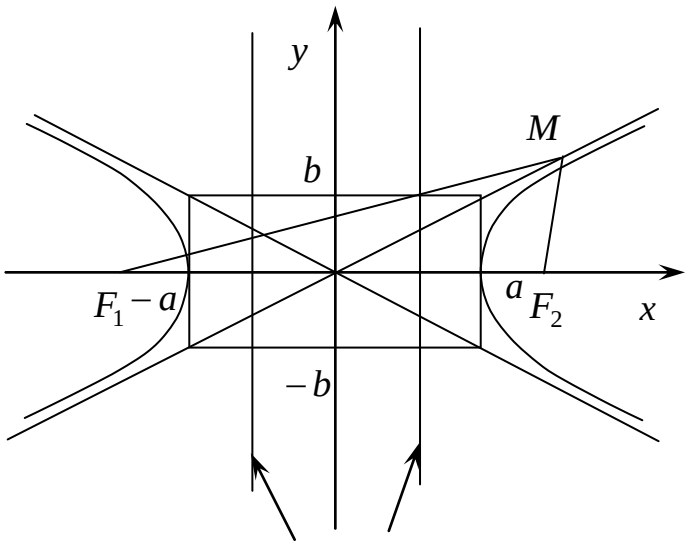
Гіперболою називається геометричне місце точок площини, для кожної з яких модуль різниці відстаней до двох фіксованих точок F_1 і F_2 (фокусів) є величина стала, що дорівнює $2a$. Оберемо початок системи координат у

середині відрізка $F_1F_2 = 2c$, а вісь абсцис проходить через точки F_1 та F_2. Тоді отримаємо *канонічне* рівняння гіперболи

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (11.2)$$

У цьому рівнянні $b^2 = c^2 - a^2$. Точки $A_1(-a,0), A_2(a,0)$ перетину гіперболи з віссю Ox називаються *вершинами* еліпса. Відрізок $A_1A_2 = 2a$ – *дійсна вісь* гіперболи, а відрізок осі ординат $B_1B_2 = 2b$ – *уявна вісь*. Прямокутник, обмежений прямими $x = -a$, $x = a$, $y = -b$, $y = b$, називається *характеристичним прямокутником гіперболи*, а його діагоналі – *асимптотами*. Рівняння асимптот гіперболи мають вид:

$$y = \frac{b}{a}x,\ y = -\frac{b}{a}x.$$



директриси

Рисунок 11.2 – Гіпербола

Ексцентриситетом e гіперболи також називається відношення $e = \frac{c}{a}$. Очевидно, що для гіперболи $e > 1$. Відстані довільної точки $M(x,y)$ гіперболи до фокусів називаються *фокальними радіусами* r_1 та r_2 і обчислюються за формулами

$$r_1 = ex - a,\ r_2 = ex + a.$$

Директрисами гіперболи називаються дві прямі, перпендикулярні дійсній осі гіперболи та такі, що відстоять від її центру на відстані $\frac{a}{e}$. Аналогічно еліпсу, рівняння директрис гіперболи записуються у вигляді: $x = -\frac{a}{e}$, $x = \frac{a}{e}$. Гіпербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ називається спряженою до гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Спряжена гіпербола має ті ж асимптоти, що і вихідна гіпербола. Дотичною до гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ в її точці $N(x_0,y_0)$ є пряма $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

Параболою називається множина точок площини, рівновіддалених від фіксованої точки F (фокуса) та даної прямої (директриси). Якщо по аналогії з еліпсом та гіперболою визначити ексцентриситет параболи, як відношення відстані від фокуса до директриси, то для параболи $e = 1$. Проведемо на площині, в якій розміщено параболу, вісь Ox перпендикулярно директрисі.

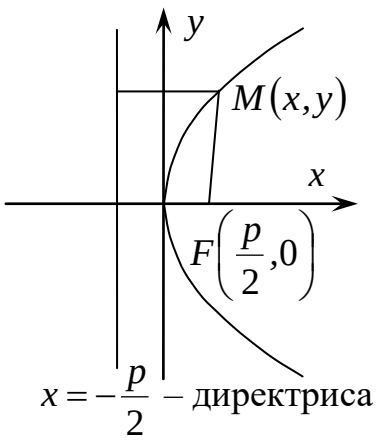


Рисунок 11.3 – Парабола

Вісь Oy декартової системи проведемо паралельно директрисі між фокусом та директрисою на відстані $\frac{p}{2}$ від фокуса, де p – відстань між фокусом та директрисою. Тоді в цій канонічній системі координат рівняння параболи матиме вид:

$$y^2 = 2px. \qquad (11.3)$$

Рівняння дотичної до параболи, що проходить через її точку $N(x_0, y_0)$ має вигляд:

$$yy_0 = p(x + x_0).$$

Приклади розв'язування задач

1. Складіть найпростіше рівняння еліпса, знаючи, що:

а) півосі його відповідно дорівнюють 4 і 2;

б) відстань між фокусами дорівнює 6 і більша піввісь дорівнює 5;

в) більша піввісь дорівнює 10 і ексцентриситет $e = 0{,}8$;

г) мала піввісь дорівнює 3 і ексцентриситет $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

д) сума півосей дорівнює 8 і відстань між фокусами теж дорівнює 8.

Розв'язання.

а) Використовуючи загальне рівняння еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ й знаючи, що a й b – півосі, з'ясовуємо, що шукане рівняння має вигляд: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$.

б) Відстань між фокусами дорівнює $2c$, отже $c = 3$. З рівності $b^2 = a^2 - c^2$ знаходимо значення $b = 4$. Піввісь $a = 5$ відома з умови. Отже, шукане рівняння має вигляд: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

в) За умовою $a = 10$. З означення ексцентриситету $e = \frac{c}{a}$ знаходимо $c = 8$. Скориставшись рівністю $b^2 = a^2 - c^2$, знаходимо $b = 6$. Запишемо рівняння еліпса: $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$.

г) За умовою $b = 3$. З означення ексцентриситету $e = \frac{c}{a}$, знаходимо залежність $c = \frac{\sqrt{2}}{2}a$. Використовуючи рівність $b^2 = a^2 - c^2$ і наявні дані,

одержуємо рівняння $a^2-\frac{a^2}{2}=9$, звідки $a=3\sqrt{2}$. Шукане рівняння еліпсу має вигляд: $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$.

д) З умови відомо, що $a+b=8$ й $2c=8$, звідки $c=4$. Використовуючи рівність $b^2=a^2-c^2$, одержимо $a^2-b^2=16$. Розв'язавши систему $\begin{cases}a+b=8,\\a^2-b^2=16,\end{cases}$ знаходимо значення $a=5$ й $b=3$. Запишемо шукане рівняння еліпса: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

2. Складіть рівняння параболи, знаючи, що:

а) відстань фокуса від вершини дорівнює 3;

б) фокус має координати $(5;0)$, а вісь ординат служить директрисою;

в) парабола симетрична відносно осі Ox, проходить через початок координат і через точку $M(1;-4)$;

г) парабола симетрична відносно осі Oy, фокус знаходиться в точці $(0;2)$ й вершина збігається з початком координат;

д) парабола симетрична відносно осі Oy, проходить через початок координат і через точку $M(6;-2)$.

Розв'язання:

а) Канонічне рівняння параболи має вигляд $y^2=2px$, де p – фокальний параметр, що дорівнює відстані від фокуса до директриси. Як відомо, відстань фокуса від вершини дорівнює половині відстані фокуса від директриси, отже, $p=6$ і шукане рівняння параболи має вигляд: $y^2=12x$.

б) Так як вісь ординат служить директрисою, а відстань від фокуса до директриси – це фокальний параметр, то $p=5$. Вершина параболи повинна перебувати в середині між фокусом і директрисою, виходить, її координати $(2{,}5;0)$ й, отже, шукане рівняння має вигляд: $y^2=10(x-2{,}5)$ або $y^2=10x-25$.

в) Канонічне рівняння параболи має вигляд $y^2=2px$. Якщо парабола проходить через точку $M(1;-4)$, то координати цієї точки задовольняють її рівнянню, тобто $16=2p$, звідки $p=8$. Отже, шукане рівняння: $y^2=16x$.

г) Так як фокус розташований на відстані дві одиниці від вершини, то $p=4$. З умови відомо, що парабола симетрична відносно осі Oy, звідки шукане рівняння: $x^2=8y$.

д) Рівняння параболи з вершиною в початку координат, симетричної відносно осі Oy, має вигляд: $x^2=2py$. Підставляючи в це рівняння координати точки $M(6;-2)$, через яку проходить парабола, знаходимо значення $p=-9$. У підсумку шукане рівняння має вигляд: $x^2=-18y$.

3. Складіть рівняння гіперболи, осі якої збігаються з осями координат, знаючи, що:

а) відстань між вершинами дорівнює 8, а відстань між фокусами 10;

б) дійсна піввісь дорівнює 5 і вершини поділяють відстані між центром і фокусами навпіл;

в) дійсна вісь дорівнює 6 і гіпербола проходить через точку $(9;-4)$;

г) гіпербола проходить через дві точки $P(-5;2)$ й $Q(2\sqrt{5};\sqrt{2})$.

Розв'язання:

а) З умови завдання маємо, що $A_1A_2 = 2a = 8$, звідки $a = 4$. Крім того $F_1F_2 = 2c = 10$, тобто $c = 5$. Використовуючи співвідношення $b^2 = c^2 - a^2$, знаходимо значення $b = 3$. Отже, підставляючи знайдені значення в канонічне рівняння гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, одержуємо шукане рівняння: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

б) З умови маємо, що $a = 5$ й $OF_1 = c = 2a = 10$. Використовуючи рівність $b^2 = c^2 - a^2$, знаходимо значення $b = 5\sqrt{3}$, звідки шукане рівняння має вигляд: $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{75} = 1$.

в) За умовою дійсна вісь дорівнює 6, отже, піввісь $a = 3$. Так як гіпербола проходить через точку $(9;-4)$, то координати цієї точки задовольняють загальному рівнянню гіперболи. Використовуючи наявні дані, приходимо до рівняння $\frac{81}{9} - \frac{16}{b^2} = 1$, звідки $b^2 = 2$. Отже, шукане рівняння гіперболи має вигляд: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{2} = 1$.

г) Підставляючи в канонічне рівняння гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ координати даних точок, приходимо до системи $\begin{cases} \frac{25}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1, \\ \frac{20}{a^2} - \frac{2}{b^2} = 1. \end{cases}$ Виразимо з першого рівняння системи $a^2 = \frac{25b^2}{b^2 + 4}$ й підставимо його в друге рівняння. Отримаємо $b^2 = 6$, тоді $a^2 = 15$ й шукане рівняння прийме вид: $\frac{x^2}{15} - \frac{y^2}{6} = 1$.

4. Знайдіть точки перетину еліпса $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{12} = 1$ з прямою $2x - y - 9 = 0$.

Розв'язання:

Щоб знайдіть потрібну нам точку, необхідно розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} \frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{12}=1, \\ 2x-y-9=0. \end{cases}$ Виразимо із другого рівняння y й підставимо отриманий вираз в перше рівняння системи: $\begin{cases} x^2+3(2x-9)=36, \\ y=2x-9. \end{cases}$. Розв'яжемо квадратне рівняння системи відносно x:

$$13x^2-108x+207=0,$$
$$D=(108)^2-4\cdot 13\cdot 207=900,$$
$$x_1=\frac{108+30}{26}=\frac{69}{13},\ x_2=\frac{108-30}{26}=3.$$

Використовуючи друге рівняння системи, знаходимо $y_1=\frac{21}{13},\ y_2=-3$. Таким чином, точки перетину еліпса з прямою мають координати: $\left(\frac{69}{13};\frac{21}{13}\right)$ і $(3;-3)$.

5. Задані точки $A(1;\ 0)$ і $B(2;\ 0)$. Точка M рухається так, що в трикутнику AMB $\angle B$ у два рази більший за $\angle A$. Знайдіть рівняння кривої, яку описує точка M.

Розв'язання:

Візьмемо точку M з координатами x і y. Виразимо $\operatorname{tg}\angle B$ і $\operatorname{tg}\angle A$ через координати точок A, B і M:

$$\operatorname{tg}\angle B=\frac{y}{2-x},\ \operatorname{tg}\angle A=\frac{y}{x+1}.$$

Згідно з умовою $\angle B=2\angle A$, тобто

$$\operatorname{tg}\angle B=\frac{2\operatorname{tg}\angle A}{1-\operatorname{tg}^2\angle A}\ \text{ або }\ \frac{y}{2-x}=\frac{2\frac{y}{x+1}}{1-\left(\frac{y}{x+1}\right)^2}.$$

Після спрощення дістаємо $x^2-\frac{y^2}{3}=1$. Отже, шукана крива – гіпербола.

6. Складіть рівняння параболи, симетричної відносно осі Ox, з вершиною в початку координат, якщо довжина деякої хорди цієї параболи, що перпендикулярна до осі Ox, дорівнює 16, а відстань до цієї хорди від вершини дорівнює 6.

