МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра фундаментальної та прикладної математики

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА БАКАЛАВРА

на тему: **«ДОСЛІДЖЕННЯ ОСОБЛИВОСТЕЙ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ СКЛАДЕНИХ КІЛЬЦЕВИХ ПЛАСТИН»**

Виконав: студент 4 курсу, групи 6.1131
спеціальності 113 Прикладна математика
(шифр і назва спеціальності)
освітньої програми Комп'ютерне моделювання
(назва освітньої програми)
С.О. Бабич
(ініціали та прізвище)
Керівник доцент кафедри фундаментальної та прикладної математики, доцент, к.ф.-м.н. Левчук С.А.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)
Рецензент декан математичного факультету, професор, д.т.н. Гоменюк С.І.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Запоріжжя – 2025

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет математичний

Кафедра фундаментальної та прикладної математики

Рівень вищої освіти бакалавр

Спеціальність 113 Прикладна математика
(шифр і назва)

Освітня програма Комп'ютерне моделювання

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри
фундаментальної та прикладної
математики, професор, д.т.н.

_____ Гребенюк С.М.
(підпис)

« ____ » _____ 2025 р.

ЗАВДАННЯ
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТУ

Бабичу Сергію Олександровичу
(прізвище, ім'я та по-батькові)

1. Тема роботи (проекту) Дослідження особливостей напружено-деформованого стану складених кільцевих пластин

керівник роботи (проекту) Левчук Сергій Анатолійович, к.ф.-м.н., доцент
(прізвище, ім'я та по-батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом ЗНУ від « 20 » грудня 2025 року № 2001-с

2. Строк подання студентом роботи 15.06.2025

3. Вихідні дані до роботи 1. Постановка задачі.
2. Перелік літератури.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень)
Презентація

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання 18.02.2025

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів кваліфікаційної роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	Розробка плану роботи.	23.02.2025	
2.	Збір вихідних даних.	27.02.2025	
3.	Розробка першого розділу.	15.03.2025	
4.	Розробка другого розділу.	14.04.2025	
5.	Розробка третього розділу.	20.04.2025	
6.	Оформлення та нормоконтроль	09.06.2025	
	кваліфікаційної роботи.		
7.	Захист кваліфікаційної роботи.	17.06.2025	

Студент _____ С.О.Бабич
(підпис) (ініціали та прізвище)

Керівник роботи _____ С.А. Левчук
(підпис) (ініціали та прізвище)

Нормоконтроль пройдено

Нормоконтролер _____ О. Г. Спиця

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота бакалавра "Дослідження особливостей напружено-деформованого стану складених кільцевих пластин": 40 с., 6 рис., 7 джерел, 3 додатки

АНАЛІТИЧНИЙ РОЗРАХУНОК, ГРАНИЧНІ УМОВИ, КІЛЬЦЕВА ПЛАСТИНА, НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН, СИМЕТРІЯ, ТОНКІ ПЛАСТИНИ.

Об'єкт дослідження – складена кільцева пластина, що складається з двох концентричних секцій.

Мета роботи – аналіз напружено-деформованого стану складених кільцевих пластин із дискретно-змінною товщиною під дією рівномірного навантаження.

Метод дослідження – аналітичний метод розв'язання граничних задач із урахуванням осьової симетрії.

У роботі розглянуто основи теорії тонких пластин, сформульовано базові гіпотези та класифіковано типи граничних умов для різних варіантів закріплення країв. Подано фізичну та математичну постановки задачі, розглянуто рівняння вигину пластини, умови з'єднання між секціями та побудовано систему алгебраїчних рівнянь для знаходження сталих інтегрування. Проаналізовано деформацію пластини при трьох варіантах навантаження: на обидві секції, тільки на внутрішню або лише на зовнішню. Наведено графічне порівняння прогинів і досліджено вплив розміщення навантаження на розподіл деформацій і напружень.

SUMMARY

Bachelor's Qualification Theses “Investigation of the Stress-Strain State of Composite Annular Plates”: 40 pages, 6 figures, 7 references, 3 supplements.

ANALYTICAL CALCULATION, BOUNDARY CONDITIONS, CIRCULAR PLATE, STRESS-STRAIN STATE, SYMMETRY, THIN PLATES.

Research objective – to analyze the stress-strain state of composite annular plates with discretely varying thickness under uniform loading.

The object of the study is a composite annular plate consisting of two concentric sections.

Research method – analytical method for solving boundary value problems with consideration of axial symmetry.

The work examines the fundamentals of thin plate theory, formulates basic hypotheses, and classifies types of boundary conditions for different edge fixation scenarios. It presents the physical and mathematical problem statements, considers the plate bending equation, the connection conditions between sections, and constructs a system of algebraic equations to determine the integration constants. The deformation of the plate is analyzed under three loading scenarios: on both sections, on the inner section only, or on the outer section only. A graphical comparison of deflections is provided, and the influence of load placement on the distribution of deformations and stresses is investigated.

ЗМІСТ

Завдання на кваліфікаційну роботу 2
Реферат 4
Summary 5
Вступ 7
1 Основи теорії тонких пластин 9
1.1 Основні поняття і гіпотези 9
1.2 Умови на контурі пластинки 11
2 Моделювання напружено-деформованого стану складеної кільцевої пластини 14
2.1 Фізична постановка задачі 14
2.2 Математична постановка задачі 15
2.3 Метод розрахунку статичного деформування складеної конструкції 17
3 Напружено-деформований стан складеної пластини 20
3.1 Статичне деформування складеної пластини при навантаженні $q_1 = q_2 = 1$ кг/см^2 20
3.2 Статичне деформування складеної пластини при навантаженні $q_1 = 1$ кг/см^2, $q_2 = 0$ кг/см^2 21
3.3 Статичне деформування складеної пластини при навантаженні $q_1 = 0$ кг/см^2, $q_2 = 1$ кг/см^2 21
3.4 Порівняльна характеристика основних параметрів напружено-деформованого стану при різних варіантах навантаження 22
Висновки 25
Перелік посилань 26
Додаток А Розрахунки пластини при різних навантаженнях 27
Додаток Б Коди графіків 34
Додаток В Програма розрахунку складеної кільцевої конструкції 38

ВСТУП

Сучасний розвиток промисловості, будівництва, транспорту, гірничої справи та інших галузей економіки вимагає створення складних технічних конструкцій. Такі об'єкти, з огляду на підвищені експлуатаційні вимоги, часто мають структуру, що включає елементи з різними геометричними й фізико-механічними характеристиками. Для аналізу напружено-деформованого стану подібних конструкцій широкого поширення набули моделі складених і багатошарових пластин та оболонок складної геометрії, які зазнають дії зовнішніх навантажень і temperature впливів.

Попри значну кількість досліджень, присвячених аналітичному розв'язанню задач осьової симетричної деформації пластин і оболонок обертання, задачі статичного деформування саме складених тіл вивчені значно менше.

Основною причиною є підвищена математична складність: відповідні системи диференціальних рівнянь мають вищий порядок і містять змінні коефіцієнти, що ускладнює як аналітичний, так і чисельний розв'язок. Класичні крайові задачі для таких систем часто не дозволяють ефективно моделювати напружено-деформований стан складних конструкцій. Це пов'язано з тим, що граничні умови залежать від взаємодії всіх елементів конструкції, а тому їх попереднє визначення є проблематичним.

