МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

П.Г. Стєганцева, М.О. Гречнєва, Є.В. Стєганцев

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНА ГЕОМЕТРІЯ МНОГОВИДІВ

Навчальний посібник
для здобувачів ступеня вищої освіти магістра
спеціальності «Математика»
освітньо-професійної програми «Математика»

Затверджено
вченою радою ЗНУ
Протокол № від

Запоріжжя
2025

УДК 514.76(075.8)
С79

Стєганцева П.Г., Гречнєва М.О., Стєганцев Є.В. Диференціальна геометрія многовидів : навчальний посібник для здобувачів ступеня вищої освіти магістра спеціальності «Математика» освітньо-професійної програми «Математика». Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2025. 103 с.

Навчальний посібник укладено відповідно до силабусу дисципліни циклу професійної спрямованності «Диференціальна геометрія многовидів», він містить матеріал, необхідний для розуміння й свідомого засвоєння основних ідей цієї дисципліни.

Посібник містить теоретичний матеріал для актуалізації опорних знань, засвоєння основних понять, теорем, конструкцій теорії многовидів. Викладення теоретичного матеріалу супроводжується достатньою кількістю прикладів з детальними та обґрунтованими поясненнями. Окремими розділами подано приклади розв’язання задач та задачі для самостійної роботи студентів. Вони можуть також бути використаними на практичних заняттях. Пропонуються питання для самоконтролю.

Видання призначене для здобувачів ступеня вищої освіти магістра спеціальності «Математика» освітньо-професійної програми «Математика». Воно може бути корисним для студентів інших напрямів підготовки, оскільки диференціальна геометрія многовидів широко використовується в різних розділах математики, зокрема її можна покласти в основу теорії інтегрування на многовидах.

Рецензент

І. В. Красікова, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри фундаментальної та прикладної математики

Відповідальний за випуск

І. В. Зіновєєв, кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри загальної математики

ЗМІСТ

ВСТУП 5
ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1. УЗАГАЛЬНЕННЯ ОСНОВНИХ ПОНЯТЬ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЇ ГЕОМЕТРІЇ НА БАГАТОВИМІРНІ ПРОСТОРИ 7
Тема 1. Множини, відображення, топологічні простори 7
Тема 2. Криві та поверхні простору E_n 11
Тема 3. Гладкі відображення областей евклідового простору. Регулярні координати в області евклідового простору. Локальні репери 16
ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2. ОСНОВИ ТЕНЗОРНОГО ЧИСЛЕННЯ 23
Тема 4. Тензори у векторному та точковому просторах 23
4.1 Взаємні базиси. Контрваріантні та коваріантні координати векторів 23
4.2. Означення тензора у векторному просторі. Тензорний закон перетворення 27
4.3 Означення тензора і тензорного поля у евклідовому просторі. Операції над тензорами та тензорними полями 30
4.4 Операції над тензорами і тензорними полями. Додавання тензорів, множення тензора на число, добуток тензорів. Перестановка індексів тензора. Згортка тензора. Піднімання та опускання індексів тензора 33
4.5 Диференціювання тензорних полів. Коваріантна похідна тензора 36
ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 3. ОСНОВИ ТЕОРІЇ ГЛАДКИХ МНОГОВИДІВ 42
Тема 5. Топологічні та гладкі многовиди 42
5.1. Означення й приклади топологічних многовидів. Функції переходу. Орієнтовні й неорієнтовні гладкі многовиди 42
5.2 Функції переходу. Означення та приклади гладких многовидів. Орієнтовні та неорієнтовні многовиди 44
5.3 Індуковані гладкі структури. Задання многовидів рівняннями 46
ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 4. ГЛАДКІ ВІДОБРАЖЕННЯ ГЛАДКИХ МНОГОВИДІВ 52
Тема 6. Основні поняття диференціальної топології 52
6.1 Дотичні вектори та дотичний простір гладкого многовиду 52
6.2 Означення та приклади гладких відображень гладких многовидів. Диференціал гладкого відображення гладких многовидів 54
6.3. Занурення та вкладення многовидів. Підмноговиди 59
Тема 7. Ріманова геометрія многовидів 61
7.1. Поняття ріманової метрики й ріманового многовиду. 61
7.2 Кривина ріманової метрики. Тензор Рімана, секційна кривина. Простори постійної секційної кривини 64
Тема 8. Грассманові многовиди 66
8.1 Грассманові многовиди евклідового простору 67
8.2 Лінійчатий та точковий грассмановий образ поверхні 74
8.3 Тензор кривини грассманового многовиду $G(2,4)$ 77
ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ 80
ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ 97

СПИСОК ПОЗНАЧЕНЬ..... 100
ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА 102
РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА 102
ІНФОРМАЦІЙНІ ДЖЕРЕЛА..... 102

ВСТУП

Курс «Диференціальна геометрія многовидів» є важливою частиною професійної підготовки за спеціальністю «Математика» освітньо-професійної програми «Математика». Курс базується на знаннях та навичках, отриманих під час вивчення курсів «Диференціальна геометрія і топологія», «Математичний аналіз», «Функціональний аналіз». Для якісного засвоєння курсу «Диференціальна геометрія многовидів» необхідні знання елементів теорії множин і відображень, аналітичної геометрії, лінійної алгебри.

Класична диференціальна геометрія досліджує локальні властивості геометричних об'єктів (кривих, поверхонь), глобальні властивості цих об'єктів з'являються в теорії многовидів.

Зміст курсу «Диференціальна геометрія многовидів» складають елементи тензорного аналізу, основи теорії гладких многовидів та рімановой геометрії. Тензори та тензорні поля широко застосовуються в різних математичних та фізичних дисциплінах, а також в механіці. Тензорний аналіз є апаратом рімановой геометрії.

Метод координат є одним з основних методів дослідження многовидів. Ідея застосування координат полягає у приписуванні кожній точці розглядуваної множини точок впорядкованого набору чисел так, що і навпаки – кожному такому набору відповідає єдина точка множини. Особливістю є те, що таку відповідність можна встановити різними способами, що приводить до поняття криволінійних координат. Використання координат дозволило значно розширити клас задач, серед яких лише невелика кількість розв'язується геометричними методами. Але при цьому треба враховувати, що в отриманому результаті відображається не лише досліджувана властивість, а й ті, які обумовлені вибором системи координат. Тому важливим є вміння відокремлювати ці властивості. Формування такого вміння є одним із завдань тензорного числення як складової частини курсу «Диференціальна геометрія многовидів».

Вважається, що виникнення поняття многовиду зумовили спроби побудови географічних карт земної поверхні, тобто необхідність відображення сферичної поверхні на площину. Неможливість такого відображення для всієї сферичної поверхні сприяла виникненню основних конструкцій теорії гладких многовидів.

Метою вивчення навчальної дисципліни «Диференціальна геометрія многовидів» є ознайомлення з основами тензорної алгебри та аналізу, а також систематичне введення в теорію гладких многовидів.

Основними **завданнями** вивчення дисципліни «Диференціальна геометрія многовидів» є:

- вивчення та застосування основних означень та теорем;
- вміння перевіряти наявність тензорного закону перетворення і використовувати його;
- засвоєння методів дослідження гладких многовидів;

- набуття навичок побудови гладкої структури на непорожніх підмножинах в двовимірному та тривимірному евклідових просторах;
- засвоєння алгоритму перевірки виконання умов вкладень та занурень для гладких відображень многовидів.

Згідно з вимогами освітньої-професійної програми здобувачі освіти мають досягти таких компетентностей та програмних результатів навчання.

Компетентності:

- Здатність вирішувати проблеми в професійній діяльності на основі абстрактного мислення, аналізу та синтезу;
- Здатність вчитися, здобувати нові знання та уміння;
- Здатність до пошуку, обробки та аналізу інформації з різних джерел, в тому числі іноземною мовою
- Здатність демонструвати теоретичні основи фундаментальних математичних дисциплін та застосовувати системний підхід під час проведення математичних досліджень та при розв’язанні конкретних прикладних задач
- Здатність формулювати та доводити математичні твердження, отримувати висновки, перевіряти правильність розв'язання задач та міркувань
- Здатність вибирати адекватний математичний апарат, використовувати відомі теоретичні поняття та факти для розв’язання конкретних дослідницьких задач, оцінювати обґрунтованість й ефективність використовуваних математичних підходів

Результати навчання:

- Розуміти фундаментальну математику на рівні, необхідному для досягнення інших вимог освітньої програми;
- Розв’язувати задачі придатними математичними методами, перевіряти умови виконання математичних тверджень, коректно переносити умови та твердження на нові класи об’єктів, знаходити й аналізувати відповідності між поставленою задачею й відомими моделями;
- Вміти застосовувати та інтегрувати знання зі споріднених математичних напрямів до розв'язання складних математичних проблем.
- Знати базові поняття та теореми, що стосуються гладких многовидів та відображень, основні поняття рімановоі та метричної геометрії. Уміти досліджувати гладкі многовиди та геометричні структури на них та використовувати їх у теоретичних та практичних задачах;
- Демонструвати здатність до самонавчання, уміти організовувати власну діяльність;
- Мати навички пошуку, оброблення та аналізу інформації із різних джерел, кваліфіковано відображати й презентувати результати професійної діяльності із застосуванням сучасних інформаційних технологій
- Вміти оформити результати дослідження у вигляді завершеної роботи, презентувати та захищати її зміст

Змістовий модуль 1. Узагальнення основних понять диференціальної геометрії на багатовимірні простори

Тема 1. Множини, відображення, топологічні простори



Ключові поняття: множина, бінарне відображення, композиція відображень, топологія, окіл точки, відкрита множина, гомеоморфізм

Поняття *множини, елемента множини, належності елемента множині* в математиці є основними. Множини бувають скінченими і нескінченими. Задати множину можна перерахуванням її елементів (у випадку невеликої кількості елементів) або за допомогою *характеристичної властивості елементів*. Наприклад, множина

$$M = \left\{x : x \in N \wedge x^2 + 3x + 2 = 0\right\}$$

складається з натуральних чисел, які є коренями заданого рівняння. Саме це рівняння і властивість бути натуральними числами є характеристичними властивостями елементів множини *M.* В цьому прикладі множина M є порожньою множиною $\varnothing$.

Якщо кожен елемент множини A належить і множині B, то множину A називають *підмножиною* множини B. Пишуть $A \subseteq B$.

Нехай A, B – деякі множини. Задамо за допомогою характеристичної властивості наступні множини:

$$A \cup B = \left\{x : x \in A \vee x \in B\right\},$$
$$A \cap B = \left\{x : x \in A \wedge x \in B\right\},$$
$$A \setminus B = \left\{x : x \in A \wedge x \notin B\right\}.$$

Ці множини називаються відповідно *об'єднанням множин* A, B, *перетином множин* A, B, *різницею множин* A, B.

Декартовим добутком $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ множин $A_1, A_2, ..., A_n$ називається множина

$$\left\{(a_1, a_2, ..., a_n) : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, ..., a_2 \in A_n\right\}.$$

Будь-яка підмножина декартового добутку двох множин A та B називається *відповідністю між* цими *множинами*, точніше, *відповідністю із множини* A *в множину* B. Відповідність між двома множинами зручно задавати у вигляді орієнтованого графа (рис.1.1). Наприклад

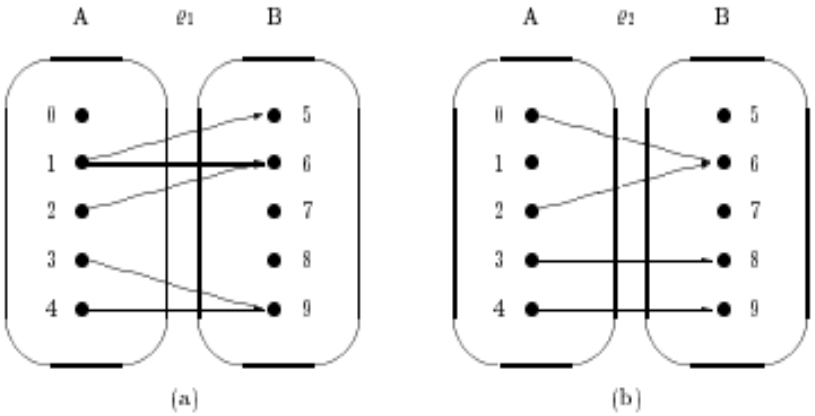


Рисунок 1.1 – Відповідності між множинами

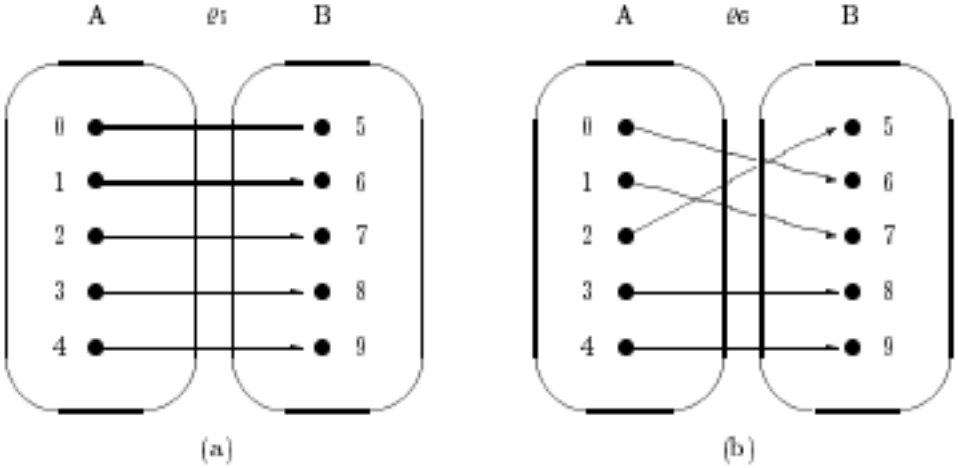


Рисунок 1.2 – Бієктивні відображення

Нехай задано таку відповідність між двома множинами A та B, що кожному елементу $x \in A$ відповідає не більше, ніж один елемент $y \in B$. Тоді говорять, що задано *відображення φ множини A у множину B* (або *функція*) і пишуть $\varphi : A \to B$. Елемент y називають *образом* елемента x, а елемент x – *прообразом* елемента y і пишуть $\varphi(x) = y$. Відображення φ множини A у множину B називають *ін'єктивним*, якщо для будь-яких елементів $x, y \in A$ з умови $x \neq y$ випливає $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.

Відображення $\varphi : A \to B$ називають *відображенням множини A на множину B* (або *сюр'єктивним відображенням*), якщо для кожного елемента $y \in B$ існує елемент $x \in A$ такий, що $\varphi(x) = y$, тобто для кожного елемента з множини B існує прообраз в множині A.

Означення 1.1. Відображення $\varphi : A \to B$ називають *взаємно однозначним відображенням* множини A *на множину* B (або *бієкцією*), якщо воно і сюр'єктивне, і ін'єктивне (рис.1.2).

Нехай задано два відображення: $\varphi : A \to B$ і $f : B \to C$. Розглянемо відповідність із множини A в множину C таку, що кожному елементу $a \in A$ відповідає $c = f(\varphi(a)) \in C$. Очевидно, що ця відповідність є відображенням,

його називають к*омпозицією* (або *суперпозицією*) *відображень* φ та f. Позначають $f \circ \varphi$.

Доволі часто розглядаються відображення $\varphi: A \to A$ непорожньої множини у себе. Зокрема, відображення $\varphi: A \to A$, при якому образом кожного елемента множини A є цей самий елемент, називається *тотожним відображенням множини A*.

Між множиною R дійсних чисел і множиною точок прямої існує взаємно однозначне відображення, яке дозволяє ввести координати точок на прямій.

Декартовий добуток $R \times R \times ... \times R$ n екземплярів множини R прийнято позначати символом R^n**.** Зазвичай прийнято вважати, що на множині елементів $(x_1, x_2, ..., x_n)$ з R^n введено структуру n-вимірного евклідового векторного простору, тобто елементи $(x_1, x_2, ..., x_n)$ називають векторами, визначені додавання векторів, множення вектора на число (у нашому випадку – на дійсне), а також скалярний добуток векторів наступними формулами:

$$(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n),$$
$$\alpha(x_1, x_2, ..., x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n),$$
$$(x_1, x_2, ..., x_n)(y_1, y_2, ..., y_n) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n.$$

Оскільки між множиною впорядкованих наборів $(x_1, x_2, ..., x_n)$ і множиною точок n-вимірного евклідового простору (його прийнято позначати символом E_n), як і у одновимірному випадку, існує взаємнооднозначне відображення, то елементи $(x_1, x_2, ..., x_n)$ з R^n будемо ще називати точками.

Топологічні простори

Означення 1.2. Нехай на непорожній множині T задано сім'ю τ її підмножин. Говорять, що ця сім'я утворює *топологію* на T, якщо виконуються наступні умови:

1) Порожня множина $\varnothing$ і сама множина T належать до τ.

2) Об'єднання будь-якого числа підмножин із τ знову належить до τ.

3) Перетин будь-якого скінченого числа підмножин із τ знову належить до τ.

Означення 1.3. Нехай на множині T задано топологію τ. Пару (T, τ) називають *топологічним простором*, елементи множини T – *точками* топологічного простору, а елементи сім'ї τ – *відкритими множинами*. Властивості 1), 2), 3) називають *аксіомами топологічного простору*.

Приклади:

1) Дискретний топологічний простір.

На будь-якій непорожній множині T розглянемо сім'ю τ, що складається з усіх підмножин множини T. Всі аксіоми топологічного простору виконуються.

2) Метричний топологічний простір.

На будь-якій непорожній множині M задамо метрику $\rho(x,y)$ і до сім'ї τ включимо всі відкриті відносно цієї метрики множини, а також порожню множину $\varnothing$. Всі аксіоми топологічного простору виконуються завдяки властивостям відкритих множин метричного простору. Найпростішими відкритими множинами метричного простору є відкриті кулі, які за означенням є множинами

$$B_r(x_0)=\{x\in M:\rho(x,x_0)<r\},$$

де r – радіус кулі, x_0 – центр кулі.

Зокрема, при $M=R^n$, $\rho=|x-y|$, де $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, $y=(y_1,y_2,...,y_n)$, а модуль вектора дорівнює квадратному кореню із його скалярного квадрату, будемо мати метричний топологічний простір, який називають *евклідовим топологічним простором*, а топологію в ньому прийнято називати *природною.*

Означення 1.4 *Околом точки* x топологічного простору (T,τ) називають будь-яку відкриту множину U_x, яка містить цю точку, тобто за означенням

U_x – окіл точки x, якщо $x\in U_x$ і $U_x\in\tau$.

У випадку метричної топології околом точки називають відкриту кулю з центром в цій точці.

Означення 1.5 Нехай (T,τ) – топологічний простір, $A\subset T$. Точка $x\in A$ називається *внутрішньою точкою множини A*, якщо існує такий її окіл U_x, для якого виконується включення $U_x\subset A$.

Іноді зручно користуватись наступним означенням відкритої множини: *множина* топологічного простору називається *відкритою*, якщо кожна її точка є внутрішньою.

Теорема 1.1. Нехай (T,τ) – топологічний простір і $A\subset T$**.** Перетин $U\bigcap A$, де $U\in\tau$, називають *слідом множини U на множині A*. Сукупність τ_A слідів усіх відкритих множин топологічного простору утворює топологію на множині A, яку називають *індукованою топологією*, а пару (A,τ_A) називають *топологічним підпростором* простору (T,τ).

Приклади:

1) На множині R дійсних чисел розглянемо природну топологію τ. Ця топологія індукує на підмножині N натуральних чисел дискретну топологію.

2) Природна топологія τ на R індукує на множині $Q\subset R$ топологію τ_Q, яка складається з множин виду $Q\bigcap U$, де $U\in\tau$.

Означення 1.6. *Топологічний простір* називається *хаусдорфовим*, якщо для будь-яких двох різних точок цього простору існують околи, перетин яких є порожньою множиною.

Приклади:

1) Топологічний простір (R,τ), де τ – природна топологія, є хаусдорфовим.

2) Будь-який дискретний топологічний простір (T,τ) при умові $|T|>1$ є хаусдорфовим.

Означення 1.7. *Топологічний простір* називається *зв'язним*, якщо його не можна представити у вигляді об'єднання двох непорожніх відкритих множин U та V таких, що $U\bigcap V=\varnothing$. В противному випадку топологічний простів називається *незв'язним*.

Приклади:

1) Топологічний простір (R,τ), де τ – природна топологія, є зв'язним.

2) Будь-який дискретний топологічний простір (T,τ) при умові $|T|>1$ є незв'язним.

Означення 1.8. *Відображення* f топологічного простору (T,τ) в топологічний простір (T',τ') називається *неперервним у точці* $x\in T$, якщо для будь-якого околу $U_{f(x)}$ її образа $f(x)\in T'$ існує такий окіл U_x точки x, що виконується включення $f(U_x)\subseteq U_{f(x)}$. Якщо відображення f неперервне в кожній точці $x\in T$, то воно називається *неперервним*.

Теорема (критерій неперервності). Відображення топологічного простору (T,τ) в топологічний простір (T',τ') є неперервним тоді і тільки тоді, коли прообраз будь-якої множини $V\in\tau'$ є множиною $U\in\tau$.

Означення. *Гомеоморфним відображенням* або *гомеоморфізмом топологічних просторів* (T,τ) і (T',τ') називається бієктивне неперервне відображення, обернене до якого теж є неперервним.

Тема 2. Криві та поверхні простору E_n



Ключові поняття: параметризована крива, гладка крива, базис Френе, кривини кривої, поверхня, дотичний простір, ізометрія

Нехай I - одна з множин (a,b), $[a,b]$, $[a,b)$, $(a,b]$,$[a,\infty)$, $(-\infty,a)$ або R.

Означення 2.1 *Параметризованою кривою* у просторі E_n називається неперервне відображення $\gamma: I\to E_n$ **,** при якому кожному значенню $t\in I$ відповідає деяка точка простору E_n. Змінна t називається *параметром* кривої. Образ $\gamma(I)$ множини I при відображенні γ називається *носієм кривої*.

Задавши у просторі E_n декартовий репер, отримаємо параметричні рівняння кривої γ у вигляді $x^i=x^i(t), i=\overline{1,n}$, де x^i - декартові координати. Параметричні рівняння кривої іноді зручно називати *параметризацією* кривої.

Вектор $\gamma'(t)=\left(\frac{dx^1}{dt},\frac{dx^2}{dt},...,\frac{dx^n}{dt}\right)$, якщо він визначений, називається *вектором швидкості кривої* $\gamma(t)$.

Означення 2.2. Параметризована крива називається C^k-гладк*ою кривою*, якщо всі функції $x^i=x^i(t)$ є C^k-гладкими. C^1-гладка *крива* називається *регулярною*, якщо при будь-якому значенні $t\in I$ вектор $\gamma'(t)$ швидкості кривої ненульовий.

За означенням, довжиною регулярної кривої $\gamma:[a,b]\to E_n$ будемо вважати число $l(\gamma)=\int\limits_a^b|\gamma'(t)|dt$.

Нехай $\gamma:I\to E_n$ – регулярна крива, де $I\subset R$ – відкритий інтервал, $t_0\in I$. Для всіх $t\geq t_0$ розглянемо відображення $s:I\to R$, яке задається функцією $s(t)=\int\limits_{t_0}^t|\gamma'(t)|dt$. Ця функція є неперервною і монотонною, а тому має обернену. Цей факт дає можливість перейти до нової параметризації кривої γ – за допомогою параметру s. Цей *параметр* називається *натуральним*, а параметризація кривої – *натуральною параметризацією*.

Для квадрату диференціала довжини кривої отримаємо

$$(ds)^2=(dx^1)^2+(dx^2)^2+...+(dx^n)^2. \qquad (2.1)$$

Нехай для C^k-гладкої кривої $\gamma(t)$ в кожній її точці вектори $\gamma'(t)$, $\gamma''(t)$, …, $\gamma^{(n-1)}(t)$ ($k\geq n-1$) лінійно незалежні, тобто крива не міститься в жодній гіперплощині простору E_n, яка є нерухомою при зміні параметру t. Застосуємо до них процес ортогоналізації, а потім нормуємо отримані вектори і позначимо їх $\bar{n}_1,\bar{n}_2,...,\bar{n}_{n-1}$. Доповнимо отриманий в кожній точці набір вектором $\bar{n}_n$ до правого ортонормованого базису. За аналогією з випадком кривої у просторі E_3 цей базис називають *базисом Френе кривої*.

Для натуральної параметризації кривої формули для похідних від векторів базису Френе по натуральному параметру мають вигляд

$$\frac{d\bar{n}_1}{ds}=k_1\bar{n}_2,$$

$$\frac{d\bar{n}_2}{ds}=-k_1\bar{n}_1+k_2\bar{n}_3,$$

…….

$$\frac{d\bar{n}_i}{ds} = -k_{i-1}\bar{n}_{i-1} + k_i\bar{n}_{i+1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d\bar{n}_n}{ds} = -k_{n-1}\bar{n}_{n-1},$$

де $k_1, k_2, ..., k_{n-1}$ є скалярними функціями від s і називаються *першою*, *другою* і т.д. *кривинами кривої*. Самі формули називаються *формулами Френе.* Зауважимо, що вони є узагальненням формул Френе кривої тривимірного простору, для якої k_1 ми називали кривиною, а k_2 – скрутом.

Поверхні у просторі E_n

Означення 2.3. Нехай U – деяка зв'язна відкрита підмножина простору R^m з декартовими координатами $u^1, u^2, ..., u^m$. *Параметризованою m-вимірною поверхнею* у просторі E_n , $n > m$, називається неперервне відображення $r : U \to E_n$, при якому кожному набору $(u^1, u^2, ..., u^m) \in U$ відповідає точка простору E_n . Координати $u^1, u^2, ..., u^m$ називаються *параметрами поверхні*. Образ області U називається *образом* або *носієм поверхні*.

Відносно декартового репера в просторі E_n отримаємо параметричні рівняння поверхні $r(u^1, u^2, ..., u^m)$ у вигляді

$$x^i = x^i(u^1, u^2, ..., u^m), \; i = \overline{1, n}.$$

Означення 2.4. Параметризована поверхня називається C^k *-гладкою поверхнею*, якщо всі функції $x^i = x^i(u^1, u^2, ..., u^m)$ є C^k -гладкими. Для C^1 -гладкої поверхні визначені вектори $r_{u^k} = (x^1_{u^k}, x^2_{u^k}, ..., x^m_{u^k})$. C^1-гладка *поверхня* називається *регулярною*, якщо при будь-якому наборі $(u^1, u^2, ..., u^m) \in U$ вектори r_{u^k} лінійно незалежні.

Умова лінійної незалежності векторів r_{u^k} рівносильна умові, що в усіх точках області U ранг матриці $\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^j}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^2}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial u^1} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \frac{\partial x^1}{\partial u^m} & \frac{\partial x^2}{\partial u^m} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial u^m} \end{pmatrix}$ Якобі дорівнює m, тобто є максимальним.

У випадку $m = n - 1$ поверхню називають *гіперповерхнею* простору E_n.

Нехай регулярна поверхня задана рівняннями $x^i = x^i\left(u^1, u^2, ..., u^m\right), i = \overline{1,n}$. Задамо в області U регулярну криву рівняннями $u^i = u^i(t), i = \overline{1,m}$. Цій кривій на даній поверхні відповідає крива, рівняння якої мають вигляд $x^i(t) = x^i\left(u^1(t), u^2(t), ..., u^m(t)\right), i = \overline{1,n}$ і яку називають *кривою на поверхні*. Рівняння $u^i = u^i(t), i = \overline{1,m}$ називають *внутрішніми рівняннями кривої на поверхні.* При заданих умовах крива на поверхні теж є регулярною, що випливає з правила диференціювання складеної функції.