Розв'язання:

Оскільки відома довжина хорди й відстань до неї від вершини, то відомі координати кінця цієї хорди – точки M, що лежить на параболі. У рівнянні

параболи $y^2 = 2px$ покладемо $x = 6,\ y = 8$. Тоді $2p = \frac{32}{3}$. Отже, рівняння шуканої параболи

$$y^2 = \frac{32x}{3}.$$

Тест для самоконтролю

1. Обчисліть ексцентриситет гіперболи $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$:

А. $e = \frac{4}{5}$ Б. $e = \frac{5}{4}$ В. $e = 1{,}2$ Г. $e = 0{,}6$

2. Складіть рівняння директрис еліпса $\frac{x^2}{39} + \frac{y^2}{64} = 1$:

А. $y = \pm 6{,}4$ **Б.** $x = \pm 6{,}4$ **В.** $y = \pm\frac{5}{64}$ **Г.** $y = \pm 12{,}8$

3. Гілки параболи $y^2 = -4x$ спрямовані у:

А. додатному напрямку осі Ox **Б.** додатному напрямку осі Oy

В. від'ємному напрямку осі Ox **Г.** від'ємному напрямку осі Oy

4. Гілки параболи $x^2 = 3y$ спрямовані у:

А. додатному напрямку осі Ox **Б.** додатному напрямку осі Oy

В. від'ємному напрямку осі Ox **Г.** від'ємному напрямку осі Oy

5. Визначте значення параметру p параболи $y^2 = -4x$:

А. $p = -2$ **Б.** $p = 4$ **В.** $p = -4$ **Г.** $p = 2$

6. Запишіть рівняння еліпса з фокусами $F_1(-1{,}0),\ F_2(0{,}1)$ та $a = \sqrt{2}$.

А. $-2xy - 8x + 8y + 15 = 0$ **Б.** $-2xy - 8x - 8y + 15 = 0$

В. $2xy + 8x + 10y + 15 = 0$ **Г.** $2xy - 8x + 10y + 15 = 0$

7. Запишіть рівняння параболи з фокусом $F(2,-2)$ та директрисою $y = x$.

А. $x^2 - 2xy + y^2 - 8x + 8y - 16 = 0$ **Б.** $x^2 + 2xy - y^2 + 8x + 8y - 16 = 0$

В. $x^2 - 2xy + y^2 - 8x - 8y + 16 = 0$ **Г.** $x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 8y + 16 = 0$

8. Центр симетрії якої із наступних кривих розташований найближче до осі Ox?

А. $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+4)^2}{16} = 1$ **Б.** $4(x+1)^2 - 9(y+2)^2 = -36$

В. $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 3$ **Г.** $\frac{(x+1)^2}{2} - \frac{(y-1)^2}{4} = 0$

9. Вкажіть усі осі симетрії еліпса $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1.$

А. $x=0, y=0$ **Б.** $x=-1, y=-3$ **В.** $y=-3$ **Г.** $x=2, y=-3$

10. Вкажіть усі осі симетрії гіперболи $\frac{(x+1)^2}{16}-\frac{(y-2)^2}{25}=1.$

А. $x=0, y=0$ **Б.** $x=-1, y=2$ **В.** $y=2$ **Г.** $x=1, y=-2$

11. Яке з наступних рівнянь визначає лінію, що має тільки одну вісь симетрії?

А. $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=-1$ **Б.** $y^2+8x-16=0$ **В.** $x^2+2y^2+8x-4=0$ **Г.** $x^2=0$

12. Після стиснення до осі Ox з коефіцієнтом $k=0{,}5$ отримали еліпс $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{36}=1$. Велика піввісь вихідного еліпса дорівнює…

А. 12 **Б.** 13 **В.** 72 **Г.** 6

13. Після стиснення до осі Ox з коефіцієнтом $k=0{,}5$ отримали гіперболу $\frac{x^2}{169}-\frac{y^2}{36}=1$. Дійсна піввісь вихідної гіперболи дорівнює…

А. 12 **Б.** 13 **В.** 72 **Г.** 6

14. Пряма $y-1=0$ є директрисою параболи…

А. $x^2=4y$ **Б.** $y^2=-2x$ **В.** $x^2=-4y$ **Г.** $y^2=4x$

15. Периметр чотирикутника, дві вершини якого знаходяться у фокусах еліпса $9x^2+25y^2=225$, а дві інші збігаються з кінцями його малої осі, дорівнює…

А. 10 **Б.** 6 **В.** 20 **Г.** 12

16. Асимптоти гіперболи $x^2-4y^2=64$ мають рівняння…

А. $y=\pm\frac{1}{4}x$ **Б.** $y=\pm\frac{1}{2}x$ **В.** $y=\pm 2x$ **Г.** $y=\pm 4x$

17. Дано гіперболу $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$. Відстань від точки $M\left(-2;4\sqrt{3}\right)$ до лівого фокуса дорівнює…

А. $\sqrt{52}$ **Б.** $\sqrt{60}$ **В.** 8 **Г.** $\sqrt{57}$

18. Рівняння параболи, вершина якої знаходиться у початку координат, а пряма $x-1=0$ є директрисою, має вигляд…

А. $y^2=-6x$ **Б.** $y^2=6x$ **В.** $y=-6x^2$ **Г.** $y=6x^2$

19. Яке з наступних рівнянь у полярній системі координат визначає еліпс?

А. $r=\frac{144}{5-13\cos\varphi}$ **Б.** $r=\frac{144}{13-5\cos\varphi}$ **В.** $r=\frac{144}{5+13\cos\varphi}$ **Г.** $r=\frac{144}{5\cos\varphi}$

20. Яке з наступних рівнянь у полярній системі координат визначає гіперболу?

А. $r=\frac{144}{13+5\cos\varphi}$ **Б.** $r=\frac{144}{5\cos\varphi}$ **В.** $r=\frac{144}{5-13\cos\varphi}$ **Г.** $r=\frac{144}{13-5\cos\varphi}$

21. Укажіть всі значення параметра a, при яких крива $x^2+ay^2+2x=0$ є еліпсом.

А. $a=1$ **Б.** $a\geq 0$ **В.** $a\leq 0$ **Г.** $a>0$

22. Складіть рівняння еліпса, який отримано поворотом еліпса $\frac{(x-4)^2}{16}+\frac{(y+3)^2}{9}=1$ навколо його центра на 90°.

А. $\frac{(x-4)^2}{9}+\frac{(y+3)^2}{16}=1$ **Б.** $\frac{(x+4)^2}{16}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$

В. $\frac{(x+3)^2}{9}+\frac{(y-4)^2}{16}=1$ **Г.** $\frac{(õ+3)^2}{16}+\frac{(ó-4)^2}{9}=1$

23. Складіть рівняння гіперболи, яку отримано поворотом гіперболи $\frac{(õ+1)^2}{16}-\frac{(ó-2)^2}{25}=1$ навколо її центра на 90°.

А. $\frac{(õ-1)^2}{25}-\frac{(ó+2)^2}{16}=1$ **Б.** $\frac{(õ-1)^2}{16}-\frac{(ó+2)^2}{25}=1$

В. $\frac{(õ+1)^2}{16}-\frac{(ó-2)^2}{25}=1$ **Г.** $\frac{(x+1)^2}{25}-\frac{(y-2)^2}{16}=-1$

Відповіді: 1. Б. 2. Г. 3. В. 4. Б. 5. Г. 6. В. 7. Г. 8. Г. 9. Г. 10. Б. 11. Г. 12. Б. 13. Б. 14. В. 15. В. 16. А. 17. Г. 18. А. 19. В. 20. В. 21. Г. 22. А. 23. Г.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Складіть рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, якщо:

1) його півосі дорівнюють 5 і 2;
2) його велика вісь дорівнює 10, а відстань між фокусами – 8;
3) його мала вісь дорівнює 24, а відстань між фокусами – 10;
4) відстань між фокусами дорівнює 6 і ексцентриситет $e=\frac{3}{5}$;
5) його велика вісь дорівнює 20, а ексцентриситет $e=\frac{3}{5}$;
6) його мала вісь дорівнює 10, а ексцентриситет $e=\frac{12}{13}$;
7) відстань між директрисами дорівнює 5 і відстань між фокусами – 4;
8) його велика вісь дорівнює 8, а відстань між директрисами – 16;
9) його мала вісь дорівнює 6, а відстань між директрисами – 15;
10) відстань між директрисами дорівнює 32 і $e=\frac{1}{2}$;
11) точка $M\left(-2\sqrt{5};\,2\right)$ належить еліпсу і його мала піввісь дорівнює 3;
12) точка $M\left(2;\,-2\right)$ належить еліпсу і його велика піввісь дорівнює 4;
13) точки $M\left(4;\,-\sqrt{3}\right)$ і $N\left(2\sqrt{2};\,3\right)$ належать еліпсу;

14) відстань від директриси до найближчої вершини дорівнює 4, а до вершини, що лежить на осі, паралельній директрисі, дорівнює 8;
15) трикутник з вершинами у фокусах і в кінці малої осі правильний, а діаметр кола, що проходить через центр і дві вершини еліпса – 7.

2. Складіть рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, якщо:
1) її вісі $2a=10$ і $2b=8$;
2) відстань між фокусами $2c=10$ і вісь $2b=8$;
3) відстань між фокусами $2c=6$ і ексцентриситет $e=\frac{3}{2}$;
4) вісь $2a=16$ і ексцентриситет $e=\frac{5}{4}$;
5) рівняння асимптот $y=\pm\frac{4}{3}x$ і відстань між фокусами $2c=20$;
6) відстань між директрисами $22\frac{2}{13}$ і відстань між фокусами $2c=26$;
7) відстань між директрисами $\frac{32}{5}$ і вісь $2b=6$;
8) відстань між директрисами дорівнює $\frac{8}{3}$ і $e=\frac{3}{2}$;
9) рівняння асимптот $y=\pm\frac{3}{4}x$ і відстань між директрисами $12\frac{4}{5}$;
10) точки $M(6;-1)$ і $N\left(-8;2\sqrt{2}\right)$ належать гіперболі;
11) точка $M(-5;3)$ належить гіперболі і ексцентриситет дорівнює $\sqrt{2}$;
12) точка $M\left(\frac{9}{2};-1\right)$ гіперболи і рівняння асимптот $y=\pm\frac{2}{3}x$;
13) точка $M\left(-3;\frac{5}{2}\right)$ належить гіперболі і рівняння директрис $x=\pm\frac{4}{3}$;
14) рівняння асимптот $y=\pm\frac{3}{4}x$ і рівняння директрис $x=\pm\frac{32}{5}$.

3. Складіть рівняння параболи, вершина якої знаходиться в початку координат, якщо:
1) парабола розташована в правій півплощині симетрично відносно вісі Ox і її параметр $p=3$;
2) парабола розташована в лівій півплощині симетрично відносно вісі Ox і її параметр $p=0{,}5$;
3) парабола розташована в верхній півплощині симетрично відносно вісі Oy і її параметр $p=\frac{1}{4}$;
4) парабола розташована в нижній півплощині симетрично відносно вісі Oy і її параметр $p=3$;

5) парабола розташована симетрично відносно вісі Ox і проходить через точку $A(9;\,6)$;
6) парабола розташована симетрично відносно вісі Ox і проходить через точку $B(-1;\,3)$;
7) парабола розташована симетрично відносно вісі Oy і проходить через точку $C(1;\,1)$;
8) парабола розташована симетрично відносно вісі Oy і проходить через точку $D(4;\,-8)$.

4. Точка $M\left(-\frac{5}{2};\,1\right)$ лежить на гіперболі $4x^2-5y^2=20$. Знайдіть її фокальні радіуси.

5. Знайдіть точки перетину еліпса $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ з прямою $x-2y+2=0$.

6. Знайдіть точки перетину гіперболи $\frac{x^2}{90}-\frac{y^2}{36}=1$ з прямою $x-y+5=0$.

7. Через точку $M(2;4)$ проведіть дотичні до еліпса $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$.

8. Складіть рівняння дотичних, проведених через точку $M\left(0;-\frac{1}{4}\right)$ до гіперболи $9x^2-2y^2=1$.

9. Напишіть рівняння дотичної до еліпса $\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{18}=1$ в точці $M(4;4)$.

10. Складіть рівняння дотичних до еліпса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$, що проходять через точку $N(10,4)$.

11. Дана пряма $x+y=0$. Складіть рівняння дотичних до еліпса $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$:
1) паралельних даній прямій;
2) перпендикулярних даній прямій.

12. Складіть рівняння гіперболи, якщо відомо її ексцентриситет $e=\sqrt{5}$, фокус $F(2;\,-1)$ і рівняння відповідної директриси $3x-y+3=0$.

13. Складіть рівняння параболи, якщо заданий її фокус $F(4;\,3)$ і директриса $y+1=0$.

14. Складіть рівняння двох спряжених гіпербол, якщо відстань між директрисами першої з них дорівнює 7,2 і відстань між директрисами другої дорівнює 12,8.

15. Складіть рівняння еліпса, якщо його ексцентриситет $e=\frac{1}{2}$, фокус знаходиться в точці $F(1;-2)$, а відповідна директриса визначається

рівнянням $x-y+1=0$.

16. Визначте ексцентриситет еліпса, знаючи, що:

1) його мала вісь видна з фокуса під прямим кутом;

2) відстань між фокусами дорівнює відстані між вершинами малої і великої осей;

3) відстань між директрисами в чотири рази більше відстані між фокусами;

4) відрізок між фокусом і дальньою вершиною більшої осі ділиться другим фокусом у відношенні 2:1.