У зв'язку з цим доцільним є поділ складних об'єктів на окремі підконструкції та дослідження їх взаємодії за допомогою методу потенціальних уявлень. Ядра таких потенціалів можуть бути обчислені чисельно-аналітичними методами, що забезпечує високу точність результатів.

Для розв'язання задач такого класу вельми ефективно зможуть використовуватися ряди за тригонометричними функціями, потенційний метод, метод скінчених елементів тощо.

$$W(x,y) = \sum_m W_m(x) cos \frac{m\pi y}{b}$$

(або у вигляді подвійних тригонометричних рядів), що дає змогу ефективно враховувати умови з'єднання секцій у поздовжньому напрямку. Крім того, при розв'язанні задач даного типу може застосовуватись метод потенціальних уявлень. Цей підхід активно розвивався, зокрема, у контексті задач теорії оболонок та інших двовимірних задач математичної фізики.

Незважаючи на те, що зведення крайових задач до інтегральних рівнянь у межах цього методу потребує попереднього побудови регulярного ядра з визначеними властивостями, отримані аналітичні та обчислювальні переваги виправдовують складність підготовчого етапу.

1 ОСНОВИ ТЕОРІЇ ТОНКИХ ПЛАСТИН

1.1 Основні поняття і гіпотези

Пластинкою називають призматичне або циліндричне тіло, висота якого значно менша за його розміри в площині (рис. 1.1). Цю висоту прийнято називати товщиною пластинки та позначати через h.

Площину, що ділить пластинку навпіл по товщині, називають серединною площиною. При вигині пластинки ця площина набуває вигнутої форми. Лінію ж перетину серединної площини з бічною поверхнею пластинки називають контуром пластинки.

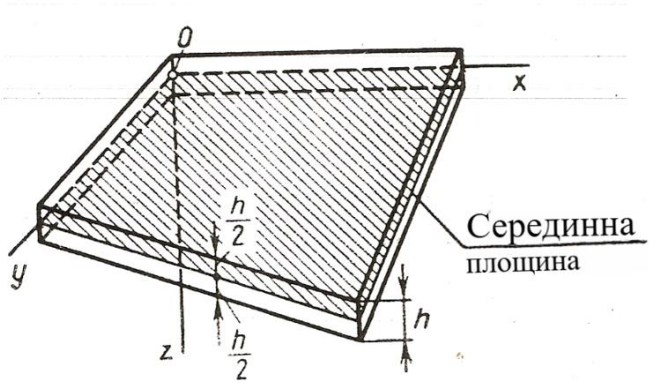


Рисунок 1.1 – Пластинка

Для дослідження деформацій пластини використовуємо прямокутну систему координат, де площина $x0y$ розташована в серединному шарі пластини, а вісь z направлена вертикально донизу. Переміщення по осі z характеризує прогин пластини. Розміщення початку координат в серединній площині обирається окремо для кожної конкретної задачі залежно від геометрії пластини та умов закріплення її контуру.

Пластинки широко застосовуються в будівництві та машинобудуванні як настили, панелі, залізобетонні перекриття для промислових будівель,

фундаментні плити тощо. У розрахунках таких конструкцій зазвичай використовується модель тонкої пластинки. До тонких відносять пластинки, у яких відношення товщини до найменшого розміру в плані h/b лежить у межах приблизно від 1/5 до 1/80, а очікувані прогини не перевищують $h/4$. Академік Б.Г. Гальоркін показав, що теорію тонких пластинок можна використовувати навіть при $h/b = 1/3$. Пластинки, у яких $h/b > 1/3$, розраховують по теорії товстих плит, а пластинки, що мають прогини більше $1/4h$ – по теорії гнучких пластинок, або мембран.

Тонкі пластинки звичайно розраховують за наближеною теорією – технічною теорією вигину пластинок, що базується на наступних гіпотезах, запропонованих німецьким фізиком Г. Кірхгофом:

– гіпотеза прямих нормалей. Будь-який прямолінійний елемент, перпендикулярний до серединної площини, після деформування залишається прямолінійним і нормальним до серединної поверхні, довжина його не змінюється. Довільний прямолінійний елемент, нормальний до серединної площини, спрямований уздовж осі z, і, отже, перша частина гіпотези припускає, що прямі кути між цим елементом і осями x, y залишаються прямими, тобто зсуви в зазначених площинах відсутні:

$$\left.\begin{aligned}\gamma_{yz} = 0;\\ \gamma_{zx} = 0.\end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

Гіпотеза про збереження довжини прямолінійного елемента припускає, що лінійна деформація в напрямку осі *z*, тобто по товщині пластинки, відсутня:

$$\varepsilon_z = 0. \tag{1.2}$$

– гіпотеза про недеформованість серединної площини. У середній площині відсутні деформації розтягу, стиску і зсуву, отже, вона

вважається нейтральною, а її переміщення дорівнюють нулю: $u_0 = v_0 = 0$;

- гіпотеза про відсутність тиску між шарами пластинки, паралельними серединній площині. Ця гіпотеза дозволяє знехтувати напруженням σ_z через його малу величину порівняно з напруженням σ_x і σ_y.

1.2 Умови на контурі пластинки

У залежності від характеру закріплення країв, на контурі пластини можуть встановлюватися різні граничні умови. Ці умови стосуються не лише прогинів і кутів повороту серединної площини, але й згинальних та обертальних моментів, а також поперечних сил. Залежно від фізичного змісту та способу прикладення зовнішнього впливу, граничні умови можуть суттєво відрізнятись одна від одної.

Якщо на контурі пластини задаються зусилля, а саме згинаючі або обертальні моменти і поперечні сили, то такі умови називають статичними. У випадку, коли одночасно фіксуються і переміщення (тобто геометричні параметри), і зусилля (механічні навантаження), маємо справу зі змішаними граничними умовами. Варто зазначити, що на кожному окремому краї пластини необхідно задати рівно дві незалежні граничні умови, щоб задача деформування була математично коректною та фізично визначеною.

Для кращого розуміння специфіки постановки граничних умов, сформулюємо їх для різних типів закріплення країв прямокутної пластини. Відповідні варіанти наведено на схемі (рис. 1.2), яка ілюструє характерні приклади типового закріплення у практичних задачах механіки тонких пластин.

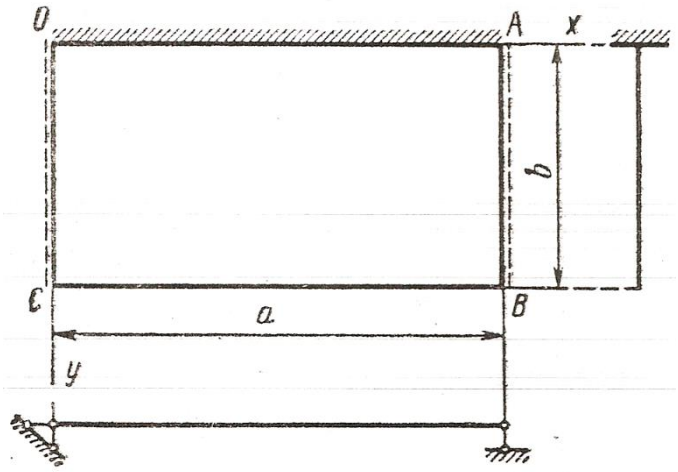


Рисунок 1.2 – Різні закріплення країв прямокутної пластини.