В частинному випадку, крива на поверхні з внутрішніми рівняннями $u^1 = const$, …, $u^{k-1} = const, u^k = t, u^{k+1} = const$, …, $u^m = const$ називається k - *тою координатною лінією.* Вектор швидкості k - тої координатної лінії позначимо символом ∂_{u^k}, він має вигляд $\partial_{u^k} = \left(\frac{\partial x^1}{\partial u^k}, \frac{\partial x^2}{\partial u^k}, ..., \frac{\partial x^n}{\partial u^k}\right)$. Бачимо, що $\partial_{u^k} = r_{u^k}$. Ці рівності розкривають геометричний зміст векторів r_{u^k}.

Зауваження. Носії кривої та поверхні також зручно називати відповідно кривою та поверхнею. Саме такий підхід використовується, наприклад, в аналітичній геометрії, коли мова йде про криві другого порядку і поверхні другого порядку. В подальшому ми будемо використовувати терміни крива і поверхня в обох зазначених сенсах (як відображення і як геометричне місце точок в просторі E_n). Із контексту завжди буде зрозуміло, про що йде мова.

Означення 2.5. Нехай γ – регулярна крива на регулярній поверхні Ω і $P \in \Omega$. Нехай виконується умова $P = \gamma(t_0)$, тобто крива проходить через точку P. Вектор $\gamma'(t_0)$ швидкості кривої в точці P називається *дотичним вектором до поверхні в* цій *точці*. Сукупність дотичних векторів в точці P до всіх регулярних кривих поверхні, які проходять через цю точку, називається *дотичним простором до поверхні в точці* P і позначається $T_P\Omega$.

Теорема 2.1. Нехай $\Omega \subset E_n$ – регулярна m -вимірна поверхня і P – фіксована точка на ній. Тоді дотичний простір $T_P\Omega$ є векторним простором розмірності m, однин з базисів якого утворений векторами швидкостей координатних ліній, які проходять через точку P.

Нехай $x^i = x^i\left(u^1, u^2, ..., u^m\right), i = \overline{1,n}$ – параметричні рівняння регулярної m -*вимірно*ї поверхні Ω, $T_P\Omega$ – дотичній простір в її точці P і $\left(\partial_{u^i}\right), i = \overline{1,m}$ – базис в ньому. Вектори дотичного простору є водночас векторами евклідового простору, в якому введено скалярний добуток векторів. Розглянемо розклади двох дотичних векторів за базисом дотичного простору:

$$\xi = \xi^1\partial_{u^1} + \xi^2\partial_{u^2} + ... + \xi^m\partial_{u^m},\ \eta = \eta^1\partial_{u^1} + \eta^2\partial_{u^2} + ... + \eta^m\partial_{u^m}.$$

Домовленість про підсумовування. За пропозицією Ейнштейна при перетворенні виразів з індексами користуються наступним *правилом підсумовування:* якщо у виразі зустрічаються однакові верхні та нижні індекси, то за всіма такими індексами проводиться підсумовування і при цьому знак суми не ставиться.

За цим правилом наведені розклади дотичних векторів можна записати у вигляді $\xi = \xi^i \partial_{u^i}$, $\eta = \eta^i \partial_{u^i}$, а їх скалярний добуток має вигляд

$$(\xi, \eta) = \left(\xi^i \partial_{u^i}, \eta^j \partial_{u^j}\right) = \xi^i \eta^j \left(\partial_{u^i}, \partial_{u^j}\right).$$

Прийнято використовувати позначення $\left(\partial_{u^i}, \partial_{u^j}\right) = g_{ij}$. У фіксованій точці P це числа, а на всій поверхні – гладкі функції

$$g_{ij}\left(u^1, u^2, ..., u^m\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x^k}{\partial u^i} \frac{\partial x^k}{\partial u^j}, \tag{2.2}$$

які називаються *компонентами метрики*, що *індукована* на поверхні метрикою простору E_n. Ці функції зручно записувати у вигляді квадратної матриці порядку m. Її називають *матрицею першої квадратичної форми поверхні.* Як матриця Грама лінійно незалежних векторів, вона невироджена, симетрична і додатно визначена.

За допомогою першої квадратичної форми можна знайти:

– довжину регулярної кривої γ, яка лежить на поверхні і має внутрішні рівняння $u^i = u^i(t), i = \overline{1,m}$, за формулою $l(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{g_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt}} dt$,

– кут між регулярними кривими γ_1 і γ_2 в точці P їх перетину за формулою $\cos\varphi = \frac{g_{ij}(P) du_1^i du_2^j}{\sqrt{g_{ij}(P) du_1^i du_1^j} \sqrt{g_{ij}(P) du_2^i du_2^j}}$, де $u_1^i = u_1^i(t), i = \overline{1,m}$ – внутрішні рівняння кривої γ_1, а $u_2^i = u_2^i(t), i = \overline{1,m}$ – внутрішні рівняння кривої γ_2.

Означення 2.6 Нехай Ω і Θ – дві регулярні m-вимірні поверхні у просторі E_n. Якщо при точковому відображенні $f : \Omega \to \Theta$ всі пари відповідних кривих цих поверхонь мають однакові довжини, то відображення називається *ізометрією*, а самі поверхні (якщо таке відображення існує) називаються *ізометричними.*

Тема 3. Гладкі відображення областей евклідового простору. Регулярні координати в області евклідового простору. Локальні репери



Ключові поняття: C^k-гладке відображення, регулярна точка відображення, матриця відображення, C^k -дифеоморфізм, регулярні координати, локальний репер

Означення 3.1 *Областю* у евклідовому просторі називається будь-яка його зв'язна відкрита множина.

Нехай у просторі E_m задано область U, у просторі E_n – область V, а також відображення $F:U\to V$. Відображення F можна задати впорядкованим набором n функцій

$$\begin{aligned} y^1 &= f^1\left(x^1,...,x^m\right),\\ y^2 &= f^2\left(x^1,...,x^m\right),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ y^n &= f^n\left(x^1,...,x^m\right). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Означення 3.2 Відображення $F:U\to V$ називається C^k *-гладким* в області U, якщо кожна з функцій (3.1) має в цій області неперервні частинні похідні до порядку k включно. Матриця виду

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \frac{\partial f^2}{\partial x^1}\cdots & \frac{\partial f^n}{\partial x^1}\\ \frac{\partial f^1}{\partial x^2} & \frac{\partial f^2}{\partial x^2}\cdots & \frac{\partial f^n}{\partial x^2}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial f^1}{\partial x^m} & \frac{\partial f^2}{\partial x^m}\cdots & \frac{\partial f^n}{\partial x^m} \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

називається *матрицею Якобі відображення* F і позначається $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$.

Означення 3.3 Нехай $F:U\to V$ є C^k-гладким відображенням областей евклідових просторів E_m та E_n. *Рангом відображення* F *в точці* $x_0\in U$ називається ранг матриці Якобі цього відображення в точці x_0. Точка $x_0\in U$ називається *регулярною* (*неособливою*) *точкою відображення* F, якщо в ній ранг відображення максимальний, тобто якщо $rang_{x_0}F=\min\{m,n\}$.

Приклад. Задамо відображення $F: E_2 \to E_3$, координатне представлення якого має вигляд $\begin{cases} F_1(u,v) = u, \\ F_2(u,v) = v, \\ F_3(u,v) = u^2 + v^2. \end{cases}$

Матриця Якобі відображення наступна $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 2v \end{pmatrix}$, а її ранг дорівнює 2, тобто є максимальним в будь-якій точці з E_2. Це означає, що всі точки відображення регулярні. Цей факт відомий з диференціальної геометрії, оскільки це відображення задає еліптичний параболоїд $z = x^2 + y^2$, а функції $\begin{cases} F_1(u,v) = u, \\ F_2(u,v) = v, \\ F_3(u,v) = u^2 + v^2 \end{cases}$ дають одне із параметричних представлень цієї поверхні, яке в диференціальній геометрії ми записували у вигляді $F(u,v) = \left(u, v, u^2 + v^2\right)$.

Зауваження. Згідно з означенням, в регулярній точці визначник матриці Якобі відмінний від нуля, а оскільки частинні похідні неперервні, то ця властивість визначника зберігається в деякому околі регулярної точки. Отже, кожна регулярна точка є внутрішньою точкою множини всіх регулярних точок. Це забезпечує відкритість цієї множини.

Розглянемо частинний випадок відображення областей одного евклідового простору E_n.

Означення 3.4 Взаємнооднозначне відображення $F: U \to V$ областей простору E_n називається *гомеоморфізмом*, якщо і F, і F^{-1} неперервні. Взаємнооднозначне відображення $F: U \to V$ відкритих множин простору E_n називається C^k*-дифеоморфізмом*, якщо і F, і F^{-1} є C^k-гладкими.

Теорема 3.1. Взаємнооднозначне відображення $F: U \to V$ областей простору E_n є C^k*-дифеоморфізмом*, якщо F є C^k-гладким і якобіан цього відображення відмінний від нуля в кожній точці з U [8].

Означення 3.5 Нехай X – деяка область в E_n і $(O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n)$ – репер в X. Тоді кожній точці M цієї області ставиться у взаємно однозначну відповідність набір $\left(x^1, x^2, ..., x^n\right)$ координат, які будемо називати прямолінійними (стандартними). Нехай Y – інша область в E_n з прямолінійними координатами $\left(y^1, y^2, ..., y^n\right)$. Говорять, що в області X задано криволінійну систему координат, якщо задано гомеоморфізм $\varphi: X \to Y$.

Оскільки вказаний гомеоморфізм задається системою n функцій

$$\begin{aligned} x^1 &= x^1\left(y^1, y^2, ..., y^n\right), \\ x^2 &= x^2\left(y^1, y^2, ..., y^n\right), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x^n &= x^n\left(y^1, y^2, ..., y^n\right), \end{aligned} \tag{3.3}$$

то ці функції повинні бути бієкціями, неперервними на X, а також обернені до них функції

$$\begin{aligned} y^1 &= y^1\left(x^1, x^2, ..., x^n\right), \\ y^2 &= y^2\left(x^1, x^2, ..., x^n\right), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^n &= y^n\left(x^1, x^2, ..., x^n\right), \end{aligned} \tag{3.4}$$

повинні бути неперервними.

Набір чисел $\left(y^1(M), y^2(M), ..., y^n(M)\right)$ для будь-якої точки $M \in X$ називається її *криволінійними координатами.*.

Означення 3.6 Якщо гомеоморфізм $\varphi: X \to Y$ є C^k-дифеоморфізмом, тобто функції $x^i = x^i\left(y^1, y^2, ..., y^n\right), i = \overline{1,n}$ і обернені до них функції $y^i = y^i\left(x^1, x^2, ..., x^n\right), i = \overline{1,n}$ є C^k-гладкими, то криволінійні координати $y^i, i = \overline{1,n}$ називаються *регулярними*.

Для регулярної системи координат в області X матриця Якобі

$$J_{X \to Y} = \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial y^1} & \frac{\partial x^2}{\partial y^1} \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial y^1} \\ \frac{\partial x^1}{\partial y^2} & \frac{\partial x^2}{\partial y^2} \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial y^2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x^1}{\partial y^n} & \frac{\partial x^2}{\partial y^n} \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial y^n} \end{pmatrix}$$

є невиродженою в кожній точці цієї області.

Очевидно, що коли координати $y^i, i = \overline{1,n}$, задані системою функцій (3.3), регулярні, то координати $x^i, i = \overline{1,n}$, задані системою обернених функцій (3.4), також регулярні. Звідси випливає, що прямолінійні, зокрема, декартові координати також регулярні і їх можна вважати прикладом криволінійних координат.

Далі, якщо в області X задані дві регулярні системи координат y^i і z^i, то визначена *заміна координат* $\left(y^1, y^2, ..., y^n\right)$ координатами $\left(z^1, z^2, ..., z^n\right)$, яка задається функціями

$$y^1 = y^1\left(z^1, z^2, ..., z^n\right),$$
$$y^2 = y^2\left(z^1, z^2, ..., z^n\right),$$
$$\text{.....}$$
$$y^n = y^n\left(z^1, z^2, ..., z^n\right).$$

Криволінійні координати z^i по відношенню до криволінійних координат y^i є також регулярними.

Приклад.

1) Нехай (x, y) – декартові координати на площині E_2 і в області $Y = E_2 \setminus \{(x,0): x \geq 0\}$ задано координати (r, φ) за допомогою функцій $\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \end{cases}$ де $r > 0$, $0 < \varphi < 2\pi$. Очевидно, задані функції є C^k-гладкими і матриця Якобі $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$ в кожній точці смуги, яка визначається нерівностями $r > 0$, $0 < \varphi < 2\pi$, відмінний від нуля. Отже, координати (r, φ) є регулярними. Їх називають *полярними координатами*.

2) Нехай (x, y, z) – декартові координати в просторі E_3 і в області Y цього простору, яка задається нерівностями $r > 0$, $0 < \varphi < 2\pi$, $-\infty < z < \infty$ задано координати (r, φ, z) за допомогою функцій $\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$ Ці функції задають регулярну систему координат в області Y, яка називається *циліндричною.*

3) Нехай (x, y, z) – декартові координати в просторі E_3 і функції

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\cos\varphi, \\ y = r\cos\theta\sin\varphi, \\ z = r\sin\theta, \end{cases}$$

де $r > 0$, $0 < \varphi < 2\pi$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ задають перехід від декартових координат до координат (r, θ, φ). Так само легко переконатись в регулярності координат (r, θ, φ) в зазначеній області. Їх називають *сферичними координатами.*

Нехай в області X простору E_n задано репер $(O,\bar{e}_1,\bar{e}_2,,...,\bar{e}_n)$. Для скалярних добутків векторів базису цього репера прийняте позначення

$$g_{ij}=(\bar{e}_i,\bar{e}_j).$$

В частинному випадку, коли репер ортонормований, отримаємо $g_{ij}=\delta_{ij}$.

Нехай тепер в області X простору E_n задані прямолінійна $(x^1,x^2,...,x^n)$ та регулярна $(y^1,y^2,...,y^n)$ системи координат, зв'язок між якими здійснюється системами функцій (3.3) і (3.4). Тоді для радіус-вектора $\bar{r}$ кожної точки M цієї області маємо $\bar{r}=x^i\bar{e}_i=x^i(y^j)\bar{e}_i$. Знайдемо $\dfrac{\partial\bar{r}}{\partial y^k}=\dfrac{\partial x^1}{\partial y^k}\bar{e}_1+\dfrac{\partial x^2}{\partial y^k}\bar{e}_2+...+\dfrac{\partial x^n}{\partial y^k}\bar{e}_n$. Вектори $\dfrac{\partial\bar{r}}{\partial y^1},\dfrac{\partial\bar{r}}{\partial y^2},...,\dfrac{\partial\bar{r}}{\partial y^n}$ утворюють лінійно незалежну систему, оскільки матриця, складена з координат цих векторів в базисі $\bar{e}_1,\bar{e}_2,...,\bar{e}_n$, є матрицею Якобі регулярної системи координат, тому невироджена.

Введемо позначення $\dfrac{\partial\bar{r}}{\partial x^k}=\bar{r}_k$. Таким чином, якщо в області X простору E_n задано регулярну систему координат $(x^1,x^2,...,x^n)$, то в кожній точці M цієї області виникає репер $(M,\bar{r}_1,\bar{r}_2,...,\bar{r}_n)$, який називають *локальним репером*. Скалярні добутки векторів локальних реперів в області X вже не будуть константами, а будуть залежними від координат точок M:

$$g_{ij}(M)=(\bar{r}_i(M),\bar{r}_j(M)).$$

Відносно регулярних координат $(y^1,y^2,...,y^n)$, які пов'язані з координатами $(x^1,x^2,...,x^n)$ формулами (2.19), отримаємо

$$'g_{ij}=\left(\frac{\partial\bar{r}}{\partial y^i},\frac{\partial\bar{r}}{\partial y^j}\right)=\left(\frac{\partial\bar{r}}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial y^i},\frac{\partial\bar{r}}{\partial x^l}\frac{\partial x^l}{\partial y^j}\right)=\frac{\partial x^k}{\partial y^i}\frac{\partial x^l}{\partial y^j}\left(\frac{\partial\bar{r}}{\partial x^k},\frac{\partial\bar{r}}{\partial x^l}\right)=\frac{\partial x^k}{\partial y^i}\frac{\partial x^l}{\partial y^j}g_{kl}.$$

В матричному вигляді ця формула набуває вигляду

$$'G=IGI^t,$$

де I – матриця Якобі відображення, яке задає заміну регулярних координат. Якщо ми здійснюємо заміну декартових координат регулярними, то $G=E$.

У випадку полярної системи координат $I=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi\end{pmatrix}$. Тому

$$'g_{ij}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & r^2\end{pmatrix}.$$

Відносно циліндричної системи координат $I=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Отже,

$$'g_{ij}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & r^2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Відносно сферичної системи координат $'g_{ij}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & r^2\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & r^2\end{pmatrix}$.

? Питання для самоконтролю за змістовим модулем 1:

1. Які умови для підмножин заданої множини повинні виконуватись, щоб їх сукупність задавала топологічну структуру на заданій множині?
2. Наведіть такі приклади відкритих множин відносно природної топології в R^1, в R^2, в R^3, щоб вони складались з двох зв'язних компонент.
3. Яке відображення називають гомеоморфізмом топологічних просторів?
4. Наведіть приклад неперервного відображення топологічних просторів.
5. Які координати в області евклідового простору називають регулярними координатами?
6. Наведіть приклади регулярних систем координат в області евклідового простору.
7. Яка з наведених функцій $f:R\to R$ є функцією класу C^0, але не є функцією класу C^1?

А) $f(x)=\frac{1}{3}x^3$, **Б)** $f(x)=2^x$, **В)** $f(x)=\sqrt[3]{x}$, **Г)** $f(x)=\cos x$

8. Яке з наведених відображень є композицією відображень $f:x\to x^3$ та $g:x\to 2\sqrt{x}$?

А) $f\circ g:x\to 8x\sqrt{x}$, **Б)** $f\circ g:x\to 2x\sqrt{x}$, **В),** $f\circ g:x\to 2x^3\sqrt{x}$, **Г)** жодне.

9. В якій з наведених точок якобіан відображення f, заданого системою функцій $\begin{cases} y^1 = 2x^1x^2, \\ y^2 = \left(x^1\right)^2 - \frac{1}{2}\left(x^2\right)^2, \end{cases}$ дорівнює нулю?

А) (1,1), **Б)** (2,0), **В)** (0,1), **Г)** в жодній із вказаних.

10. Дано множину $M = \left\{(x,y) \in R^2 : x^2 - y^2 = 1\right\}$ й підмножини $U_1 = \{(x,y) \in M : y > 1\}$, $U_2 = \left\{(x,y) \in M : x < \sqrt{2}\right\}$, $U_3 = \left\{(x,y) \in M : x < \sqrt{3}\right\}$, $U_4 = \{(x,y) \in M : y < 0\}$. Якою з наведених пар підмножин покривається множина M?

А) U_1 та U_2, **Б)** U_1 та U_3, **В)** U_4 та U_2, **Г)** U_3 та U_4.

11. В якому з наведених відображень образом множини R є множина $U = (-1,1)$?

А) $f(x) = \frac{2}{\pi} tgx$, **Б)** $f(x) = \frac{2}{\pi} arctgx$, **В)** $f(x) = \frac{2}{\pi} arcctgx$

Змістовий модуль 2. Основи тензорного числення

Тема 4. Тензори у векторному та точковому просторах



Ключові поняття: визначник Грама, вектор, ковектор, тензор, ранг тензора, тензорний закон перетворення, метричний тензор, операції над тензорами, тензорне поле, зв'язність, коваріантна похідна

4.1 Взаємні базиси. Контрваріантні та коваріантні координати векторів

Означення 4.1 Нехай у n-вимірному евклідовому векторному просторі V_n задано систему векторів $\bar{e}_1,\bar{e}_2,...,\bar{e}_n$. Позначимо $(\bar{e}_i,\bar{e}_j)=g_{ij}$. Визначник

$$\Delta=\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix}$$ називається *визначником Грама* даної системи векторів.

В лінійній алгебрі доводиться

Теорема 4.1 Для того, щоб система ненульових векторів $\bar{e}_1,\bar{e}_2,...,\bar{e}_n$ була лінійно залежною необхідно і достатньо, щоб її визначник Грама був рівним нулю.

З цієї теореми випливає, що коли визначник Грама системи векторів не дорівнює нулю, то система лінійно незалежна.

Означення 4.2 Нехай у n-вимірному евклідовому векторному просторі V_n задано базис $\bar{e}_1,\bar{e}_2,...,\bar{e}_n$. Система векторів $\bar{e}^1,\bar{e}^2,...,\bar{e}^n$ називається *взаємним базисом* по відношенню до базису $\bar{e}_1,\bar{e}_2,...,\bar{e}_n$, якщо $\left(\bar{e}_i,\bar{e}^{\,j}\right)=\delta_i^j=\begin{cases}1\ при\ i=j,\\ 0\ при\ i\neq j.\end{cases}$

Теорема 4.2 Для кожного базису $\bar{e}_1,\bar{e}_2,...,\bar{e}_n$ існує єдиний взаємний базис $\bar{e}^1,\bar{e}^2,...,\bar{e}^n$.

Доведення. Введемо позначення $\bar{e}^{\,j}=\left(x_1^j,x_2^j,...,x_n^j\right)$ для координат j-того вектора взаємного базису відносно даного базису $\bar{e}_1,\bar{e}_2,...,\bar{e}_n$, тобто маємо векторну рівність $\bar{e}^{\,j}=x_1^j\bar{e}_1+x_2^j\bar{e}_2+...+x_n^j\bar{e}_n$. Домножимо її скалярно на вектори $\bar{e}_i, i=\overline{1,n}$. При кожному фіксованому j маємо неоднорідну лінійну систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1^j g_{11} + x_2^j g_{12} + ... + x_n^j g_{1n} = \delta_1^j, \\ x_1^j g_{21} + x_2^j g_{22} + ... + x_n^j g_{2n} = \delta_2^j, \\ ..... \\ x_1^j g_{n1} + x_2^j g_{n2} + ... + x_n^j g_{nn} = \delta_n^j. \end{cases}$$

Оскільки визначник цієї системи є визначником Грама базисних векторів, тобто відмінний від нуля, то вона має єдиний ненульовий розв'язок. Залишилось довести лінійну незалежність отриманої системи векторів. Припустимо, що вона лінійно залежна, тобто існує нульова нетривіальна лінійна комбінація векторів системи:

$$\alpha_1 \bar{e}^1 + \alpha_2 \bar{e}^2 + ... + \alpha_n \bar{e}^n = \bar{0}.$$

Помноживши послідовно цю рівність скалярно на вектори $\bar{e}_i, i = \overline{1,n}$, отримаємо відповідно $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, ..., \alpha_n = 0$, тобто будь-яка нульова лінійна комбінація векторів $\bar{e}^1, \bar{e}^2, ..., \bar{e}^n$ є тривіальною, звідки випливає їх лінійна незалежність. **Теорема доведена.**

Зауваження. Оскільки скалярне множення векторів комутативне, то оберненим до базису $\bar{e}^1, \bar{e}^2, ..., \bar{e}^n$ буде вихідний базис $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n$.

Означення 4.3 Нехай у n-вимірному евклідовому векторному просторі V_n задано базис $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n$. Для будь-якого вектора $\bar{x} \in V_n$ маємо розклад $\bar{x} = x^1 \bar{e}_1 + x^2 \bar{e}_2 + ... + x^n \bar{e}_n$ або, згідно домовленості про підсумовування,

$$\bar{x} = x^i \bar{e}_i. \tag{4.1}$$

Координати $\left(x^i\right), i = \overline{1,n}$ називаються *контрваріантними координатами* вектора $\bar{x}$.

Означення 4.4 Нехай базис $\bar{e}^1, \bar{e}^2, ..., \bar{e}^n$ є взаємним до базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n$ векторного простору V_n. Тоді коефіцієнти $(x_i), i = \overline{1,n}$ розкладу

$$\bar{x} = x_i \bar{e}^i \tag{4.2}$$

будь-якого вектора $\bar{x} \in V_n$ називаються *коваріантними координатами* вектора $\bar{x}$.

Якщо обидві частини рівності (4.2) помножити скалярно на вектор $\bar{e}_j$, то отримаємо $\left(\bar{x}, \bar{e}_j\right) = x_i \left(\bar{e}^i, \bar{e}_j\right) = x_i \delta_j^i$. З урахуванням властивостей символу δ_j^i,

отримаємо формулу для знаходження коваріантних координат вектора у вигляді

$$(\bar{x},\bar{e}_j)=x_j. \tag{4.3}$$

Аналогічно, для контрваріантних координат отримаємо

$$(\bar{x},\bar{e}^{\,j})=x^j. \tag{4.4}$$

Підставивши ці скалярні добутки у рівності (4.1) та (4.2), отримаємо відповідно формули

$$\bar{x}=(\bar{x},\bar{e}_j)\bar{e}^{\,j},$$
$$\bar{x}=(\bar{x},\bar{e}^{\,j})\bar{e}_j,$$

які називаються формулами Гіббса. Формули Гіббса для векторів базисів $\bar{e}_1,\bar{e}_2,...,\bar{e}_n$ та $\bar{e}^1,\bar{e}^2,...,\bar{e}^n$ мають відповідно вигляд

$$\bar{e}_i=(\bar{e}_i,\bar{e}_j)\bar{e}^{\,j},$$
$$\bar{e}^{\,i}=(\bar{e}^{\,i},\bar{e}^{\,j})\bar{e}_j.$$

Якщо для скалярних добутків векторів взаємного базису ввести позначення $(\bar{e}^{\,i},\bar{e}^{\,j})=g^{ij}$, то останні формули матимуть вигляд

$$\bar{e}_i=g_{ij}\bar{e}^{\,j}, \tag{4.5}$$
$$\bar{e}^{\,i}=g^{ij}\bar{e}_j. \tag{4.6}$$

Теорема 4.3 Матриці (g_{ij}) та (g^{ij}) взаємно обернені.

Доведення. Покажемо, що добуток цих матриць є одиничною матрицею. Дійсно, помноживши рівності $\bar{e}_i=g_{ij}\bar{e}^{\,j}$ скалярно на вектори $\bar{e}^{\,k}$, отримаємо $(\bar{e}_i,\bar{e}^{\,k})=g_{ij}(\bar{e}^{\,j},\bar{e}^{\,k})$, або $\delta_i^{\,k}=g_{ij}g^{\,jk}$, що і **треба було довести**.

Зауваження. З урахуванням доведеної теореми формули (4.5) та (4.6) можна використовувати для знаходження векторів $\bar{e}^1,\bar{e}^2,...,\bar{e}^n$, якщо відомі вектори $\bar{e}_1,\bar{e}_2,...,\bar{e}_n$ і навпаки.