17. Відомо, що фокус еліпса має координати $(1;0)$, йому відповідає директриса $x=7$, а ексцентриситет $e=\frac{1}{2}$. Знайдіть другий фокус і другу директрису цього еліпса.

18. Знайдіть ексцентриситет еліпса, знаючи, що сторони вписаного в нього квадрата проходять через фокуси еліпса паралельно його малій осі.

19. Складіть рівняння прямої, що проходить через середини хорд еліпса $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$, що лежать на прямих $2x-y+7=0$ і $2x-y-1=0$.

20. Відомо, що фокус гіперболи має координати $(3;0)$, йому відповідає директриса $x=-1/5$, а ексцентриситет $e=5/3$. Знайдіть другий фокус і другу директрису цієї гіперболи.

21. Напишіть рівняння гіперболи, знаючи чотири точки $(\pm 4,2)$, $(\pm 4,-2)$ перетину її директрис і асимптот.

22. Сторони квадрата, вписаного в гіперболу, проходять через її фокуси. Знайдіть її ексцентриситет.

23. На параболі $y^2=10x$ знайдіть точку M таку, що:

1) пряма, що проходить через точку M та фокус параболи, утворює з віссю Ox кут 60°;

2) площа трикутника з вершинами в шуканій точці M, фокусі параболи й точці перетину осі параболи з директрисою дорівнює 5;

3) відстань від точки M до вершини параболи дорівнює відстані від точки M до фокуса;

4) відстані від точки M до вершини параболи та до фокуса параболи відносяться як $8:7$.

24. Знайдіть таку хорду параболи $y^2=4x$, яка точкою $(3;1)$ ділиться навпіл.

25. Складіть рівняння дотичної до гіперболи $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, якщо дотична:

1) паралельна прямій $3x-y-17=0$;

2) перпендикулярна до прямої $2x+5y+11=0$.

26. Складіть рівняння гіперболи, знаючи рівняння її асимптоти $y=\pm\frac{1}{2}x$ і рівняння однієї з її дотичних $5x-6y-8=0$.

27. Гіпербола, осі якої збігаються з осями координат, дотикається прямої $x-y-2=0$ в точці $M(4;2)$. Складіть рівняння цієї гіперболи.

28. Напишіть рівняння еліпса з півосями $a=2, b=1,$ для якого прямі $x+y-1=0$ й $x-y+1=0$ суть відповідно більша й мала осі.

29. Еліпс при русі по площині дотикається двох взаємно перпендикулярних прямих. Яку лінію описує центр еліпса?

30. Напишіть рівняння рівносторонньої гіперболи, знаючи її фокус $(1;1)$ і асимптоту $x+y=0$.

31. Визначте фокус параболи $y=x^2-4x+5$.

32. Напишіть рівняння параболи, знаючи її директрису $x-y+8=0$ й фокус $F_1(-1,-2)$.

33. Складіть рівняння лінії другого порядку, знаючи її фокус $F(1,1)$, директрису $x+2y-1=0$ й ексцентриситет $\varepsilon=\sqrt{5}$.

34. Складіть рівняння лінії другого порядку, знаючи її фокуси $F_1(1,1)$ і $F_2(-2,-2)$ й одну з її директрис $x+y-1=0$.

35. Складіть рівняння лінії другого порядку, знаючи її фокус $F(-3,-7)$, центр $(-1,-3)$ і одну з директрис $x+2y-4=0$.

12 ЗАГАЛЬНЕ РІВНЯННЯ КРИВОЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Алгебраїчною кривою другого порядку на площині називається множина всіх точок площини, координати яких задовольняють рівнянню:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \qquad (12.1)$$

Вираз $f(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ називається *квадратичною частиною*, $2a_{13}x + 2a_{23}y$ *– лінійною частиною*, a_{33} *– вільним членом* рівняння.

Ліву частину рівняння (12.1) позначимо $F(x,y)$. Параметри точок перетину прямої $x = x_0 + lt,\ y = y_0 + mt$ з кривою (6.1) можна знайти з рівняння:

$$At^2 + 2Bt + C = 0, \qquad (12.2)$$

де $A = a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2$, $B = \frac{1}{2}\left(lF_x(x_0,y_0) + mF_y(x_0,y_0)\right)$, $F_x = \frac{\partial F}{\partial x}$, $F_y = \frac{\partial F}{\partial y}$, $C = F(x_0,y_0)$.

Вектор $\overline{(l,m)}$ називається *вектором асимптотичного напряму* відносно кривої другого порядку, якщо $A = 0$. Дослідження рівняння $A = a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = 0$ приводить до наступних висновків: кількість асимптотичних напрямів відносно кривої залежить від числа $\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $a_{12} = a_{21}$. Крива другого порядку, для якої $\delta > 0$, називається кривою *еліптичного типу*, вона має два асимптотичні напрями. Умова $\delta < 0$ визначає криву *гіперболічного типу*, вона має два асимптотичні напрями. При $\delta = 0$ маємо криву *параболічного типу*, відносно неї існує один асимптотичний напрямок.

Точка M називається *центром кривої* другого порядку, якщо при центральній симетрії відносно точки M крива переходить в себе.

Теорема 12.1 Для того, щоб точка $M(x_0,y_0)$ була центром кривої другого порядку необхідно і достатньо, щоб виконувались умови:

$$\begin{cases} F_x(x_0,y_0) = 0, \\ F_y(x_0,y_0) = 0, \end{cases} \text{тобто} \begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0, \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0. \end{cases} \qquad (12.3)$$

При цьому, якщо система (6.3) має єдиний розв’язок, то крива називається центральною. Тому ознакою центральної кривої є $\delta \neq 0$.

Користуючись канонічними рівняннями кривих другого порядку неважко з’ясувати, що еліпс і гіпербола – центральні криві, парабола не має центра, дві паралельні прямі мають нескінченну кількість центрів — пряму центрів (див. таблицю).

Таблиця 12.1 – Криві другого порядку та їх центри

Крива	**Канонічне рівняння**	**Центри кривої**
еліпс	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\begin{cases}\frac{1}{a^2}x=0\\ \frac{1}{b^2}y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$
точка	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$	
порожня множина	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$	
гіперболи	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm 1$	$\begin{cases}\frac{1}{a^2}x=0\\ \frac{1}{b^2}y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$
перетинні прямі	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$	
парабола	$y^2=2px,\ \ p\neq 0$	$\begin{cases}p=0\\ y=0\end{cases}$
паралельні прямі	$y^2=a^2,\ \ a>0$	$\begin{cases}0=0\\ y=0\end{cases}\Leftrightarrow y=0$
здвоєна пряма	$y^2=0$	
порожня множина	$y^2=-a^2,\ \ a>0$	

Пряма, що проходить через центр кривої та має асимптотичний напрямок, називається *асимптотою* кривої другого порядку. Отже, гіпербола має дві асимптоти, а еліпс та парабола жодної. З рівняння (12.2) випливає, що умова $B^2-AC=0$ є умовою дотику прямої та кривої другого порядку, при цьому, якщо точка (x_0,y_0) належить кривій, то умова дотику приймає вид $B=0$. *Дотична пряма* у цьому випадку має вигляд:

$$F_x(x_0,y_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0)(y-y_0)=0. \qquad (12.4)$$

Діаметром лінії другого порядку називається геометричне місце середин всіх хорд, паралельних даному вектору не асимптотичного напряму.

Теорема. Геометричним місцем середин всіх хорд лінії другого порядку, що мають не асимптотичний напрямок, є пряма лінія, що визначається рівнянням:

$$lF_x+mF_y=0, \qquad (12.5)$$

де l,m – координати напрямного вектору паралельних хорд. Рівняння (12.5) називають рівнянням діаметру, спряженого даному напрямку $\overline{(l,m)}$. Два вектори $\bar{p}_1(l_1,m_1)$ та $\bar{p}_2(l_2,m_2)$ є *спряженими* відносно кривої другого порядку, якщо виконується умова: $a_{11}l_1l_2+a_{12}(l_1m_2+l_2m_1)+a_{22}m_1m_2=0$. Паралельні цим векторам діаметри називаються спряженими діаметрами кривої. Напрямок вектора називається *головним* відносно кривої другого порядку, заданої в декартовій системі координат, якщо він спряжений перпендикулярному йому напрямку. Рівняння, з якого можна знайти кутові коефіцієнти головних

напрямків: $a_{12}k^2+(a_{11}-a_{22})k-a_{12}=0$. Діаметри, що мають головні напрямки відносно кривої другого порядку, називаються *головними діаметрами*.

Ортогональним інваріантом загального рівняння (12.1) лінії другого порядку відносно перетворення декартової системи координат назвемо функцію $I(a_{11},a_{12},a_{22},a_{13},a_{23},a_{33})$, значення якої не змінюється при переході до нової декартової системи координат.

Теорема 12.2 Три функції

$I_1=a_{11}+a_{22}=S$ – слід матриці $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$,

$I_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\delta$ – малий визначник лінії (6.1),

$I_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\Delta$ – великий визначник лінії (12.1)

є *ортогональними інваріантами* лінії другого порядку (12.1).

Вираз: $K_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ називається *напівінваріантом* (семиінваріантом) лінії (6.1). Рівняння $\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}=0$ називається характеристичним рівнянням лінії (6.1).

Теорема 12.3 Корені λ_1,λ_2 характеристичного рівняння кривої другого порядку завжди дійсні.

Таблиця 12.2 – Визначення типу кривої за допомогою інваріантів.

Тип	Зведене рівняння	Інваріанти	Канонічне рівняння	Назва
1	2	3	4	5
Еліптичний	$\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\frac{I_3}{I_2}=0$	$I_2>0, I_1\cdot I_3<0$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	Еліпс
		$I_2>0, I_1\cdot I_3>0$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$	Уявний еліпс
		$I_2>0, I_3=0$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$	Вироджений еліпс (пара уявних прямих, що перетинаються в дійсній точці)

Продовження таблиці 12.2

1	2	3	4	5
гіперболічний		$I_2<0, I_3\neq 0$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	Гіпербола
		$I_2<0, I_3=0$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$	Пара дійсних прямих, що перетинаються
Параболічний	$I_1y^2\pm 2\sqrt{-\frac{I_3}{I_1}}\cdot x=0$	$I_2=0, I_3\neq 0$	$y^2=2px$	Парабола
		$I_2=0, I_3=0,$ $K_1<0$	$y^2-b^2=0$	Пара дійсних паралельний прямих
	$I_1y^2+\frac{I_4}{I_1}=0$	$I_2=0, I_3=0,$ $K_1>0$	$y^2+b^2=0$	Пара уявних паралельних прямих
		$I_2=I_3=K_1=0$	$y^2=0$	Пара дійсних прямих, що співпадають

Приклади розв'язування задач

1. Приведіть до канонічного виду рівняння й визначте вид кривої: $x^2+4y^2+4x-8y-8=0$.

Розв'язання:

Виділимо в даному рівнянні повні квадрати. Для цього перенесемо вільний член 8 вправо, додамо до обох частин рівняння 8 і згрупуємо доданки, виділяючи повні квадрати по кожній змінній: $(x^2+4x+4)+4(y^2-8y+1)=16$, звідки $(x+2)^2+4(y-1)^2=16$ або $\frac{(x+2)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$. Одержали рівняння еліпса із центром у точці $(-2;1)$ й півосями, що дорівнюють: $a=4$ і $b=2$.

2. Напишіть рівняння дотичних до кола $x^2+y^2-10x-4y+25=0$, проведених з: а) початку координат; б) із точки $(3;2)$ на лінії.

Розв'язання:

а) Усяка пряма, що проходить через початок координат, має рівняння $y=kx$. Треба підібрати кутовий коефіцієнт k так, щоб пряма $y=kx$ й дане коло мали дві точки перетину, що злилися. Розв'яжемо спільно обидва рівняння (виключаємо y):

$$x^2+k^2x^2-10x-4kx+25=0$$

або

$$x^2(1+k^2)-2x(5+2k)+25=0.$$

У випадку дотику корені цього рівняння повинні бути дійсні й рівні, тому складемо дискримінант і дорівняємо його до нуля:

$$4\cdot(5+2k)^2-4\cdot(1+k^2)\cdot 25=0.$$

Коренями цього рівняння є числа: $k_1=0$ і $k_2=\frac{20}{21}$. Тому рівняннями шуканих дотичних будуть: 1) $y=0$; 2) $y=\frac{20}{21}x$ або $20x-21y=0$.

б) Рівняння дотичної до кола $x^2+y^2=r^2$ має вигляд $xx_0+yy_0=r^2$, де (x_0,y_0) – координати точки дотику.

Приведемо дане рівняння кола до канонічного виду, для цього виділимо повний квадрат по кожній змінній:

$$(x^2-5\cdot 2\cdot x+25)+(y^2-2\cdot 2\cdot y+4)-4=0 \Rightarrow (x-5)^2+(y-2)^2=4.$$

Рівняння дотичної в точці $(3;2)$ буде мати вигляд:

$$(x-5)(3-5)+(y-2)(2-2)=4,$$
$$(x-5)(-2)=4,$$
$$x=3.$$

3. Який вид прийме рівняння кривої $xy-6x+2y+3=0$, якщо перенести початок координат у точку $O'(-2;6)$, не змінюючи напрямку осей координат?