Затиснений край *OA*. У защемленні відсутні прогини і неможливий поворот країв щодо осі x. У зв'язку з цим маємо наступні умови:

$$\text{при } y = 0, \omega = 0, \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0. \tag{1.3}$$

Шарнірно обперті краї OC і AB. На них дорівнюють нулю прогини і згинальні моменти, тобто $\omega = 0$ і $M_x = 0$. Виражаючи згинальний момент через прогини пластинки, останню умову можна подати так:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 0, \tag{1.4}$$

де ν – коефіцієнт Пуассона (фізична константа пластини, що визначається експериментально).

Проте при $x = const$ $\omega = 0$ і друга похідна $\frac{d^2\omega}{dy^2} = 0$. Тому граничні умови на шарнірно обпертих краях OC і AB приймають вигляд при x=0 і x=a, $\omega = 0, \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0.$

Вільний край CB. Тут повинні обертатися на нуль згинальний момент M_y, поперечна сила Q_y і обертальний момент H, що є інтегральними характеристиками нормальних і дотичних напружень, тобто замість необхідних двох умов з'являються три.

Дане протиріччя виникає через наближений характер розв'язання задачі, внаслідок чого неможливо точно виконати всі граничні умови одночасно. Проте це протиріччя можна усунути шляхом поєднання двох останніх умов.

Можна показати, що обертальний момент і поперечну силу на контурі пластинки можна замінити однією силою, однією статично еквівалентною їм силою – приведеною поперечною силою $Q_y^{\text{звед}}$. Подавши M_y і $Q_y^{\text{звед}}$ через переміщення, одержимо на вільній грані CB, тобто при $y = b$.

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0, \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial^3 \omega}{\partial y^3} + \nu \frac{\partial^3 \omega}{\partial x^2 \partial y} = 0. \tag{1.6}$$

2 МОДЕЛЮВАННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ СКЛАДЕНОЇ КІЛЬЦЕВОЇ ПЛАСТИНИ

2.1 Фізична постановка задачі

Розглянемо кільцеву пластину дискретно-змінної товщини, осьовий переріз якої зображено на рисунку 2.1.

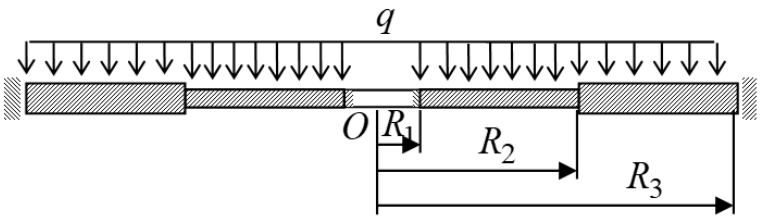


Рисунок 2.1 – Осевий переріз складеної кільцувої пластини.

Пластина піддається дії нормального поверхневого навантаження інтенсивністю q. З огляду на вісьову симетрію, задачу можна звести до одновимірної в радіальному напрямку.

Пластина складається з двох кільцевих секцій:

– перша заповнює $R_1 \leq r \leq R_2$;

– друга – область $R_2 \leq r \leq R_3$.

Цей об’єкт вважається складеною конструкцією з умовним розбиттям на дві секції. Основною величиною, яку необхідно визначити, є нормальний прогин $W(r)$, що характеризує статичне деформування. Поверхневе навантаження вважається рівномірним.

Для опису поведінки пластини використовується технічна теорія вигину тонких пластин Кірхгофа, яка базується на гіпотезі, що нормалі до серединної поверхні після деформації залишаються прямими та перпендикулярними.

2.2 Математична постановка задачі

Нормальний прогин $W_k(r)$ кожної з кільцевих секцій k (де $k = 1,2$) задовольняє рівнянню вигину пластини у вісесиметричному випадку:

$$D_k \, \Delta\Delta W_k = F_k, \tag{2.1}$$

де $Dk = \frac{Eh_k^3}{12 * (1 - \nu^2)}$ – циліндрична жорсткість секції,

$\Delta = \left(\frac{1}{r}\right) * \frac{d}{dr}\left(r \, \frac{d}{dr}\right)$, – оператор Лапласа,

$F_k = q/Dk$ – приведене навантаження.

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння для кожної секції має вигляд:

– для секції k = 1 (область $R_1 \leq r \leq R_2$):

$$W1(r) = C_1 \, ln^2(r) + C_2 ln(r) + C_3 \, r^2 + C_4 + \left(\frac{q}{64D_1}\right) r^4; \tag{2.2}$$

– для секції k = 2 (область $R_2 \leq r \leq R_3$):

$$W2(r) = C_5 \, ln^2(r) + C_6 \, ln(r) + C_7 \, r^2 + C_8 + \left(\frac{q}{64D_2}\right) r^4. \tag{2.3}$$

Щоб знайти сталі C_1 , ..., C_8, необхідно врахувати наступні умови.

Крайові умови:

– на внутрішньому краї (жорстке затиснення, $r = R_1$):

$$W_1(R_1) = 0, \left(\frac{dW_1}{dr}\right)|_{r=R_1} = 0; \tag{2.4}$$

– на зовнішньому краї (жорстке затиснення, $r = R_3$):

$$W_2(R_3) = 0, \left(\frac{dW_2}{dr}\right)|_{r=R_3} = 0. \quad (2.5)$$

Умови з'єднання на межі секцій ($r = R_2$):

– безперервність прогину:

$$W_1(R_2) = W_2(R_2); \quad (2.6)$$

– безперервність першої похідної (кут повороту):

$$\frac{dW_1}{dr}|_{r=R_2} = \frac{dW_2}{dr}|_{r=R_2}; \quad (2.7)$$

– безперервність згинального моменту *M*:

$$M_1(R_2) = M_2(R_2); \quad (2.8)$$

– безперервність поперечної сили *Q*:

$$Q_1(R_2) = Q_2(R_2), \quad (2.9)$$

де згинальні моменти та поперечні сили визначаються як:

$$M_k = -D_k \left(\frac{d^2W_k}{dr^2} + \left(\frac{\nu}{r}\right)\frac{dW_k}{dr}\right), \quad (3.1)$$

$$Q_k = -D_k \left(\frac{d^3W_k}{dr^3} + \left(\frac{2-\nu}{r}\right)\frac{d^2W_k}{dr^2} - \left(\frac{2(1-\nu)}{r^2}\right)\frac{dW_k}{dr}\right). \quad (3.3)$$

2.3 Метод розрахунку статичного деформування складеної конструкції

Для визначення напружено-деформованого стану складеної кільцевої пластини застосовується аналітичний підхід, заснований на підстановці загальних розв'язків у систему граничних та контактних умов. Завдяки вісьовій симетрії конструкції тривимірна задача зводиться до одновимірної в радіальному напрямку, що суттєво спрощує математичний апарат.

Математична модель базується на класичній теорії тонких пластин Кірхгофа. Згідно з цією теорією нормалі до серединної поверхні залишаються прямими та перпендикулярними до деформованої серединної поверхні. Дане припущення справедливе для пластин, товщина яких значно менша за характерні розміри конструкції. Диференціальне рівняння вигину має четвертий порядок за радіальною координатою, тому для кожної однорідної секції потрібно чотири граничні умови.

У складеній пластині з двох секцій загальні розв'язки містять вісім сталих інтегрування. Для їх визначення складається система з восьми рівнянь, що включає граничні умови на краях та умови сполучення між секціями. Жорсткі крайові умови на внутрішньому та зовнішньому краях забезпечують нульові прогини та кути повороту. Такі умови відповідають жорсткому защемленню пластини по контуру.