З’ясуємо, за якими законами змінюються контрваріантні та коваріантні координати вектора. Нехай задано два довільних базиси $\bar{e}_1,\bar{e}_2,...,\bar{e}_n$ і $\bar{e}_{1'},\bar{e}_{2'},...,\bar{e}_{n'}$ – «старий» та «новий». Для кожного з них існує єдиний взаємний

базис. Позначимо вектори цих базисів $\bar{e}^1,\bar{e}^2,...,\bar{e}^n$ та $\bar{e}^{1'},\bar{e}^{2'},...,\bar{e}^{n'}$ й будемо їх називати «старий взаємний» та «новий взаємний». Тоді з лінійної алгебри відомі наступні формули

$$\bar{e}_{i'} = b_{i'}^{i}\bar{e}_i, \tag{4.7}$$

$$\bar{e}_i = b_i^{i'}\bar{e}_{i'}, \tag{4.8}$$

$$\bar{e}^{i'} = \tilde{b}_i^{i'}\bar{e}_{i'}, \tag{4.9}$$

$$\bar{e}^{i} = \tilde{b}_{i'}^{i}\bar{e}^{i'}, \tag{4.10}$$

причому $\left(b_i^{i'}\right)=\left(b_{i'}^{i}\right)^{-1}$, а також $\left(\tilde{b}_i^{i'}\right)=\left(\tilde{b}_{i'}^{i}\right)^{-1}$.

Лема 2.1 Матриці $\left(b_{i'}^{i}\right)$ та $\left(\tilde{b}_{i'}^{i}\right)$ рівні.

Доведення. Помножимо обидві частини рівності (4.9) на вектори $\bar{e}^k$, а обидві частини рівності (4.10) на вектори $\bar{e}_{k'}$, отримаємо відповідно

$$\left(\bar{e}_{i'},\bar{e}^k\right)=b_{i'}^{i}\left(\bar{e}_i,\bar{e}^k\right)=b_{i'}^{i}\delta_i^k, \quad \left(\bar{e}_{k'},\bar{e}^i\right)=\tilde{b}_{i'}^{i}\left(\bar{e}_{k'},\bar{e}^{i'}\right)=\tilde{b}_{i'}^{i}\delta_{k'}^{i'},$$

або згідно з властивістю символа Кронекера

$$\left(\bar{e}_{i'},\bar{e}^i\right)=b_{i'}^{i}, \quad \left(\bar{e}_{i'},\bar{e}^i\right)=\tilde{b}_{i'}^{i},$$

звідки і випливає рівність $\left(b_{i'}^{i}\right)=\left(\tilde{b}_{i'}^{i}\right)$.

З урахуванням леми перепишемо рівності (4.9) і (4.10) у вигляді

$$\bar{e}^{i'} = b_i^{i'}\bar{e}_{i'}, \tag{4.9a}$$

$$\bar{e}^{i} = b_{i'}^{i}\bar{e}^{i'}, \tag{4.10a}$$

Отже, можна записати $x_{i'}=\left(\bar{x},\bar{e}_{i'}\right)=\left(\bar{x},b_{i'}^{i}\bar{e}_i\right)=b_{i'}^{i}\left(\bar{x},\bar{e}_i\right)$ або

$$x_{i'} = b_{i'}^{i}x_i. \tag{4.11}$$

Аналогічно, формули перетворення контрваріантних координат вектора мають вигляд $x^{i'}=\left(\bar{x},\bar{e}^{i'}\right)=\left(\bar{x},b_i^{i'}\bar{e}^i\right)$ або

$$x^{i'} = b_i^{i'}x^i. \tag{4.12}$$

Отримані формули пояснюють назви «коваріантні», тобто ті, що «однаково перетворюються» (з базисом $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n$) і «контрваріантні», тобто ті, що «протилежно перетворюються».

Зауваження. Якщо базис ортонормований, то різниця між коваріантними та контрваріантними координатами вектора відсутня, оскільки даний і взаємний базиси співпадають.

4.2. Означення тензора у векторному просторі. Тензорний закон перетворення

Означення 4.5 Нехай відображення $f : V_n \to R$ кожному набору $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_q$ векторів, де $q \in N$, ставить у відповідність дійсне число $T(\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_q)$. Якщо відображення f є лінійним по кожному аргументу, то воно називається *коваріантним тензором валентності* q або *тензором типу* $\begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix}$.

Нехай $(\bar{e}_i), i = \overline{1,n}$ – базис у V_n. Позначимо через $T_{i_1 i_2 ... i_q} = T(e_{i_1}, e_{i_2}, ..., e_{i_q})$, $i_1, i_2, ..., i_q = \overline{1,n}$ значення відображення f на наборах базисних векторів. Ці n^q чисел називаються *компонентами тензора* (або його *координатами*) в заданому базисі. Оскільки відображення f лінійне по кожному аргументу, то

$$T(\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_q) = T\left(a_1^{i_1}\bar{e}_{i_1}, a_2^{i_2}\bar{e}_{i_2}, ..., a_q^{i_q}\bar{e}_{i_q}\right) = a_1^{i_1} a_2^{i_2} ... a_q^{i_q} T\left(\bar{e}_{i_1}, \bar{e}_{i_2}, ..., \bar{e}_{i_q}\right) = a_1^{i_1} a_2^{i_2} ... a_q^{i_q} T_{i_1 i_2 ... i_q}.$$

Перейдемо від базису $(\bar{e}_i)$ до базису $(\bar{e}_{i'}), i, i' = \overline{1,n}$ за формулами (4.7), позначимо нові компоненти тензору символами $T_{i'_1 i'_2 ... i'_q}$ і знайдемо зв'язок між новими і старими компонентами тензора. Отримаємо

$$T_{i'_1 i'_2 ... i'_q} = T\left(\bar{e}_{i'_1}, \bar{e}_{i'_2}, ..., \bar{e}_{i'_q}\right) = T\left(b_{i'_1}^{i_1}\bar{e}_{i_1}, b_{i'_2}^{i_2}\bar{e}_{i_2}, ..., b_{i'_q}^{i_q}\bar{e}_{i_q}\right) = b_{i'_1}^{i_1} b_{i'_2}^{i_2} ... b_{i'_q}^{i_q} T\left(\bar{e}_{i_1}, \bar{e}_{i_2}, ..., \bar{e}_{i_q}\right)$$

Таким чином,

$$T_{i'_1 i'_2 ... i'_q} = b_{i'_1}^{i_1} b_{i'_2}^{i_2} ... b_{i'_q}^{i_q} T_{i_1 i_2 ... i_q}. \qquad (4.13)$$

Рівності (4.13) називають *тензорним законом перетворення компонент тензора типу* $\begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix}$.

Приклад 4.1 Тензор типу $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ або *ковектор*.

У векторному просторі V_3 розглянемо лінійне відображення $f:\bar{a}\to T(\bar{a})$. Позначивши $T(\bar{e}_1)=T_1$, $T(\bar{e}_2)=T_2$, $T(\bar{e}_3)=T_3$, отримаємо рівності (4.13) у вигляді $T_{i'}=b^{i}_{i'}T_i$. Зауважимо, що за таким законом перетворюється набір коваріантних координат вектора (див. формулу (4.11)).

Приклад 4.2 Тензор типу $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$.

У векторному просторі V_3 розглянемо відображення $f:\bar{a},\bar{b}\to T(\bar{a},\bar{b})$, причому $T(\bar{a},\bar{b})=(\bar{a},\bar{b})$. Воно є лінійним по кожному аргументу за властивістю скалярного добутку векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$. За означенням, це відображення є тензором типу $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$. Використаємо позначення $T(\bar{e}_i,\bar{e}_j)=(\bar{e}_i,\bar{e}_j)=g_{ij}$, отримаємо

$$g_{i'j'}=b^{i}_{i'}b^{j}_{j'}g_{ij}.$$

Тобто отримали закон перетворення компонент тензора типу $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$, цей набір ми вище записували у вигляді матриці Грама.

Означення 4.6 Нехай відображення $f:V_n\to R$ є лінійним по кожному аргументу. Значення цього відображення на наборах векторів базису $(\bar{e}^{\,j})$, $j=\overline{1,n}$, взаємного до базису $(\bar{e}_i)$, $i=\overline{1,n}$, позначимо символом $T^{j_1j_2\cdots j_p}$, тобто $T^{j_1j_2\cdots j_p}=T\left(\bar{e}^{\,j_1},\bar{e}^{\,j_2},...,\bar{e}^{\,j_p}\right)$. Отримаємо n^p чисел, які називаються *компонентами* (або *координатами*) *контрваріантного тензора типу* $\begin{pmatrix}p\\0\end{pmatrix}$.

В силу лінійності відображення по кожному аргументу отримаємо

$$T(\bar{a}^1,\bar{a}^2,...,\bar{a}^{\,p})=T\left(a^1_{j_1}\bar{e}^{\,j_1},a^2_{j_2}\bar{e}^{\,j_2},...,a^p_{j_p}\bar{e}^{\,j_p}\right)=a^1_{j_1}a^2_{j_2}...a^p_{j_p}T^{j_1j_2\cdots j_p}.$$

Закон перетворення компонент контрваріантного тензора типу $\begin{pmatrix}p\\0\end{pmatrix}$ має вигляд

$$T^{j'_1j'_2\cdots j'_p}=b^{j'_1}_{j_1}b^{j'_2}_{j_2}...b^{j'_p}_{j_p}T^{j_1j_2\cdots j_p}. \qquad (4.14)$$

Приклад 4.3 Набір (x^j), $j=\overline{1,n}$ контрваріантних координат вектора простору V_n перетворюється за законом $x^{j'}=b^{j'}_{j}x^{j}$, який при $p=1$ з точністю

до позначень збігається із законом (4.12). Таким чином, елементи цього набору є компонентами контрваріантного тензора типу $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, який називають ще *контрвектором* (а іноді просто *вектором*).

Означення 4.7 Значення лінійного відображення f на наборах з q векторів базису $(\bar{e}_i), i=\overline{1,n}$ та p векторів взаємного до нього базису $(\bar{e}^{\,j}), j=\overline{1,n}$ позначимо символами $T_{i_1 i_2 \dots i_q}^{j_1 j_2 \dots j_p}$ і ці n^{p+q} дійсних чисел будемо називати *компонентами мішаного тензора валентності* $p+q$ або *компонентами тензора типу* $\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$.

Враховуючи лінійність відображення f, а також закони перетворення взаємних базисів, отримаємо закон перетворення компонент мішаного тензора у вигляді

$$T_{i'_1 i'_2 \dots i'_q}^{j'_1 j'_2 \dots j'_p} = b_{i'_1}^{i_1} b_{i'_2}^{i_2} \dots b_{i'_q}^{i_q} b_{j_1}^{j'_1} b_{j_2}^{j'_2} \dots b_{j_p}^{j'_p} T_{i_1 i_2 \dots i_q}^{j_1 j_2 \dots j_p}. \qquad (4.15)$$

Цей закон називають *тензорним законом типу* $\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$.

Зауваження.

1) В записі тензорного закону порядок множників не має значення, множення підпорядковується лише правилу підсумовування.

2) Компоненти тензорів валентності 2, тобто тензори типів $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ у векторному просторі V_n зручно записувати у вигляді квадратної матриці n-го порядку.

3) Властивість координат тензора змінюватись при заміні базиса по закону певного вигляду можна використовувати для перевірки факту, що деякий впорядкований набір чисел є набором координат тензора вказаного типу.

Приклад 4.4 У векторному просторі V_n набір (δ_i^j) (символ Кронекера) є набором компонент тензора типу $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

Дійсно, після заміни базису за формулами (4.7), взаємний до нього базис перетворюється за формулами (4.9а). Для нового набору $(\delta_{i'}^{j'})$ отримаємо $\delta_{i'}^{j'} = b_{i'}^{i} b_{j}^{j'} \delta_i^j$, тобто цей набір перетворюється за тензорним законом типу $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

Теорема 4.4 Якщо в деякому базисі всі компоненти тензора дорівнюють 0, то і в будь-якому базисі вони дорівнюють 0.

Доведення випливає з тензорного закону перетворення координат тензора при заміні базису.

4.3 Означення тензора і тензорного поля у евклідовому просторі. Операції над тензорами та тензорними полями

Нехай X – область в евклідовому просторі E_n , в якій задано криволінійну систему координат $\left(x^1, x^2, ..., x^n\right)$.

Означення 4.8 Тензорним полем типу $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ в області X називається набір, який в кожній криволінійній системі координат (x) складається з n^{p+q} гладких функцій класу C^k

$$T_{i_1 i_2 ... i_q}^{j_1 j_2 ... j_p}\left(x^1, x^2, ..., x^n\right),$$

які при переході до будь-якої іншої криволінійної системи координат (y) перетворюються по правилу (*тензорному закону типу* $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$)

$$'T_{l_1 l_2 ... l_q}^{k_1 k_2 ... k_p} = \frac{\partial y^{k_1}}{\partial x^{j_1}} \frac{\partial y^{k_2}}{\partial x^{j_2}} ... \frac{\partial y^{k_p}}{\partial x^{j_p}} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{l_1}} \frac{\partial x^{i_2}}{\partial y^{l_2}} ... \frac{\partial x^{i_q}}{\partial y^{l_q}} T_{i_1 i_2 ... i_q}^{j_1 j_2 ... j_p}, \qquad (4.16)$$

і ці функції будемо називати *компонентами мішаного тензорного поля валентності* $p+q$ або *компонентами тензорного поля типу* $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$.

Теорема 4.5 (про задання тензора) Для побудови тензорного поля заданого типу в області X евклідового простору E_n достатньо задати його координати в будь-якій одній фіксованій криволінійній системі координат.

Доведення. Проведемо доведення для тензорного поля типу $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Нехай $T_{ij}^k\left(x^1, x^2, ..., x^n\right)$ – координати цього тензорного поля в системі (x). Тоді для них має місце тензорний закон типу $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Запишемо цей закон за умов переходу від системи (x) до довільних систем координат (y) та (z):

$$'T_{lm}^{n} = \frac{\partial y^n}{\partial x^k}\frac{\partial x^i}{\partial y^l}\frac{\partial x^j}{\partial y^m}T_{ij}^{k},$$

$$''T_{pq}^{r} = \frac{\partial z^r}{\partial x^k}\frac{\partial x^i}{\partial z^p}\frac{\partial x^j}{\partial z^q}T_{ij}^{k}.$$

За правилами диференціювання складеної функції отримаємо

$$''T_{pq}^{r} = \left(\frac{\partial z^r}{\partial y^n}\frac{\partial y^n}{\partial x^k}\right)\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^l}\frac{\partial y^l}{\partial z^p}\right)\left(\frac{\partial x^j}{\partial y^m}\frac{\partial y^m}{\partial z^q}\right)T_{ij}^{k} = \left(\frac{\partial y^n}{\partial x^k}\frac{\partial x^i}{\partial y^l}\frac{\partial x^j}{\partial y^m}T_{ij}^{k}\right)\frac{\partial z^r}{\partial y^n}\frac{\partial y^l}{\partial z^p}\frac{\partial y^m}{\partial z^q}.$$

Отже,

$$''T_{pq}^{r} = \frac{\partial z^r}{\partial y^n}\frac{\partial y^l}{\partial z^p}\frac{\partial y^m}{\partial z^q}'T_{lm}^{n},$$

тобто при переході від будь-якої однієї криволінійної системи координат до будь-якої іншої криволінійної системи координат заданий набір функцій змінюється за тензорним законом типу $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, а звідси за означенням випливає, що в області X евклідового простору E_n задане тензорне поле відповідного типу, що і **треба було довести**.

Приклад 4.5 Градієнт диференційованої функції від n змінних $\left(x^1, x^2, ..., x^n\right)$, заданої в просторі E_n, утворює тензорне поле типу $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

Дійсно, для функції $f\left(x^1, x^2, ..., x^n\right)$ градієнт має вигляд

$$\overline{\text{grad } f} = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2}, ..., \frac{\partial f}{\partial x^n}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right), \quad i = \overline{1,n}.$$

Після переходу до координат (y) ця функція набуває вигляду $f\left(x^1\left(y^k\right), x^2\left(y^k\right), ..., x^n\left(y^k\right)\right)$, а для її градієнта за правилом диференціювання складеної функції отримаємо

$$\frac{\partial f}{\partial y^j} = \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial y^j},$$

звідки випливає, що набір компонент набору $\overline{\text{grad } f}$ змінюється за тензорним законом типу $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, що і **треба було довести**.

Приклад 4.6 Розглянемо в області X евклідового простору E_n набір функцій

$$g_{ij}\left(x^1,x^2,...,x^n\right)=\left(\bar{r}_i\left(x^1,x^2,...,x^n\right),\bar{r}_j\left(x^1,x^2,...,x^n\right)\right),$$

які є скалярними добутками векторів локальних реперів в точках M цієї області. При заміні криволінійних координат на $\left(y^1,y^2,...,y^n,\right)$ отримаємо в точках області

$$'g_{kl}=\left(\frac{\partial\bar{r}}{\partial y^k},\frac{\partial\bar{r}}{\partial y^l}\right)=\left(\frac{\partial\bar{r}}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial y^k},\frac{\partial\bar{r}}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial y^l}\right)=\left(\frac{\partial\bar{r}}{\partial x^i},\frac{\partial\bar{r}}{\partial x^j}\right)\frac{\partial x^i}{\partial y^k}\frac{\partial x^j}{\partial y^l}.$$

Таким чином,

$$'g_{kl}(M)=g_{ij}(M)\frac{\partial x^i}{\partial y^k}(M)\frac{\partial x^j}{\partial y^l}(M),$$

тобто набір функцій $g_{ij}(M)$ утворює тензорне поле типу $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$. Його називають *полем коваріантного метричного тензора*. Як і раніше, компоненти такого тензорного поля будемо записувати у вигляді квадратної матриці, яка є, очевидно, невиродженою. Елементи оберненої до неї матриці позначимо g^{ij}, тобто мають місце рівності

$$g_{ij}g^{jk}=\delta_i^k. \tag{4.17}$$

Теорема 4.6 Набір функцій $g^{ij}\left(x^1,x^2,...,x^n\right)$ від криволінійних координат точки області X в евклідовому просторі E_n утворює тензорне поле типу $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$.

Доведення. Запишемо рівності (4.17) в нових криволінійних координатах, отримаємо

$$'g_{ab}\,'g^{bc}=\delta_a^c$$

або, з урахуванням того, що набір g_{ij} утворює тензорне поле типу $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$,

$$g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial y^a}\frac{\partial x^j}{\partial y^b}\,'g^{bc}=\delta_a^c.$$

Помножимо обидві частини останньої рівності на $g^{jk}\frac{\partial y^a}{\partial x^m}\frac{\partial y^b}{\partial x^n}$, скористаємось рівностями (4.17) й тим, що матриці прямого та оберненого перетворення криволінійних координат взаємно обернені, отримаємо

$$\delta_i^k \delta_m^i \delta_n^j g'^{bc} = \delta_a^c g^{jk} \frac{\partial y^a}{\partial x^m}\frac{\partial y^b}{\partial x^n}.$$

Залишилось скористатись властивістю символа Кронекера і можливістю замінювати індекс підсумовування будь-яким іншим індексом, що приймає ті ж самі значення. В останніх рівностях зробимо заміни: $i \to k, m \to k, n \to j, a \to c$. Тоді

$$'g^{bc} = g^{jk}\frac{\partial y^a}{\partial x^k}\frac{\partial y^b}{\partial x^j},$$

що і **треба було довести.**

4.4 Операції над тензорами і тензорними полями. Додавання тензорів, множення тензора на число, добуток тензорів. Перестановка індексів тензора. Згортка тензора. Піднімання та опускання індексів тензора

Нехай X – область в евклідовому просторі E_n і в ній задано криволінійну систему координат $\left(x^1, x^2, ..., x^n\right)$. Нехай відносно цієї системи координат задано тензорні поля. Операції над тензорними полями визначають в кожній точці області X окремо, тому що тензори, задані в різних точках не має сенсу навіть порівнювати між собою. Дійсно, якщо навіть всі координати двох тензорів відносно системи координат $\left(x^1, x^2, ..., x^n\right)$ в точках M і N однакові, то після переходу в іншу систему координат $\left(y^1, y^2, ..., y^n\right)$ вони можуть виявитися різними, що легко випливає із тензорного закону перетворення.

Означення 4.9 Будемо говорити, що два *тензори* однакового типу *рівні* між собою в точці M, якщо всі їх відповідні координати в цій точці хоча б в одній координатній системі однакові.

Це означення коректне, тому що з тензорного закону випливає, що сформульована в означенні властивість інваріантна відносно замін координат.

Означення 4.10 Нехай в точці M задано тензори A і B типу $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ своїми координатами $A_{j_1 j_2 \cdots j_q}^{i_1 i_2 \ldots i_p}$ і $B_{j_1 j_2 \cdots j_q}^{i_1 i_2 \ldots i_p}$ відносно деякої регулярної системи координат $\left(x^1, x^2, ..., x^n\right)$. *Сумою (різницею)* цих *тензорів* називається тензор

типу $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$, координати якого в точці M відносно цієї ж системи координат мають вигляд $A^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q} + B^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}$ $\left(A^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q} - B^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q} \right)$.

Очевидно, що додавання тензорів комутативне.

Приклад 4.7 Сумою тензорів, заданих у векторному просторі V^2 координатами $T_i^{\,j} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ і $S_i^{\,j} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ є тензор з координатами $(T+S)_i^{\,j} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$.

Означення 4.11 Нехай в точці M задано тензор A типу $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ своїми координатами $A^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}$ відносно деякої регулярної системи координат $\left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right)$, а також дійсне число α. *Добутком тензора A на число α* (або числа на тензор) називається тензор, координати якого в цій же системі координат мають вигляд $\alpha A^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}$.

Приклад 4.8 Добутком тензора, заданого у векторному просторі V^2 координатами $T_i^{\,j} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ на число $\lambda = \frac{1}{2}$ є тензор з координатами $(\lambda T)_i^{\,j} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$.

Означення 4.12 Нехай в точці M задано тензори A і B типів $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$ своїми координатами $A^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}$ і $B^{l_1 l_2 \ldots l_r}_{k_1 k_2 \ldots k_s}$ відповідно відносно деякої регулярної системи координат $\left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right)$. *Добутком тензора A на тензор B* називається тензор типу $\begin{pmatrix} p+r \\ q+s \end{pmatrix}$, координати якого дорівнюють добуткам всіх координат першого тензора на кожну з координат другого тензора. Позначається $A \otimes B$.

Приклад 4.9 Добутком тензорів, заданих у векторному просторі V^2 координатами $T^i = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ і $S_i^{\,j} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, є тензор з координатами

$$(T\otimes S)^{ij}_{k}=\left(1\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -3 & 4\end{pmatrix},2\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -3 & 4\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -2 & 4\\ -3 & 4 & -6 & 8\end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що множення тензорів взагалі не комутативне, оскільки отримані набори координат можуть відрізнятися порядком.

Означення 4.13 Нехай в точці M задано тензор A типу $\begin{pmatrix}p\\ q\end{pmatrix}$, $q\geq 2$ своїми координатами $A^{i_1i_2\ldots i_p}_{j_1j_2\ldots j_q}$ відносно деякої регулярної системи координат $\left(x^1,x^2,\ldots,x^n\right)$. Розглянемо підстановку $\begin{pmatrix}1\ldots r\ldots s\ldots q\\ 1\ldots s\ldots r\ldots q\end{pmatrix}, 1\leq r<s\leq q$. Покладемо $\tilde{A}^{i_1i_2\ldots i_p}_{j_1\ldots j_r\ldots j_s\ldots j_q}=A^{i_1i_2\ldots i_p}_{j_1\ldots j_s\ldots j_r\ldots j_q}$. Будемо говорити, що тензор $\tilde{A}$ отримано з тензора A перестановкою (транспонуванням) нижніх індексів (r-того і s-того).

Суть цієї операції полягає в заміні одного впорядкованого набору координат тензору іншим, який складається з тих же чисел.

Зауважимо, що цю операцію можна узагальнити на довільне число нижніх індексів, а також, що перестановка верхніх індексів визначається аналогічно.

Означення 4.14 Нехай в точці M задано тензор A типу $\begin{pmatrix}p\\ q\end{pmatrix}$, $p\geq 1$, $q\geq 1$ своїми координатами $A^{i_1i_2\ldots i_p}_{j_1j_2\ldots j_q}$ відносно деякої регулярної системи координат $\left(x^1,x^2,\ldots,x^n\right)$. Покладемо $i_k=j_m=\alpha$ і позначимо $\tilde{A}^{i_1\ldots i_{k-1}i_{k+1}\ldots i_p}_{j_1\ldots j_{m-1}j_{m+1}\ldots j_q}=A^{i_1\ldots i_{k-1}\alpha\, i_{k+1}\ldots i_p}_{j_1\ldots j_{m-1}\alpha\, j_{m+1}\ldots j_q}$. Будемо говорити, що тензор $\tilde{A}$ отримано з тензора A *згорткою* по k-тому верхньому і m-тому нижньому індексам.

Можна довести, що означення коректне і що в результаті отримується тензор типу $\begin{pmatrix}p-1\\ q-1\end{pmatrix}$.

Якщо операцію згортки застосувати p раз для тензора типу $\begin{pmatrix}p\\ p\end{pmatrix}$, то отримаємо число (інваріант), яке називають *повною згорткою.*

Дуже часто операції згортки передує операція добутку тензорів.

Приклад 4.10 Згорткою тензора з компонентами $T^{i}_{jk}=\begin{pmatrix}T^1_{11} & T^1_{12} & T^1_{13} & T^1_{14}\\ T^2_{11} & T^2_{12} & T^2_{13} & T^2_{14}\end{pmatrix}$ по індексам i та j є тензор з компонентами $\tilde{T}_k=\left(\tilde{T}_1,\tilde{T}_2\right)$, де $\tilde{T}_1=T^1_{11}+T^2_{21}$, $\tilde{T}_2=T^1_{12}+T^2_{22}$.

Означення 4.15 Операції підняття та опускання індексу випливає з формул (4.5) та (4.6) Гіббса. За цими формулами отримаємо

$$\widetilde{T}_i = T(\bar{e}_i) = T\left(g_{ij}\bar{e}^{\,j}\right) = g_{ij}T\left(\bar{e}^{\,j}\right) = g_{ij}T^{\,j},$$
$$\widetilde{T}^{\,i} = T\left(\bar{e}^{\,i}\right) = T\left(g^{ij}\bar{e}_j\right) = g^{ij}T\left(\bar{e}_j\right) = g^{ij}T_j.$$

Перша з отриманих формул дає алгоритм опускання індексу тензора типу $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, а друга – алгоритм підняття індексу тензора типу $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Тензор типу $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ операція опускання індексу перетворює в тензор типу $\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$. Для його координат маємо

$$\widetilde{T}_{ijk} = T\left(\bar{e}_i, \bar{e}_j, \bar{e}_k\right) = T\left(\bar{e}_i, \bar{e}_j, g_{kl}\bar{e}^{\,l}\right) = g_{kl}T_{ij}^{\,l}.$$

І, нарешті, для координат довільного тензора результат опускання першого верхнього індекса має вигляд

$$\widetilde{T}^{\bullet i_2\ldots i_p}_{k\,j_1 j_2\ldots j_q} = g_{ki_1}T^{i_1 i_2\ldots i_p}_{j_1 j_2\ldots j_q},$$

де «крапкою» відмічене місце, з якого опускався індекс.