Розв'язання:

Якщо, не змінюючи напрямку осей координат, перенести початок координат у будь-яку точку $O'(x';y')$, то рівняння

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$$

перетвориться в наступне:

$$a_{11}X^2+2a_{12}XY+a_{22}Y^2+2F_{x'}X+2F_{y'}Y+2F'=0,$$

$$\begin{cases} 2F'=a_{11}x'^2+2a_{12}x'y'+a_{22}y'^2+2a_{13}x'+2a_{23}y'+a_{33}, \\ 2F_{x'}=2(a_{11}x'+a_{12}y'+2a_{13}), \\ 2F_{y'}=2(2a_{12}x'+a_{22}y'+a_{23}), \end{cases}$$

тобто коефіцієнти при старших членах не зміняться, а коефіцієнтами при перших ступенях координат будуть часткові похідні від лівої частини вихідного рівняння по відповідних до координат із заміною поточних координат координатами нового початку; вільний член представляє всю ліву частину вихідного рівняння, у якій зроблена та ж заміна.

Перенесемо початок координат у точку $O'(-2;6)$, тоді рівняння кривої $xy-6x+2y+3=0$ буде мати вигляд $xy+15=0$, тому що

$$\begin{cases} 2F'=x'y'-6x'+2y'+3, \\ 2F_{x'}=y'-6, \\ 2F_{y'}=x'+2. \end{cases}$$

4. Зведіть до канонічного вигляду рівняння кривої другого порядку, використовуючи перетворення координат, а саме перетворення повороту та паралельного переносу: $5x^2-4\sqrt{2}xy+3y^2-14=0$.

Розв'язання:

У загальному рівнянні кривої присутній член xy, тому виконаємо перетворення повороту. У вихідному рівнянні $a_{22}=3\neq a_{11}=5$, тому $tg2\varphi=\dfrac{2\cdot\left(-2\sqrt{2}\right)}{5-3}=-2\sqrt{2}$. Знайдемо $\sin\varphi$ та $\cos\varphi$, використовуючи формули: $tg2\varphi=\dfrac{2tg\varphi}{1-tg^2\varphi}$, $\sin\varphi=\dfrac{tg\varphi}{\pm\sqrt{1+tg^2\varphi}}$, $\cos\varphi=\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+tg^2\varphi}}$. Отримаємо: $tg\varphi=\left\{-\dfrac{1}{\sqrt{2}};\sqrt{2}\right\}$, а $\sin\varphi$ і $\cos\varphi$ візьмемо, наприклад, $\sin\varphi=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$, $\cos\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Запишемо формули перетворення:

$$\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(\bar{x}-\bar{y}\sqrt{2}\right), \\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(\bar{x}\sqrt{2}+\bar{y}\right), \end{cases}$$

за допомогою яких отримаємо рівняння кривої в новій системі координат:

$$3\bar{x}^2+21\bar{y}^2-42=0 \text{ або } \frac{\bar{x}^2}{14}+\frac{\bar{y}^2}{2}=1$$

– рівняння еліпса з центром в початку координат та півосями $\sqrt{14}$ та $\sqrt{2}$, при цьому системи координат пов'язані формулами: $\begin{cases} \bar{x}=\dfrac{x\sqrt{3}}{3}+\dfrac{y\sqrt{6}}{3}, \\ \bar{y}=-\dfrac{x\sqrt{6}}{3}+\dfrac{y\sqrt{3}}{3}. \end{cases}$

5. Зведіть до канонічного вигляду рівняння кривої другого порядку, використовуючи теорію квадратичних форм:

$$5x^2-4\sqrt{2}xy+3y^2-14=0.$$

Розв'язання:

Випишемо матрицю старших членів:

$$A=\begin{pmatrix} 5 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо власні значення цієї матриці. Для цього складемо характеристичне рівняння та розв'яжемо його:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 3-\lambda \end{vmatrix}=0,$$

$$(3-\lambda)(5-\lambda)-8=0,$$

$$\lambda^2-8\lambda+7=0,$$

$$\lambda_1=1,\ \lambda_2=7.$$

Для знаходження перетворення координат, знайдемо власні вектори, відповідні знайденим власним значенням. Для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{pmatrix} 5-\lambda & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 3-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

При $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}\cdot\sqrt{2}+\mathrm{I}\sim\begin{pmatrix} 4 & -2\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 4 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$4x_1-2\sqrt{2}x_2=0\Rightarrow x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}x_2.$$

Таким чином, для $\lambda_1 = 1$ власний вектор $\bar{a}_1 = c_1\left(\sqrt{2};\ 2\right)$, $c_1 = const \neq 0$, який після нормування буде: $\bar{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$.

При $\lambda_2 = 7$:

$$\begin{pmatrix} -2 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & -4 \end{pmatrix}-\mathrm{I}\cdot\sqrt{2}\sim\begin{pmatrix} -2 & -2\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} -2 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$-2x_1-2\sqrt{2}x_2=0\Rightarrow x_1=-\sqrt{2}x_2.$$

Таким чином, для $\lambda_2 = 7$ власний вектор $\bar{a}_2 = c_2\left(-2;\ \sqrt{2}\right)$, $c_2 = const \neq 0$, який після нормування буде: $\bar{e}_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}};\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Можна перевірити, що отримані нормовані власні вектори попарно ортогональні ($\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2 = 0$), тому запишемо матрицю перетворення координат (вектори $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ розмістимо по стовпцях):

$$Q=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Тоді формули перетворення координат матимуть вид:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=Q\cdot\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}\ \text{або}\ \begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{3}}\bar{x}-\frac{2}{\sqrt{6}}\bar{y}, \\ y=\frac{2}{\sqrt{6}}\bar{x}+\frac{1}{\sqrt{3}}\bar{y}. \end{cases}$$

Підставимо знайдені вирази у рівняння кривої, спростимо його. Отримаємо:

$$\bar{x}^2+7\bar{y}^2-42=0,$$

$$\frac{\bar{x}^2}{42}+\frac{\bar{y}^2}{6}=1 \text{ – еліпс.}$$

Тест для самоконтролю

1. Скільки існує центральних кривих другого порядку?

А. 2 **Б.** 4 **В.** 5 **Г.** 6

2. Яка з кривих не має центру?

А. $x^2+4y^2+4x-8y+2=0$ **Б.** $3x^2-y^2+4x+6y-2=0$

В. $y=2x^2-4x+1$ **Г.** $x^2+2x+1=0$

3. Вкажіть всі значення p, при яких крива $x^2+py^2-2x+1=0$ має більше двох центрів.

А. $p>0$ **Б.** $p=0$ **В.** $p<0$ **Г.** $p\in R$

4. Для якої кривої з наведених напрям $1:0$ є асимптотичним?

А. $2x^2+y^2-4x+2y=0$ **Б.** $x^2-2y^2+4x-3y=0$

В. $y=2x^2+3x-1$ **Г.** $y^2=4x-1$

5. Яка з наведених кривих не має асимптотичних напрямів?

А. $x^2-3y^2+2x-2y+1=0$ **Б.** $y^2=-x^2+3x-1$

В. $x^2+3y^2-2x+2y-1=0$ **Г.** $y^2=4$

6. Для кривої $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ асимптотичним є напрям …

А. 9:16 **Б.** $4:3$ **В.** $3:4$ **Г.** $1:0$

Відповіді: 1. А. 2. В. 3. Б. 4. Г. 5. Г. 6. Б.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Використовуючи паралельний перенос, з'ясуйте вид і розташування на координатній площині наступних ліній другого порядку:

1) $x^2+y^2-2x+6y-5=0;$
2) $x^2+4y^2+4x-8y-8=0;$
3) $x^2+2y^2+8x-4=0;$
4) $9x^2-y^2-18x-20y-316=0;$
5) $6x^2-5y^2+12x-10y-31=0;$
6) $x^2-4y^2+6x+5=0;$
7) $y^2-10x-2y-19=0;$
8) $y^2-6x+14y+49=0;$

9) $y^2+8x-16=0;$

10) $x^2-6x-4y+29=0;$

11) $2x^2+y^2-4x+4y=0;$

12) $6x^2+8y^2+3x-4y+1=0;$

13) $2x^2+9y^2-12x-6y+19=0;$

14) $3x^2-2y^2+6x+4y+1=0;$

15) $x^2+x-6=0;$

16) $y^2-5y+11=0;$

17) $25x^2-30x+9=0.$

2. Зведіть до канонічного вигляду рівняння кривої другого порядку, використовуючи перетворення координат, а саме перетворення повороту та паралельного переносу. Схематично побудуйте криву (якщо вона існує):

1) $3x^2+10xy+3y^2-2x-14y-3=0;$

2) $25x^2-14xy+25y^2+64x-64y-224=0;$

3) $7x^2+6xy-y^2+28x+12y+28=0;$

4) $5x^2-2xy+5y^2-4x+20y+20=0;$

5) $9x^2-24xy+16y^2-20x+110y-50=0;$

6) $9x^2+12xy+4y^2-24x-16y+3=0;$

7) $16x^2-24xy+9y^2-160x+120y+425=0;$

8) $4x^2+12xy+9y^2-4x-6y+1=0;$

9) $19x^2+6xy+11y^2+38x+6y+29=0;$

10) $x^2-2xy+y^2-10x-6y+25=0.$

3. Приведіть рівняння кривої до канонічного виду за допомогою теорії квадратичних форм, визначте її тип і схематично побудуйте:

1) $5x^2+4xy+2y^2-18=0;$

2) $x^2+2xy-y^2-8\sqrt{2}=0;$

3) $4x^2+2\sqrt{6}xy+3y^2-24=0;$

4) $5x^2-2\sqrt{45}xy+y^2-5=0;$

5) $6x^2+2\sqrt{5}xy+2y^2-21=0;$

6) $7x^2-8xy+y^2-9=0;$

7) $3x^2-4\sqrt{6}xy+5y^2+18=0;$

8) $2\sqrt{6}xy+5y^2+6=0;$

9) $9x^2+8\sqrt{3}xy+6y^2-36=0;$

10) $5x^2+12xy-19=0.$

4. Визначте вид наступних ліній другого порядку:

1) $x^2+3xy+4y^2-5x+2y-1=0;$

2) $4x^2-4xy+y^2-8x+6y-2=0;$

3) $2xy-4y^2-6x+6y+1=0;$

4) $x^2-4xy-y^2-4x+2y-2=0;$

5) $x^2-2xy+4y^2-2x-2y-4=0;$

6) $x^2+4xy+4y^2-6x-8y=0.$

5. Покажіть, що кожне з нижченаведених рівнянь визначає пари прямих, і знайдіть рівняння цих прямих (система координат афінна):

1) $2x^2-5xy-12y^2-x+26y-10=0;$

2) $3x^2+xy-2y^2-5x+5y-2=0;$

3) $4x^2+16xy-15y^2-8x-22y-5=0;$

4) $4x^2-4xy+y^2-6x+3y-4=0.$

6. Лінія другого порядку визначається рівнянням $x^2-2y+\lambda(y^2-2x)=0.$ Визначте тип лінії при кожному дійсному значенні параметра λ й опишіть її розташування щодо даної системи координат.

7. При якій необхідній і достатній умові рівняння $Ax^2+By^2+2Cx+2Dy+E=0$ задає: 1) еліпс; 2) гіперболу? Система координат афінна.

8. Використовуючи метод обертань, визначте форму й розташування на площині наступних ліній другого порядку:

1) $x^2-2xy+y^2-10x-6y+25=0;$

2) $xy+x+y=0;$

3) $5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+9=0;$

4) $5x^2+6xy+5y^2-16x-16y-16=0;$

5) $x^2+2xy+y^2-8x+4=0;$

6) $5x^2+4xy+8y^2-32x-56y+80=0;$

7) $5x^2+12xy-22x-12y-19=0;$

8) $4x^2-12xy+9y^2-2x+3y-2=0;$

9) $4xy+3y^2+16x+12y-36=0;$

10) $2x^2+4xy+5y^2-6x-8y-1=0;$

11) $6xy-8y^2+12x-26y-11=0;$

12) $4x^2-4xy+y^2-2x-14y+7=0;$

13) $2x^2-4xy+4y^2+4x-3y-7=0;$

14) $4x^2-4xy+y^2-6x+3y-7=0.$

9. Лінія другого порядку визначається рівнянням $x^2+2\lambda xy+y^2+1=0.$ Визначте вид лінії при кожному дійсному значенні параметра λ й опишіть її розташування щодо даної системи координат.

13 ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Розглянемо загальне рівняння поверхні другого порядку Φ в довільній афінній декартовій системі координат $Oxyz$:

$$F(x,y,z)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+y^2+2a_{13}xz+2a_{23}yz+a_{33}z^2+ \\ +2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0. \tag{13.1}$$

Квадратичною формою поверхні (13.1) називають функцію

$$\varphi(x,y,z)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+y^2+2a_{13}xz+2a_{23}yz+a_{33}z^2. \tag{13.2}$$

Нехай $A_\varphi=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ – матриця квадратичної форми (13.2), $rang A_\varphi = r$ – малий ранг поверхні (13.1), $det\, A_\varphi = \delta$ – малий визначник поверхні (13.1), $A_F=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$ – велика матриця поверхні (13.1), $rang A_F = R$ – великий ранг поверхні, $det\, A_F = \Delta$ – великий визначник поверхні (13.1). Матриці A_φ і A_F симетричні.