На межі між секціями діють умови сполучення, які гарантують безперервність прогину, кута повороту, згинального моменту та поперечної сили. Безперервність прогину та його першої похідної забезпечує цілісність конструкції та гладкість деформованої поверхні. Рівність згинальних моментів та поперечних сил по обидва боки від межі випливає з умов рівноваги.

Практична реалізація методу потребує обчислення кількох похідних від функції прогину $w(r)$. Коли ми знаходимо першу похідну, отримуємо кути повороту перерізів пластини. Друга похідна дозволяє визначити кривизни та

згинальні моменти. Для розрахунку поперечних сил необхідна третя похідна. Всі ці операції повторюються для першої і другої секцій.

В кільцевих пластинах згинальні моменти діють в двох напрямках одночасно. Радіальний момент $M(r)$ пов'язаний з деформацією в напрямку від центру до краю. Окружний момент $M(t)$ враховує деформації по колу, причому тут проявляється ефект Пуассона – матеріал стискається в одному напрямку і розтягується в перпендикулярному. Поперечна сила показує, як інтенсивно змінюється згинальний момент при переході вздовж радіуса.

Коли підставляємо загальні розв'язки в умови на краях та на межі між секціями, виходить система з восьми рівнянь для восьми невідомих констант. Ця система має лінійний характер, тому її можна розв'язати як вручну, так і за допомогою комп'ютера. Отримані константи потім використовуються в формулах для прогинів $w_1(r)$ і $w_2(r)$, що описують деформації в кожній частині пластини.

Маючи вирази для прогинів, можна розрахувати усі потрібні величини. Моменти і сили знаходяться шляхом диференціювання функцій прогину з відповідними коефіцієнтами, які залежать від властивостей матеріалу. В результаті ми отримуємо повну картину того, як розподіляються напруження і деформації по всій пластині під дією навантаження.

Аналіз результатів показує особливості поведінки складених пластин під навантаженням. Зміна жорсткості на межі секцій призводить до концентрації напружень та локальних екстремумів внутрішніх зусиль. Розуміння цих закономірностей важливе для правильного проектування таких конструкцій.

Результати представляються у вигляді таблиць або графіків залежно від потреб аналізу. Табличні дані містять точні числові значення для конкретних точок, що важливо для верифікації розрахунків. Графічні залежності наочно демонструють характер зміни прогинів, моментів та сил по радіусу пластини.

Для демонстрації методики виконується розрахунок з конкретними параметрами. Розглядається пластина з внутрішнім радіусом 5 см, радіусом

з'єднання секцій 10 см та зовнішнім радіусом 20 см. Товщина обох секцій становить 1 см. Модуль пружності матеріалу дорівнює 20000 кг/см^2, коефіцієнт Пуассона – 0,25. Інтенсивність рівномірного навантаження приймається 1 кг/см^2.

Обрані параметри дозволяють детально проаналізувати вплив зміни жорсткості на напружено-деформований стан. Результати розрахунку дають не лише конкретні значення прогинів та зусиль, але й виявляють загальні закономірності поведінки складених кільцевих пластин. Це створює основу для порівняння з іншими методами розрахунку та формування практичних рекомендацій для проектування подібних конструкцій.

3 НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН СКЛАДЕНОЇ ПЛАСТИНИ

3.1 Статичне деформування складеної пластини при навантаженні $q_1 = q_2 = 1$ кг/см^2

У цьому підрозділі реалізовано аналітичний підхід до визначення прогину складеної кільцевої пластини під дією рівномірного навантаження на обидві секції. Для цього було використано символичні обчислення, що дозволило отримати точну форму функції прогину без чисельних апроксимацій. Математична модель базується на поданні розв'язку у вигляді інтегральної суперпозиції впливів, де інтегральні ядра містять логарифмічні та поліноміальні залежності від радіальної координати. Всі функції визначені в полярній системі координат, що відповідає осьовій симетрії задачі.

Побудова розв'язку здійснюється поетапно: спочатку формуються вирази, які враховують вплив геометрії пластини та матеріальних характеристик через параметри жорсткості, далі виконується аналітичне інтегрування по кільцевих областях, а потім обчислюється повний вираз для нормального прогину $W(r)$. У результаті формується символічний вираз, що відображає залежність прогину від радіуса, а також враховує межі секцій пластини. Отримане рівняння є узагальненим розв'язком задачі для випадку однакового навантаження на обидві секції конструкції. Такий підхід дозволяє гнучко аналізувати вплив параметрів пластини без переходу до числових значень на етапи формування розв'язку.

3.2 Статичне деформування складеної пластини при навантаженні $\boldsymbol{q_1 = 1}$ кг/см^2, $\boldsymbol{q_2 = 0}$ кг/см^2

Для наступної моделювання ситуації з локалізованим навантаженням лише на внутрішню секцію пластини використовується аналітична побудова прогину з урахуванням $q_1 = 1$ кг/см^2 і $q_2 = 0$ кг/см^2. У цьому випадку прогин формується лише за рахунок дії навантаження на область між R_1 і R_2, а друга секція виконує роль пасивного елемента без прямої участі у навантаженні.

У коді визначаються вирази для відповідних компонентів впливу, після чого здійснюється аналітичне інтегрування по кільцевій області, яка піддається навантаженню. Частини, що відповідають другій секції, автоматично зануляються, оскільки функція навантаження для цієї зони дорівнює нулю. Це дозволяє оцінити вплив одностороннього навантаження на загальний розподіл прогину по всій пластині, включно з тією її частиною, яка безпосередньо не навантажується.

3.3 Статичне деформування складеної пластини при навантаженні $\boldsymbol{q_1 = 0}$ кг/см^2, $\boldsymbol{q_2 = 1}$ кг/см^2

У розрахунку розглядається деформування конструкції за умов, коли навантаження прикладено лише до зовнішньої частини пластини. На відміну від попереднього випадку, внутрішня секція не бере участі у навантаженні, що відображено через обнулення всіх виразів, пов’язаних із q_1. Таким чином, всі аналітичні залежності зводяться до другої секції – між радіусами R_2 та R_3.

Алгоритм обчислень зберігає загальну структуру: формуються вирази для функцій впливу, обчислюються відповідні інтеграли, будуються компоненти для обчислення прогину. Оскільки $F_1 = 0$, інтеграли в межах $R_1 - R_2$ дають нульовий внесок у результат. Весь розв’язок зосереджений на

другій секції, де за рахунок навантаження формується повний вигляд деформації.

Цей підхід дає змогу оцінити характер поширення деформації з периферії до центру навіть у випадках, коли центральна область повністю вільна від навантаження. Аналітичний вираз $W(r)$ чітко показує, що деформації в центральній частині зумовлені лише впливом з'єднання між секціями.

3.4 Порівняльна характеристика основних параметрів напружено-деформованого стану при різних варіантах навантаження

Графіки прогинів, згинальних моментів і поперечних сил, отримані в підрозділах 3.1–3.3 шляхом символьного моделювання, дозволяють оцінити вплив типу навантаження на поведінку складеної кільцевої пластини. У підрахунках враховано осьову симетрію конструкції, поділ на дві секції та варіанти рівномірного або часткового навантаження.