4.5 Диференціювання тензорних полів. Коваріантна похідна тензора

Спробуємо знайти частинні похідні координат $T_{ij}\left(x^1, x^2, \ldots x^n\right)$ тензорного поля типу $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$. Введемо позначення $\dfrac{\partial}{\partial x^\alpha}T_{ij} = P_{\alpha,ij}$. З'ясуємо, як змінюється отриманий набір функцій $P_{\alpha,ij}$ при переході від регулярної системи координат (x) до регулярної системи координат (y), який задається формулами (4.14). В новій системі координат матимемо $P'_{\beta,kl} = \dfrac{\partial}{\partial y^\beta}T'_{kl}$. Враховуючи, що мають місце рівності

$$T'_{kl} = T_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial y^k}\frac{\partial x^j}{\partial y^l},$$

отримаємо

$$P'_{\beta,kl}=\frac{\partial}{\partial y^{\beta}}T'_{kl}=\frac{\partial}{\partial y^{\beta}}\left(T_{ij}\frac{\partial x^{i}}{\partial y^{k}}\frac{\partial x^{j}}{\partial y^{l}}\right)=\frac{\partial}{\partial y^{\beta}}\left(T_{ij}\right)\frac{\partial x^{i}}{\partial y^{k}}\frac{\partial x^{j}}{\partial y^{l}}+T_{ij}\frac{\partial}{\partial y^{\beta}}\left(\frac{\partial x^{i}}{\partial y^{k}}\frac{\partial x^{j}}{\partial y^{l}}\right)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(T_{ij}\right)\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial y^{\beta}}\frac{\partial x^{i}}{\partial y^{k}}\frac{\partial x^{j}}{\partial y^{l}}+S_{\beta kl}=P_{\alpha,ij}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial y^{\beta}}\frac{\partial x^{i}}{\partial y^{k}}\frac{\partial x^{j}}{\partial y^{l}}+S_{\beta kl}.$$

Аналіз останньої рівності призводить до висновку, що у результаті диференціювання тензорного поля ми можемо отримати набір, який не утворює тензорне поле (у випадку, коли $S_{\beta kl}\neq 0$). В такому випадку говорять, що операція не є тензорною. Доданок $S_{\beta kl}$ в останній рівності називають відхиленням від тензорного закону.

Природно поставити наступні вимоги до операції диференціювання тензорних полів:

- в афінних або декартових координатах операція повинна збігатись з операцією знаходження частинних похідних,
- операція повинна бути тензорною.

Почнемо з диференціювання тензорного поля типу $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ з координатами $T^{i}(x)$. Після перетворення $(x)\to(y)$ криволінійних координат отримаємо

$$\frac{\partial T'^{i}}{\partial y^{s}}=\frac{\partial}{\partial y^{s}}\left(T'^{i}\right)=\frac{\partial}{\partial y^{s}}\left(\frac{\partial y^{i}}{\partial x^{j}}T^{j}\right)=\frac{\partial^{2}y^{i}}{\partial y^{s}\partial x^{j}}T^{j}+\frac{\partial T^{j}}{\partial y^{s}}\frac{\partial y^{i}}{\partial x^{j}}=$$

$$=\frac{\partial^{2}y^{i}}{\partial x^{k}\partial x^{j}}\frac{\partial x^{k}}{\partial y^{s}}T^{j}+\frac{\partial T^{j}}{\partial x^{k}}\frac{\partial x^{k}}{\partial y^{s}}\frac{\partial y^{i}}{\partial x^{j}}=\frac{\partial^{2}y^{i}}{\partial x^{k}\partial x^{j}}\frac{\partial x^{k}}{\partial y^{s}}\frac{\partial x^{j}}{\partial y^{l}}T'^{l}+\frac{\partial T^{j}}{\partial x^{k}}\frac{\partial x^{k}}{\partial y^{s}}\frac{\partial y^{i}}{\partial x^{j}}.$$

Введемо позначення $-\frac{\partial^{2}y^{i}}{\partial x^{k}\partial x^{j}}\frac{\partial x^{k}}{\partial y^{s}}\frac{\partial x^{j}}{\partial y^{l}}=\Gamma^{i}_{sl}$ і $\frac{\partial T'^{i}}{\partial y^{s}}+\Gamma^{i}_{sl}T'^{l}=\nabla_{s}T'^{i}$, тоді

$$\frac{\partial T'^{i}}{\partial y^{s}}+\Gamma^{i}_{sl}T'^{l}=\nabla_{s}T'^{i}=\frac{\partial T^{j}}{\partial x^{k}}\frac{\partial x^{k}}{\partial y^{s}}\frac{\partial y^{i}}{\partial x^{j}}.$$

Права частина останньої формули збігається з правою частиною тензорного закону типу $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, оскільки згідно першої вимоги $\nabla_{k}T^{j}=\frac{\partial T^{j}}{\partial x^{k}}$. Строге доведення цього факту можна здійснити, якщо для функцій $\Gamma^{i}_{jq}(x)$ ввести наступне

Означення 4.16 Нехай в області X евклідового простору E_n задано регулярну систему координат (x). *Зв'язністю* називається набір функцій $\Gamma^i_{jq}(x)$, які перетворюються при переході до регулярних координат (y) за законом

$$\widetilde{\Gamma}^k_{lp} = \Gamma^i_{jq} \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial y^l} \frac{\partial x^q}{\partial y^p} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial y^l \partial y^p} \frac{\partial y^k}{\partial x^i}. \tag{4.18}$$

Зв'язність називається симетричною, якщо $\Gamma^i_{jq} = \Gamma^i_{qj}$.

З означення випливає, що зв'язність не утворює тензорного поля.

Означення 4.17 *Коваріантною похідною тензорного поля типу* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ з координатами T^i, заданими відносно регулярної системи координат (x), називається набір C^k-гладких функцій вигляду

$$\nabla_s T^i = \frac{\partial T^i}{\partial x^s} + \Gamma^i_{sl} T^l,$$

де Γ^i_{sl} – зв'язність.

Аналогічно можна отримати формулу для тензорного поля типу $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ у вигляді

$$\nabla_s T_i = \frac{\partial T_i}{\partial x^s} - \Gamma^k_{si} T_k$$

і формулу для коваріантної похідної тензорного поля типу $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \nabla_s T^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q} = \frac{\partial T^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}}{\partial x^s} + \Gamma^{i_1}_{s\alpha} T^{\alpha i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q} + \ldots + \Gamma^{i_p}_{s\alpha} T^{i_1 i_2 \ldots \alpha}_{j_1 j_2 \ldots j_q} - \\ - \Gamma^{\alpha}_{sj_1} T^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{\alpha j_2 \ldots j_q} - \ldots - \Gamma^{\alpha}_{sj_q} T^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots \alpha}. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Означення 4.18 Нехай в області X евклідового простору E_n задано поле метричного тензора $g_{ij}(x)$ і зв'язність $\Gamma^i_{jq}(x)$. Ця *зв'язність* називається *узгодженою з метрикою* (або *рімановою зв'язністю*), якщо $\forall i, j, k \quad \nabla_k (g_{ij}) = 0$.

Теорема 4.7 Існує єдина симетрична зв'язність, узгоджена з метрикою $g_{ij}(x)$, а саме

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2} g^{ks}\left(-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{s}} + \frac{\partial g_{js}}{\partial x^{i}} + \frac{\partial g_{si}}{\partial x^{j}} \right). \tag{4.20}$$

Доведення. Введемо позначення $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{s}} = g_{ij,s}$. Доведемо симетричність зв'язності, використовуючи властивість $g_{ij} = g_{ji}$.

$$\Gamma_{ji}^{k} = \frac{1}{2} g^{ks}\left(- g_{ji,s} + g_{is,j} + g_{sj,i} \right) = \frac{1}{2} g^{ks}\left(- g_{ij,s} + g_{js,i} + g_{si,j} \right) = \Gamma_{ij}^{k}.$$

Далі, знайдемо за формулою (4.19)

$$\nabla_{l}\left(g_{ij}\right) = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{l}} - g_{\alpha j}\Gamma_{il}^{\alpha} - g_{i\alpha}\Gamma_{jl}^{\alpha} =$$

$$= \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{l}} - \frac{1}{2} g_{\alpha j} g^{\alpha s}\left(- g_{il,s} + g_{ls,i} + g_{si,l} \right) - -\frac{1}{2} g_{i\alpha} g^{\alpha s}\left(- g_{jl,s} + g_{ls,j} + g_{sj,l} \right) =$$

$$= g_{ij,l} - \frac{1}{2}\delta_{j}^{\ s}\left(- g_{il,s} + g_{ls,i} + g_{si,l} \right) - \frac{1}{2}\delta_{i}^{\ s}\left(- g_{jl,s} + g_{ls,j} + g_{sj,l} \right).$$

Після заміни індексів підсумовування та зведення подібних доданків остаточно отримаємо

$$\nabla_{l}\left(g_{ij}\right) = 0,$$

що і свідчить про узгодженість зв'язності з метрикою.

Залишилось довести єдиність такої зв'язності. Нехай $\Gamma_{ij}^{k}(x)$ – деяка симетрична зв'язність, узгоджена з метрикою, тобто виконуються вимоги

$$\Gamma_{ji}^{k} = \Gamma_{ij}^{k},$$

$$\nabla_{l}\left(g_{ij}\right) = g_{ij,l} - g_{\alpha j}\Gamma_{il}^{\alpha} - g_{i\alpha}\Gamma_{jl}^{\alpha} = 0.$$

Ввівши відповідні позначення, перепишемо останню вимогу у вигляді

$$g_{ij,l} = \Gamma_{ilj} + \Gamma_{jli}.$$

Після кругової перестановки індексів отримаємо ще дві рівності

$$g_{jl,i} = \Gamma_{jil} + \Gamma_{lij}, \qquad g_{li,j} = \Gamma_{ijl} + \Gamma_{jli}.$$

Звідки, враховуючи властивість $\Gamma_{ilj} = \Gamma_{lij}$, яка є наслідком симетричності $\Gamma^k_{ji} = \Gamma^k_{ij}$, отримаємо

$$\Gamma_{ijl} = \frac{1}{2}\left(- g_{ij,l} + g_{jl,i} + g_{li,j}\right).$$

Нарешті, помножимо обидві частини останньої рівності на двічі контрваріантний тензор g^{kl} і отримаємо ту ж саму зв'язність (4.20).

? Питання для самоконтролю за змістовим модулем 2:

1. Який визначник називають визначником Грама системи векторів?
2. Який базис називають взаємним до заданого базису? Що можна сказати про набори координат вектора у взаємних базисах?
3. Який об'єкт називають тензором у векторному просторі? Як визначаються координати тензора?
4. Який вигляд має тензорний закон перетворення координат мішаного тензора типу $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$?
5. Наведіть приклад коваріантного тензора типу $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$.
6. Який об'єкт називають коваріантною похідною тензорного поля?
7. Який об'єкт називають рімановою зв'язністю.

9. Яка з рівностей є тензорним законом типу $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$?

А) $\widetilde{P}_i^{\,j} = P_k^n \dfrac{\partial y^j}{\partial x^n}\dfrac{\partial x^k}{\partial y^i}$, **Б)** $\widetilde{P}_i^{\,j} = P_k^n \dfrac{\partial y^j}{\partial x^n}\dfrac{\partial y^k}{\partial x^i}$, **В)** $\widetilde{P}_i^{\,j} = P_k^n \dfrac{\partial x^j}{\partial y^n}\dfrac{\partial x^k}{\partial y^i}$, **Г)** жодна

10. Яке число слід вставити замість * в наступних реченнях?

А) Число координат тензора типу $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ в V_3 дорівнює *,

Б) Число координат тензора типу $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ в V_2 дорівнює *,

В) Число різних координат симетричного тензора типу $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ в V_3 дорівнює *,

Г) Число різних координат кососиметричного тензора типу $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ в V_3 дорівнює *.

11. Формули переходу мають вигляд $y^1 = 3\left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^3; y^2 = 2x^1x^2$. В якій з точок якобіан переходу дорівнює нулю?

А) (1,1), Б) (2,0), В) (0,1), Г) в жодній.

12. Скільки координат має коваріантна похідна тензора типу $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ в V_2?

13. Відносно якої з заданих систем координат метричний тензор має координати $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

А) декартової, **Б)** полярної, **В)** циліндричної, **Г)** сферичної.

Змістовий модуль 3. Основи теорії гладких многовидів

Тема 5. Топологічні та гладкі многовиди



Ключові поняття: топологічний многовид, локальна карта, атлас многовиду, функції переходу, гладка структура, індукована структура

5.1. Означення й приклади топологічних многовидів. Функції переходу. Орієнтовні й неорієнтовні гладкі многовиди

Означення 5.1 Зв'язний хаусдорфів топологічний простір називається n-вимірним *топологічним многовидом* M_n, якщо для будь-якої його точки P існує окіл, гомеоморфний відкритій множині евклідового простору R^n, причому сукупність таких околів не більша за зліченну.

Означення 5.2 Нехай задано n-вимірний топологічний многовид M_n. Пара (U, f), де U – відкрита множина, а f – гомеоморфізм із U в $V \subset R^n$, називається *локальною картою* цього *многовиду* (або *координатним околом многовиду*).

Означення 5.3 Нехай задано n-вимірний топологічний многовид M_n. Якщо пари $(U_i, f_i), i \in I$ є картами на M_n і $\bigcup_{i \in I} U_i = M_n$, то сукупність $A = \{(U_i, f_i)\}$ таких карт називається *атласом многовиду*.

Очевидно, на многовиді може існувати не лише один атлас.

Означення 5.4 Нехай задано точку P на n-вимірному многовиді M_n, її окіл U і гомеоморфізм $f: U \to V$, де $V \subset R^n$. Якщо в R^n зафіксована декартова система координат, відносно якої точка $f(P)$ має координати $(x^1, ..., x^n)$, то ці числа називаються *локальними координатами точки* P многовиду, а гомеоморфізм f називається *координатним гомеоморфізмом*.

Зауваження. Точка P може належати різним картам і тому вона може мати декілька наборів локальних координат.

Приклад 5.1 Розглянемо на R^n природну топологію τ. Очевидно, пара (R^n, τ) є зв'язним хаусдорфовим топологічним простором. Для будь-якої точки P простору R^n візьмемо окіл $U = R^n$ і розглянемо тотожне відображення $e: R^n \to R^n$. Очевидно, e – гомеоморфізм. Тоді (R^n, e) – карта на R^n. Оскільки $U = R^n$, то ця карта утворює атлас. Ми показали, що R^n є n-вимірним топологічним многовидом.

Приклад 5.2. Розглянемо в E_3 криву як гомеоморфне відображення $\gamma:(a,b)\to L\subset E_3$. На множині L виникає топологія, яка є індукованою на цій множині природною топологією простору E_3. Тоді пара $\left(L,\gamma^{-1}\right)$ є картою на L і множина L перетворюється в одновимірний топологічний многовид.
Аналогічно доводиться, що поверхня в E_3 як гомеоморфне відображення $f:G\to E_3$, де G – область в R^2, є двовимірним топологічним многовидом, атлас якого складається з однієї карти.

Приклад 5.3 Розглянемо на евклідовій площині E_2 одиничне коло, тобто множину $S^1=\left\{(x,y)\in R^2:x^2+y^2=1\right\}$ точок площини. Природна топологія площини E_2 індукує на S^1 хаусдорфову топологію, в якій множини $U_1=\left\{(x,y)\in S^1:y>0\right\}$, $U_2=\left\{(x,y)\in S^1:y<0\right\}$, $U_3=\left\{(x,y)\in S^1:x>0\right\}$, $U_4=\left\{(x,y)\in S^1:x<0\right\}$ є відкритими. Розглянемо точку на півколі U_1. Для неї $y=\sqrt{1-x^2}$, тому вона однозначно визначається значенням координати x. Таким чином, координату x можна вважати координатою точки кола, але лише локальною, тому що вона визначає точки лише у відкритій підмножині U_1 кола. Далі розглянемо ортогональне проєктування h_1 півкола U_1 на відкриту множину $(-1,1)$. Воно переводить точку (x,y) кола в точку $(x,0)$ осі абсцис. Очевидно, h_1 є гомеоморфізмом. Тому, в якості локальної координати точки кола ми фактично використовуємо координату її образа при цьому гомеоморфізмі. Все коло можна покрити півколами U_1,U_2,U_3,U_4 . За допомогою ортогональних проєктувань h_1,h_2 на вісь абсцис множини U_1,U_2 відображаються на відкриту множину $(-1,1)$ простору R^1. Оскільки h_1,h_2 є гомеоморфізмами, то пари $(U_1,h_1),(U_2,h_2)$ є картами на S^1. Аналогічно, пари $(U_3,h_3),(U_4,h_4)$ є картами на S^1 тому, що ортогональні проєктування h_3,h_4 на вісь ординат є гомеоморфізмами множин U_3,U_4 на $(-1,1)$. Так як $S^1=\bigcup_{i=1}^{4}U_i$, то $A=\{(U_i,h_i)\},i=\overline{1,4}$ – атлас на S^1 . Таким чином, коло є одновимірним топологічним многовидом.
Розглянемо точку $Q\in S^1$ таку, що промінь OQ утворює з додатним напрямом вісі абсцис кут $\frac{\pi}{6}$, тобто її декартові координати – $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$. Ця точка належить двом картам: (U_1,h_1) і (U_3,h_3). В карті (U_1,h_1) локальна координата точки Q дорівнює $\frac{\sqrt{3}}{2}$, в карті (U_3,h_3) локальна координата точки Q дорівнює $\frac{1}{2}$.

Означення 5.5 Топологічний многовид називається *елементарним*, якщо на ньому існує атлас, який складається з однієї карти, в противному випадку топологічний многовид називається *неелементарним*.

Приклад 5.4. Топологічний n- вимірний многовид E_n є елементарним, S^1 – топологічний одновимірний неелементарний многовид (задача 4 в прикладах розв'язання задач).

5.2 Функції переходу. Означення та приклади гладких многовидів. Орієнтовні та неорієнтовні многовиди

Нехай дано n-вимірний топологічний многовид M_n і на ньому дві карти: (U,h) з локальними координатами $x^1,...,x^n$ і (V,g) з локальними координатами $y^1,...,y^n$. Якщо $U \bigcap V \neq \varnothing$, то розглянемо відображення $g \circ h^{-1} : h(U \bigcap V) \to g(U \bigcap V)$ (рис. 5.1).

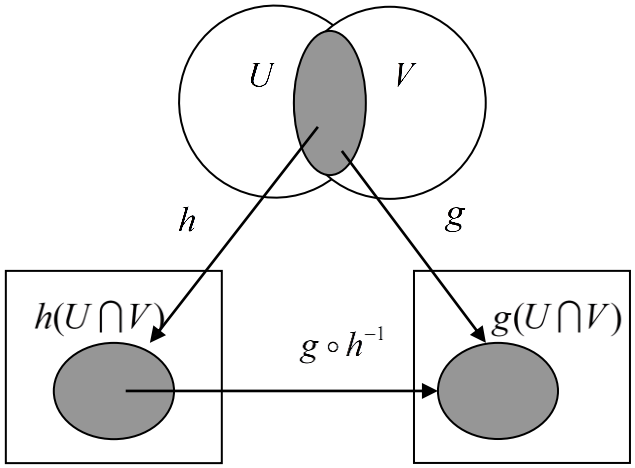


Рисунок 5.1 – Відображення переходу

Оскільки h і g – гомеоморфізми, то $g \circ h^{-1}$ теж є гомеоморфізмом, який відображає одну область евклідового простору R^n на іншу, тому може бути записаний за допомогою системи функцій

$$\begin{cases} y^1 = y^1\left(x^1, x^2, ..., x^n\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y^n = y^n\left(x^1, x^2, ..., x^n\right) \end{cases} \qquad (5.1)$$

Функції (5.1) називаються *функціями переходу***.** Інакше кажуть, що за допомогою функцій (5.1) відбувається *перетворення локальних координат*. Відображення $g \circ h^{-1}$ називаються *відображеннями переходу*.

Приклад 5.5 Розглянемо одиничне коло, на якому в прикладі 5.3 ми побудували структуру одновимірного топологічного многовиду. Знайдемо функції переходу для карт $(U_1, h_1), (U_3, h_3)$ з атласу. Перетином цих карт є множина $U \cap V = \{(x, y) \in S^1 : x > 0 \wedge y > 0\}$. Нагадаємо, що відображення h_1 парі (x, y) ставить у відповідність першу компоненту x, а відображення h_3 парі (x, y) ставить у відповідність другу компоненту y. Обернене відображення h_1^{-1} числу x ставить у відповідність пару $\left(x, \sqrt{1-x^2}\right)$. Нарешті, в результаті композиції $h_3 \circ h_1^{-1}$, яку слід розглядати лише на множині $h_1(U \cap V) = (0,1)$, кожному x з цієї множини відповідає $\sqrt{1-x^2}$. Отже, маємо функцію переходу $y(x) = \sqrt{1-x^2}$.

Означення 5.6 Нехай дано топологічний многовид M_n і дві карти (U, h) і (V, g) на ньому**.** *Гомеоморфізм* $g \circ h^{-1}$ називається C^k*-гладким***,** якщо функції (3.1), які його задають, є C^k-гладкими в області $h(U \cap V)$.

Означення 5.7 *Карти* (U, h) та (V, g) на многовиді M_n називаються *узгодженими,* якщо гомеоморфізми $g \circ h^{-1}$ та $h \circ g^{-1}$ є C^k-гладкими.

Зауважимо, що при перевірці узгодженості карт достатньо перевіряти виконання гладкості одного з вказаних відображень і умови $\det\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right) \neq 0$ для нього.

Приклад 5.6 Розглянемо атлас на одиничному колі, побудований в прикладі 5.3. Карти $(U_1, h_1), (U_3, h_3)$ на одиничному колі є узгодженими. Дійсно, в прикладі 5.5 ми знайшли функцію $y(x) = \sqrt{1-x^2}$ переходу в області $h_1(U \cap V) = (0,1)$, яка задає гомеоморфізм $h_3 \circ h_1^{-1}$. Легко переконатись, що ця функція є C^∞-гладкою, причому в кожній точці області $\det\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \neq 0$. Отже, карти узгоджені. Аналогічно доводиться, що будь-які дві карти на колі, перетин яких непорожній, є узгодженими.

Означення 5.8 Говорять, що топологічний многовид M_n має *гладку структуру* або є *гладким многовидом*, якщо на ньому існує атлас, в якому будь-які дві карти узгоджені.

Очевидно, що **елементарний топологічний многовид автоматично є гладким**. Гладку структуру на R^n, яка визначається картою $\left(R^n, e\right)$, прийнято називати *стандартною гладкою структурою*. Із попереднього прикладу 3.6 випливає, що одиничне коло є гладким многовидом.

Означення 5.9 Два атласи A_1 та A_2 на одному і тому ж гладкому многовиді M_n називаються *еквівалентними*, якщо топологічний простір M_n є одновимірним гладким многовидом відносно об'єднання $A_1 \cup A_2$.

Приклад 5.7 На прямій R розглянемо два атласи: $A_1 = \{(R, e)\}$ і $A_2 = \{(R, f)\}$. Кожний атлас складається із однієї карти, а карти відрізняються гомеоморфізмами. В першій карті e – тотожне відображення, а в другій карті $f(x) = x^3$. Ці атласи нееквівалентні, тому що пряма R відносно об'єднання цих атласів є топологічним многовидом, але не є гладким многовидом.

Дійсно, функція переходу $f\left(e^{-1}(x)\right) = f(e(x)) = x^3$ є функцією класу C^∞, а функція переходу $e\left(f^{-1}(x)\right) = \sqrt[3]{x}$ є лише функцією класу C^0, тобто неперервною, а вже перша похідна цієї функції не існує в точці $x = 0$.

Означення 5.10 Нехай M – гладкий многовид і (U_1, h_1) і (U_2, h_2) – дві карти цього многовиду. Говорять, що ці карти *однаково орієнтовані*, якщо для будь-якої точки з $h_1(U_1 \cap U_2)$ якобіан відображення $h_2 \circ h_1^{-1}$ додатний. В противному випадку, карти називаються *протилежно орієнтованими.*

Зауваження. Якщо образ $h_1(U_1 \cap U_2)$ складається із однієї зв'язної компоненти, то знак якобіана достатньо визначити в одній будь-якій точці.

Означення 5.11 Атлас многовиду називається *орієнтовним*, якщо будь-які дві його карти однаково орієнтовані. Якщо такий атлас на многовиді існує, то многовид називається *орієнтовним*, а якщо не існує – *неорієнтовним*.

Приклад 5.8 Карти $(U_1, h_1), (U_3, h_3)$ на многовиді S^1, які ми розглядали вище, протилежно орієнтовані, тому що відображення $h_3 \circ h_1^{-1} : (0,1) \to (0,1)$ задається функцією $y(x) = \sqrt{1 - x^2}$, для якої маємо: $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}} < 0$ при будь-якому $x \in (0,1)$. Тому побудований вище атлас $A = \left\{(U_i, h_i), i = \overline{1,4}\right\}$ неорієнтований. Але це не означає , що S^1 – неорієнтовний многовид.

5.3 Індуковані гладкі структури. Задання многовидів рівняннями

Теорема 5.1 Якщо M – гладкий многовид та $f : M \to N$ – гомеоморфізм топологічних просторів, то N також гладкий многовид.

Доведення. За умовою M – гладкий многовид. Нехай $A=\{(U_i, h_i), i\in I\}$ – атлас на M. Доведемо, що $A'=\left\{\left(f(U_i), f\circ h_i^{-1}\right), i\in I\right\}$ – атлас на N. Дійсно, по-перше $\bigcup_i f(U_i)=f\left(\bigcup_i U_i\right)=f(M)=N$, тобто множини $f(U_i)$ утворюють покриття простору N. По-друге, всі $f(U_i)$ відкриті у топологічному просторі N, як образи відкритих множин U_i при гомеоморфізмі f. Відображення $f\circ h_i^{-1}$ є гомеоморфізмом як композиція двох гомеоморфізмів: f і h_i^{-1}. Отже, пари $\left(f(U_i), f\circ h_i^{-1}\right), i\in I$ є картами на топологічному просторі N, а їх об'єднання утворює на цьому просторі атлас (рис. 5.2).

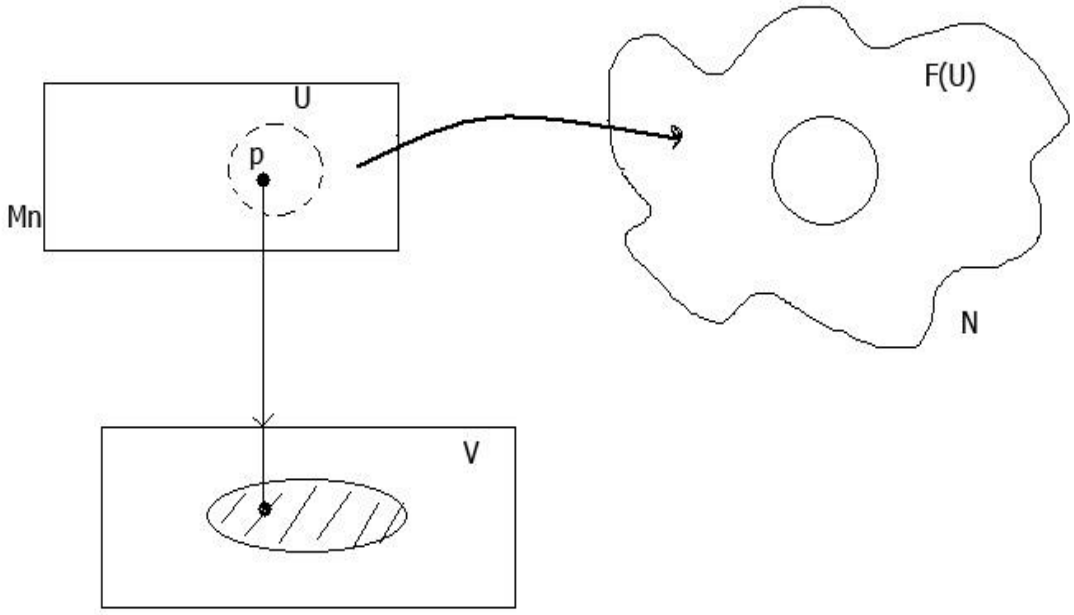


Рисунок 5.2 – Індуковані карти

Перенесення гладкої структури на топологічний простір є ефективним способом побудови гладкого многовиду. Адже, можна спочатку побудувати гладку структуру на «більш простому» топологічному просторі (або використати раніше побудовану структуру), а потім індукувати її на потрібному топологічному просторі, при умові гомеоморфності цих просторів.