Теорема 13.1 Характеристичний многочлен $\chi(t)=det(A_\varphi-\lambda E)$ матриці A_φ квадратичної форми $\varphi(x,y,z)$ поверхні другого порядку (13.1), що задана в декартовій системі координат з репером $I=\{O,\bar i,\bar j,\bar k\}$, є ортогональним інваріантом.

Теорема 13.2 Величини

$$I_1=a_{11}+a_{22}+a_{33},\ I_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ I_3=\delta,\ I_4=\Delta$$

є *ортогональними інваріантами поверхні* другого порядку.

Теорема 13.3 Малий та великий ранги поверхні другого порядку є її ортогональними інваріантами.

Теорема 13.4 Напівінваріанти (семиінваріанти)

$$K_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$K_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

поверхні другого порядку (13.1) є ортогональними інваріантами лише по відношенню до повороту системи координат.

Таблиця 13.1 – Визначення типу поверхні другого порядку за допомогою інваріантів.

Центральні поверхні $I_3 \neq 0$			
1	2	3	4
Зведене рівняння	Інваріанти	Канонічне рівняння	Назва
$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + \frac{I_4}{I_3} = 0$	$I_2 > 0$, $I_1 \cdot I_3 > 0$ $I_4 < 0$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	Еліпсоїд
	$I_2 > 0$, $I_1 \cdot I_3 > 0$ $I_4 > 0$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$	Уявний еліпсоїд
	$I_2 > 0$, $I_1 \cdot I_3 > 0$ $I_4 = 0$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$	Уявний конус
	$I_2 \leq 0$, $I_1 \cdot I_3 \leq 0$ $I_4 = 0$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$	Конус
	$I_2 \leq 0$, $I_1 \cdot I_3 \leq 0$ $I_4 < 0$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$	Двопорожнинний гіперболоїд
	$I_2 \leq 0$, $I_1 \cdot I_3 \leq 0$ $I_4 > 0$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	Однопорожнинний гіперболоїд
Нецентральні поверхні $I_3 = 0$			
Зведене рівняння	Інваріанти	Канонічне рівняння	Назва
$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 \pm 2\sqrt{\frac{I_4}{I_2}} \cdot z = 0$	$I_2 \neq 0$, $I_4 < 0$	$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$	Еліптичний параболоїд
	$I_2 \neq 0$, $I_4 > 0$	$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$	Гіперболічний параболоїд
$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{K_3}{I_2} = 0$	$I_2 > 0$, $I_1 \cdot K_3 < 0$ $I_4 = 0$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	Еліптичний циліндр
	$I_2 > 0$, $I_1 \cdot K_3 > 0$ $I_4 = 0$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$	Уявний еліптичний циліндр
	$I_2 > 0$, $K_3 = 0$ $I_4 = 0$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	Пара уявних площин, що перетинаються по дійсній прямій

Продовження таблиці 13.1

1	2	3	4
	$I_2 < 0$, $K_3 \neq 0$ $I_4 = 0$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	Гіперболічний циліндр
	$I_2 < 0$, $K_3 = 0$ $I_4 = 0$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	Пара дійсних площин, що перетинаються
$I_1 x^2 \pm 2\sqrt{-\frac{K_3}{I_1}} \cdot y = 0$	$I_2 = 0$, $K_3 \neq 0$ $I_4 = 0$	$y^2 = 2px$	Параболічний циліндр
$I_1 x^2 + \frac{K_2}{I_1} = 0$	$I_2 = 0$, $K_2 < 0$ $K_3 = 0$ $I_4 = 0$	$x^2 - a^2 = 0$	Пара дійсних паралельних площин
	$I_2 = 0$, $K_2 > 0$ $K_3 = 0$ $I_4 = 0$	$x^2 + a^2 = 0$	Пара уявних паралельних площин
$I_1 x^2 = 0$	$I_2 = 0$, $K_2 = 0$ $K_3 = 0$ $I_4 = 0$	$x^2 = 0$	Пара дійсних площин, що співпадають

Зовнішній вигляд основних поверхонь другого порядку можна з'ясувати, скориставшись допоміжною літературою [1-3].

Теорема 13.5 Довільна пряма або перетинає поверхню не більше, ніж у двох точках, або цілком належить цій поверхні.

Напрямок називається асимптотичним відносно поверхні другого порядку (13.1), якщо його напрямний вектор $\bar{p}(\alpha,\beta,\gamma)$ анулює квадратичну форму поверхні $\varphi(x,y,z)$, тобто $\varphi(\alpha,\beta,\gamma)=0$.

Теорема 13.6 Точка $M(x_0,y_0,z_0)$ є центром поверхні другого порядку (13.1) тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{cases} F_x(x_0,y_0,z_0)=0, \\ F_y(x_0,y_0,z_0)=0, \\ F_z(x_0,y_0,z_0)=0. \end{cases} \qquad (13.3)$$

Система (13.3) називається системою рівнянь центра. Вона має єдиний розв'язок, коли $\delta \neq 0$. Поверхня другого порядку (13.1) називається *центральною*, якщо вона має центр симетрії і притому лише один.

Теорема 13.7 Якщо малий ранг поверхні $r \leq 2$, то поверхня другого порядку (13.1) може: 1) не мати центрів, якщо система (13.3) не сумісна; 2) мати пряму центрів, якщо система (13.3) сумісна та містить два лінійно незалежних

рівняння; 3) мати площину центрів, якщо $r=1$, тобто система (13.3) має одне лінійно незалежне рівняння.

Приклади розв'язування задач

1. Визначте вид поверхні другого порядку, заданої рівнянням $x^2+2y^2-2xy+4yz-4x+2y+12z=7$.

Розв'язання:

У цьому рівнянні коефіцієнт a_{11} при x^2 відмінний від нуля й дорівнює одиниці. Виділимо повний квадрат у групі доданків лівої частини, що містять змінну x:

$$x^2-2xy-4x=(x^2-2x(y+2)+(y+2)^2)-(y+2)^2=(x-y-2)^2-y^2-4y-4.$$

У результаті рівняння прийме вигляд:

$$(x-y-2)^2+y^2+4yz-2y+12z=11.$$

Застосуємо тепер аналогічну процедуру виділення повного квадрата по змінній y:

$$(x-y-2)^2+y^2+2y(2z-1)+(2z-1)^2-(2z-1)^2+12z=11\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-y-2)^2+(y+2z-1)^2-4z^2+16z=12$$

і потім по змінній z:

$$(x-y-2)^2+(y+2z-1)^2-4(z^2-4z+4)+16=12\Leftrightarrow$$

$$(x-y-2)^2+(y+2z-1)^2-4(z-2)^2=-4\Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{x-y}{2}-1\right)^2+\left(\frac{y+2z-1}{2}\right)^2-(z-2)^2=-1.$$

Перейдемо до нових координат за формулами:

$$x'=\frac{x-y}{2}-1, y'=\frac{y+2z-1}{2}, z'=z-2.$$

Тоді рівняння поверхні прийме вид

$$(x')^2+(y')^2-(z')^2=-1,$$

з якого випливає, що вихідне рівняння задає двопорожнинний гіперболоїд.

2. Визначте вид поверхні другого порядку, заданої рівнянням $xy+yz+xz=0$.

Розв'язання:

Так як дане рівняння не містить доданків з x^2, y^2, z^2, то зробимо проміжну заміну змінних:

$$x=x_1+y_1, y=x_1-y_1, z=z_1.$$

У результаті цього рівняння прийме вид

$$(x_1-y_1)z_1+(x_1-y_1)z_1+(x_1+y_1)z_1=0\Leftrightarrow x_1^2-y_1^2+2x_1z_1=0.$$

Виділимо повний квадрат по змінній x_1:

$$(x_1^2+2x_1z_1+z_1^2)-y_1^2-z_1^2=0\Leftrightarrow (x_1+z_1)^2-y_1^2-z_1^2=0.$$

Уводячи нові змінні x', y', z' за формулами:

$$\begin{cases} x' = x_1 + z_1, \\ y' = y_1, \\ z' = z_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + z, \\ y' = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y, \\ z' = z, \end{cases}$$

одержимо рівняння

$$(x')^2 + (y')^2 - (z')^2 = 0.$$

Отже, вихідне рівняння задає конус.

3. Визначте вид поверхні $z^2 = 3x + 4y + 15.$

Розв'язання:

Перетворення координат

$$x' = x,\ y' = 3x + 4y + 15,\ z' = z$$

приводить вихідне рівняння до рівняння

$$(z')^2 = y',$$

яке визначає параболічний циліндр.

4. Визначте вид і розташування поверхні, заданої в прямокутній декартовій системі координат рівнянням $2x^2 - 3y^2 - 3z^2 + 4x + 6z - 7 = 0.$

Розв'язання:

Вихідне рівняння не містить доданка з xz, тому тільки переносом початку координат можна звільнитися від змінних x і z в першому степені. Маємо

$$2(x^2 + 2x + 1) - 2 - 3y^2 - 3(z^2 - 2z + 1) + 3 - 7 = 0 \Leftrightarrow 2(x+1)^2 - 3y^2 - 3(z-1)^2 = 6.$$

Поклавши $x + 1 = z', y = y', z - 1 = x'$ одержимо рівняння

$$\frac{(x')^2}{2} + \frac{(y')^2}{2} - \frac{(z')^2}{3} = -1,$$

яке є канонічним рівнянням двопорожнинного гіперболоїда з півосями $a = b = \sqrt{2},\ c = \sqrt{3}$. Канонічна система координат цього гіперболоїда отримана переносом вихідної системи координат у точку $O'(-1, 0, 1)$. Ця точка є центром гіперболоїда.

5. Визначте вид і розташування поверхні, заданої в прямокутній декартовій системі координат рівнянням $3x^2 + 4y^2 - 12x + 8y + 16z = 0.$

Розв'язання:

Пропоноване рівняння не містить доданків з xy і z^2, тому тільки переносом початку координат можна звільнитися від змінних x, y у першому степені. Маємо

$$3(x-2)^2 + 4(y+1)^2 + 16(z-1) = 0.$$

Поклавши $x - 2 = x', y + 1 = y', z - 1 = z'$ одержимо рівняння

$$\frac{(x')^2}{8/3}+\frac{(y')^2}{2}=-2z',$$

яке визначає еліптичний параболоїд з вершиною в точці $O'(2,-1,1)$ для якого $a^2=\frac{8}{3}, b^2=2$. Напрямок осі параболоїда збігається з від'ємним напрямком осі Oz.

6. Визначте форму й розташування поверхні, заданої в прямокутній декартовій системі координат рівнянням $z^2=3x+4y+15$**.**

Розв'язання:

Для визначення розташування поверхні припустимі лише ортогональні перетворення координат, так що перетворення, розглянуте вище, тут не підходить.

Виконаємо поворот площини Oxy навколо осі Oz на кут φ: $cos\varphi=\frac{4}{5}, sin\varphi=\frac{3}{5}$. Формули перетворення координат будуть мати вигляд:

$$\begin{cases} x_1=\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y, \\ y_1=\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y, \\ z_1=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{4}{5}x_1-\frac{3}{5}y_1, \\ y=\frac{3}{5}x_1+\frac{4}{5}y_1, \\ z=z_1. \end{cases}$$

Звідси $3x+4y=5y_1$ й вихідне рівняння прийме вид $z_1^2=5(y_1+3)$. Поклавши $x_1=x', y_1+3=y', z_1=z'$, одержимо рівняння $(z')^2=5y'$ – рівняння параболічного циліндра, причому $x'=\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y, y'=\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y+3, z'=z$.

Для всіх точок циліндра $y'\geq 0$, тобто циліндр лежить у додатному півпросторі щодо площини $3x+4y+15=0$. Твірні циліндра паралельні осі x', тобто прямій $3x+4y+15=0, z=0$. Напрямною циліндра служить парабола з параметром $p=2/5$, що лежить у площині $4x-3y=0$, з вершиною $(-9/5;-12/5;0)$ й фокусом $(-21/20;-7/5;0)$.

7. Визначте вид і розташування поверхні, заданої в прямокутній декартовій системі координат рівнянням $z^2=2xy$.

Розв'язання:

Виконуючи поворот площини Oxy навколо осі Oz на кут $\frac{\pi}{4}$

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y'), y=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y'), z=z',$$

приведемо рівняння до виду

$$(z')^2=(x')^2-(y')^2.$$

Це канонічне рівняння конуса обертання з вершиною у початку координат. Віссю конуса є вісь Ox', тобто бісектриса кута xOy. Твірні конуса нахилені до осі конуса під кутом $\frac{\pi}{4}$.

8. Визначте форму й розташування в просторі поверхні, заданої в прямокутній декартовій системі координат рівнянням $x^2+2y^2+z^2-xz+x-12y+z=-1$.

Розв'язання:

У рівнянні присутній лише доданок з xz (доданки з xy і yz відсутні), тому виконаємо поворот навколо осі Oy на кут, рівний $\frac{\pi}{4}$. Формули перетворення в цьому випадку мають вигляд $x=\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1-z_1), y=y_1, z=\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1+z_1)$.