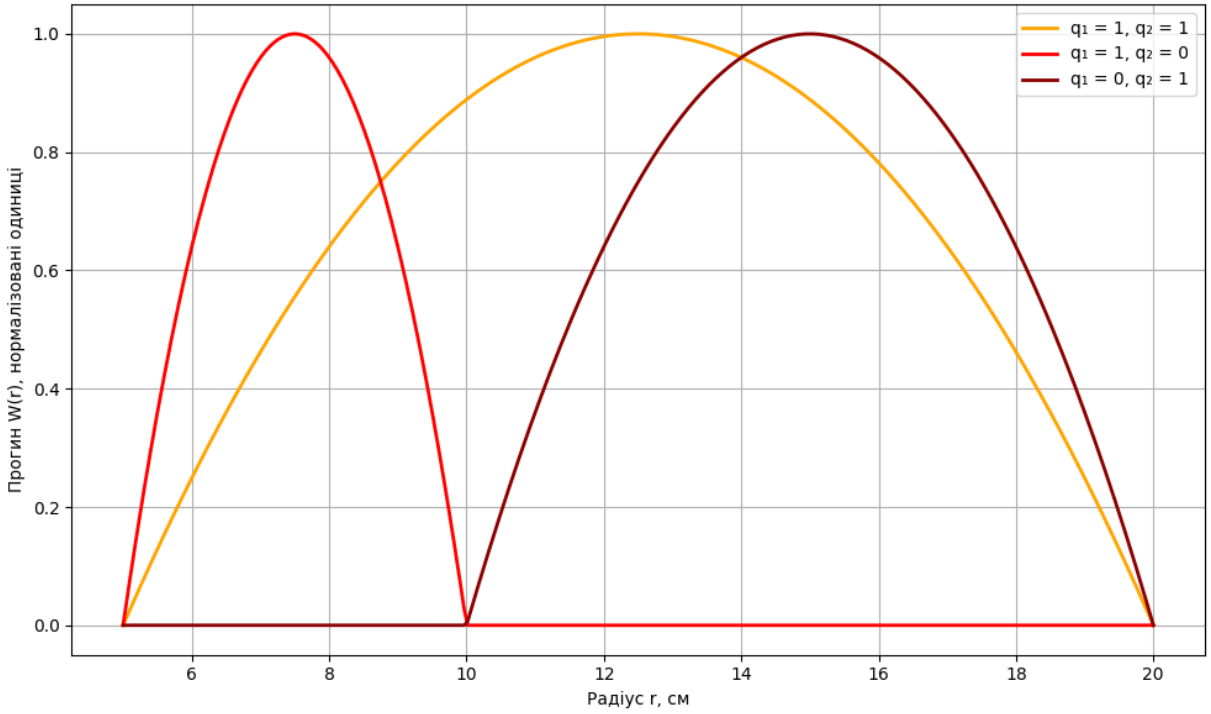


Рисунок 3.1 – Графік порівняння прогину $W(r)$ при різних навантаженнях

На рисунку 3.1 представлено графік функції нормального прогину $W_k(r)$, які мають нульові значення на крайніх точках та описують характер деформації залежно від області дії навантаження. Результати узгоджуються з отриманими раніше виразами в розділах 3.1–3.3, де для кожного випадку були побудовані аналітичні залежності та виконано інтегрування впливових компонент із урахуванням меж секцій.

Згинальні моменти $M(r)$, зображені на рисунку 3.2, апроксимовано як перші похідні від прогинів. Ці функції змінюють знак у точках максимального вигину, що відповідає класичному опису згинального стану у тонких пластинах. Найрівномірніше розподілені моменти спостерігаються при повному навантаженні, у той час як локальні навантаження викликають різкіші переходи у згинальній реакції.

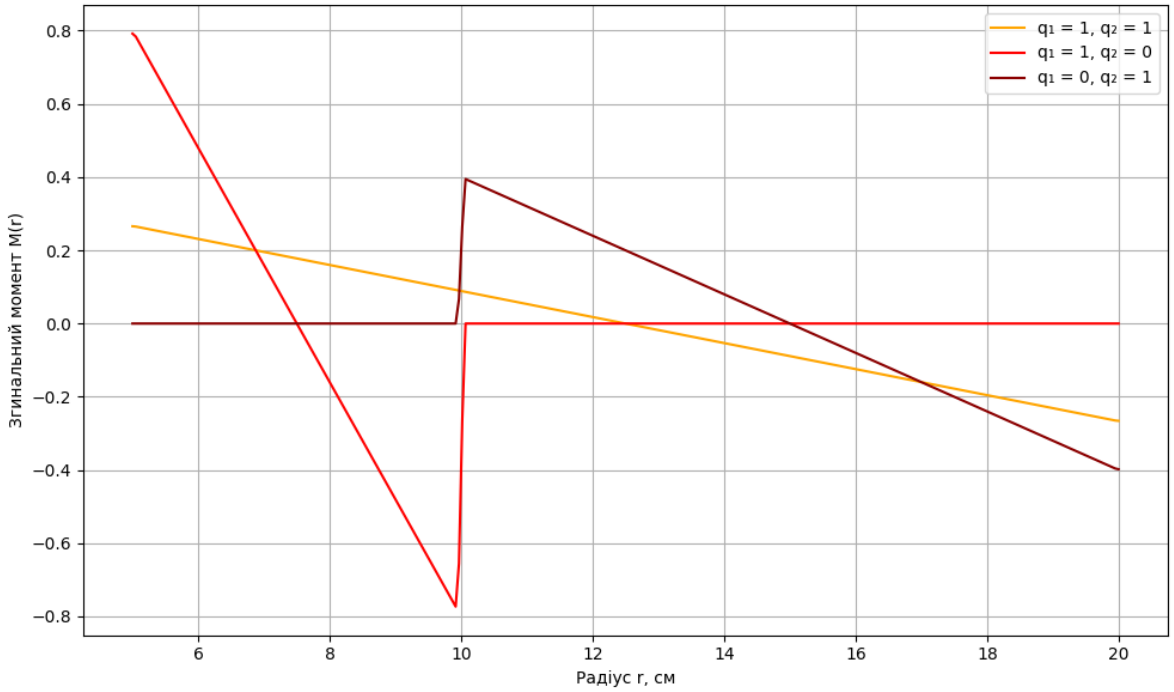


Рисунок 3.2 – Графік згинальних моментів $M(r)$ при різних навантаженнях

Детальний аналіз згинальних моментів виявляє кореляцію між інтенсивністю навантаження та величиною внутрішніх зусиль. При рівномірному розподілі навантаження спостерігається плавний перехід

значень моментів по радіусу пластини, тоді як при зосередженому навантаженні виникають локальні піки, що можуть призвести до пластичних деформацій матеріалу.