Приклад 5.9 Розглянемо на площині коло S^1 та квадрат, як фігуру, що складається із відрізків. Ці фігури є топологічними просторами відносно топології, яка індукована на них природною топологією площини. Ми вже знаємо, що S^1 – одновимірний гладкий многовид. Перенесемо гладку структуру на квадрат. Для цього розташуємо коло і квадрат так, щоб їх центри співпадали і розглянемо центральне проєктування f із центра кола (рис. 5.3). Очевидно, f – гомеоморфізм, тому за теоремою 5.1 квадрат теж є гладким многовидом.

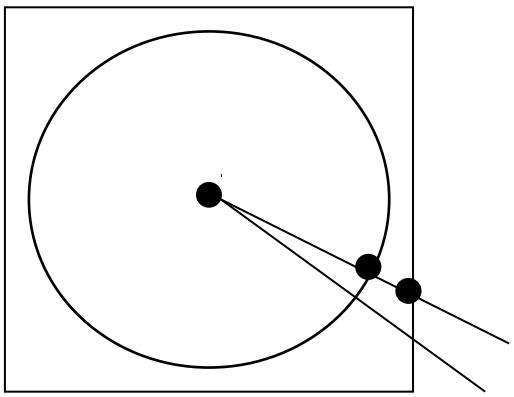


Рисунок 5.3 – Перенесення гладкої структури з кола на квадрат

Задання многовидів рівняннями

Теорема 5.2 Нехай задано функцію $f\left(x^1, x^2, ..., x^n\right)$ класу C^∞ в просторі E_n. Позначимо символом M_c множину точок простору E_n, координати яких задовольняють рівняння $f\left(x^1, x^2, ..., x^n\right) = c$. Якщо $\overline{\text{grad } f}$ є ненульовим вектором в будь-якій точці множини M_c, то ця множина є $(n-1)$- вимірним гладким многовидом класу C^∞. При цьому в околі кожної його точки в якості локальних координат можна вибрати деякі (не завжди будь-які) $(n-1)$ декартових координат.

Доведення. Зауважимо, що аналогічна теорема доводилась в курсі диференціальної геометрії та топології і тому, теж за аналогією, такий спосіб завдання многовиду можна називати неявним.

Нехай точка $P_0\left(x_0^1, x_0^2, ..., x_0^n\right)$ належить множині M_c . За умовою $\overline{\text{grad } f(P_0)} \neq 0$, тобто в цій точці існує відмінна від нуля частинна похідна принаймні по одній змінній від функції $f\left(x^1, x^2, ..., x^n\right)$. Можемо вважати, що $\frac{\partial f}{\partial x^n}\left(x_0^1, x_0^2, ..., x_0^n\right) \neq 0$. Нехай $Q_0\left(x_0^1, x_0^2, ..., x_0^{n-1}\right)$ – точка в просторі E_{n-1}, яка є образом точки P_0 при проєктуванні вздовж координатної прямої x^n . За теоремою про неявну функцію існує такий окіл U_{Q_0} точки Q_0 , інтервал $\left(x_0^n - \delta, x_0^n + \delta\right)$ й така визначена в околі U_{Q_0} C^∞ -гладка функція $y = y\left(x^1, x^2, ..., x^{n-1}\right)$, що виконуються вимоги:

А) $f\left(x^1, x^2, ..., x^{n-1}, y\left(x^1, x^2, ..., x^{n-1}\right)\right) \equiv c$ в околі U_{Q_0} ,

Б) $x_0^n = y\left(x_0^1, x_0^2, ..., x_0^{n-1}\right)$,

В) $\left|x_0^n - y\left(x^1, x^2, ..., x^n\right)\right| < \delta$ в околі U_{Q_0} ,

Г) будь-який розв'язок $\left(x^1, x^2, ..., x^n\right) \in U_{Q_0} \times \left(x_0^n - \delta, x_0^n + \delta\right)$ рівняння $f\left(x^1, x^2, ..., x^n\right) = c$ має вигляд $x^n = y\left(x^1, x^2, ..., x^{n-1}\right)$.

Тоді через U_{P_0} позначимо окіл точки $P_0 \in M_c$ такий, що $U_{P_0} = M_c \bigcap U_{Q_0} \times \left(x_0^n - \delta, x_0^n + \delta\right)$. Відображення $\varphi_0 : U_{P_0} \to R_{n-1}$ за правилом $\varphi\left(x^1, x^2, ..., x^n\right) = x^1, x^2, ..., x^{n-1} \in U_{Q_0}$ є неперервним. Обернене до нього відображення діє за правилом: $\varphi_0^{-1}\left(x^1, x^2, ..., x^{n-1}\right) = \left(x^1, x^2, ..., x^{n-1}, y\left(x^1, x^2, ..., x^{n-1}\right)\right)$. За вимогою В) образом точки при оберненому відображені є точка, що належить множині $U_{Q_0} \times \left(x_0^n - \delta, x_0^n + \delta\right)$, а за вимогою А) він належить множині M_c. Отже, $\varphi_0^{-1}\left(x^1, x^2, ..., x^{n-1}\right) \in U_{P_0}$. Це означає, що обернене відображення теж неперервне. Отримали карту $\left(U_{P_0}, \varphi_0\right)$ на множині M_c. Сукупність подібних карт, об'єднанням яких є вся множина M_c утворює на ній структуру $(n-1)$-вимірного топологічного многовиду. Припустимо, що точка P_0 належить ще одній карті $\left(U_i, \varphi_i\right)$ з локальними координатами $\left(x^1, x^2, ..., x^{i-1}, x^{i+1}, ..., x^n\right)$ Тоді на перетині карт одні локальні координати виражаються через інші за формулами:

$$x^1 = x^1,$$
$$\dots$$
$$x^{i-1} = x^{i-1},$$
$$x^{i+1} = x^{i+1},$$
$$\dots$$
$$x^n = y\left(x^1, x^2, ..., x^{n-1}\right).$$

Оскільки функція $y\left(x^1, x^2, ..., x^{n-1}\right)$ є C^∞-гладкою, то відображення переходу є C^∞-гладкими, що означає наявність на множині M_c структури гладкого многовида. Теорема доведена.

Приклад 5.10 Розглянемо множину точок простору E_2, координати яких задовольняють рівняння $x^2 + y^2 = 1$. З'ясуємо, чи задає це рівняння многовид. Знайдемо $\overline{\text{grad } f}$, де $f(x, y) = x^2 + y^2$:

$$\overline{\text{grad } f} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (2x, 2y).$$

Цей вектор буде нульовим лише при $x = y = 0$, але цей набір не задовольняє рівняння $x^2 + y^2 = 1$. Таким чином, за теоремою 5.2 множина

точок простору E_2, координати яких задовольняють рівняння $x^2+y^2=1$, є одновимірним гладким многовидом.

Теорема 5.3 Нехай відображення $f: E_n \to E_k$ $(k<n)$ задане системою функцій $f_1\left(x^1,x^2,...,x^n\right), f_2\left(x^1,x^2,...,x^n\right),..., f_k\left(x^1,x^2,...,x^n\right)$ класу C^∞ та $M_{\bar{c}}$ – множина точок простору E_n, координати яких задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} f_1\left(x^1,x^2,...,x^n\right)=c_1, \\ f_2\left(x^1,x^2,...,x^n\right)=c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_k\left(x^1,x^2,...,x^n\right)=c_k. \end{cases}$$

Якщо ранг матриці Якобі цієї системи функцій максимальний, то множина $M_{\bar{c}}$ є $(n-k)$-вимірним гладким многовидом, при цьому в околі кожної його точки в якості локальних координат можна взяти деякі $(n-k)$ декартових координат.

Доведення аналогічне доведенню попередньої теореми.

Приклад 5.11 Відображення $f: E_4 \to E_2$ задане системою $\begin{cases} f_1\left(x^1,x^2\right)=\left(x^1\right)^2+\left(x^2\right)^2, \\ f_2\left(x^3,x^4\right)=\left(x^3\right)^2+\left(x^4\right)^2 \end{cases}$ функцій. Розглянемо множину $M_{\bar{c}}$ точок простору E_4, які задовольняють систему $\begin{cases} \left(x^1\right)^2+\left(x^2\right)^2=1, \\ \left(x^3\right)^2+\left(x^4\right)^2=1 \end{cases}$ рівнянь. Матриця Якобі заданої системи функцій має вигляд $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x^j}\right)=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x^1} & \frac{\partial f_1}{\partial x^2} & \frac{\partial f_1}{\partial x^3} & \frac{\partial f_1}{\partial x^4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x^1} & \frac{\partial f_2}{\partial x^2} & \frac{\partial f_2}{\partial x^3} & \frac{\partial f_2}{\partial x^4} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x^1 & 2x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2x^3 & 2x^4 \end{pmatrix}$. Легко переконатись, що ранг цієї матриці в кожній точці множини $M_{\bar{c}}$ дорівнює 2, тому система рівнянь задає гладкий двовимірний многовид.

Розглянуті приклади дають можливість зробити такий

Висновок. Всі регулярні криві та поверхні евклідового простору, які вивчались в класичній диференціальній геометрії, є гладкими многовидами.

? Питання для самоконтролю за змістовим модулем 3:

1. Як формулюється означення топологічного многовиду?
2. Наведіть приклади локальних карт на непорожній множині.

3. Як визначаються узгоджені карти?. Наведіть приклади.
4. Який многовид називається гладким многовидом?
5. Який многовид називається елементарним? Наведіть приклади.
6. Який многовид називається неелементарним? Наведіть приклади.
7. Які атласи карт можна побудувати на множині точок сфери?
8. Які гладкі структури називають індукованими?
9. Наведіть приклад перенесення гладкої структури за допомогою гомеоморфізма.
10. Який гладкий многовид називаєтьсяорієнтовним? Наведіть приклади.
11. Як формулюється теорема про задання гладкого многовиду рівняннями? Наведіть приклади.

Змістовий модуль 4. Гладкі відображення гладких многовидів

Тема 6. Основні поняття диференціальної топології



Ключові поняття: дотичний вектор, дотичний простір многовиду, гладке відображення многовидів, дифеоморфізм многовидів, занурення многовидів, вкладення многовидів, підмноговид

6.1 Дотичні вектори та дотичний простір гладкого многовиду

Одним із важливих прикладів гладкого многовиду є поверхня евклідового простору. Розглянемо спочатку двовимірну поверхню в тривимірному евклідовому просторі як гомеоморфізм $f: G \to E_3$, де G – область в R^2. Одним із способів задання поверхні є її задання за допомогою векторної функції, тобто векторним рівнянням $\bar{r} = \bar{r}(U,V)$, де параметри U,V пробігають множину G. Задамо на поверхні криву γ внутрішніми рівняннями $U = U(t), V = V(t)$. Вектор $\frac{d\bar{r}}{dt}$ швидкості цієї кривої має вигляд $\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{r}'_U \frac{dU}{dt} + \bar{r}'_V \frac{dV}{dt}$ і є дотичним вектором до поверхні. В прикладі 5.2 було доведено, що поверхня в евклідовому просторі є гладким многовидом, що покривається однією картою $\left(f(G), f^{-1}\right)$. Тоді коефіцієнти $\frac{dU}{dt}$ і $\frac{dV}{dt}$ є координатами дотичного вектора в цій карті. Після заміни параметрів на поверхні за формулами $U = U(u,v)$, $V = V(u,v)$ координати дотичного вектора перетворюються за законом $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial u'} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial v'} \cdot \frac{\partial v}{\partial t}$, де матриця $\begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial u} & \frac{\partial U}{\partial v} \\ \frac{\partial V}{\partial u} & \frac{\partial V}{\partial v} \end{pmatrix}$ є матрицею Якобі функцій заміни параметрів. Вид закону перетворення координат дотичного вектору дозволяє зробити висновок, що координати цього вектору не залежать від способу задання поверхні в евклідовому просторі, а залежать лише від вибору локальних координат. Цю властивість дотичного вектора можна покласти в основу означення дотичного вектора до гладкого многовиду.

Означення 6.1 *Дотичним вектором* в точці P до *гладкого многовиду* M_n називається відповідність, при якій кожній локальній системі координат в цій точці відповідає набір чисел, заданий в точці P, причому набори

$u^1,u^2,...,u^n$ та $v^1,v^2,...,v^n$, які відповідають локальним системам координат $\left(x^1,x^2,...,x^n\right)$ та $\left(y^1,y^2,...,y^n\right)$ відповідно, пов'язані законом

$$v^i=\frac{\partial y^i}{\partial x^j}u^j,\quad i,j=\overline{1,n}. \tag{6.1}$$

Тут $\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)$, $i,j=\overline{1,n}$ є матрицею Якобі заміни координат. Закон (6.1) перетворення координат дотичного вектора є тензорним законом типу $\binom{1}{0}$.

Теорема 6.1 Сукупність всіх дотичних векторів до гладкого мгноговиду M_n в його точці P утворює n-вимірний векторний простір, який називається *дотичним простором* цього *многовиду в точці* P і позначається T_PM_n.

Доведення теореми зводиться до введення звичних операцій додавання векторів та множення векторів на число на множині всіх дотичних векторів до многовиду в точці P. Перевірка виконання аксіом векторного простору не містить ніяких ускладнень. Завершує доведення перевірка незалежності результатів введених операцій від вибору локальних систем координат на многовиді.

Якщо в дотичному просторі в точці P розглянути репер і для базису цього репера знайти взаємний, то можемо розглядати векторний простір, натягнутий на цей базис, який називають *кодотичним простором* до *гладкого многовиду в точці* P. Оскільки вектори взаємного базису є лінійними комбінаціями векторів вихідного базису, то кодотичний простір називають ще векторним простором лінійних форм або спряженим до дотичного векторного простору.

Означення 6.2 *Дотичним розшаруванням многовида* M_n називається незв'язне об'єднання $TM=\bigcup\limits_{p\in M_n}T_PM_n$ дотичних просторів разом з канонічною проєкцією $\pi:TM\to M_n$ такою, що $\pi\left(T_pM_n\right)=\{p\}$. При цьому TM наділяється структурою многовиду, а саме кожна карта (U,h) на M_n індукує карту $\left(U\times\bigcup\limits_{p\in U}T_PM_n,H\right)$, де гомеоморфізм H задається формулою $H(p,v)=\left(h(p),\left(v^1,v^2,...,v^n\right)\right)\in R^n\times R^n$, v^i – координати дотичного вектора в розкладі за базисом простору T_PM_n.

Означення 6.3 Нехай M_n – n-вимірний гладкий многовид. Розглянемо інтервал (a,b) на прямій R як гладкий многовид із стандартною гладкою структурою. *Кривою* на гладкому многовиді M_n називається неперервне відображення $f:(a,b)\to M_n$, при якому кожному $t\in(a,b)$ відповідає $f(t)\in M_n$.

Якщо крива проходить через точку P многовиду і $\left(x^1, x^2,..., x^n\right)$ – локальні координати в околі цієї точки, то $f(t) = \left(x^1(t), x^2(t),..., x^n(t)\right), t \in (a,b)$ – рівняння кривої в локальних координатах. Якщо функції $x^i(t)$ є C^k-гладкими, то *крива* на многовиді називається C^k-гладк*ою*.

Теорема 6.2 (геометричний зміст дотичного вектора) Нехай на гладкому многовиді M_n задано гладку криву f і точку P на ній, яка належить карті (U,h) з локальною системою координат $x^1, x^2,..., x^n$. Відображення $\tilde{f} = h \circ f : (a,b) \to E_n$ є звичайною кривою в евклідовому просторі з рівнянням $\tilde{f}(t) = (x^1(t), x^2(t),..., x^n(t))$. Вектор $\tilde{f}'(t)$ швидкості цієї кривої є дотичним вектором гладкого многовиду в точці P.

Приклад 6.1 Відображення $f : (-\pi, \pi) \to E_3$, яке задається рівнянням $f(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$, є кривою на гладкому многовиді E_3 зі стандартною структурою. Ця крива називається гвинтовою лінією. Очевидно, вона є C^∞-гладкою. Згідно з теоремою 6.2 дотичний вектор до цієї кривої має вигляд $\bar{f}'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)$.

6.2 Означення та приклади гладких відображень гладких многовидів. Диференціал гладкого відображення гладких многовидів

Нехай M_m та N_n – гладкі многовиди і $f : M_m \to N_n$ – неперервне відображення. Розглянемо точку $P \in M_m$ і позначимо $Q = f(P)$. Виберемо карту (V,g) на N_n таку, що $Q \in V$. Оскільки відображення f є неперервним, то існує окіл U_P такий, що $f(U_P) \subset V$. Очевидно, що на M_m існує карта (U,h) така, що $U_P \subset U$. Розглянемо відображення $F = g \circ f \circ h^{-1} : h(U_P) \to g(V)$. Воно є відображенням областей евклідових просторів і називається *координатним представленням відображення* f. Якщо локальними координатами в картах (U,h) і (V,g) є відповідно $x^1, x^2,..., x^m$ і $y^1, y^2,..., y^n$, то координатне представлення відображення f задається системою функцій

$$y^1 = f^1\left(x^1, x^2,..., x^m\right),\ y^2 = f^2\left(x^1, x^2,..., x^m\right),\ldots,\ y^n = f^n\left(x^1, x^2,..., x^m\right). \quad (6.2)$$

Означення 6.4 Неперервне відображення $f : M_m \to N_n$ гладких многовидів M_m і N_n називається C^k*-гладким в точці* $P \in M_m$, якщо система функцій, яка задає координатне представлення цього відображення, є системою C^k-гладких функцій**.**

Якщо відображення f є C^k-гладким в кожній точці, то воно називається C^k-гладким. Можна довести, що гладкість відображення не залежить від вибору атласів на многовидах.

Приклад 6.2 Розглянемо неперервне відображення $f: S^1 \to S^2$ кола $S^1 = \{(u,v) \in R^2 : u^2 + v^2 = 1\}$ у сферу $S^2 = \{(x,y,z) \in R^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, при якому образом кола є множина точок сфери, які належать площині $y = 0$. Зафіксуємо на колі точку P в першій чверті, знайдемо її образ $Q \in S^2$. Виберемо на сфері карту (V, g), якій належить точка Q. Нехай $V = \{(x,y,z) \in S^2 : z > 0\}$, g – ортогональне проєктування на площину $z = 0$. Отже, локальними координатами в цій карті є координати x, y. Розглянемо на колі відкриту підмножину $U_P = \{(u,v) \in S^1 : u \in (0,1)\}$, яка містить точку P. Тоді, $f(U_P) \subset V$ і, крім того, $U_P \subset U$, де (U,h) – карта на колі, $U = \{(u,v) \in S^1 : v > 0\}$, h – ортогональне проєктування на вісь абсцис, $h(U_P) = (0,1)$. Отже, в цій карті локальною координатою є координата u.

Залишилось записати координатне представлення за допомогою функцій. Маємо $u \xrightarrow{h^{-1}} \left(u, \sqrt{1-u^2}\right) \xrightarrow{f} \left(u, 0, \sqrt{1-u^2}\right) \xrightarrow{g} (u,0)$. Таким чином, $f^1(u) = u,\ f^2(u) = 0.$ Ці функції є C^∞-гладкими функціями, тому задане відображення кола у сферу є C^∞-гладким.

Зауваження. Дотичне розшарування TM є гладким многовидом розмірності $2n$, а $\pi : TM \to M_n$ є гладким відображенням многовидів.

Означення 6.5 *Гладкою функцією на многовиді* M називається C^k-гладке відображення $f : M \to R$ (це частинний випадок гладкого відображення многовидів, коли $N = R$ і на R розглядається стандартна гладка структура).

Приклад 6.3 Побудуємо відображення $f : S^1 \to R$ одновимірного гладкого многовиду S^1 у R за таким правилом: кожній точці P кола, яка отримується поворотом на кут φ проти годинникової стрілки фіксованої точки P_0 цього кола, поставимо у відповідність дійсне число $\cos\varphi$. Це відображення задається функцією $f(\varphi) = \cos\varphi$ класу C^∞, а тому є C^∞-гладким. За означенням відображення f є гладкою функцією на колі S^1.

Нагадаємо, що відношення гомеоморфізму на множині топологічних просторів є відношенням еквівалентності. Достатньо очевидно, що при гомеоморфізмі гладка структура може не зберегтись. Тому природно посилити вимоги і розглядати відображення, які зберігають гладку структуру.

Означення 6.6 Нехай M та N – гладкі многовиди, $f : M \to N$ – гомеоморфізм. Це відображення називається C^k*-дифеоморфізмом многовидів,*

якщо f та f^{-1} є C^k -гладкими відображеннями. Якщо такий C^k -дифеоморфізм існує, то многовиди називаються C^k -*дифеоморфними*.

Відношення дифеоморфності на множині гладких многовидів є відношенням еквівалентності. Тому множина всіх гладких многовидів розбивається на класи еквівалентності. Два гладких многовида з одного класу дифеоморфні, а з різних класів – недифеоморфні. Властивості многовидів, які зберігаються при дифеоморфізмах, називаються *диференціальними інваріантами*. Дифеоморфні многовиди мають однакову розмірність, тому розмірність многовиду є диференціальним інваріантом. Отже, поняття дифеоморфізму в класі гладких многовидів грає таку саму роль як і поняття гомеоморфізму в класі топологічних просторів. Згідно з означенням 4.3 наявність лише гомеоморфізму гладких многовидів не свідчить про збереження гладкої структури, а лише вимога взаємної гладкості функцій, які задають цей гомеоморфізм, забезпечує гладкість функцій переходу.

Приклад 6.4 Сфера та еліпсоїд дифеоморфні.

Дійсно, центральне проєктування f сфери $x^2+y^2+z^2=1$ на еліпсоїд $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1$ є гомеоморфізмом, який задається системою функцій $f_1(x,y,z)=ax,\ f_2(x,y,z)=by,\ f_3(x,y,z)=cz$. Ці функції лінійні, а, отже, вони самі та обернені до них є C^k -гладкими.

Теорема 6.3 Якщо M – гладкий многовид і N – гладкий многовид зі структурою, що індукована гомеоморфізмом $f: M \to N$, то ці многовиди дифеоморфні. Очевидно, сам гомеоморфізм f є дифеоморфізмом цих многовидів.

Приклад 6.5 1) Коло і квадрат дифеоморфні. Це випливає з існування гомеоморфізму, який переносить гладку структуру з кола на квадрат (див. приклад 5.8 й теорему 6.3).

2) Гладкі многовиди $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ і R зі стандартною гладкою структурою дифеоморфні, оскільки існує гомеоморфізм $f(x)=tgx$, який переносить структуру.

Диференціал гладкого відображення гладких многовидів

Поняття диференціалу гладкого відображення гладких многовидів є узагальненням поняття диференціала функції. Нехай $F: M_m \to N_n$ – гладке відображення гладких многовидів M_m і N_n. Розглянемо на M_m гладку криву $\gamma:(-1;1)\to M_m$, яка проходить через точку P многовиду M_m, причому нехай $\gamma(0)=P$ і $\gamma'(0)=V=\left(V^1,...,V^m\right)$ – вектор швидкості кривої в точці P. Нехай $F(P)=Q$. Очевидно, образ $\tilde{\gamma}=F(\gamma)=F\circ\gamma$ заданої кривої у відображенні F

проходить через точку $Q \in N_n$. Нехай $W = \left(W^1,...,W^n\right)$ є вектором швидкості кривої $\tilde{\gamma}$ в точці Q (рис. 6.1).

Означення 6.7 Диференціалом dF_p гладкого відображення $F : M_m \to N_n$ гладких многовидів M_m і N_n в точці $P \in M_m$ називається відображення дотичних просторів $T_p M_m$ і $T_Q\ N_n$ у точці $P \in M_m$ та її образі $Q \in N_n$, при якому вектор $V = \left(V^1,...,V^m\right)$ швидкості кривої $\gamma \subset M_m$, яка проходить через точку P, відображається на вектор $W = \left(W^1,...,W^n\right)$ швидкості кривої $\tilde{\gamma} = F(\gamma)$ в точці Q.

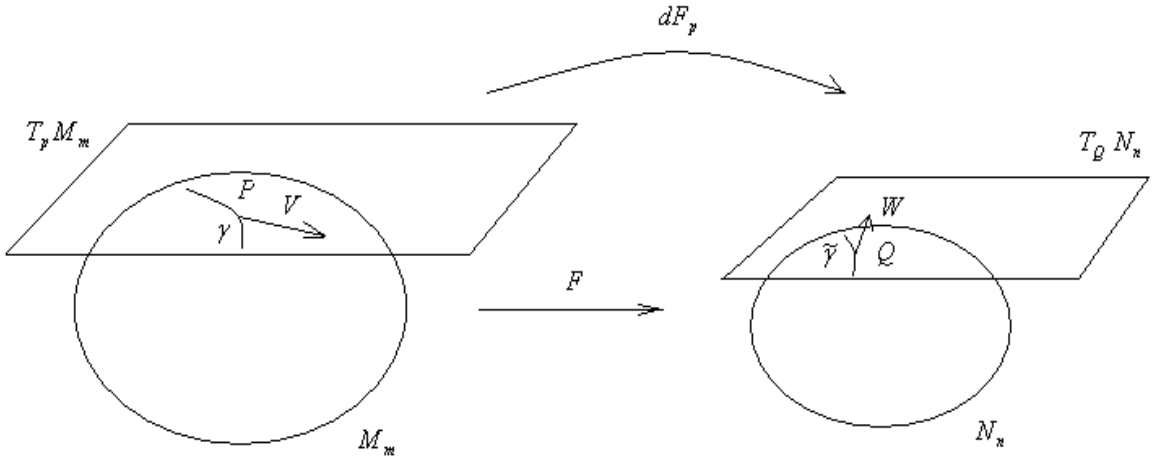


Рисунок 6.1 – Диференціал гладкого відображення

Запишемо диференціал гладкого відображення гладких многовидів у локальних координатах. Виберемо карту (U,φ) на M_m з локальними координатами $x^1, x^2,...,x^n$ таку, що $P \in U$. Нехай (V,ψ) – карта на N_n з локальними координатами $y^1, y^2,...,y^n$ така, що $Q \in V$. Якщо координатне представлення відображення $F : M_m \to N_n$ задається системою функцій (4.1), а координатні представлення кривої γ та її образа $\tilde{\gamma} = F(\gamma) = F \circ \gamma$ мають вигляд $\left(x^1(t),...,x^m(t)\right)$ та $\left(y^1\left(x^i(t)\right),...,y^n\left(x^i(t)\right)\right)$ відповідно, то диференціал $dF_p : V \to W$ відображення F має в локальних координатах вигляд $W^k = \dfrac{dy^k}{dt} = \left(\dfrac{\partial y^1}{\partial x^i}\cdot\dfrac{dx^i}{dt},...,\dfrac{\partial y^n}{\partial x^i}\cdot\dfrac{dx^i}{dt}\right) = \dfrac{\partial y^k}{\partial x^i}V^i, i,k = \overline{1,m}$, або у матричному вигляді $W = \dfrac{d\tilde{\gamma}}{dt} = \dfrac{d(F \circ y)}{dt} = V \cdot I_{x\to y}$, де $I_{x\to y}$ – матриця Якобі відображення F.

З вигляду отриманих формул випливає, що диференціал гладкого відображення гладких многовидів є лінійним відображенням векторних просторів $T_p M_m$ і $T_Q\ N_n$.

Теорема 6.4 Диференціал гладкого відображення не залежить від вибору локальної системи координат.