Підставляючи ці співвідношення в умову, одержимо $\frac{1}{2}(x_1-z_1)^2+2y_1^2+\frac{1}{2}(x_1+z_1)^2-\frac{1}{2}(x_1^2-z_1^2)+\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1-z_1)-12y_1+\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1+z_1)=-1$, тобто $x_1^2+4y_1^2+3z_1^2+2\sqrt{2x_1}-24y_1=-2$.

Виділимо тепер повні квадрати щодо змінних x_1 і y_1:

$$\left(x_1+\sqrt{2}\right)^2+4(y_1-3)^2+3z_1^2=36.$$

Остання рівність показує, що при переносі початку системи координат $Ox_1y_1z_1$, тобто в результаті перетворення

$$x'=x_1+\sqrt{2}, y'=y_1-3, z'=z_1,$$

отримаємо канонічне рівняння еліпсоїда

$$(x')^2+4(y')^2+3(z')^2=36 \Leftrightarrow \frac{(x')^2}{36}+\frac{(y')^2}{9}+\frac{(z')^2}{12}=1.$$

Таким чином, вихідне рівняння задає еліпсоїд із центром $x'=y'=z'=0 \Leftrightarrow x_1=-\sqrt{2}, y_1=3, z_1=0 \Leftrightarrow x=-1, y=3, z=-1$; півосями $a=6, b=3, c=2\sqrt{3}$ й осями симетрії:

$$y'=z'=0 \Leftrightarrow \begin{cases} y_1=3, \\ z_1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3, \\ z-x=0; \end{cases}$$

$$x'=z'=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-\sqrt{2}, \\ z_1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1, \\ z=-1; \end{cases}$$

$$x'=y'=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-\sqrt{2}, \\ y_1=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+z=-2, \\ y=3. \end{cases}$$

Відзначимо, що вид, форму й розташування в просторі поверхні другого порядку, заданої загальним рівнянням, можна (так само, як для лінії другого порядку) визначити безпосередньо за допомогою інваріантів.

9. Визначте вид лінії перетину конуса $x^2+y^2=z^2$ площиною $3x-y+z+12=0.$

Розв'язання:

Записавши рівняння площини у параметричній формі $x=-4+u+4v,$ $y=3u,\ \ z=-3v,$ одержимо вирази просторових координат x,y,z точки площини через її площинні координати u,v в системі координат $\{M_0;\vec{a}_1,\vec{a}_2\}$, де $M_0(-4,0,0),\ \ \vec{a}_1=(1;3;0),\ \ \vec{a}_2=(4;0;-3).$ Підставивши параметричні рівняння площини в рівняння конуса, одержимо рівняння лінії перетину конуса з площиною в площинній системі координат:

$$16+u^2+16-8u-32v+8uv+9v^2 \ \Leftrightarrow\ 10u^2+7v^2+8uv-8u-32v+16=0.$$

Застосуємо до цього рівняння лінії другого порядку теорію інваріантів. Одержимо

$$I_1=17>0,\ I_2=\begin{vmatrix}10 & 4\\ 4 & 7\end{vmatrix}>0,\ K_3=\begin{vmatrix}10 & 4 & -4\\ 4 & 7 & -16\\ -4 & -16 & 16\end{vmatrix}<0.$$

Умови $I_2>0,\ I_2\cdot K_3<0$ означають, що лінією перетину конуса площиною є еліпс.

Зауваження. Дана площина не проходить через вершину конуса й перетинає всі його твірні. Можна показати, що в перетині конуса такими площинами завжди лежить еліпс.

10. Визначте вид перетину конуса $x^2+y^2=z^2$ площиною $x+y+1=0.$

Розв'язання:

Запишемо параметричні рівняння площини:

$$x=-v,\ \ y=u,\ \ z=-1+v.$$

Вони виражають просторові координати x,y,z точки площини через її площинні координати u,v в системі координат $\{M_0;\vec{a}_1,\vec{a}_2\}$, де $M_0(0,0,-1),$ $\vec{a}_1=\{0,1,0\},\ \vec{a}_2=\{-1,0,1\}.$ Підставивши ці вирази в рівняння конуса, одержимо рівняння лінії перетину конуса із площиною: $v^2+u^2=1-2v+v^2$ $\Leftrightarrow u^2=-2\left(v-\frac{1}{2}\right)$, яке визначає параболу.

Зауваження: Дана площина не проходить через вершину конуса й паралельна тільки одній твірній $(x=t,y=0,z=-t)$. Можна показати, що в перетині конуса такими площинами завжди лежить парабола.

11. Визначте вид лінії перетину конуса $x^2+y^2=z^2$ площиною $x-4=0.$

Розв'язання:

Підставивши параметричні рівняння $x=4,\ \ y=u+v,z=u-v$ площини в рівняння конуса, одержимо рівняння лінії перетину конуса із площиною: $uv+16=0$ у площинній системі координат $\{M_0;\vec{a}_1,\vec{a}_2\}$, де $M_0(4,0,4),\ \vec{a}_1=\{0,1,1\},$ $\vec{a}_2=\{0,1,-1\}.$ Отримане рівняння визначає гіперболу.

Зауваження. Дана площина не проходить через початок координат і паралельна двом твірним конуса. Можна показати, що в перетині конуса такими площинами завжди лежить гіпербола.

12. З'ясуйте, по якій лінії перетинаються циліндр $x^2+2y^2=1$ і площина $y-z=2$. Система координат прямокутна.

Розв'язання:

Виберемо ортонормований базис площини з її напрямних векторів, наприклад, з векторів $\vec{a}_1=\{1,0,1\}$, $\vec{a}_2=\left\{0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$ і доповнимо його до ортонормованого базису всього простору вектором $\vec{a}_3=\left\{0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$. Тоді нові координати x',y',z' точки простору будуть пов'язані зі старими координатами x,y,z формулами $x=x'$, $y=\frac{1}{\sqrt{2}}(y'+z')$, $z=\frac{1}{\sqrt{2}}(y'+z')$.

Звідси випливає, що координати точки шуканого перетину в новій системі координат повинні задовольняти співвідношенням:

$$\begin{cases}(x')^2+2\dfrac{(y'+z')^2}{2}=1,\\ \sqrt{2}z'=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x')+\left(y'+\sqrt{2}\right)^2=1,\\ z'=\sqrt{2}.\end{cases}$$

Таким чином, шуканим перетином є коло радіуса 1 із центром у точці $x'=0$, $y'=-\sqrt{2}$, $z'=\sqrt{2}$ або, що те ж саме, $x=0,y=0,z=0$.

Тест для самоконтролю

1. Яке з наступних співвідношень визначає коло у просторі?

А. $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=3,\\ y=3;\end{cases}$ **Б.** $\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ 2x+3y+4z=0;\end{cases}$ **В.** $\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ x^2+y^2+z^2=1;\end{cases}$ **Г.** $x^2+y^2=1$.

2. Яке з наступних рівнянь визначає гіперболічний параболоїд?

А. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ **Б.** $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ **В.** $\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=2px$ **Г.** $\frac{x^2+z^2}{a^2}=2py$

3. Яке з наступних рівнянь визначає еліптичний параболоїд?

А. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ **Б.** $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ **В.** $\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=2px$ **Г.** $\frac{x^2+z^2}{a^2}=2py$

4. Рівняння $x^2+z^2+4x-2z+1=0$ визначає у просторі…

А. коло **Б.** еліптичний циліндр **В.** гіперболічний циліндр **Г.** кулю

5. Яку фігуру визначає система рівнянь $\begin{cases} \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=4z, \\ y=2? \end{cases}$

А. параболу **Б.** еліпс **В.** гіперболу **Г.** дві прямі

6. Яку фігуру визначає система рівнянь $\begin{cases} \dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=4z^2, \\ y=2? \end{cases}$

А. параболу **Б.** еліпс **В.** гіперболу **Г.** дві прямі

7. Скільки площин симетрії має фігура в просторі, яка задана рівнянням $xy=1$?

А. 2 **Б.** 4 **В.** ні однієї **Г.** нескінченно багато

8. Які з трьох систем рівнянь визначають однакові фігури

$1.\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4, \\ y^2=0: \end{cases}$ $2.\begin{cases} x^2+z^2=4, \\ x^2+y^2+z^2=4; \end{cases}$ $3.\begin{cases} x^2+z^2=4, \\ x=0? \end{cases}$

А. 1, 2, 3 **Б.** 2, 3 **В.** 1, 3 **Г.** 1, 2

9. Яка з наступних поверхонь не має центра симетрії:

А. $\dfrac{\tilde{o}^2}{9}+\dfrac{\acute{o}^2}{16}-\dfrac{z^2}{5}=0$ **Б.** $\dfrac{\tilde{o}^2}{4}-\dfrac{\acute{o}^2}{9}=z$ **В.** $\dfrac{\tilde{o}^2}{2}+\dfrac{\acute{o}^2}{4}-\dfrac{z^2}{9}=-1$ **Г.** $\dfrac{\tilde{o}^2}{16}+\dfrac{\acute{o}^2}{25}=1$**?**

10. Яка **з** наступних поверхонь має безліч площин симетрії:

А. $\dfrac{(x-1)^2}{16}+\dfrac{(y+2)^2}{9}+\dfrac{(z-1)^2}{4}=1$; **Б.** $\dfrac{(x+2)^2}{9}+\dfrac{(y-1)^2}{16}-\dfrac{z^2}{4}=1$;

В. $\dfrac{(x+3)^2}{16}+\dfrac{(y-2)^2}{16}=2z$; **Г.** $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{4}=0$ **?**

Відповіді: 1. В. 2. В. 3. Г. 4. Б. 5. А. 6. В. 7. А. 8. Г. 9. В. 10. Г.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Складіть рівняння кругового конуса, що проходить через усі три координатні осі.

2. Складіть рівняння кругового конуса, що дотикається площин *Oxz* і *Oyz* по прямим *Ox* і *Oy* відповідно.

3. Напрямна циліндра дана рівняннями $x = y^2 + z^2, x = 2z$, твірна перпендикулярна до площини напрямної. Складіть рівняння циліндра.

4. Знайдіть прямі, що проходять через початок координат і цілком лежать на поверхні $y^2 + 3xy + 2yz - xz + 3x + 2y = 0$. Система координат афінна.

5. Знайдіть ті прямолінійні твірні поверхні $x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy + 2yz - 2xz - 12 = 0$, які паралельні прямій $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{-1}$. Система координат афінна.

6. Знайдіть лінію перетину поверхні:

1) $3x^2 + 4y^2 - 5z^2 + 2xy - 3yz + 5x - 8 = 0$ з площиною Oxy;
2) $x^2 + 3z^2 + 2xy + 4xz + 2yz + 5x - z = 1$ з площиною Oyz;
3) $x^2 + y^2 - 2xy + 5yz + xz - x + 3y - z = 0$ з площиною Oxz.

Система координат афінна.

7. Визначте вид лінії перетину поверхні $x^2 + 2y^2 + z^2 + 4xy - 2xz - 4yz + 2x - 6z = 0$ з площиною $x - z = 0$ й дослідіть її розташування в просторі.

8. Користуючись методом Лагранжа, покажіть, що наступні рівняння в загальній афінній системі координат визначають поверхні, що розпадаються на пари площин, і знайдіть ці площини:

1) $y^2 + 2xy + 4xz + 2yz - 4x - 2z = 0$;
2) $x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 4xy + 6xz - 12yz + 2y - 3z - 6 = 0$;
3) $3x^2 - 4y^2 + 3z^2 + 4xy + 10xz - 4yz + 6x - 20y - 14z - 24 = 0$;
4) $5x^2 + 4y^2 + 3z^2 + 9xy + 8xz + 7yz + 7x + 6y + 5z + 2 = 0$.

9. Визначте вид поверхні, користуючись методом Лагранжа (система координат афінна):

1) $4x^2 + 6y^2 + 4z^2 + 4xz - 8y - 4z + 3 = 0$;
2) $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz - 2x + 6y - 10z = 0$;
3) $x^2 + y^2 - 3z^2 - 2xy - 6xz - 6yz + 2x + 2y + 4z = 0$;
4) $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 8xz - 4yz - 14x - 4y + 14z + 16 = 0$;
5) $2x^2 + y^2 - 2z^2 - 2xy - 2yz + x - 4y - 3z + 2 = 0$;
6) $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 10xz + 4yz + x + y - z = 0$;
7) $2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz + 4x - 2y = 0$;
8) $x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 4xz + 4yz - 6z + 1 = 0$;
9) $4xy + 2x + 4y - 6z - 3 = 0$;
10) $xy + xz + yz + 2x + 2y - 2z = 0$.

10. Визначте вид і розташування поверхні, користуючись переносом системи координат:

1) $x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 6x + 8y - 36z = 0$;

2) $4x^2 - y^2 - z^2 + 32x - 12z + 44 = 0$;

3) $3x^2 - y^2 + 3z^2 - 18x + 10y + 12z + 14 = 0$;

4) $6y^2 + 6z^2 + 5x + 6y + 30z - 11 = 0$;

5) $z = 2x^2 - 4y^2 - 6x + 8y + 1$;

6) $z = x^2 + 3y^2 - 6y + 1$;

7) $x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 2x + 4y - 6z = 0$;

8) $x^2 + 4y^2 - z^2 - 10x - 16y + 6z + 16 = 0$;

9) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x + 4y - 1 = 0$;

10) $3x^2 + 3y^2 - 6x + 4y - 1 = 0$;

11) $4x^2 - y^2 - 4x + 4y - 3 = 0$.