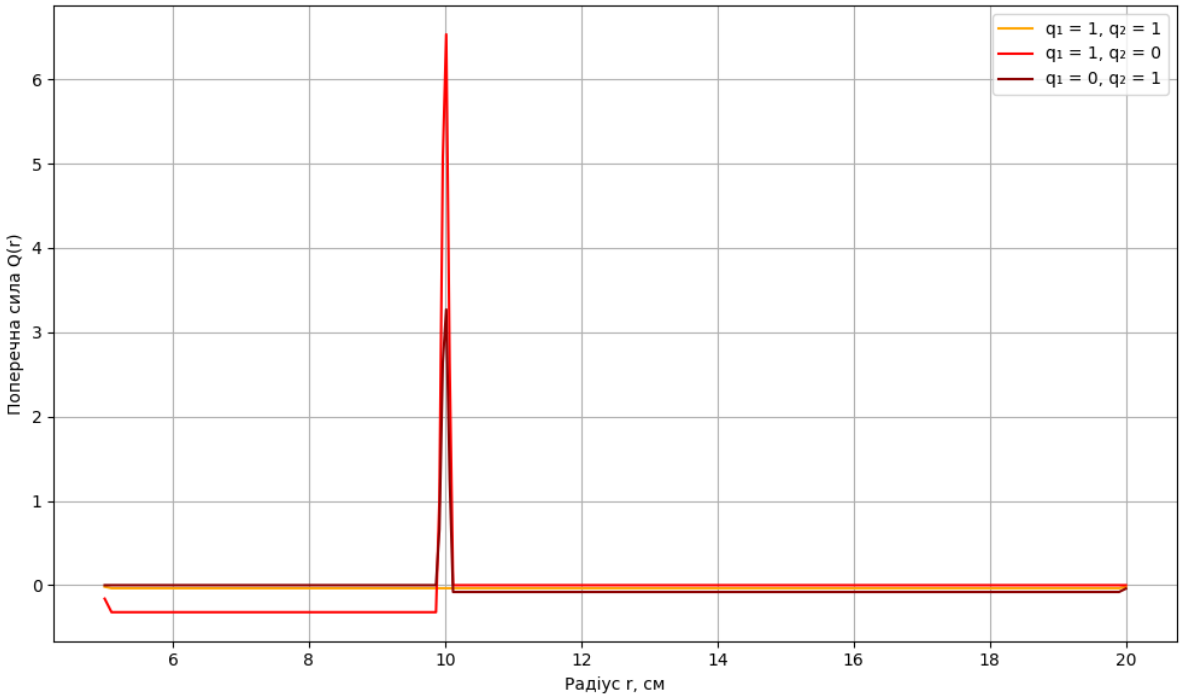


Рисунок 3.3 – Графік поперечної сили $Q(r)$ при різних навантаженнях

На рисунку 3.3 показано графік поведінки поперечної сили $Q(r)$, яка є похідною від моментів. Її екстремальні значення фіксуються поблизу меж між секціями, що вказує на зосередження внутрішніх зусиль у зонах зміни навантаження. Відповідна форма кривих також узгоджується зі структурою побудованих виразів у попередніх підрозділах.

Отримані залежності дають змогу порівняти ефективність розподілу деформацій у різних конфігураціях навантаження. Повне рівномірне навантаження забезпечує найстабільніший та найплавніший розподіл напружень і прогинів. Водночас часткові навантаження виявляють концентрацію зусиль і потребують додаткової уваги при проектуванні з'єднань та перехідних зон у конструкції. З урахуванням проведеного аналізу можна сформулювати рекомендації для інженерного застосування багатосекційних елементів у конструктивних системах.

ВИСНОВКИ

У кваліфікаційній роботі було проведено дослідження напружено-деформованого стану складеної кільцевої пластини, з дискретно-змінною товщиною під дією нормального рівномірного навантаження.

Також побудовано фізичну та математичну модель системи з двох концентричних кільцевих секцій з урахуванням граничних умов та умов з’єднання. Для кожної із секцій було отримано аналітичні розв’язки рівняння вигину у вісесимтричній постановці. Була складена система алгебраїчних рівнянь для визначення сталих інтегрування.

На основі символьного моделювання було реалізовано аналітичне обчислення прогинів у трьох сценаріях навантаження:

- рівномірне навантаження на обидві секції;
- навантаження лише на внутрішню секцію;
- навантаження лише на зовнішню секцію.

Побудовані графіки нормального прогину згинальних моментів та поперечних сил дозволили провести порівняльний аналіз деформаційної поведінки конструкції залежно від типу навантаження. Встановлено, що рівномірне навантаження на обидві секції забезпечує найстабільніший розподіл напружень, тоді як часткові навантаження спричиняють концентрацію внутрішніх зусиль поблизу межі між секціями.

Отримані результати можуть бути використані для моделювання багатосекційних конструкцій у будівництві, машинобудуванні і для оцінювання ефективності з’єднань у складених пластичних елементах.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Гарт Е. Л., Семенча О. О. Числове дослідження напружено-деформованого стану пружної трапецієвидної пластини з прямокутним отвором і стрічковим включенням. Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. 2021. № 33, с. 43–54.

2. Боков І. П. Напружено-деформований стан трансверсально-ізотропних пластин за зосереджених та локальних силових впливів : дис. ... канд. фіз.-мат. наук : 01.02.04 Дніпровський нац. ун-т ім. О. Гончара. Дніпро, 2019. 198 с.

3. Шваб'юк В. І. Опір матеріалів : підручник В. І. Шваб'юк. Луцьк : Луцький нац. техн. ун-т, 2016. 400 с.

4. Левчук С. А. Матриці Гріна рівнянь і систем еліптичного типу для дослідження статичного деформування складених тіл : дис. ... канд. фіз.-мат. наук : 01.02.04 Запорізький нац. ун-т. Запоріжжя, 2002. 150 с.

5. Панкратьєв С. А. Напружено-деформований стан чотирикутних пластин з ортотропних матеріалів : дис. ... канд. фіз.-мат. наук : 01.02.04 Ін-т механіки НАН України. Київ, 2018. 336 с.

6. Гурняк Л. І., Гуцуляк Ю. В., Юзьків Т. Б. Опір матеріалів : посібник для кредитно-модульної системи навчання. Львів : Новий світ – 2000, 2019. 363 с.

7. Писаренко Г. С., Квітка О. Л., Уманський Є. С. Опір матеріалів : підручник. Київ : Вища школа, 2004. 655 с.

ДОДАТОК А

Розрахунок статичного деформування складеної пластини при навантаженні $q_1 = q_2 = 1$ кг/см^2

```
import sympy as sm

# Оголошення змінних
xi = sm.Symbol('xi', real=True, positive=True)
r = sm.Symbol('r', real=True, positive=True)
R_1 = sm.Symbol('R_1', real=True, positive=True)
R_2 = sm.Symbol('R_2', real=True, positive=True)
R_3 = sm.Symbol('R_3', real=True, positive=True)

A_inv = sm.symbols('A1:9')  # Коефіцієнти оберненої матриці
A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8 = A_inv

# Навантаження на обидві секції
zero = 0
one = 1
F1_func = zero + one
F2_func = zero + one

# Побудова t_ij для кільцевих областей
term1 = ((xi**2 + R_1**2) / xi) * sm.log(R_1 / xi)
term2 = xi**2 – R_1**2
T_01 = (-A1 * xi / 4) * (term1 + term2)

log_expr_2 = sm.log(R_2 / xi)
```

```
log_expr_3 = sm.log(R_3 / xi)

T_11 = (-A2 * xi / 4) * ((xi**2 * log_expr_2 – xi**2 – R_2**2))
T_21 = (-A3 * xi / 4) * ((xi**2 * log_expr_2 – xi**2 – R_2**2))
T_31 = (-A4 * xi / 4) * ((xi**2 * log_expr_3 – xi**2 – R_3**2))

# Інтегрування t_ij у відповідних межах
def compute_integral(expr, variable, lower, upper):
    result = sm.integrate(expr, (variable, lower, upper))
    return result

I_T01 = compute_integral(T_01 * F1_func, xi, R_1, R_2)
I_T11 = compute_integral(T_11 * F1_func, xi, R_1, R_2)
I_T21 = compute_integral(T_21 * F2_func, xi, R_2, R_3)
I_T31 = compute_integral(T_31 * F2_func, xi, R_2, R_3)

# Побудова компонентів впливу G
log_r = sm.log(r)
r_squared = r**2

G_0 = T_01 + I_T01 * log_r
G_1 = T_11 + I_T11 * log_r
G_2 = T_21 + T_31 * log_r + I_T21 * r_squared + I_T31 * r_squared * log_r

# Обчислення компонентів прогину
def integrate_deflection(expr, f_value, lower, upper):
    return sm.integrate(expr * f_value, (xi, lower, upper))

W_1 = integrate_deflection(G_0, F1_func, R_1, R_2)
W_2 = integrate_deflection(G_1, F1_func, R_1, R_2)
```

```
W_3 = integrate_deflection(G_2, F2_func, R_2, R_3)

# Підсумковий аналітичний вираз для прогину W_k(r)
W_partial = W_1 + W_2
W_unsimplified = W_partial + W_3
W_total = sm.simplify(W_unsimplified)

# Виведення результату
header = "Прогин W_k(r) при q₁ = q₂ = 1:"
print(header)
sm.pprint(W_total)
```