Доведення. Нехай $F : M_m \to N_n$ – гладке відображення гладких многовидів і dF_P – його диференціал в точці $P \in M_m$. Нехай в системах координат $\left(x^i\right)$ і $\left(x^{i'}\right)$ на першому многовиді координатами дотичного вектора є набори $\left(\xi^i\right)$ і $\left(\xi^{i'}\right)$ відповідно, а в системах координат $\left(y^i\right)$ і $\left(y^{i'}\right)$ на другому многовиді координатами образа дотичного вектора є набори $\left(\eta^i\right)$ і $\left(\eta^{i'}\right)$ відповідно. Тоді в «старих» і «нових» локальних координатах записи диференціала мають вигляд

$$dF_P : \eta^j = \frac{\partial f^j}{\partial x^i}(P)\xi^i \tag{6.3}$$

та

$$dF'_P : \eta^{j'} = \frac{\partial f^{j'}}{\partial x^{i'}}(P)\xi^{i'} \tag{6.4}$$

відповідно, де f – координатне представлення відображення F, воно задається системою функцій (6.1). Використовуючи ланцюжок очевидних рівностей

$$y^{j'} = f^{j'}\left(x^{i'}\right), \quad y^{j'} = y^{j'}\left(y^k\right) = y^{j'}\left(f^k\left(x^i\right)\right), \quad x^i = x^i\left(x^{i'}\right),$$

отримаємо

$$\frac{\partial f^{j'}}{\partial x^{i'}}(P_0) = \frac{\partial y^{j'}}{\partial y^j}(Q_0)\frac{\partial f^j}{\partial x^i}(P_0)\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}(P_0).$$

Скористаємось тим, що набір $\left(\xi^i\right)$ координат дотичного вектора утворює тензор типу $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ та формулами (6.3) і (6.4), тоді

$$\eta^{j'} = \frac{\partial y^{j'}}{\partial y^j}(Q_0)\frac{\partial f^j}{\partial x^i}(P_0)\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}(P_0)\xi^{i'} = \frac{\partial y^{j'}}{\partial y^j}(Q_0)\frac{\partial f^j}{\partial x^i}(P_0)\xi^i = \frac{\partial y^{j'}}{\partial y^{i'}}(Q_0)\eta^j,$$

тобто η^j і $\eta^{j'}$ – координати одного і того самого тензора, тому $dF'_P = dF_P$.

Теорема доведена.

6.3. Занурення та вкладення многовидів. Підмноговиди

Розглянемо узагальнення означення регулярної точки на випадок довільних гладких многовидів.

Означення 6.8 Нехай M_m та N_n – гладкі многовиди і f – їх гладке відображення. Розглянемо на M_m карту (U,φ) і точку $x_0 \in U$. Точка x_0 називається *регулярною точкою відображення* f, якщо для деякого координатного представлення цього відображення точка $\varphi(x_0)$ є регулярною.

Так як точка $\varphi(x_0) \in R_m$, то її регулярність досліджується за допомогою означення.

Приклад 6.6 У прикладі 6.2 було розглянуто гладке відображення $f: S^1 \to S^2$ кола $S^1 = \{(u,v) \in R^2 : u^2 + v^2 = 1\}$ у сферу $S^2 = \{(x,y,z) \in R^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, при якому образом кола є множина точок сфери, які належать площині $y = 0$. Координатне представлення $F = g \circ f \circ h^{-1}$ відображення f задається функціями $y^1(u,v) = u, \quad y^2(u,v) = 0.$

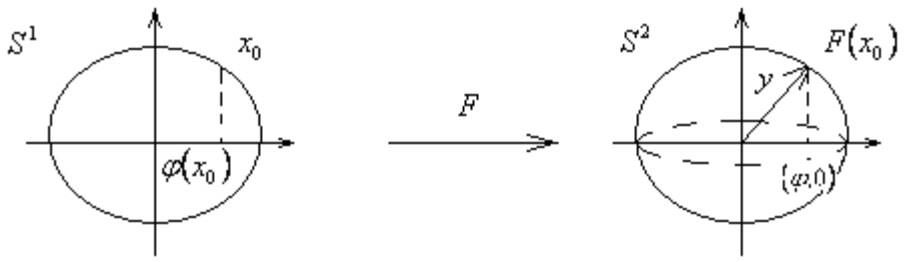


Рисунок 6.2 – Гладке відображення кола у сферу

Для кожної точки x_0 з карти (U,φ) на колі, де $U = \{(u,v) \in S^1 : v > 0\}$, φ – ортогональне проєктування на вісь абсцис, знайдемо точку $\varphi(x_0)$ і матрицю Якобі відображення F в цій точці, отримаємо $\left(\frac{\partial y^i}{\partial u}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Оскільки $\operatorname{rang}\left(\frac{\partial y^i}{\partial u}\right)\Big|_{\varphi(x_0)} = 1 = \min\{1,2\}$ є максимальним, то $\varphi(x_0)$ – регулярна точка відображення F, звідки випливає, що x_0 – регулярна точка відображення f.

Означення 6.9 Нехай $f: M_m \to N_n$ – гладке відображення і будь-яка точка $x_0 \in M_m$ є регулярною. Тоді, відображення f називається

- гладкою іммерсією (або зануренням), якщо $m \le n$,
- гладкою субмерсією (або накладанням), якщо $m \ge n$,

- гладким вкладенням, якщо f – гладка імерсія і f – гомеоморфізм M_m та $f(M_m)$ (топологія на $f(M_m)$ індукована топологією на N_n).

Теорема 6.5 Якщо многовид M_m є компактним і $f: M_m \to N_n$ – ін'єктивна іммерсія, то f є вкладенням.

Приклад 6.7 Відображення $f: R^2 \to R^1$, при якому $f(x,y) = x$ є гладкою субмерсією.

Приклад 6.8 Відображення $f: R^1 \to R^2$, при якому $f(x) = (\sin x, \sin 2x) = F$ (співпадає з координатним представленням) є гладкою іммерсією, але не є вкладенням, оскільки $f(0) = f(\pi) = (0,0)$, тобто відображення не бієктивне.

Розглянемо відображення $f|_{(0,2\pi)}: (0,2\pi) \to R^2$ і $f(x) = (\sin x, \sin 2x)$. Воно бієктивне, але не гомеоморфізм, тому що f^{-1} не є неперервним.

Нарешті, відображення $f: (0,\pi) \to R^2$ і $f(x) = (\sin x, \sin 2x)$ є вкладенням.

Означення 6.10 Підмножина M гладкого многовиду N_n називається його *підмноговидом*, якщо M є образом деякого гладкого вкладення $f: M_m \to N_n$ (гладка структура на M індукується гомеоморфізмом f).

Приклад 6.9 Сфера S^2 – гладкий двовимірний многовид. Меридіан $N = \{(x,y,z) \in S^2 : x = 0,\ y^2 + z^2 = 1\}$ є підмноговидом (рис. 6.3).

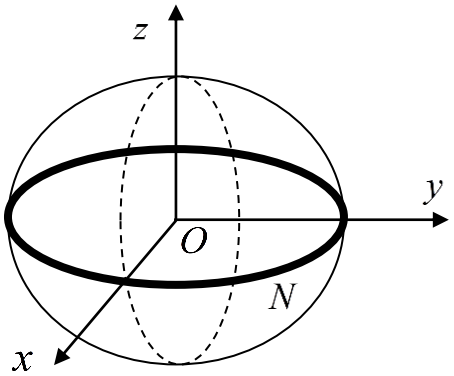


Рисунок 6.3 – Приклад підмноговида

Дійсно, існує гомеоморфізм $f: S^1 \to S^2$, який переводить S^1 в N. Отже, N є підмноговидом многовиду S^2.

Американським математиком Х.Уітні була доведена наступна

Теорема 6.6 (Уітні). Будь-який компактний гладкий n-вимірний многовид можна вкласти в евклідів простір E_{2n+1}.

Зауваження. Якщо многовид задовольняє умови теореми Уітні, то він може бути вкладений в деякий евклідів простір E^N. Тоді дотичне

розшарування $TM = \{(p,v) \in E^N \times E^N \mid p \in M, v \in T_p M\}$ цього многовида є многовидом, який можна вкласти в простір E^{2N}. Наприклад, дотичне розшарування кола S^1 може бути вкладене в тривимірний простір у вигляді циліндра $S^1 \times R^1$.

Тема 7. Ріманова геометрія многовидів



Ключові поняття: ріманова метрика, рімановий многовид, кривина рімановой метрики, тензор Рімана, секційна кривина, поверхня постійної кривини

7.1. Поняття ріманової метрики й ріманового многовиду.

Нагадаємо, що коли задано гладкий многовид, то в кожній його точці можна розглядати дотичний та спряжений з ним кодотичний векторні простори.

Означення 7.1 *Тензорним полем типу* $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ *на гладкому многовиді* називається відображення, яке кожній точці P многовиду ставить у відповідність тензор $T_P\left(\bar{a}^1, \bar{a}^2, ..., \bar{a}^p, \bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_q\right)$, аргументи якого належать дотичним та кодотичним просторам цього многовиду.

Для тензорних полів на многовиді ми можемо виконувати всі ті операції, які ми виконували над тензорами й тензорними полями у векторному та евклідовому просторах.

Означення 7.2 Зв'язний *многовид* M_m називається *рімановим*, якщо в ньому задано тензорне поле g_{ij}, $i, j = \overline{1,m}$ типу $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ таке, що виконуються умови:

1) $(\forall i, j)\, g_{ij} = g_{ji}$,

2) квадратична форма з коефіцієнтами g_{ij} додатно визначена.

Тензор з компонентами g_{ij} називається *метричним тензором.*

Розглянемо дотичний простір $T_P M_m$ до многовиду M_m в його точці P. Якщо скалярний добуток дотичних векторів ввести за формулою $(\xi, \eta) = g_{ij}(p)\xi^i \eta^j, \xi, \eta \in T_P M_m$, то в дотичному просторі виникає евклідова геометрія.

Означення 7.3 Нехай в рімановому многовиді задано криву $x(t) = (x^1(t), ..., x^m(t)),\ t \in (a,b)$. *Довжиною кривої* називається число

$$s = \int_a^b \sqrt{g_{ij}(x(t))\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}dt\,.$$

Можна довести, що довжина кривої не залежить від вибору локальних координат на многовиді.

Означення 7.4 Нехай на рімановому многовиді задано дві криві $x(t)$ та $y(t)$, які перетинаються в точці $P \in M_m$. *Кутом між* даними *кривими* називається кут між їх дотичними векторами $x'(P)$ та $y'(P)$.

З урахуванням означення й з того, що дотичний простір є евклідовим, маємо наступну формулу для обчислення кута φ між кривими:

$$\cos\varphi = \frac{\left(x'(P), y'(P)\right)}{\sqrt{\left(x'(P), x'(P)\right)}\sqrt{\left(y'(P), y'(P)\right)}}\,.$$

Приклад 7.1 Евклідів простір E_3, очевидно, є рімановим многовидом. Метричний тензор в декартових координатах є тензором Кронекера δ_{ij}. Задамо в ньому криву $f(t) = \left(a\cos t, a\sin t, bt\right), t \in \left(\alpha, \beta\right)$ – гвинтову лінію. Її довжина дорівнює $s = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2}\,dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{a^2 + b^2}\,dt = \sqrt{a^2 + b^2}\,(\beta - \alpha)$.

Приклад 7.2 Нехай на евклідовій площині задано декартові координати $\left(x^1, x^2\right)$. Метричний тензор в цих координатах має вигляд $\left(g_{ij}\right) = \left(\delta_{ij}\right)$, тобто є тензором Кронекера. Перейдемо в цьому рімановому многовиді до полярних координат за формулами $x^1 = y^1\cos y^2, x^2 = y^1\sin y^2$. Компоненти метричного тензора перетворяться за тензорним законом типу $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$, який має вигляд $g'_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial y^i}\frac{\partial x^l}{\partial y^j}\,g_{kl}$. Тому отримаємо

$$g'_{11} = \frac{\partial x^k}{\partial y^1}\frac{\partial x^l}{\partial y^1}\delta_{kl} = \left(\frac{\partial x^1}{\partial y^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^2}{\partial y^1}\right)^2 = 1,$$

$$g'_{12} = \frac{\partial x^k}{\partial y^1}\frac{\partial x^l}{\partial y^2}\,\delta_{kl} = \frac{\partial x^1}{\partial y^1}\frac{\partial x^1}{\partial y^2} + \frac{\partial x^2}{\partial y^1}\frac{\partial x^2}{\partial y^2} = 0 = g'_{ji},$$

$$g'_{22} = \frac{\partial x^k}{\partial y^2}\frac{\partial x^l}{\partial y^2}\delta_{kl} = \left(\frac{\partial x^1}{\partial y^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^2}{\partial y^2}\right)^2 = \left(y^1\right)^2.$$

Запишемо метричний тензор евклідової площини в звичних позначеннях $y^1 = r,\ y^2 = \varphi$ у вигляді матриці $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$.

Нехай задано многовид M_m та рімановий многовид N_n з метричним тензором g_{ij}. Розглянемо занурення f многовиду M_m в рімановий многовид N^n. Якщо $\left(x^1, x^2, ..., x^m\right)$ – локальні координати на M_m, $\left(y^1, y^2, ..., y^n\right)$ – локальні координати на N_n, то занурення визначається функціями вигляду $y^j = f^j(x^1, ..., x^m),\ j = 1, ..., n$. На многовиді M_m виникає так звана *індукована метрика*, компоненти якої знаходяться за формулами

$$g_{ij}(x^1, ..., x^m) = \frac{\partial f^l}{\partial x^i}\frac{\partial f^k}{\partial x^j} g_{lk}(y^1(x^1, ..., x^m), ..., y^n(x^1, ..., x^m)),$$

де $i, j = 1, ..., m, l, k = 1, ..., n$.

Приклад 7.3 Розглянемо занурення області $D \subset R^2$ з координатами (u, v) в евклідів простір E_3. Воно задається параметричними рівняннями $x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v)$. Оскільки метричний тензор простору E_3 дорівнює δ_{ij}, то на зануреній поверхні $f(D)$ виникає метричний тензор з координатами g_{ij}. Цей тензор індукується зануренням і, отже, його координати мають вигляд

$$g_{11} = \frac{\partial f^l}{\partial x^1}\frac{\partial f^k}{\partial x^1}\delta_{lk} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = {f_u}^2,$$

де $f_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right)$. Аналогічно,

$$g_{12} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = (f_u, f_v),$$
$$g_{22} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = {f_v}^2.$$

Зауваження. Поверхня у тривимірному евклідовому просторі, що вивчалась в класичній диференціальній геометрії, є двовимірним рімановим многовидом з метричним тензором g_{ij}, $i, j = 1,2$. Відповідна йому квадратична

форма $g_{11}du^2 + 2g_{12}dudv + g_{22}dv^2$ називається *першою квадратичною формою поверхні.* Її геометричний зміст полягає в тому, що вона є квадратом довжини вектора $\xi = (du, dv)$ із дотичної площини.

Означення 7.5 Занурення f ріманового многовиду M_m з метричним тензором g_{ij} в інший многовид N_n з метричним тензором h_{kl} називається *локальною ізометрією*, якщо в околі деякої точки $P \in M_m$ метричний тензор g_{ij} збігається з метрикою, індукованою зануренням. Якщо ж відображення $f : M_m \to N_n$ ріманових многовидів є дифеоморфізмом, то воно називається *ізометрією.*

Приклад 7.4 Розглянемо відображення f площини R^2 з декартовими координатами (u,v) в евклідів тривимірний простір у вигляді циліндра $f(u,v) = (\cos u, \sin u, v)$. Коефіцієнти першої квадратичної форми занурення мають вигляд: $g_{11} = f_u{}^2 = 1$, $g_{12} = g_{21} = (f_u, f_v) = 0$, $g_{22} = f_v{}^2 = 1$. Таким чином, метрика, індукована зануренням, збігається з метрикою площини R^2. Це означає, що циліндр локально ізометричний площині. Разом з тим, це відображення не є глобальною ізометрією (перевірити самостійно, користуючись означенням 7.5).

Якщо ізометрія f діє із M^m в себе, то вона називається *рухом* ріманового простору M^m. Рухи будь-якого ріманового многовиду M утворюють групу $Iso(M)$.

7.2 Кривина ріманової метрики. Тензор Рімана, секційна кривина. Простори постійної секційної кривини

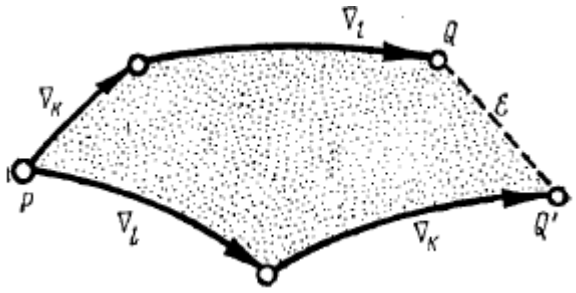
З курсу диференціальної геометрії відомо, що гаусова кривина поверхні задається однією функцією $K(u,v)$ і показує відхилення внутрішньої геометрії поверхні від внутрішньої геометрії площини. Так само можна ставити задачу дослідження відхилення геометрії ріманового многовиду від геометрії евклідового простору. Варто очікувати, що однієї функції вже буде недостатньо.

Нагадаємо, що для C^2 -гладкого векторного поля ξ в евклідовому просторі в декартових координатах порядок знаходження частинних похідних не має значення, тобто

$$\partial_l \partial_k \xi = \partial_k \partial_l \xi .$$

Для векторного поля в рімановому просторі треба знаходити другі коваріантні похідні і вони можуть не співпадати.

Нехай в околі точки P ріманового многовиду введено регулярну систему координат (x) і симетричну зв'язність ∇.



Розглянемо для цієї зв'язності різницю $\nabla_k\nabla_l - \nabla_l\nabla_k$, яку застосуємо до векторного поля T^i типу $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, отримаємо послідовно

$\nabla_l T^i = \dfrac{\partial T^i}{\partial x^l} + \Gamma^i_{lj}T^j = T^i_l$, де Γ^i_{sl} – зв'язність.

$$\nabla_k\left(\nabla_l T^i\right) = \nabla_k\left(T^i_l\right) = \frac{\partial T^i_l}{\partial x^k} + \Gamma^i_{ks}T^s_l - \Gamma^s_{kl}T^i_s,$$

$$\nabla_l\left(\nabla_k T^i\right) = \nabla_l\left(T^i_k\right) = \frac{\partial T^i_k}{\partial x^l} + \Gamma^i_{ls}T^s_k - \Gamma^s_{kl}T^i_s,$$

$$\left(\nabla_k\nabla_l - \nabla_l\nabla_k\right)T^i = \left(\left(\frac{\partial\Gamma^i_{ls}}{\partial x^k} - \frac{\partial\Gamma^i_{ks}}{\partial x^l}\right) + \left(\Gamma^i_{lj}\Gamma^j_{ks} - \Gamma^i_{kj}\Gamma^j_{ls}\right)\right)T^s.$$

В правій частині в дужках отримали тензор типу $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$. Для його компонент введемо позначення $R^i_{slk} = \dfrac{\partial\Gamma^i_{ls}}{\partial x^k} - \dfrac{\partial\Gamma^i_{ks}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{lj}\Gamma^j_{ks} - \Gamma^i_{kj}\Gamma^j_{ls}$, тоді

$$\left(\nabla_k\nabla_l - \nabla_l\nabla_k\right)T^i = R^i_{slk}T^s.$$

Означення 7.5 Тензор R^i_{slk} називається тензором кривини або тензором Рімана типу $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$.

Отже, в загальному випадку коваріантні похідні тензорного поля в римановому многовиді не комутують. Необхідною і достатньою умовою для цього є рівність нулю тензора кривини.

Тензор $R_{jslk} = g_{ji}R^i_{slk}$ називають тензором кривини типу $\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$. Цей тензор має такі властивості:

$$R_{jslk} = R_{lkjs},\ R_{jslk} = -R_{jskl},\ R_{jslk} = -R_{sjlk},\ R_{jslk} = R_{lkjs},$$
$$R_{jslk} + R_{jlks} + R_{jksl} = 0.$$

Приклад 7.5 Кількість незалежних (суттєвих) компонент у n-вимірному ріманову просторі визначається формулою $\frac{n^2\left(n^2-1\right)}{12}$. У тривимірному ріманову просторі тензор кривини має шість незалежних компонент: $R_{1212}, R_{1313}, R_{2323}, R_{1323}, R_{1223}, R_{1323}$. У двовимірному – лише одна компонента – R_{1212}. Можна показати, що $R_{1212} = K\left(g_{11}g_{22} - g_{12}^2\right)$, де K – гаусова кривина.

Виникають питання про визначення кривини багатовимірної поверхні ріманового простору по аналогії з кривиною двовимірної поверхні тривимірного евклідового простору. Але у багатовимірному випадку можна визначити кілька кривин.

Означення 7.6 Згортка тензора кривини типу $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ по верхньому та одному нижньому індексам називається *тензором Річчі*: $R_{sk} = R^i_{slk}$. *Скалярна кривина* визначається формулою $R = g^{sk}R_{sk}$. *Кривиною ріманового простору у двовимірному напрямку (секційною кривиною), натягнутому на вектори X та Y*, називається число $\overline{K}(X,Y) = \frac{R_{\alpha\beta\gamma\delta}X^{\alpha}Y^{\beta}X^{\gamma}Y^{\delta}}{\left(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}\right)X^{\alpha}Y^{\beta}X^{\gamma}Y^{\delta}}$.

Зауважимо, що секційна кривина залежить від вибору двовимірного напрямку, але не залежить від векторів X та Y, які визначають цей напрямок. Якщо відома секційна кривина по всім двовимірним напрямкам, то можна знайти всі компоненти тензора кривини. У двовимірному ріманову просторі секційна кривина це і є гаусова кривина.

Означення 7.7 Поверхні, секційна кривина яких не залежить від точки та двовимірного напрямку, називаються поверхнями постійної кривини.

Має місце

Теорема (Shur**).** Якщо секційна кривина ріманового простору в кожній точці не залежить від вибору двовимірного напрямку в цій точці, то вона не залежить від вибору точки.

Тема 8. Грассманові многовиди

Ключові поняття: многовид Грассмана, матрична координата, стаціонарний кут, плюккерові координати, лінійчатий грассмановий образ поверхні, точковий грассмановий образ поверхні, тензор кривини грассманового многовиду, секційна кривина грассманового многовиду

8.1 Грассманові многовиди евклідового простору

Многовидом Грассмана $G(l,l+p)(l,p\geq 1)$ називають множину усіх l -вимірних площин, що проходять через початок координат O евклідового простору R_{l+p}.

Стаціонарні кути пари *l*-площин евклідова простору. Розглянемо в евклідовому просторі R_{l+p} дві площини однакової розмірності l. Для задання l -площини будемо використовувати поняття матричної координати l -площини. Так будемо називати матрицю виду

$$A=\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_l^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_l^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_l^n \end{pmatrix},$$

стовпцями якої є координати напрямних векторів $\bar{a}_1,\bar{a}_2,...,\bar{a}_l$ l -площини.

Кутами $0\leq\varphi_1\leq\dots\leq\varphi_l\leq\frac{\pi}{2}$ між l-площинами π й τ називаються стаціонарні значення кутів між векторами $\bar{a}\in\pi$ й $\bar{b}\in\tau$.

Нехай l-площина π натягнута на вектори $\bar{a}_1,\bar{a}_2,...\bar{a}_l$, а l-площина τ – на вектори $\bar{b}_1,\bar{b}_2,...\bar{b}_l$. Параметричні рівняння цих l-площин можна записати в матричному вигляді

$$X=AT, Y=BK,$$

де A,B – матричні координати заданих площин, T,K – $(l\times 1)$ -матриці параметрів, X,Y – $((l+p)\times 1)$-матриці координат поточної точки l-площин π й τ відповідно.

Розглянемо ортогональне проєктування f точок l-площини π на l-площину τ. Радіус-вектор X поточної точки l-площини π можна розкласти по базисних векторах l-площини τ та її ортогонального доповнення $\tau^{\perp}$. У матричному записі цей розклад набуде вигляду

$$AT=B\beta+B^{\perp}\tilde{\beta}, \tag{8.1}$$

де $\beta,\tilde{\beta}$ – матриці коефіцієнтів лінійної комбінації, $B^{\perp}$ – матрична координата ортогонального доповнення $\tau^{\perp}$.

Помножимо обидві частини рівності (8.1) зліва на матрицю, транспоновану до B, й скористаємось асоціативністю операції множення матриць, одержимо $(B^tA)T=(B^tB)\beta+(B^tB^{\perp})\tilde{\beta}$, t – символ транспонування. З ортогональності площин τ та $\tau^{\perp}$ випливає, що $(B^tB^{\perp})=\theta$, де θ – нульова $l\times l$-матриця. Тоді одержуємо, що $(B^tA)T=(B^tB)\beta$, звідки

$$\beta=(B^tB)^{-1}(B^tA)T. \tag{8.2}$$

Таким чином, матриця β визначає координати образу $Y=f(X)$ точки X l-площини π при її ортогональному проєктуванні на l-площину τ, причому матриця цього проєктування має вигляд $(B^tB)^{-1}(B^tA)$. Тобто можна записати, що $f(X)=B\beta$. Тепер отримані на l-площині τ образи точок l-площини π будемо ортогонально проєктувати на площину π. Аналогічно рівності (8.1) запишемо рівність

$$Y=BK=A\alpha+A^{\perp}\tilde{\alpha}, \tag{8.3}$$

де $\alpha,\tilde{\alpha}$ – матриці коефіцієнтів лінійної комбінації, $A^{\perp}$ – матрична координата ортогонального доповнення $\pi^{\perp}$ l-площини π.

Помноживши обидві частини рівності (8.3) зліва на матрицю A^t й враховуючи ортогональність π і $\pi^{\perp}$, одержимо $(A^tB)K=(A^tA)\alpha$, звідки

$$\alpha=(A^tA)^{-1}(A^tB)K, \tag{8.4}$$

тобто матриця ортогонального проєктування l-площини τ на l-площину π має вигляд $(A^tA)^{-1}(A^tB)$.

Отже, для образів першого проєктування маємо $Y=f(X)=B\beta$ з одного боку, а з іншого боку $Y=BK$. Тому $B\beta=BK$, а значить

$$\beta=K. \tag{8.5}$$

Підставивши в (8.4) замість K вираз для β з формули (8.2), одержимо формулу для знаходження параметрів образу довільної точки l-площини π в результаті композиції зазначених ортогональних проєктувань у вигляді $\alpha=(A^tA)^{-1}(A^tB)(B^tB)^{-1}(B^tA)T$. Якщо позначити через P_{π} і P_{τ} оператори зазначених ортогональних проєктувань, то ми одержимо, що матриця оператора $P_{\pi}P_{\tau}:\pi\to\pi$ має вигляд $(A^tA)^{-1}(A^tB)(B^tB)^{-1}(B^tA)$. Тоді, для знаходження стаціонарних кутів l-площин π та τ, досить знайти власні вектори цієї матриці

й кути між кожним з них та його проєкцією на l-площину τ . Тобто, $(\bar{a}_i, \bar{b}_j) = \delta_{ij} \cos\varphi_i$, $i, j = 1,..., l$, де $\bar{a}_i$ – власні вектори, а $\bar{b}_i = Пр_\tau \bar{a}_i$, δ_{ij} – символ Кронекера.