11. Визначте вид поверхні і її розташування щодо системи координат, користуючись поворотом системи координат навколо однієї з її осей:

1) $z^2 = 2xy$; 2) $z = xy$; 3) $z^2 = 3x + 4y$; 4) $z^2 = x^2 + 2xy + y^2 + 1$.

12. Визначте вид поверхні і її розташування щодо системи координат, користуючись переносом і поворотом системи координат навколо однієї з її осей:

1) $x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 4xy + 4z = 0$; 2) $x^2 + 2x + 3y + 4z + 5 = 0$;

3) $z^2 = x^2 + 2xy + y^2 + 1$; 4) $2xy + z^2 - 2z + 1 = 0$;

5) $x^2 + y^2 - z^2 + 2xy + 2z - 1 = 0$; 6) $2xy + 2x + 2y + 2z - 1 = 0$;

7) $x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy + 4z = 0$; 8) $x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2x - y + 1 = 0$;

9) $z^2 - 2xy - 4x - 2y + 2z - 3 = 0$.

13. Визначте форму й розташування в просторі геометричного місця точок, рівновіддалених від осі Oz і від прямої $y = z, x = 1$, що не лежить із віссю Oz в одній площині.

14. Знайдіть рівняння циліндра з твірною, паралельною осі Oz, й напрямною – колом $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

15. Твірна циліндра паралельна осі Oz, його напрямна – коло $x^2 + y^2 = 2z$, $x^2 + y^2 + z^2 = 8$. Знайдіть рівняння циліндра.

16. Знайдіть рівняння конуса з вершиною в точці $O(0,0,0)$ й напрямною – колом $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + y + z = 1$.

17. Напишіть рівняння конуса з вершиною $(2,3,6)$, знаючи, що площина Oxy перетинає його по еліпсу, осі якого паралельні осям Ox і Oy, причому еліпс дотикається цих осей координат.

18. Напишіть рівняння поверхні, що утворюється при обертанні прямої $y = kx + b, z = 0$ навколо осі Ox.

19. Пряма $\frac{x-2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{6}$ обертається навколо осі Ox. Знайдіть рівняння описаної нею поверхні.

20. Напишіть рівняння кругового циліндра радіуса r, віссю якого є пряма $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$.

21. Напишіть рівняння кругового циліндра, що проходить через точку $(1,-2,1)$, віссю якого служить пряма $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+3}{-2}$.

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ

(N – номер студента за списком академічної групи, $p=(-1)^{pik}$)

$$\alpha=\left[\frac{N}{2}\right]-5,\ \beta=(-1)^N\cdot\left[\frac{N}{3}\right]+4,\ \gamma=\left[\frac{2N}{3}\right]+(-1)^N\cdot 2,$$
$$\eta=\left[\frac{N}{2}\right]-2,\ \mu=(-1)^N\cdot\left[\frac{N}{4}\right]-3.$$

1. Дано довільний шестикутник $ABCDEF$: $\overline{AB}=\bar{a}$, $\overline{BC}=\bar{b}$, $\overline{CD}=\bar{c}$, $\overline{DE}=\bar{d}$, $\overline{EF}=\bar{e}$, $\overline{FA}=\bar{f}$. Побудуйте вектори:

1. $\alpha\bar{a}-p\cdot\gamma\bar{c}-\eta\bar{d}+p\cdot\mu\bar{f}$;
2. $\gamma\bar{b}+2\cdot p\cdot\mu\bar{e}-\alpha\bar{f}$.

2. Дано тетраедр $OABC$. Точки L_1, L_2, L_3; M_1, M_2, M_3; N_1, N_2, N_3 – поділяють ребра OA, OB, OC відповідно на чотири рівні частини. У репері $\left\{O, N\cdot\overline{OL_1}, p\cdot\overline{OM_2}, -5p\cdot\overline{ON_3}\right\}$ знайдіть координати:

1. всіх вершин тетраедра;
2. центрів тяжіння його граней;
3. $\frac{1}{N}\overline{CB}$.вектора .
4. У якому відношенні відрізок CL_1 ділить відрізок AN_2?
5. Знайдіть лінійну залежність векторів $\overline{L_2N_1}$, $\overline{CM_1}$, $\overline{AC}$ та $\overline{KL_1}$, де K – центр тяжіння грані ABC.

3. Знайдіть лінійну залежність векторів $\bar{a}=(1,-1,5)$, $\bar{b}=(0,4,-pN)$, $\bar{c}=(1,-8,N)$, $\bar{d}=(pN,-1,-2)$. Знайдіть координати вектора $\bar{b}$ у базисах $\{\bar{a},\bar{c},\bar{d}\}$ та $\{\bar{c},\bar{a},\bar{d}\}$.

4. Дано вектори $\bar{a}=\alpha\bar{m}+p\beta\bar{n}$ й $\bar{b}=\gamma\bar{m}-p\eta\bar{n}$, де $|\bar{m}|=|\alpha-\beta|$, $|\bar{n}|=|2\mu-3\eta|$, $\angle(\bar{m},\bar{n})=\left|\left[\frac{N}{5}\right]-1\right|\cdot\frac{\pi}{3}$. Знайдіть:

1. $\left(\eta\bar{a}+\mu\bar{b}\right)\cdot\left((-1)^N\cdot\bar{a}+\gamma\bar{b}\right)$;
2. $cos\left(\hat{\bar{a},\bar{b}}\right)$;
3. $\left|\left(\eta\bar{a}+\mu\bar{b}\right)\times\left((-1)^N\cdot\bar{a}+\gamma\bar{b}\right)\right|$;
4. площу трикутника, побудованого на векторах $\bar{a}$ і $\bar{b}$.

5. За координатами точок A, B та C для зазначених векторів визначте:

1. скалярний добуток векторів $\bar{a}=p\alpha\overline{AB}+\beta\overline{BC}$ і $\bar{b}=-p\mu\overline{AC}+\eta\overline{CB}$;
2. довжину вектора $\bar{a}$;

3. координати точки M, що ділить направлений відрізок AB у відношенні $\alpha : \beta$;
4. проекцію вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$;
5. векторну проекцію вектора $\bar{a} + \bar{b}$ на вектор $\bar{a} - \bar{b}$;
6. чи ортогональні вектори $\bar{a}$ та $\bar{b}$?
7. чи колінеарні вектори $\bar{a}$ та $\bar{b}$?
8. чи компланарні вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c} = (0,1,2)$?

Варіанти завдань:

1. $A(1,-2,3), B(0,-1,2), C(3,-4,5)$.
2. $A(0,-3,6), B(-12,-3,-3), C(-9,-3,-6)$.
3. $A(3,3,-1), B(5,5,-2), C(4,1,1)$.
4. $A(-1,2,-3), B(3,4,-6), C(1,1,-1)$.
5. $A(-4,-2,0), B(-1,-2,4), C(3,-2,1)$.
6. $A(5,3,-1), B(5,2,0), C(6,4,-1)$.
7. $A(-3,-7,-5), B(0,-1,-2), C(2,3,0)$.
8. $A(2,-4,6), B(0,-2,4), C(6,-8,10)$.
9. $A(0,1,-2), B(3,1,2), C(4,1,1)$.
10. $A(3,3,-1), B(1,5,-2), C(4,1,1)$.
11. $A(2,1,-1), B(6,-1,-4), C(4,2,1)$.
12. $A(-1,-2,1), B(-4,-2,5), C(-8,-2,2)$.
13. $A(6,2,-3), B(6,3,-2), C(7,3,-3)$.
14. $A(0,0,4), B(-3,-6,1), C(-5,-10,-1)$.
15. $A(2,-8,-1), B(4,-6,0), C(-2,-5,-1)$.
16. $A(1,0,-3), B(-6,0,-2), C(-1,-6,3)$.
17. $A(-2,0,-4), B(-1,7,1), C(4,-8,-4)$.
18. $A(12,4,5), B(-5,-3,2), C(-2,-6,-3)$.
19. $A(1,2,0), B(3,0,-3), C(5,2,6)$.
20. $A(-4,2,6), B(2,-3,0), C(-10,5,8)$.

6. Обчисліть об'єм тетраедра з вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 і його висоту, опущену з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

1. $A_1(1,3,6)$, $A_2(2,2,1)$, $A_3(-1,0,1)$, $A_4(-4,6,-3)$.
2. $A_1(-4,2,6)$, $A_2(2,-3,0)$, $A_3(-10,5,8)$, $A_4(-5,2,-4)$.
3. $A_1(7,2,4)$, $A_2(7,-1,-2)$, $A_3(3,3,1)$, $A_4(-4,2,1)$.
4. $A_1(2,1,4)$, $A_2(-1,5,-2)$, $A_3(-7,3,2)$, $A_4(-6,-3,6)$.
5. $A_1(-1,-5,2)$, $A_2(-6,0,-3)$, $A_3(3,6,-3)$, $A_4(-10,6,7)$.
6. $A_1(0,-1,-1)$, $A_2(-2,3,5)$, $A_3(-1,-5,-9)$, $A_4(-1,-6,3)$.
7. $A_1(5,2,0)$, $A_2(2,5,0)$, $A_3(1,2,4)$, $A_4(-1,1,1)$.
8. $A_1(2,-1,-2)$, $A_2(1,2,1)$, $A_3(5,0,-6)$, $A_4(-10,9,-7)$.

9. $A_1(-2,0,-4),\ A_2(-1,7,1),\ A_3(4,-8,-4),\ A_4(1,-4,6).$
10. $A_1(14,4,5),\ A_2(-5,-3,2),\ A_3(-2,-6,-3),\ A_4(-2,2,-1).$
11. $A_1(1,2,0),\ A_2(3,0,-3),\ A_3(5,2,6),\ A_4(8,4,-9).$
12. $A_1(2,-1,2),\ A_2(1,2,-1),\ A_3(3,2,1),\ A_4(-4,2,5).$
13. $A_1(1,1,2),\ A_2(-1,1,3),\ A_3(2,-2,4),\ A_4(-1,0,-2).$
14. $A_1(2,3,1),\ A_2(4,1,-2),\ A_3(6,3,7),\ A_4(7,5,-3).$
15. $A_1(1,1,-1),\ A_2(2,3,1),\ A_3(3,2,1),\ A_4(5,9,-8).$
16. $A_1(-5,-3,-4),\ A_2(1,4,6),\ A_3(3,2,-2),\ A_4(8,-2,4).$
17. $A_1(3,4,2),\ A_2(-2,3,-5),\ A_3(4,-3,6),\ A_4(6,-5,3).$
18. $A_1(-4,6,3),\ A_2(3,-5,1),\ A_3(2,6,-4),\ A_4(2,4,-5).$
19. $A_1(7,5,8),\ A_2(-4,-5,3),\ A_3(2,-3,5),\ A_4(5,1,4).$
20. $A_1(3,-2,6),\ A_2(-6,-2,3),\ A_3(1,1,-4),\ A_4(4,6,-7).$

7. Дано вершини трикутника $A(\alpha,2,-\beta)$, $B(N,\gamma,-1)$, $C(\mu,-2,1)$. Визначте величини внутрішніх кутів, довжини сторін, довжини всіх висот і площу трикутника ABC.

8. Спростіть вираз: $\left[N\bar{a}+\bar{b}+\bar{c},\,\bar{c}\right]+\left[\bar{a}+\eta\bar{b}+\bar{c},\,\bar{b}\right]+\left[\bar{b}-p\frac{N}{\eta}\bar{c},\,\bar{a}\right]$.

9. Визначте, при яких значеннях λ і ν вектор $\lambda N\bar{i}+3\bar{j}+\nu\bar{k}$ буде колінеарний вектору $\left[\bar{a}_1, p\frac{N}{\mu}\bar{a}_2\right]$, якщо $\bar{a}_1=(N,-2p,-\alpha)$, $\bar{a}_2=(2\mu,-N,2)$.

10. Якій умові повинні задовольняти вектори $\bar{b}_1$ та $\bar{b}_2$, щоб вектори $\left(N\bar{b}_1+\alpha\bar{b}_2\right)$ та $\left(\bar{b}_1-\frac{1}{N}\bar{b}_2\right)$ були колінеарні?

11. Обчисліть об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\bar{p}=N\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$, $\bar{q}=\bar{a}-\beta\bar{b}+\bar{c}$, $\bar{r}=\bar{a}+\bar{b}-(N-\mu)\bar{c}$, якщо $\bar{a}=(1,\gamma,5)$, $\bar{b}=(0,4,N)$, $\bar{c}=(\eta,-8,N)$.

12. Доведіть тотожність: $\left(\left[N\bar{a},\bar{b}\right],\left[\bar{b},p\bar{c}\right],\left[p\bar{c},N\bar{a}\right]\right)=\left(N\bar{a},\bar{b},p\bar{c}\right)^2$.

13. Дано чотири точки: $A(22-N,N,10-N)$, $B(-N,-N-1,1-N)$, $C(2,3,-4)$, $D(0,0,N)$. Знайдіть:
1. рівняння прямих AB, AD, BD, BC;
2. рівняння площин ABC, ABD;
3. рівняння перпендикуляра h_D, опущеного з точки D на площину ABC, довжину висоти h_D;
4. косинус кута між прямими AB та AD;
5. синус кута між прямою AD і площиною ABC;
6. косинус кута між площинами ABC та ABD;
7. рівняння прямої, що проходить через точку C перпендикулярно площині ABD;

8. рівняння площини, що проходить через точку D перпендикулярно прямій BD.