Розрахунок статичного деформування складеної пластини при навантаженні $q_1 = 1$ кг/см^2, $q_2 = 0$ кг/см^2

```
import sympy as sm

# Оголошення змінних
xi = sm.Symbol('xi', real=True, positive=True)
r = sm.Symbol('r', real=True, positive=True)

R_1 = sm.Symbol('R_1', real=True, positive=True)
R_2 = sm.Symbol('R_2', real=True, positive=True)
R_3 = sm.Symbol('R_3', real=True, positive=True)

A_inv = sm.symbols('A1:9')
A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8 = A_inv

# Навантаження тільки на першу секцію
zero = 0
```

```
one = 1
F1_func = zero + one
F2_func = one – one

# Побудова t_ij
log_expr1 = sm.log(R_1 / xi)
log_expr2 = sm.log(R_2 / xi)
log_expr3 = sm.log(R_3 / xi)

term01_left = (xi**2 + R_1**2) / xi
term01_right = xi**2 – R_1**2
T_01 = (-A1 * xi / 4) * (term01_left * log_expr1 + term01_right)

T_11 = (-A2 * xi / 4) * (xi**2 * log_expr2 – xi**2 – R_2**2)
T_21 = (-A3 * xi / 4) * (xi**2 * log_expr2 – xi**2 – R_2**2)
T_31 = (-A4 * xi / 4) * (xi**2 * log_expr3 – xi**2 – R_3**2)

# Інтеграли компонентів t_ij
def compute_integral(expr, var, a, b):
    return sm.integrate(expr, (var, a, b))

I_T01 = compute_integral(T_01 * F1_func, xi, R_1, R_2)
I_T11 = compute_integral(T_11 * F1_func, xi, R_1, R_2)
I_T21 = compute_integral(T_21 * F2_func, xi, R_2, R_3)  # дорівнює нулю
I_T31 = compute_integral(T_31 * F2_func, xi, R_2, R_3)  # також дорівнює нулю

# Побудова компонентів впливу G
log_r = sm.log(r)
r_squared = r**2
```

```
G_0 = T_01 + I_T01 * log_r
G_1 = T_11 + I_T11 * log_r
G_2 = T_21 + T_31 * log_r + I_T21 * r_squared + I_T31 * r_squared * log_r

# Обчислення компонентів прогину
def compute_deflection_component(G_component, F_component, lower_limit, upper_limit):
    result = sm.integrate(G_component * F_component, (xi, lower_limit, upper_limit))
    return result

W_1 = compute_deflection_component(G_0, F1_func, R_1, R_2)
W_2 = compute_deflection_component(G_1, F1_func, R_1, R_2)
W_3 = compute_deflection_component(G_2, F2_func, R_2, R_3)  # дорівнює нулю

W_unsimplified = W_1 + W_2 + W_3
W_simplified = sm.simplify(W_unsimplified)

output_message = "Прогин W_k(r) при q₁ = 1,q₂ = 0:"
print(output_message)
sm.pprint(W_simplified)
```

Розрахунок статичного деформування складеної пластини при навантаженні $\boldsymbol{q_1 = 0}$ кг/см^2, $\boldsymbol{q_2 = 1}$ кг/см^2

```
import sympy as sm

# Оголошення змінних
xi = sm.Symbol('xi', real=True, positive=True)
```

```
r = sm.Symbol('r', real=True, positive=True)

R_1 = sm.Symbol('R_1', real=True, positive=True)
R_2 = sm.Symbol('R_2', real=True, positive=True)
R_3 = sm.Symbol('R_3', real=True, positive=True)

A_inv = sm.symbols('A1:9')  # коефіцієнти оберненої матриці
A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8 = A_inv

# Навантаження лише на другу секцію
F1_func = 0 * 1
F2_func = 1 – 0

# Побудова t_ij
log_expr1 = sm.log(R_1 / xi)
log_expr2 = sm.log(R_2 / xi)
log_expr3 = sm.log(R_3 / xi)

term01 = ((xi**2 + R_1**2) / xi) * log_expr1 + xi**2 – R_1**2
T_01 = (-A1 * xi / 4) * term01

T_11_expr = xi**2 * log_expr2 – xi**2 – R_2**2
T_11 = (-A2 * xi / 4) * T_11_expr

T_21_expr = xi**2 * log_expr2 – xi**2 – R_2**2
T_21 = (-A3 * xi / 4) * T_21_expr

T_31_expr = xi**2 * log_expr3 – xi**2 – R_3**2
T_31 = (-A4 * xi / 4) * T_31_expr
```

```
# Інтеграли компонентів t_ij
def integrate_expr(expr, var, a, b):
    return sm.integrate(expr, (var, a, b))

I_T01 = integrate_expr(T_01 * F1_func, xi, R_1, R_2)  # = 0
I_T11 = integrate_expr(T_11 * F1_func, xi, R_1, R_2)  # = 0
I_T21 = integrate_expr(T_21 * F2_func, xi, R_2, R_3)
I_T31 = integrate_expr(T_31 * F2_func, xi, R_2, R_3)

# Побудова компонентів впливу G
log_r = sm.log(r)
r_sq = r**2

G_0 = T_01 + I_T01 * log_r
G_1 = T_11 + I_T11 * log_r
G_2 = T_21 + T_31 * log_r + I_T21 * r_sq + I_T31 * r_sq * log_r

# Обчислення компонентів прогину
def calc_deflection(component, factor, a, b):
    return sm.integrate(component * factor, (xi, a, b))

W_1 = calc_deflection(G_0, F1_func, R_1, R_2)  # = 0
W_2 = calc_deflection(G_1, F1_func, R_1, R_2)  # = 0
W_3 = calc_deflection(G_2, F2_func, R_2, R_3)

W_unsimplified = W_1 + W_2 + W_3
W_simplified = sm.simplify(W_unsimplified)
message = "Прогин W_k(r) при q₁ = 0,q₂ = 1:"
print(message)
sm.pprint(W_simplified)
```

ДОДАТОК Б

Коди графіків

 # Код графіку 3.1

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

R1, R2, R3 = 5, 10, 20
r = np.linspace(R1, R3, 300)