Двовимірні площини, в яких реалізуються стаціонарні кути, прийнято називати кутовими площинами. Розенфельд Б.А. показав, що власні числа матриці оператора $P_\pi P_\tau$, яку він позначає W, дорівнюють квадратам косинусів стаціонарних кутів. Таким чином, немає необхідності шукати власні вектори оператора $P_\pi P_\tau$, їх проєкції на l-площину τ, і тільки потім стаціонарні кути. Досить знайти власні значення матриці W й квадратний корінь із них.

Гладка структура на множині площин

Розглянемо множину l–площин простору R_{l+p} . Задавати їх будемо l лінійно незалежними попарно ортогональними векторами. Зафіксуємо часоподібну l-площину π_0 . Ортонормований базис $(\bar{e}_1,...,\bar{e}_l,\bar{e}_{l+1},...\bar{e}_{l+p})$ простору R_{l+p} виберемо так, щоб ця площина визначалася базисними векторами $\bar{e}_1,...,\bar{e}_l$. Нескінченно близьку до π_0 площину π можна задавати параметричними рівняннями

$$x^i = \alpha^i_j t^j,\ i = 1,...,l+p,\ j = 1,...,l,$$

у яких коефіцієнти α^i_j задовольняють умови

$$\sum_{i=1}^{l+p} \alpha^i_m \alpha^i_n = 0,\quad m,n = 1,...l, m \neq n,$$

$$\sum_{i=1}^{l+p} (\alpha^i_m)^2 = 1$$

Розглянемо множину M l-площин, що проєктуються без виродження на дану площину π_0 , рівняння якої мають вигляд $x^{l+\mu} = 0, \mu = 1,..., p.$ Тоді l-площина π з M задається системою рівнянь виду

$$\begin{cases} x^{l+1} = \xi^1_1 x^1 + ... + \xi^1_l x^l, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^{l+p} = \xi^p_1 x^1 + ... + \xi^p_l x^l. \end{cases} \qquad (8.6)$$

Набір чисел $\{\xi^\mu_j\}$ будемо називати *локальними координатами* l-площини π й записувати його $(p \times l)$–матрицею $Z = \{\xi^\mu_j\}$.

Побудуємо відображення $h: M \to R_{l+p}$ за правилом, при якому кожній l-площині з цієї множини ставиться у відповідність набір із $l+p$ чисел $\{\xi_j^\mu\}$. Тоді пара (M,h) є картою на множині l-площин. Для тих l-площин, які не потрапили в цю карту, у такий же спосіб можна побудувати інші карти, а об'єднання всіх карт дає гладку структуру на цій множині.

Існує й інший спосіб введення локальних координат на множині l-площин.

Розглянемо евклідів простір R_{l+p}. Зафіксуємо ортонормований базис $(\bar{e}_1,...,\bar{e}_l,\bar{e}_{l+1},...,\bar{e}_{l+p})$ так, щоб вектори $\bar{e}_1,...,\bar{e}_l$ належали l-площині π_0, а вектори $\bar{e}_{l+1},...,\bar{e}_{l+p}$ були їй ортогональними. У близькій до π_0 l-площині π виберемо ортонормований базис $(\bar{f}_1,...,\bar{f}_l,\bar{f}_{l+1},...,\bar{f}_{l+p})$ такий, щоб вектори $\bar{f}_1,...,\bar{f}_l$ належали π. Вектори цього базису розкладемо по базису $(\bar{e}_i,\bar{e}_\alpha)$

$$\begin{cases} \bar{f}_i = \eta_i^j \bar{e}_j + \eta_i^\beta \bar{e}_\beta, \\ \bar{f}_\alpha = \eta_\alpha^j \bar{e}_j + \eta_\alpha^\beta \bar{e}_\beta, \end{cases}$$

де $i,j = 1,...,l, \alpha,\beta = l+1,...,l+p$.

Спеціалізуємо базис $(\bar{f}_i,\bar{f}_\alpha)$ таким чином, щоб $(\bar{f}_i,\bar{e}_j)=(\bar{f}_j,\bar{e}_i)$ та $(\bar{f}_\alpha,\bar{e}_\beta)=(\bar{f}_\beta,\bar{e}_\alpha)$. Тоді можна записати

$$\begin{cases} \bar{f}_i = (\delta_i^j + \eta_i^j)\bar{e}_j + \eta_i^\beta \bar{e}_\beta, \\ \bar{f}_\alpha = \eta_\alpha^j \bar{e}_j + (\delta_\alpha^\beta + \eta_\alpha^\beta)\bar{e}_\beta. \end{cases}$$

Набір чисел $\{\eta_i^\beta\}$ утворює в околі l-площини π_0 локальні координати, які будемо задавати $(l \times p)$-матрицею N.

Нехай π – l-площина. Виберемо в цій l-площині ортонормований базис $(\bar{g}_1,...,\bar{g}_l)$ такий, що рівняння l-площини π мають вигляд (8.6). Тоді матричну координату цієї l-площини можна записати у вигляді блочної матриці $G = \begin{pmatrix} E \\ Z \end{pmatrix}$, де E – одинична $(l \times l)$-матриця, а Z – уведена раніше $(p \times l)$-матриця. Після спеціалізації базису зазначеним вище способом матрична координата l-площини π запишеться у вигляді блочної матриці $F = \begin{pmatrix} X \\ N \end{pmatrix}$, де X – $(l \times l)$-матриця, а N – матриця локальних координат $\{\eta_i^\beta\}$.

Зв'язок між цими двома базисами можна записати за допомогою введених блочних матриць у вигляді $F = G \cdot Q$, де Q – матриця переходу від однієї системи локальних координат до іншої. Перепишемо цю рівність у вигляді $\begin{pmatrix} X \\ N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ Z \end{pmatrix} \cdot Q$. Після множення матриць у правій частині рівності, одержимо $X = Q,\ N = ZQ.$

Таким чином, зв'язок між двома наборами локальних координат однієї й тієї ж l-площини π має вигляд $N = ZQ$, а матрична координата цієї l-площини запишеться у вигляді $F = \begin{pmatrix} Q \\ N \end{pmatrix}$. Тепер визначимо вид матриці Q. Після транспонування матриці F одержимо

$$F^t = Q^t \begin{pmatrix} E & Z^t \end{pmatrix}. \tag{8.7}$$

Оскільки базис $\bar{f}_1,..., \bar{f}_{l+p}$ є ортонормованим базисом простору R_{l+p}, то $\left(\bar{f}_i, \bar{f}_j\right) = \begin{cases} 0, \textit{якщо } i \neq j, \\ 1, \textit{якщо } i = j. \end{cases}$, або у матричному вигляді $F^t F = E$.

Таким чином, (8.7) можна записати у вигляді

$$F^t F = Q^t \cdot \begin{pmatrix} E_{l\times l} & Z^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_{l\times l} \\ Z \end{pmatrix} \cdot Q$$

Після перетворення цієї рівності матимемо

$E' = Q^t \cdot \begin{pmatrix} E_{l\times l} & Z^t E_{p\times p} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_{l\times l} \\ Z \end{pmatrix} \cdot Q = Q^t (E_{l\times l} + Z^t Z) Q$. Звідси $QQ^t = (E_{l\times l} + Z^t Z)^{-1}$, тобто маємо умову, яку задовольняє матриця Q.

Метрика в многовиді *l*-площин

Метрика ds^2 на грассмановому многовиді визначається як сума квадратів стаціонарних кутів між двома нескінченно близькими l-площинами простору R_{l+p}, тобто

$$\omega^2 = \sum_{i=1}^{l} \varphi_i^{\,2}. \tag{8.8}$$

Там також сформульована теорема про те, що в локальних координатах ця метрика має вигляд

$$ds^2 = Tr[(E + ZZ^t)^{-1} dZ (E + Z^t Z)^{-1} dZ^t], \tag{8.9}$$

де Tr – слід матриці.

Наведемо доведення цього факту. Нехай стаціонарні кути l-площин, між якими ми шукаємо відстань, рівні φ_i, $i=1,...l$. Зафіксуємо одну з l-площин й розглянемо однопараметричну сім'ю l-площин, що містить дві дані l-площини й таку, щоб стаціонарні кути між довільною l-площиною сім'ї й фіксованою l-площиною були пропорційними. Опишемо, як будемо вибирати деякі з векторів ортонормованого базису простору. У кожній з кутових площин один з векторів базису виберемо так, щоб він належав фіксованій l–площині сім'ї, а інший був йому ортогональний. Тоді напрямні вектори довільної l-площини сім'ї мають вигляд $\bar{x}_\alpha = \cos(\varphi_\alpha t)\bar{e}_\alpha + \sin(\varphi_\alpha t)\bar{e}_{\alpha+l}$, $\alpha = 1,...,l$, $t \in [0,1]$. Такі сім'ї називають *l-гелікоїдами*.

В обраному базисі матрична координата довільної l-площини сім'ї має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1 t) & 0 & ... & 0 \\ 0 & \cos(\varphi_2 t) & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \cos(\varphi_l t) \\ \sin(\varphi_1 t) & 0 & ... & 0 \\ 0 & \sin(\varphi_2 t) & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \sin(\varphi_l t) \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix} \qquad (8.10)$$

а матриця локальних координат –

$$Z = \begin{pmatrix} tg(\varphi_1 t) & 0 & ... & 0 \\ 0 & tg(\varphi_2 t) & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & tg(\varphi_l t) \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Після підстановки матриці Z у формулу (8.9) одержуємо $ds^2 = (\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + ... + \varphi_l^2)dt^2$, а значить

$$s = \int_0^1 \sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + ... + \varphi_l^2}\, dt = \sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + ... + \varphi_l^2}\ .$$

Метрика. Виходячи з вигляду метрики грассманового многовиду евклідового простору, метричний тензор записується в такий спосіб

$$g_{\binom{\mu}{i}\binom{\nu}{j}} = ((E_p + ZZ^t)^{-1})^{\nu}_{\mu}((E_l + Z^t Z)^{-1})^{j}_{i}, \qquad (8.11)$$

Для одержання двічі контраваріантного метричного тензора $g^{\binom{\mu}{i}\binom{\nu}{j}}$ запишемо розкладання компонентів метричного тензора $g_{\binom{\mu}{i}\binom{\nu}{j}}$ в ряд по локальним координатам ξ_i^{μ} в околі нуля. Оскільки при досить малих ξ_i^{μ} матриці ZZ^t й Z^tZ мають норму, меншу за одиницю, то (8.11) з точністю до нескінченно малих четвертого порядку можна записати у вигляді $g_{\binom{\mu}{i}\binom{\nu}{j}} = (E - ZZ^t + (ZZ^t)^2)^{\nu}_{\mu}(E - Z^tZ + (Z^tZ)^2)^{j}_{i}$, або у координатах

$$g_{\binom{\mu}{i}\binom{\nu}{j}} = (\delta^{\nu}_{\mu} - \xi^{\mu}_{s}\xi^{\nu}_{s})^{\nu}_{\mu}(\delta^{j}_{i} - \xi^{\alpha}_{i}\xi^{\alpha}_{j})^{\alpha}_{i} = \delta^{\nu}_{\mu}\delta^{j}_{i} - \delta^{\nu}_{\mu}\xi^{\alpha}_{i}\xi^{\alpha}_{j} - \delta^{j}_{i}\xi^{\mu}_{s}\xi^{\nu}_{s} + \xi^{\mu}_{s}\xi^{\nu}_{s}\xi^{\alpha}_{i}\xi^{\alpha}_{j}. \qquad (8.12)$$

Позначимо $\delta^{\nu}_{\mu}\xi^{\alpha}_{i}\xi^{\alpha}_{j} + \delta^{j}_{i}\xi^{\mu}_{s}\xi^{\nu}_{s} = f$. Знайдемо $g^{\binom{\mu}{i}\binom{\nu}{j}}$ у вигляді $g^{\binom{\mu}{i}\binom{\nu}{j}} = \delta^{\nu}_{\mu}\delta^{j}_{i} + F + O(\xi^{\mu}_{i}\xi^{\nu}_{j})^2$. Оскільки $g_{\binom{\mu}{i}\binom{\nu}{j}} g^{\binom{\mu}{i}\binom{\gamma}{k}} = \delta^{\gamma}_{\mu}\delta^{k}_{i}$, то легко одержати, що $F = -f$. У такий спосіб

$$g^{\binom{\mu\ \ \nu}{i\ \ j}} = (\delta^{\nu}_{\mu} + \xi^{\mu}_{s}\xi^{\nu}_{s})^{\nu}_{\mu}(\delta^{j}_{i} + \xi^{\alpha}_{i}\xi^{\alpha}_{j}) = \delta^{\nu}_{\mu}\delta^{j}_{i} + \delta^{\nu}_{\mu}\xi^{\alpha}_{i}\xi^{\alpha}_{j} + \delta^{j}_{i}\xi^{\mu}_{s}\xi^{\nu}_{s} + \xi^{\mu}_{s}\xi^{\nu}_{s}\xi^{\alpha}_{i}\xi^{\alpha}_{j} \qquad (8.13)$$

У рімановому просторі символи Крістоффеля I та II роду є об'єктами внутрішньої геометрії.

Для знаходження символів Крістоффеля I роду в локальних координатах скористаємося формулою

$$\Gamma_{\binom{\mu}{i}\binom{\nu}{j},\binom{\beta}{l}} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial g_{\binom{\mu}{i}\binom{\nu}{j}}}{\partial \xi_l^{\beta}} + \frac{\partial g_{\binom{\nu}{j}\binom{\beta}{l}}}{\partial \xi_i^{\mu}} + \frac{\partial g_{\binom{\beta}{l}\binom{\mu}{i}}}{\partial \xi_j^{\nu}}\right). \qquad (8.14)$$

Після диференціювання (8.14) по локальним координатам, заміни індексів, підсумовування й зведення подібних доданків прийдемо до наступного вигляду символів Крістоффеля I роду.

$$\Gamma_{\binom{\mu}{i}\binom{\nu}{j},\binom{\beta}{l}} = \delta_{\nu}^{\beta}\delta_i^l\xi_j^{\mu} + \delta_j^l\delta_{\beta}^{\mu}\xi_i^{\nu} + O(\xi^3).$$

Тоді символи Крістоффеля другого роду набудуть вигляду

$$\Gamma_{\binom{\mu}{i}\binom{\nu}{j}}^{\binom{\rho}{k}} = \Gamma_{\binom{\mu}{i}\binom{\nu}{j},\binom{\beta}{l}} g^{\binom{\beta\ \ \rho}{l\ \ k}} = 2\delta_{\mu}^{\rho}\delta_i^k\xi_j^{\gamma}(\delta_{\gamma}^{\mu} - \xi_s^{\mu}\xi_s^{\gamma}).$$

Як відомо, геодезичні лінії ріманова простору визначаються як криві, уздовж яких дотичний вектор переноситься паралельно. Це визначення дає наступний вигляд рівняння геодезичних ліній

$$\ddot{Z} - 2\dot{Z}Z^t(E + ZZ^t)^{-1}\dot{Z} = 0, \qquad (8.15)$$

де Z – матриця локальних координат.

8.2 Лінійчатий та точковий грассмановий образ поверхні

Нехай V^2 – двовимірна поверхня класу C^k, $k \geq 1$ в просторі R_4, яка задана векторним рівнянням $\bar{r} = \bar{r}(u^1, u^2)$. Поставимо у відповідність кожній точці x поверхні V^2 площину, паралельну нормальній площини N_x, яка проходить через фіксовану точку O простору R_4. Цим встановлюється відображення поверхні V^2 в грассманів многовид $G(2,4)$.

Грассмановим образом поверхні V^2 називають образ зазначеного відображення. Будемо позначати грассмановий образ символом Γ^2.

Нехай $\bar{\xi}_i, i = 1,2$ – два довільних нормальних вектора до V^2 в точці x, вектори $\bar{r}_i$ – напрямні вектори дотичної площини до V^2 в точці x. Будемо вважати, що поверхня параметризована так, що вектори $\bar{r}_1$ й $\bar{r}_2$ ортогональні.

Таким чином, у кожній точці x поверхні V^2 простору R_4 задані дотична й нормальна площини й пов'язані з ними вектори $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2$, які в цій точці утворюють локальний базис простору R_4.

Грассмановий образ поверхні простору R_4 можна задавати за допомогою спеціальних координат, які називаються плюккеровими. Для цього розглянемо два одиничні базисні вектори $\bar{\xi}_1 = (\xi_1^1, \xi_1^2, \xi_1^3, \xi_1^4)$, $\bar{\xi}_2 = (\xi_2^1, \xi_2^2, \xi_2^3, \xi_2^4)$ деякої фіксованої площини π, що задані своїми декартовими координатами. Розглянемо мінори другого порядку (2×4) - матриці, складеної із цих координат, й позначимо їх символами p^{ij}:

$$p^{ij} = \begin{vmatrix} \xi_1^i & \xi_1^j \\ \xi_2^i & \xi_2^j \end{vmatrix}, \; i < j, \; i, j = 1,..,4. \tag{8.16}$$

Очевидно, маємо шість мінорів $p^{12}, p^{13}, p^{14}, p^{23}, p^{24}, p^{34}$. Ці мінори називаються плюккеровими координатами двовимірної площини. Таким чином, якщо ξ_k^l – декартові координати нормальних векторів у точці x поверхні V^2 простору R_4, то плюккерові координати площини N_x мають вигляд (8.16), де всі координати ξ_k^l залежать від тих же параметрів u^1, u^2, що й сама поверхня. Параметричні рівняння $p^{ij} = p^{ij}(u^1, u^2)$ задають грассмановий образ поверхні. Якщо в якості базису нормальної площини вибрати іншу пару векторів, то набір плюккерових координат цієї площини буде відрізнятись від попереднього на множник, який дорівнює визначнику матриці переходу від одного базису до іншого. Далі вектори $\bar{\xi}_i, i = 1,2$ будемо вибирати нормованими й ортогональними.

Плюккерові координати задовольняють співвідношення Плюккера

$$p^{12} p^{34} - p^{13} p^{24} + p^{14} p^{23} = 0. \tag{8.17}$$

Розглянемо бівектор $\bar{q}$, який визначається площиною, ортогональною до N_x. Він називається додатковим до бівектора $\bar{p} = [\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2]$, який визначається площиною N_x. Нехай $\bar{\tau}_1$ та $\bar{\tau}_2$ – одиничні вектори, ортогональні один одному й площині N_x, та вектори $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2$ утворюють додатно орієнтований базис в ${}^1R_4$, тоді $\bar{q} = [\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2]$, причому бівектори $\bar{p}$ та $\bar{q}$ ортогональні, тому що $(\bar{p}, \bar{q}) = ([\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2], [\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2]) = (\bar{\xi}_1, \bar{\tau}_1)(\bar{\xi}_2, \bar{\tau}_2) - (\bar{\xi}_2, \bar{\tau}_1)(\bar{\xi}_1, \bar{\tau}_2) = 0$. Вектори $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2$

визначають площину, тобто $\bar{\xi}_1^2 = 1$, $\bar{\xi}_2^2 = 1$, тоді $\bar{p}^2 = ([\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2], [\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2]) = \bar{\xi}_1^2 \bar{\xi}_2^2 = 1$ й $\bar{q}^2 = ([\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2], [\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2]) = 1$.

Знайдемо зв'язок між компонентами бівекторів $\bar{p}$ та $\bar{q}$. Розглянемо матрицю, складену з координат векторів $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2$:

$$A = \begin{pmatrix} \xi_1^1 & \xi_1^2 & \xi_1^3 & \xi_1^4 \\ \xi_2^1 & \xi_2^2 & \xi_2^3 & \xi_2^4 \\ \tau_1^1 & \tau_1^2 & \tau_1^3 & \tau_1^4 \\ \tau_2^1 & \tau_2^2 & \tau_2^3 & \tau_2^4 \end{pmatrix}.$$

Оскільки вектори $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2$ утворюють додатно орієнтований ортонормований базис, то $\det A = 1$. В рядках цієї матриці стоять координати векторів ортонормованого базису евклідового простору, тобто має місце наступна матрична рівність $AA^t = E$, де $E' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тоді матриця, обернена до A, має вигляд $A^{-1} = A^t$ або

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \xi_1^1 & \xi_2^1 & \tau_1^1 & \tau_2^1 \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \tau_1^2 & \tau_2^2 \\ \xi_1^3 & \xi_2^3 & \tau_1^3 & \tau_2^3 \\ \xi_1^4 & \xi_2^4 & \tau_1^4 & \tau_2^4 \end{pmatrix}.$$

Скористаємось формулою для мінорів оберненої матриці. Враховуючи, що $\det A = 1$, можна записати

$$A^{-1}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix} = (-1)^{i_1+i_2+k_1+k_2} A\begin{pmatrix} k_3 & k_4 \\ i_3 & i_4 \end{pmatrix}.$$

Покладемо, наприклад, $i_1 = 1, i_2 = 2,\ k_1 = 1, k_1 = 2$. Тоді $i_3 = 3, i_4 = 4,\ k_3 = 3, k_4 = 4$. Маємо

$$\begin{vmatrix} \xi_1^1 & \xi_2^1 \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2+1+2} \begin{vmatrix} \tau_1^3 & \tau_1^4 \\ \tau_2^3 & \tau_2^4 \end{vmatrix},$$

або $p^{12} = q^{34}$.

Аналогічно знайдемо зв'язок між іншими компонентами бівекторів $\bar{p}$ та $\bar{q}$. Отже, бівектори $\bar{p}$ й $\bar{q}$ зв'язані співвідношеннями

$$q^{12} = p^{34}, q^{13} = -p^{24}, q^{14} = p^{23}, q^{23} = p^{14}, q^{24} = -p^{13},\ q^{34} = p^{12}.$$

Будемо розглядати p^{ij} як координати точки шестивимірного евклідового простору R_6, тоді параметричні рівняння $p^{ij} = p^{ij}(u^1, u^2)$ задають точковий грассмановий образ поверхні. Плюккерові координати площини задовольняють умову

$$(p^{12})^2 + (p^{13})^2 + (p^{14})^2 + (p^{23})^2 + (p^{24})^2 + (p^{34})^2 = 1. \qquad (8.18)$$

Нормаллю до поверхні, заданої неявно рівнянням $F(x_1,...,x_n) = 0$ в евклідовому просторі, є вектор

$$gradF = (\frac{\partial F}{\partial x_1},...,\frac{\partial F}{\partial x_n}).$$

Алгебраїчна поверхня простору R_6, що зображує многовид $G(2,4)$ простору R_4, задається рівняннями (8.17) й (8.18). Тому нормалями до многовиду $G(2,4)$ є лінійні комбінації лінійно незалежних векторів

$$\bar{p} = (p^{12}, p^{13}, p^{14}, p^{23}, p^{24}, p^{34}),$$
$$\bar{q} = (p^{34}, -p^{24}, p^{23}, p^{14}, -p^{13}, p^{12}).$$

Безпосередньо перевіряється, що ці нормалі ортогональні й $\bar{p}^2 = q^2 = 1$.

8.3 Тензор кривини грассманового многовиду $G(2,4)$

Розглянемо чотиривимірний многовид $G(2,4)$. У просторі R_6 точковий образ підмноговиду $G(2,4)$ можна задати вектор-функцією $\bar{p} = \bar{p}(y^1, y^2, y^3, y^4)$, де y^i – локальні координати. Нехай $d\sigma^2 = a_{\alpha\beta} dy^\alpha dy^\beta$, $\alpha,\beta = 1,...,4$ – метрика на $G(2,4)$, індукована метрикою охопного простору R_6, де $a_{\alpha\beta} = (\frac{\partial \bar{p}}{\partial y^\alpha}, \frac{\partial \bar{p}}{\partial y^\beta})$ – компоненти цієї метрики. Для підмноговиду $G(2,4)$ розглянемо другі

квадратичні форми $II = \Omega^{\sigma}_{\alpha\beta} dy^{\alpha} dy^{\beta}, \sigma = 1,2$ відносно нормалей $\bar{q}_1$ та $\bar{q}_2$. Коефіцієнти $\Omega^{\sigma}_{\alpha\beta}$ будемо визначати рівностями

$$\Omega^1_{\alpha\beta} = (\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial y^{\alpha} \partial y^{\beta}}, \bar{q}_1),\ \Omega^2_{\alpha\beta} = (\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial y^{\alpha} \partial y^{\beta}}, \bar{q}_2),$$

які можна переписати у вигляді

$$\Omega^1_{\alpha\beta} = -(\frac{\partial \bar{p}}{\partial y^{\alpha}}, \frac{\partial \bar{p}}{\partial y^{\beta}}) = -a_{\alpha\beta},\ \Omega^2_{\alpha\beta} = -(\frac{\partial \bar{p}}{\partial y^{\alpha}}, \frac{\partial \bar{q}}{\partial y^{\beta}}),$$

тому що $\bar{q}_1 = \bar{p}$ й $\bar{q}_2 = \bar{q}$.

Другі квадратичні форми підмноговиду $G(2,4) \subset R_6$ запишемо за допомогою диференціалів dp й dq

$$II^1 = -(dp)^2,\ II^1 = -(dpdq)$$

Рівняння Гаусса для занурення грассманового підмноговиду в простір R_6 мають вигляд

$$\bar{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \sum_{\sigma=1}^{2} \left(\Omega^{\sigma}_{\alpha\gamma} \Omega^{\sigma}_{\beta\delta} - \Omega^{\sigma}_{\alpha\delta} \Omega^{\sigma}_{\beta\gamma} \right) = a_{\alpha\gamma} a_{\beta\gamma} - a_{\alpha\delta} a_{\beta\gamma} +$$
$$+ \left(\frac{\partial p}{\partial y^{\alpha}} \frac{\partial p}{\partial y^{\gamma}} \right) \left(\frac{\partial p}{\partial y^{\beta}} \frac{\partial p}{\partial y^{\delta}} \right) - \left(\frac{\partial p}{\partial y^{\alpha}} \frac{\partial p}{\partial y^{\delta}} \right) \left(\frac{\partial p}{\partial y^{\beta}} \frac{\partial p}{\partial y^{\gamma}} \right)$$

Для обчислення секційної кривини многовиду $G(2,4)$ будемо користуватися формулою

$$\bar{K}(\sigma) = \frac{\bar{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} X^{\alpha} Y^{\beta} X^{\gamma} Y^{\delta}}{(a_{\alpha\gamma} a_{\beta\delta} - a_{\alpha\delta} a_{\beta\gamma}) X^{\alpha} Y^{\beta} X^{\gamma} Y^{\delta}},$$

де ортогональні вектори $\bar{X} = (X^{\alpha})$ й $\bar{Y} = (Y^{\alpha})$ визначають двовимірну площину у дотичному просторі до $G(2,4)$.

Вонг Ю. встановив, що секційна кривина $\bar{K}(\sigma)$ грассманового многовиду $G(2,4)$ евклідового простору R_4 приймає значення з відрізка $[0,2]$.

? Питання для самоконтролю за змістовим модулем 4:

1. Яке відображення називають гладким відображенням гладких многовидів?
2. Тензором якого типу є дотичний вектор до многовиду?.
3. Що називають диференціалом гладкого відображення гладких многовидів?
4. Яке відображення називають зануренням многовиду?. Навести приклад зануреної кривої.
5. Яке відображення називають вкладенням? Навести приклади вкладеного многовиду.
6. Якими є необхідні умови для вкладення многовиду у евклідів простір?
7. Навести приклад застосування теореми Уітні.
8. Який многовид називається рімановим многовидом? Наведіть приклади метричних задач в теорії ріманових многовидів.
9. Яка з точок не буде регулярною у відображенні f, яке задане системою функцій $\begin{cases} y^1 = 2x^1x^2, \\ y^2 = \left(x^1\right)^2 - \frac{1}{2}\left(x^2\right)^2. \end{cases}$?