14. Розв'яжіть задачі:

1. Знайдіть величини відрізків, що відтинаються на осях координат площиною, що проходить через точку $M(-2, 7, 3)$ паралельно площині $x-4y+5z-1=0$.
2. Складіть рівняння площини, що проходить через середину відрізка M_1M_2 перпендикулярно до цього відрізка, якщо $M_1(1, 5, 6)$, $M_1(-1, 7, 10)$.
3. Складіть рівняння площини, що проходить через точку $A(2, -3, 5)$ паралельно площині Oxy.
4. Складіть рівняння площини, що проходить через вісь Ox і точку $A(2,5,-1)$.
5. Складіть рівняння площини, що проходить через точки $A(2,5,-1)$, $B(-3,1,3)$ паралельно осі Oy.
6. Складіть рівняння площини, що проходить через точку $A(3,4,0)$ та пряму $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{2}$.
7. Складіть рівняння площини, що проходить через дві паралельні прямі $\frac{x-3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}$ та $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{2}$.
8. Складіть рівняння площини в «відрізках на осях», якщо вона проходить через точку $M(6,-10,1)$ та відтинає на осі Ox відрізок $a=-3$, а на осі Oz – відрізок $c=2$.
9. Складіть рівняння площини, що проходить через точку $A(2,3,-4)$ паралельно двом векторам $\bar{a}=(4,1,-1)$ і $\bar{b}=(2,-1,2)$.
10. Складіть рівняння площини, що проходить через точки $A(1,1,0)$, $B(2,-1,-1)$ перпендикулярно до площини $5x+2y+3z-7=0$.
11. Складіть рівняння площини, що проходить через початок координат перпендикулярно двом площинам $2x-3y+z-1=0$ і $x-y+5z+3=0$.
12. Складіть рівняння площини, що проходить через точки $A(3,-1,2)$, $B(2,1,4)$ паралельно вектору $\bar{a}=(5,-2,-1)$.
13. Складіть рівняння площини, що проходить через початок координат перпендикулярно до вектора $\overline{AB}$, якщо $A(5,-2,3)$, $B(1,-3,5)$.
14. Знайдіть величини відрізків, що відтинаються на осях координат площиною, яка проходить через точку $M(2,-3,3))$ паралельно площині $3x+y-3z=0$.
15. Складіть рівняння площини, що проходить через точку $M(1,-1,2)$ перпендикулярно до відрізка M_1M_2, якщо $M_1(3,3,-4)$, $M_2(-1,2,-3)$.

16. Складіть загальне рівняння площини, що проходить через точку $A(3,-4,1)$ паралельно координатній площині Oxz.
17. Складіть рівняння площини, що проходить через вісь Oy і точку $A(2,5,-1)$.
18. Складіть рівняння площини, що проходить через точки $M(1,2,3)$ та $N(-3,4,-5)$ паралельно осі Oz.
19. Складіть рівняння площини, що проходить через точку $A(2,-3,-4)$ та відтинає на осях координат рівні ненульові відрізки.
20. Складіть рівняння площини, що проходить через точки $A(2,3,-1)$ та $B(1,1,4)$ перпендикулярно до площини $x-4y+3z+2=0$.

15. Розв'яжіть задачі:

1. Складіть рівняння площини, що проходить через дві паралельні прямі $\frac{x-3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}$ та $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{2}$.
2. Знайдіть відстань від точки $M(2,0,-0,5)$ до площини $4x-4y+2z+17=0$.
3. Знайдіть проекцію точки $M(4,-3,1)$ на площину $x-2y-z-15=0$.
4. Визначте, при якому значенні B площини $x-4y+z-1=0$ та $2x+By+10z-3=0$ будуть перпендикулярні.
5. При яких значеннях n і A пряма $\frac{x}{3}=\frac{y-5}{n}=\frac{z+5}{6}$ перпендикулярна до площини $Ax+2y-2z-7=0$?
6. Визначте, при якому значенні C площини $3x-5y+Cz-3=0$ і $x-3y+2z+5=0$ будуть перпендикулярні.
7. Складіть рівняння прямої, що проходить через точку $M(1,-3,3)$ і утворює з осями координат кути, що дорівнюють відповідно 60°, 45° і 120°.
8. При якому значенні n пряма $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{n}=\frac{z}{1}$ паралельна прямій $\begin{cases} x+y-z=0, \\ x-y-5z-8=0. \end{cases}$
9. Знайдіть проекцію точки $P(3,1,-1)$ на площину $x+2y+3z-30=0$.
10. При якому значенні C площини $3x-5y+Cz-3=0$ й $x+3y+2z+5=0$ перпендикулярні.
11. При якому значенні A площина $Ax+3y-5z+1=0$ паралельна прямій $\frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{1}$?
12. Складіть рівняння площини, що проходить через точку $M(2,3,-1)$ і пряму $x=t-3, y=2t+5, z=-3t+1$.

13. Складіть рівняння прямої, що проходить через початок координат паралельно прямій $x = 2t + 5,\ y = -3t + 1,\ z = -7t - 4.$
14. Складіть рівняння прямої, що проходить через точку $M(2,\ -5,3)$ паралельно прямій $\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0, \\ 5x + 4y - z + 7 = 0. \end{cases}$
15. Складіть рівняння прямої, що проходить через точку $M(2,\ -3,4)$ перпендикулярно до прямих $\frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{1}$ і $\frac{x+4}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-4}{-3}$
16. При яких значеннях A та B площина $Ax + By + 6z - 7 = 0$ перпендикулярна прямій $\frac{x-2}{2} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z+1}{3}$?
17. Покажіть, що прямі $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{3}$ та $3x - y + 2z - 6 = 0,$ $2x + 3y - 8z + 3 = 0$ перпендикулярні.
18. При якому значенні p прямі $x = 2t + 5, y = -t + 2, z = pt - 7$ та $x + 3y + z + 2 = 0,\ x - y - 3z - 2 = 0$ паралельні?
19. При яких значеннях B і D пряма $x - 2y + z - 9 = 0,\ 3x + By + z + D = 0$ лежить у площині Oxy?
20. Складіть канонічне рівняння прямої, що проходить через точку $M(1, -5, 3)$ перпендикулярно до прямих $x = 3t + 1, y = -t - 5, z = 2t + 3$ і $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-1}$.

16. Дано координати вершин ΔABC: $A(N, 10 - N),\ B(-p\alpha - 1, 1 - \beta),\ C(3, -4p)$. Знайдіть:
1. рівняння всіх сторін ΔABC;
2. рівняння медіани m_A;
3. рівняння висоти h_B, опущеної з вершини B, та її довжину;
4. точку перетину медіани m_A та висоти h_B;
5. рівняння бісектриси l_C;
6. косинус кута між прямими AB та AC;
7. рівняння прямої, що проходить через вершину C паралельно прямій AB;
8. відстань від точки C до прямої AB.

17. Розв'яжіть задачі:
1. Знайдіть рівняння прямої, що проходить через точку перетину прямих $3x - 2y - 7 = 0$ і $x + 3y - 6 = 0$ та відтинає на осі абсцис відрізок, що дорівнює 3.
2. Знайдіть проекцію точки $A(-8, 12)$ на пряму, що проходить через точки $B(2, -3)$ і $C(-5, 1)$.

3. Дано дві вершини трикутника ABC: $A(-4, 4)$, $B(4, -12)$ і точка $M(4, 2)$ перетину його висот. Знайдіть координати вершини C.
4. Знайдіть рівняння прямої, що відтинає на осі ординат відрізок довжини 2 та проходить паралельно прямій $2y - x = 3$.
5. Дано рівняння висот трикутника ABC: $2x - 3y + 1 = 0$, $x + 2y + 1 = 0$ і координати його вершини $A(2, 3)$. Знайдіть рівняння сторін AB і AC трикутника.
6. Запишіть рівняння прямої, що проходить через точку $A(3, 1)$ перпендикулярно до прямої BC, якщо $B(2, 5)$, $C(1, 0)$.
7. Знайдіть рівняння прямої, що проходить через точку $A(-2, 1)$ паралельно прямій MN, якщо $M(-3, -2)$, $N(1, 6)$.
8. Знайдіть точку, симетричну точці $M(2, -1)$ відносно прямої $x - 2y + 3 = 0$.
9. Дано рівняння двох сторін паралелограма $x - 2y = 0$, $x - y - 1 = 0$ і точка перетину його діагоналей $M(3, -1)$. Знайдіть рівняння двох інших сторін.
10. Запишіть рівняння прямих, що проходять через точку $A(-1, 1)$ під кутом $45°$ до прямої $2x + 3y = 6$.
11. Відомі рівняння сторони AB трикутника ABC: $4x + y = 12$, його висот BH: $5x - 4y = 12$ і AM: $x + y = 6$. Знайдіть рівняння двох інших сторін трикутника ABC.
12. Дано дві вершини трикутника ABC: $A(-6, 2)$, $B(2, -2)$ і точка перетину його висот $H(1, 2)$. Знайдіть координати точки M перетину сторони AC і висоти BH.
13. Відомі рівняння двох сторін ромба $2x - 5y - 1 = 0$ і $2x - 5y - 34 = 0$ та рівняння однієї з його діагоналей $x + 3y - 6 = 0$. Знайдіть рівняння другої діагоналі.
14. Обчисліть координати точки перетину перпендикулярів, проведених через середини сторін трикутника, вершинами якого служать точки $A(2, 3)$, $B(0, -3)$, $C(6, -3)$.
15. Складіть рівняння висоти, проведеної з вершини A трикутника ABC, знаючи рівняння його сторін: AB: $-2x - y - 3 = 0$, AC: $-x + 5y - 7 = 0$, BC $-3x - 2y + 13 = 0$.
16. Складіть рівняння прямої, що проходить через початок координат та точку перетину прямих $2x + 5y - 8 = 0$ і $2x + 3y + 4 = 0$.
17. Знайдіть рівняння перпендикулярів, що проведені до прямої $3x + 5y - 15 = 0$ через точки її перетину з осями координат.
18. Запишіть рівняння прямої, що проходить через точку $A(-2, 3)$ та складає кут 30° з віссю Ox.

19. Через точку перетину прямих $2x-5y-1=0$ та $x+4y-7=0$ проведіть пряму, що ділить відрізок між точками $A(4,-3)$ і $B(-1,2)$ у відношенні $\lambda = 2/3$.
20. Відомі рівняння двох сторін ромба $2x-5y-1=0$ і $2x-5y-34=0$ та рівняння одної з його діагоналей $x+3y-6=0$. Знайдіть рівняння другої діагоналі.

ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Бусарова Т. М., Гришечкіна Т. С., Звонарьова О. В., Семенець Г. І. Аналітична геометрія : навч. посіб. Дніпро : УДУНТ, 2022. 118 с.
2. Булдигін В. В., Алєксєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Коновалова Н. Р., Федорова Л. Б. Лінійна алгебра та аналітична геометрія : навч. посібник. Київ : ТВіМС, 2021. 224 с.
3. Кадубовський О.А., Кадубовська О.Л., Плесканьова Л.Г. Аналітична геометрія. Частина І: Елементи векторної алгебри. Метод координат на площині та в просторі : навчальний посібник, видання 2-е, виправлене та доповнене. Слов'янськ, 2010. 84 с.
4. Сердюк І. В., Лєонов О. Є., Панченко Т. В., Пащенко В. М. Практикум з курсу "Алгебра і геометрія". Аналітична геометрія : навч.-метод. посіб. Харків : НТМТ, 2022. 160 с.
5. Сіра І. Т. Аналітична геометрія : опорні конспекти лекцій для студ. математ. спец. пед. закл. вищ. освіти : метод. рек. Харків : Харків. нац. пед. ун-т ім. Г. С. Сковороди, 2022. 72 с.
6. Яковець В.П., Боровик В.Н., Ваврикович Л.В. Аналітична геометрія : навчальний посібник. Суми : Університетська книга, 2021. 296 с.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Бохонов Ю. Є. Алгебра та аналітична геометрія : курс лекцій. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 204 с.

2. Кравчук О. М. Аналітична геометрія та лінійна алгебра. Ч. ІІ. Аналітична геометрія : навч.-метод. реком. Луцьк : ВНУ ім. Лесі Українки, 2023. 92 с.

3. Рибицька О.М., Білонога Д.М., Каленюк П.І. Лінійна алгебра та аналітична геометрія (друге видання, виправлене). Львів : Видавництво Львівської політехніки, 2013. 124 с.

4. Третиник В. В., Ліскін В. О., Мальчиков В. В. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Ч. 2 : навч. посіб. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 132 с.

5. Щоголев С. А., Кореновський А. О. Аналітична геометрія на площині : навчально-методичний посібник. Одеса : Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, 2018. 74 с.

Навчальне видання
(українською мовою)

Манько Наталія Іванівна-Володимирівна
Гречнєва Марина Олександрівна
Зіновєєв Ігор Валерійович

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Навчальний посібник
для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра
спеціальності «Математика»
освітньо-професійної програми «Математика»

Рецензент *Кривохата А.Г.*
Відповідальний за випуск *І.В. Зіновєєв*
Коректор *М.О. Гречнєва*