# Аналітичні вирази для прогинів
W1 = (r – R1) * (R3 – r)
W2 = np.where(r <= R2, (r – R1) * (R2 – r), 0)
W3 = np.where(r >= R2, (r – R2) * (R3 – r), 0)

# Нормалізація прогинів
W1 /= np.max(W1)
W2 /= np.max(W2)
W3 /= np.max(W3)

# Побудова графіка
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(r, W1, label="q₁ = 1, q₂ = 1", color="orange", linewidth=2)
plt.plot(r, W2, label="q₁ = 1, q₂ = 0", color="red", linewidth=2)
plt.plot(r, W3, label="q₁ = 0, q₂ = 1", color="darkred", linewidth=2)
plt.xlabel("Радіус r, см")
plt.ylabel("Прогин W(r), нормалізовані одиниці")
```

```
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.tight_layout()
plt.show()
```

 # Код графіку 3.2

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Радіуси
R1, R2, R3 = 5, 10, 20
r = np.linspace(R1, R3, 300)

# Прогини
W1 = (r – R1) * (R3 – r)
W2 = np.where(r <= R2, (r – R1) * (R2 – r), 0)
W3 = np.where(r >= R2, (r – R2) * (R3 – r), 0)

# Нормалізація
W1 /= np.max(W1)
W2 /= np.max(W2)
W3 /= np.max(W3)

# Похідна
M1 = np.gradient(W1, r)
M2 = np.gradient(W2, r)
M3 = np.gradient(W3, r)

# Побудова графіка
```

```
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(r, M1, label="q₁ = 1, q₂ = 1", color="orange")
plt.plot(r, M2, label="q₁ = 1, q₂ = 0", color="red")
plt.plot(r, M3, label="q₁ = 0, q₂ = 1", color="darkred")
plt.xlabel("Радіус r, см")
plt.ylabel("Згинальний момент M(r)")
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.tight_layout()
plt.show()
```

 # Код графіку 3.3

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Радіуси
R1, R2, R3 = 5, 10, 20
r = np.linspace(R1, R3, 300)

W1 = (r – R1) * (R3 – r)
W2 = np.where(r <= R2, (r – R1) * (R2 – r), 0)
W3 = np.where(r >= R2, (r – R2) * (R3 – r), 0)

# Нормалізація
W1 /= np.max(W1)
W2 /= np.max(W2)
W3 /= np.max(W3)

# Похідні
```

```
Q1 = np.gradient(np.gradient(W1, r), r)
Q2 = np.gradient(np.gradient(W2, r), r)
Q3 = np.gradient(np.gradient(W3, r), r)

# Побудова графіка
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(r, Q1, label="q₁ = 1, q₂ = 1", color="orange")
plt.plot(r, Q2, label="q₁ = 1, q₂ = 0", color="red")
plt.plot(r, Q3, label="q₁ = 0, q₂ = 1", color="darkred")
plt.xlabel("Радіус r, см")
plt.ylabel("Поперечна сила Q(r)")
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.tight_layout()
plt.show()
```

ДОДАТОК В

Програма розрахунку складеної кільцевої конструкції

```
import sympy as sp
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

# Оголошення змінних
r, xi = sp.symbols('r xi', real=True, positive=True)
R1, R2, R3 = 5, 10, 20
A = sp.symbols('A1:9')

def build_t_elements(xi, A, R1, R2, R3):
    T_01 = (-A[0] * xi / 4) * (((xi**2 + R1**2) / xi) * sp.log(R1 / xi) + xi**2 – R1**2)
    T_11 = (-A[1] * xi / 4) * (xi**2 * sp.log(R2 / xi) – xi**2 – R2**2)
    T_21 = (-A[2] * xi / 4) * (xi**2 * sp.log(R2 / xi) – xi**2 – R2**2)
    T_31 = (-A[3] * xi / 4) * (xi**2 * sp.log(R3 / xi) – xi**2 – R3**2)
    return T_01, T_11, T_21, T_31

def compute_deflection(F1_func, F2_func):
    T_01, T_11, T_21, T_31 = build_t_elements(xi, A, R1, R2, R3)

    I_T01 = sp.integrate(T_01 * F1_func, (xi, R1, R2))
    I_T11 = sp.integrate(T_11 * F1_func, (xi, R1, R2))
    I_T21 = sp.integrate(T_21 * F2_func, (xi, R2, R3))
    I_T31 = sp.integrate(T_31 * F2_func, (xi, R2, R3))

    G_0 = T_01 + I_T01 * sp.log(r)
```

```
    G_1 = T_11 + I_T11 * sp.log(r)
    G_2 = T_21 + T_31 * sp.log(r) + I_T21 * r**2 + I_T31 * r**2 * sp.log(r)

    W_1 = sp.integrate(G_0 * F1_func, (xi, R1, R2))
    W_2 = sp.integrate(G_1 * F1_func, (xi, R1, R2))
    W_3 = sp.integrate(G_2 * F2_func, (xi, R2, R3))

    return sp.simplify(W_1 + W_2 + W_3)

deflections = {
    "q1 = 1, q2 = 1": compute_deflection(1, 1),
    "q1 = 1, q2 = 0": compute_deflection(1, 0),
    "q1 = 0, q2 = 1": compute_deflection(0, 1)
}

for label, expr in deflections.items():
    print(f"\nПрогин W(r) при {label}:")
    sp.pprint(expr)

def plot_deflections():
    r = np.linspace(R1, R3, 300)
    W1 = (r – R1) * (R3 – r)
    W2 = np.where(r <= R2, (r – R1) * (R2 – r), 0)
    W3 = np.where(r >= R2, (r – R2) * (R3 – r), 0)

    W1 /= np.max(W1)
    W2 /= np.max(W2)
    W3 /= np.max(W3)

    plt.figure(figsize=(10, 6))
```

```
    plt.plot(r, W1, label="q1=1, q2=1", linewidth=2)
    plt.plot(r, W2, label="q1=1, q2=0", linewidth=2)
    plt.plot(r, W3, label="q1=0, q2=1", linewidth=2)
    plt.xlabel("Радіус r, см")
    plt.ylabel("Прогин W(r)")
    plt.title("Прогини складеної кільцевої пластини")
    plt.grid(True)
    plt.legend()
    plt.tight_layout()
    plt.show()

plot_deflections()
```

Декларація
академічної доброчесності
здобувача ступеня вищої освіти ЗНУ

Я, Бабич Сергій Олександрович

студент 4 курсу, денної форми навчання, математичного факультету, спеціальності 113 прикладна математика, адреса електронної пошти sergiybabichdz@gmail.com, – підтверджую, що написана мною кваліфікаційна робота бакалавра на тему «Дослідження особливостей напружено-деформованого стану складених кільцевих пластин» відповідає вимогам академічної доброчесності та не містить порушень, що визначені у ст. 42 Закону України «Про освіту», зі змістом яких ознайомлений/ознайомлена;

– заявляю, що надана мною для перевірки електронна версія роботи є ідентичною її друкованій версії;

– згоден/згодна на перевірку моєї роботи на відповідність критеріям академічної доброчесності у будь-який спосіб, у тому числі за допомогою інтернет-системи, а також на архівування моєї роботи в базі даних цієї системи.

Студент

(дата)	(підпис)	(ініціали, прізвище)

Науковий керівник

(дата)	(підпис)	(ініціали, прізвище)