А) (1,1), **Б)** (2,0), **В)** (0,1).

10. Яким з наведених відображень є відображення $f : R_+ \to R^2$, задане системою функцій $\begin{cases} y^1 = 2x, \\ y^2 = \sqrt{x}, \end{cases}$?

А) гладкою іммерсією, **Б)** гладкою субмерсією, **В)** вкладенням.

11. Який із заданих многовидів задовольняє умови теореми Уітні?

А) півплощина, **Б)** сфера S^2, **В)** еліптичний параболоїд.

Приклади розв'язання задач

Задача 1. Вектор $\bar{x}$ в базисі $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ має координати $(1,-2)$. Знайти контрваріантні координати цього вектора в базисі $\bar{e}^{1'}, \bar{e}^{2'}$, якщо $\bar{e}_{1'} = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2$, $\bar{e}_{2'} = -\bar{e}_1 + \bar{e}_2$.

Розв'язання. Дане перетворення базисних векторів відбувається за формулами (2.7), тому маємо $\left(b_{i'}^{i}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Перетворення контрваріантних координат відбувається за формулами (2.12), отже, нам потрібна обернена матриця. Вона має вигляд $\left(b_i^{i'}\right) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Обчислимо контрваріантні координати:

$$x^{1'} = b_i^{1'} x^i = b_1^{1'} x^1 + b_2^{1'} x^2 = \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot(-2) = -\frac{1}{3},$$

$$x^{2'} = b_i^{2'} x^i = b_1^{2'} x^1 + b_2^{2'} x^2 = -\frac{2}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot(-2) = -\frac{4}{3}.$$

Задача 2. Довести, що відображення $f : V_3 \to R$, при якому кожній впорядкованій трійці векторів ставиться у відповідність їх мішаний добуток, утворює тензор типу $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ і знайти компоненти цього тензора в ортонормованому базисі.

Розв'язання. У векторному просторі V_3 розглянемо відображення $f : \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \to T(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$, при якому $T(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$, тобто є мішаним добутком векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$. З аналітичної геометрії відомо про лінійність мішаного добутку векторів по кожному аргументу.

Для знаходження його координат нагадаємо такі властивості мішаного добутку:

- $T(\bar{e}_i, \bar{e}_j, \bar{e}_k) = (\bar{e}_i, \bar{e}_j, \bar{e}_k) = 0$, якщо хоча б два індекси однакові;
- $T(\bar{e}_i, \bar{e}_j, \bar{e}_k) = -T(\bar{e}_j, \bar{e}_s, \bar{e}_k)$, тобто при непарній перестановці індексів знак змінюється на протилежний;
- $T(\bar{e}_i, \bar{e}_j, \bar{e}_k) = T(\bar{e}_j, \bar{e}_k, \bar{e}_i)$, тобто при парній перестановці індексів мішаний добуток не змінюється.

Нарешті, відносно ортонормованого базиса $T(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) = 1$. Отже, серед 27 координат тензора 3 координати дорівнюють 1, 3 координати дорівнюють -1 і решта 21 координата дорівнює 0.

Задача 3. Довести, що графік неперервної функції n змінних в просторі E_{n+1}, для якої $D(f)$ є областю в просторі R^n, є топологічним многовидом. Знайти його розмірність.

Розв'язання. Графіком функції $f = f\left(x^1, x^2, ...x^n\right)$ є множина $\Gamma_f = \left\{\left(x^1, x^2, ...x^{n+1}\right): x^{n+1} = f\left(x^1, x^2, ...x^n\right)\right\}$. Топологічна структура на Γ_f визначається природною топологією простору E_{n+1}. Розглянемо відображення $h: \Gamma_f \to R^n$ за правилом: $M\left(x^1, x^2, ...x^n, x^{n+1}\right) \in \Gamma_f \to \left(x^1, x^2, ...x^n\right) \in D(f)$. За умовою, область визначення $D(f)$ цієї функції є відкритою в R^n множиною. Отже, пара $\left(\Gamma_f, h\right)$ є картою на множині точок графіку і задає на цій множині структуру елементарного топологічного многовиду розмірності n.

Задача 4. Довести, що будь-який компактний n- вимірний топологічний многовид M є неелементарним.

Розв'язання. Припустимо, що M покривається однією картою, тоді існує гомеоморфізм $\varphi: M \to \varphi(M) \subset R^n$, а це означає, що $\varphi(M)$ теж компактна множина в R^n, а тому вона замкнена. З іншого боку, ця множина як образ відкритої множини при гомеоморфізмі повинна бути відкритою, тобто вона є одночасно відкритою і замкненою в R^n. Оскільки простір R^n є зв'язним, то $\varphi(M)$ є порожньою множиною або всім R^n. Якщо $\varphi(M)$ є порожньою, то M теж є порожньою, якщо ж $\varphi(M) = R^n$, то це також дає протиріччя, тому що R^n не компактний.

Задача 5. Довести, що пара перпендикулярних прямих не є многовидом.

Розв'язання. Очевидно, що множина точок заданої пари перпендикулярних прямих є топологічним підпростором евклідового топологічного простору E_2. При будь-якому його розбитті на відкриті множини, відкрита множина, що містить точку перетину даних прямих, обов'язково містить окіл цієї точки перетину, який має вигляд хреста. Оскільки не існує гомеоморфізму хреста та інтервалу, то можна зробити висновок про неможливість побудови на множині точок пари перпендикулярних прямих структури топологічного многовиду.

Задача 6. На площині E_2 задано множину $M = \left\{(x, y): y = \frac{1}{x} \wedge y > 0\right\}$. Показати, що вона є гладким многовидом. Знайти його розмірність.

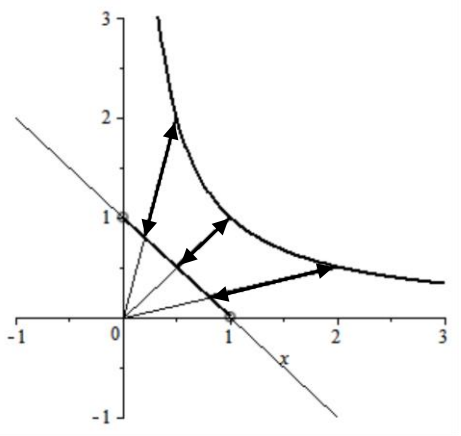


Рисунок 1 – Центральне проєктування гіперболи на пряму

Розв'язання. Задана множина є множиною точок гіперболи, розташованих в першій координатній чверті. Доведемо, що ця множина покривається однією картою. Розглянемо пряму $x+y=1$ і центральне проєктування f з центром в початку координат O. Образом множини M в цьому відображені буде інтервал на прямій $x+y=1$ з кінцями в точках $(0,1)$ і $(1,0)$. Щоб переконатись в тому, що відображення f є гомеоморфізмом, задамо його за допомогою функцій. Точка $P(x,y)$ гіперболи переходить в точку $P'(x',y')$ прямої $x+y=1$, яка лежить на прямій OP. Можна отримати формули $x'=\frac{x}{x+y}, y'=\frac{y}{x+y}$ центрального проєктування. Легко переконатись, що ці формули задають гомеоморфне відображення множини M на відкриту множину на прямій R, тому пара (M,f) є картою, яка покриває цю множину. Таким чином, множина M є елементарним одновимірним топологічним многовидом, а, отже, і гладким многовидом..

Задача 7. Побудувати гладку структуру на колі за допомогою атласу, який складається з двох карт.

Розв'язання. Задамо коло рівнянням $S^1=\{(x,y)\in R^2 : x^2+y^2=1\}$. Розглянемо дві точки $P_0(-1,0), Q_0(1,0)$ на колі та дві відкриті множини $U_1=S^1\setminus\{P_0\}$, $U_2=S^1\setminus\{Q_0\}$.

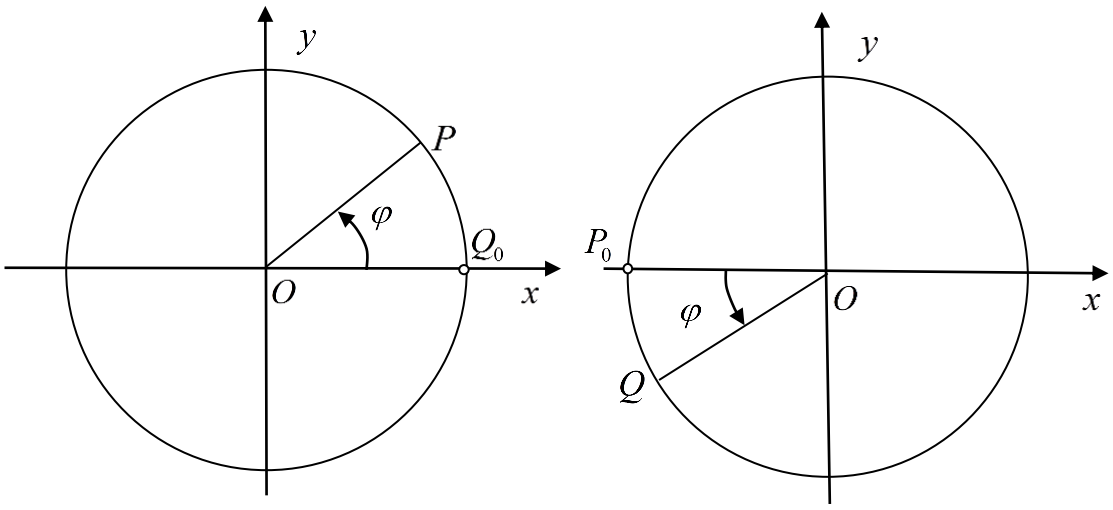


Рисунок 2 – Карти на колі

Введемо відображення $h_1 : U_1 \to R$, при якому кожній точці P із U_1 ставиться у відповідність орієнтований кут Q_0OP, який слід відраховувати від додатного напрямку вісі абсцис (рис. 3.3). Аналогічно, розглянемо відображення $h_2 : U_2 \to R$, при якому кожній точці Q із U_2 ставиться у відповідність орієнтований кут P_0OQ, що відраховується від від'ємного напрямку вісі абсцис. Очевидно, ці відображення є гомеоморфізмами, образами яких є відкрита множина $(-\pi,\pi)$ простору R, тому пари $(U_1,h_1),(U_2,h_2)$ є картами на колі. З'ясуємо, чи є ці карти узгодженими. Оскільки $U_1 \cap U_2 = S^1 \setminus \{P_0, Q_0\}$, то $h_1(U_1 \cap U_2) = (-\pi,0) \cup (0,\pi)$, $h_2(U_1 \cap U_2) = (-\pi,0) \cup (0,\pi)$ і відображення $h_2 \circ h_1^{-1} : h_1(U_1 \cap U_2) \to h_2(U_1 \cap U_2)$ переходу задається формулою $f(t) = \begin{cases} t-\pi, t \in (0,\pi) \\ t+\pi, t \in (-\pi,0) \end{cases}$. Ці функції є C^∞-гладкими, тому що вони лінійні. Отже, ми побудували на колі структуру гладкого многовиду за допомогою атласу із двох карт.

Задача 8. Довести, що сфера S^2 в просторі E_3 є двовимірним гладким многовидом.

Розв'язання. Задамо сферу S^2 рівнянням $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1$. Відмітимо, по-перше, що сфера є топологічним простором з топологією τ, яка індукована природною топологією простору E_3. Розглянемо 2 відкриті підмножини множини точок сфери: $U = S^2 \setminus \{P_0\}, P_0(0,0,1)$, $V = S^2 \setminus \{Q_0\}, Q_0(0,0,-1)$. За допомогою центрального проєктування h множини U із точки P_0 спроєктуємо цю множину на екваторіальну площину α. Аналогічно, за допомогою центрального проєктування k із точки Q_0

множину V спроєктуємо на площину α. Доведемо, що вказані центральні проєктування є гомеоморфізмами. Спочатку розглянемо h. Нехай $M(x^1, x^2, x^3)$ – довільна точка сфери, а $M'\left(y^1, y^2\right)$ - її образ в цьому відображенні. Рівняння площини α має вигляд $\tilde{x}^3 = 0$, а рівняння прямої P_0M запишемо за двома точками $\dfrac{\tilde{x}^1 - 0}{x^1 - 0} = \dfrac{\tilde{x}^2 - 0}{x^2 - 0} = \dfrac{\tilde{x}^3 - 1}{x^3 - 1}$. Тоді для координат точки M' отримаємо $\tilde{x}^1 = -\dfrac{x^1}{x^3 - 1};\ \tilde{x}^2 = -\dfrac{x^2}{x^3 - 1}$. Таким чином, відображення h задається системою функцій $y_1 = -\dfrac{x^1}{x^3 - 1},\ y_2 = -\dfrac{x^2}{x^3 - 1}$. Знаменник $x^3 - 1 \neq 0$, тому що точка P_0 не належить U. Отже, відображення h всюди визначене і неперервне. Обернене до нього відображення h^{-1} точці $N\left(y^1, y^2\right)$ площини ставить у відповідність таку точку $N'\left(x^1, x^2, x^3\right)$ сфери, що точки P_0, N і N' належать одній прямій. Тепер нам потрібно розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\tilde{x}^1 - 0}{y_1 - 0} = \dfrac{\tilde{x}^2 - 0}{y_2 - 0} = \dfrac{\tilde{x}^3 - 1}{0 - 1}, \\ (\tilde{x}^1)^2 + (\tilde{x}^2)^2 + (\tilde{x}^3)^2 = 1, \end{cases}$$

в якій перше рівняння є рівнянням прямої NP_0, а друге – рівнянням сфери. Остаточно отримаємо

$$h^{-1}(y^1, y^2) = \left(\frac{2y^1}{(y^1)^2 + (y^2)^2 + 1}; \frac{2y^2}{(y^1)^2 + (y^2)^2 + 1}; \frac{(y^1)^2 + (y^2)^2 - 1}{(y^1)^2 + (y^2)^2 + 1} \right),$$

звідки можемо зробити висновок про неперервність відображення h^{-1}.

Таким чином, відображення h взаємно однозначне та взаємно неперервне, тобто є гомеоморфізмом між відкритою множиною U і площиною R^2. Ми побудували карту (U, h) на сфері S^2.

Аналогічно будується карта (V, k). Гомеоморфізм k задається формулами: $z^1 = \dfrac{x^1}{x^3 + 1}; z^2 = \dfrac{x^2}{x^3 + 1}$. Побудовані карти утворюють атлас на сфері і наділяють її структурою двовимірного топологічного многовиду.

Доведемо, що ці карти задають гладку структуру на сфері. Для цього знайдемо функції переходу. Перетин карт є множиною $U \bigcap V = S^2 \setminus \{P_0, Q_0\}$.

Відображення переходу $k \circ h^{-1} : h(U \cap V) \to k(U \cap V) = R^2 \setminus \{0,0\}$ задаються функціями виду $z^1 = z^1(y^1, y^2),\ z^2 = z^2(y^1, y^2)$. Неважко знайти явний вигляд цих функцій: $z^1 = \dfrac{y^1}{(y^1)^2 + (y^2)^2},\ z^2 = \dfrac{y^2}{(y^1)^2 + (y^2)^2}$. Вони є C^∞ -гладкими функціями. Аналогічно доводиться, що відображення $h \circ k^{-1}$ задаються C^∞ -гладкими функціями, тобто за означенням карти є узгодженими.

Висновок. Сфера є двовимірним гладким многовидом. Зауважимо, що розглянуті в доведенні центральні проєктування називаються стереографічними проєктуваннями.

Задача 9. Довести, що множина M точок границі трикутника є гладким многовидом.

Розв'язання. Очевидно, що форма і розміри трикутника не важливі, тому розташуємо трикутник так, як показано на рисунку 3. Будемо користуватися прямокутною системою координат.

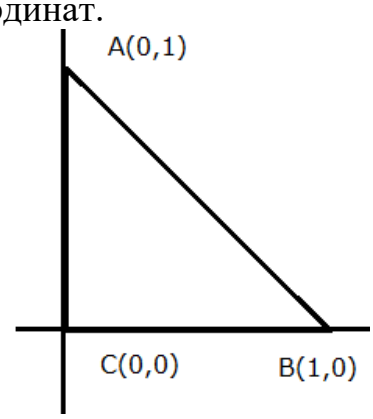


Рисунок 3 – Відкриті множини в трикутнику

Розглянемо три відкриті підмножини множини M:

$$U_1 = (CA] \cup [AB),$$
$$U_2 = (CB] \cup [BA),$$
$$U_3 = (AC] \cup [CB).$$

Побудуємо гомеоморфне відображення φ_1 множини U_1 у відкриту підмножину в R наступним чином:

Якщо точка P належить $(CA]$, то вона має координати $(0, y), y \in (0,1]$. Будемо вважати, що $\varphi_1(P) = y$. Якщо ж $P \in (AB]$, то оскільки рівняння прямої AB має вигляд $x + y = 1$, то точка P має координати $(x, 1-x)$, $x \in [0,1)$. Покладемо $\varphi_1(P) = 1 + x$. Таким чином, $\varphi_1(U_1) = (0,1] \cup [1,2] = (0,2)$.

Аналогічно, для відображення $\varphi_2 : U_2 \to R$ маємо

$$\varphi_2(U_2)=\begin{cases}\varphi_2((x,0))=x,\ x\in(0,1)\\ \varphi_2((x,1-x))=2-x,\ x\in(0,1]\end{cases}=(0,2).$$

І, нарешті, для відображення $\varphi_3 : U_3 \to R$ отримаємо

$$\varphi_3(U_3)=\begin{cases}\varphi_3((0,y))=-y,\ y\in[0,1)\\ \varphi_3((x,0))=x,\ x\in[0,1)\end{cases}=(-1,1).$$

Ці відображення задаються лінійними функціями, тому є гомеоморфізмами. Отримали 3 карти $(U_i,\varphi_i), i=\overline{1,3}$, які утворюють атлас на множині M. Таким чином, на цій множині побудовано структуру одновимірного топологічного многовиду.

Щоб показати, що ця структура є гладкою, доведемо, що будь-які дві карти узгоджені. Розглянемо перші дві карти. Оскільки вони перетинаються: $U_1 \bigcap U_2 = (AB)$, то треба будувати відображення переходу $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ і $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ на перетині карт.

Помітимо, що $\varphi_1(AB)=(1,2)$ і $\varphi_2(AB)=(1,2)$. Відображення φ_1^{-1} числу $\xi\in(1,2)$ ставить у відповідність точку $P\in(AB)$ з координатами $(\xi-1,-\xi+2)$, а відображення φ_2 цій парі ставить у відповідність число $2-(\xi-1)=3-\xi$. Тому, $\left(\varphi_2\circ\varphi_1^{-1}\right)(\xi)=3-\xi,\ \xi\in(1,2)$. Функція $f(\xi)=3-\xi$ є лінійною, а тому і гладкою. Аналогічно отримаємо, що відображення $\varphi_1\circ\varphi_2^{-1}$ задається тією ж функцією $f(\xi)=3-\xi$. Таким чином, карти (U_1,φ_1) і (U_2,φ_2) узгоджені.

Так само доводиться, що карти (U_1,φ_1) і (U_3,φ_3), а також (U_2,φ_2) і (U_3,φ_3) узгоджені.

Висновок. Множина M є одновимірним гладким многовидом.

Задача 10. Побудувати гладку структуру на проєктивній площині.

Проєктивною площиною RP_2 називається множина класів пропорційних ненульових трійок $\left(x^1, x^2, x^3\right)$ дійсних чисел.

Розглянемо підмножини $U_i=\left\{\left(x^1:x^2:x^3\right): x^i\neq 0\right\}, i=1,2,3$. Очевидно, $RP_2=\bigcup_{i=1}^{3}U_i$. Розглянемо такі відображення цих підмножин у площину R^2:

$$h_1:\left(x^1:x^2:x^3\right)\to\left(\frac{x^2}{x^1},\frac{x^3}{x^1}\right),\ h_2:\left(x^1:x^2:x^3\right)\to\left(\frac{x^1}{x^2},\frac{x^3}{x^2}\right),$$

$$h_3:\left(x^1:x^2:x^3\right)\to\left(\frac{x^1}{x^3},\frac{x^2}{x^3}\right).$$

Легко показати, що h_i є гомеоморфізмами. Отже, (U_i,h_i) є картами на множині RP_2. Структуру топологічного многовиду розмірності 2 на RP_2 ми вже побудували. Дослідимо узгодженість карт. Розглянемо, для прикладу, карти (U_1,h_1) і (U_2,h_2). Для їх перетину $U_1\cap U_2=\left\{\left(x^1:x^2:x^3\right):x^1\neq 0,\ x^2\neq 0\right\}$ знайдемо образи при відображеннях h_1 і h_2:

$$h_1(U_1\cap U_2)=\left\{\left(\frac{x^2}{x^1},\frac{x^3}{x^1}\right):x^2\neq 0\right\}=R^2\setminus\{(x,y):x=0\},$$

$$h_2(U_1\cap U_2)=\left\{\left(\frac{x^1}{x^2},\frac{x^3}{x^2}\right):x^1\neq 0\right\}=R^2\setminus\{(x,y):y=0\}.$$

Позначимо $\frac{x^2}{x^1}=p,\frac{x^3}{x^1}=q$, тоді $h_1^{-1}(p,q)=(1:p:q)$. Аналогічно, $h_2^{-1}(p,q)=(p:1:q)$, $h_3^{-1}(p,q)=(p:q:1)$. На множині $U_1\cap U_2$ виконується $p\neq 0$, оскільки $x^1\neq 0$ і $x^2\neq 0$. Відображення переходу на цій множині діють наступним чином: $h_2\circ h_1^{-1}(p,q)=h_2(1:p:q)=\left(\frac{1}{p},\frac{q}{p}\right)$. Очевидно, що відображення переходу задаються функціями класу C^∞. Таким чином, карти (U_1,h_1) і (U_2,h_2) є узгодженими. Аналогічно доводиться узгодженість решти пар карт. Приходимо до висновку, що побудований атлас наділяє множину RP_2 гладкою структурою.

Задача 11. Довести, що коло S^1 – орієнтовний гладкий одновимірний многовид.

Розв'язання. Доведемо, що на S^1 існує орієнтований атлас, тобто S^1 – орієнтовний многовид. Дійсно, такий атлас ми побудували в задачі 3.5. Відображення переходу задаються функціями $f(t)=t-\pi,t\in(0,\pi)$ і $f(t)=t+\pi,t\in(-\pi,0)$. Тому $\frac{df}{dt}=1>0$ в обох випадках.

Задача 12 Довести еквівалентність двох гладких структур на колі (атлас з чотирьох карт і атлас з двох карт).

Розв'язання. Розглянемо карти (U,h) і $\left(U^+,h^+\right)$ з різних атласів. Оскільки вони перетинаються: $U\cap U^+=U^+$, то треба досліджувати відображення переходу на області перетину цих карт. Маємо $h\left(U^+\right)=(0,\pi)$, $h^+\left(U^+\right)=(-1,1)$. Композиції цих відображень діють наступним чином: $h^+\circ h^{-1}:(0,\pi)\to(-1,1)$, тобто функція переходу має вигляд $h^+\circ h^{-1}(t)=\cos t$, а обернена до неї - $h\circ\left(h^+\right)^{-1}(t)=\arccos t$. Обидва відображення переходу є C^∞ -гладкими, тобто карти узгоджені. Аналогічно, для решти пар карт об'єднаного атласу. Дійшли висновку про еквівалентність двох гладких структур на колі.

Задача 13. На множині $R_{2\times2}$ матриць другого порядку з дійсними елементами ввести гладку структуру.

Розв'язання. Розглянемо відображення $h:R_{2\times2}\to R^4$, при якому $h\left(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\right)=(a,b,c,d)$. Можемо вважати відображення h тотожним відображенням, отже, воно є гомеоморфізмом. Оскільки R^4 є гладким чотиривимірним многовидом, то за теоремою 3.1 $R_{2\times2}$ теж є гладким чотиривимірним многовидом.

Розглянемо підмножину $GL(2,R)=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}:ad-bc\neq0\right\}$ множини $R_{2\times2}$. Доведемо її відкритість у топологічному просторі $R_{2\times2}$. Розглянемо відображення $\det:R_{2\times2}\to R$ таке, що матриці $A\in R_{2\times2}$ відповідає її детермінант $\det A$. Це відображення є неперервним, оскільки $\det A$ є многочленом. Очевидно, $GL(2,R)=(\det)^{-1}(R\setminus\{0\})$, тобто є прообразом відкритої множини при неперервному відображенні, а значить у відповідності до критерію неперервності відображення $GL(2,R)$ є відкритою множиною. Далі, образ $h(GL(2,R))$ є множиною точок простору R^4 , крім точок, координати (a,b,c,d) яких задовольняють рівняння $ad-bc=0$. Це рівняння визначає двовимірний конус простору R^4 , тому образ є відкритим. Таким чином, пара $(GL(2,R),h)$ є картою, а множина $GL(2,R)=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}:ad-bc\neq0\right\}$ є гладким многовидом розмірності 4.

Задача 14. Перенести гладку структуру проєктивної площини на зв'язку прямих тривимірного простору.

Розв'язання. Кожну з цих прямих зв'язки можна задати будь-яким її напрямним вектором, тобто поставити їй у відповідність клас пропорційних ненульових трійок $\left(x^1,x^2,x^3\right)$ дійсних чисел. Зв'язка є топологічним

простором. Топологію введемо за допомогою метрики: $\rho(l,m)=\varphi$, тобто відстань між прямими дорівнює куту між ними. Вказана відповідність є гомеоморфізмом, тому зв'язка наділяється структурою двовимірного гладкого многовиду.

Задача 15. Довести, що спеціальна лінійна група $SL(n,R)$ є гладким многовидом. Знайти його розмірність.

Розв'язання. Позначимо $A=(a_{ij})\in SL(n,R)$. За означенням $SL(n,R)=\{(a_{ij}): a_{ij}\in R, \det(a_{ij})=1\}$. Множина всіх матриць n-ого порядку з дійсними елементами ототожнюється з лінійним векторним простором R^{n^2} за допомогою відповідності $(a_{ij})\leftrightarrow(a_{11},a_{12},...,a_{n-1,n})$. Розглянемо в цьому векторному просторі функцію $f(a_{11},a_{12},...,a_{n-1,n})=\det(a_{ij})$. Оскільки вона є многочленом, то відноситься до класу C^∞. Знайдемо $\overline{\operatorname{grad} f}$. Для цього розкладемо визначник за елементами деякого рядка чи стовпця. Зазначимо, що

$$\frac{\partial \det(a_{ij})}{\partial a_{ij}}=(-1)^{i+j}A_{ij},$$

де A_{ij} – алгебраїчне доповнення елемента a_{ij}. Це безпосередньо випливає з формули розкладу визначника за елементами рядка. Перші n координат вектора $\overline{\operatorname{grad} f}$ отримаємо з рівності $\det(a_{ij})=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+...+(-1)^{n+1}a_{1n}A_{1n}$. Наприклад, $\frac{\partial f}{\partial a_{11}}=\frac{\partial}{\partial a_{11}}(a_{11}A_{11})=A_{11}$, оскільки A_{ij} в попередній рівності не залежать від елементів першого рядка. Для матриць з $SL(n,R)$ всі алгебраїчні доповнення не можуть бути рівними нулю тому, що матриці невироджені. Отже, $\overline{\operatorname{grad} f}\neq\overline{0}$. Згідно з теоремою 5.2 множина $SL(n,R)$ є (n^2-1)-вимірним гладким многовидом.

Задача 16. Побудувати диференціал гладкого відображення F півкола радіусу 1 в півколо радіусу 2, якщо центри півкіл співпадають і F центральне проєктування із центра півкола (рис.3).

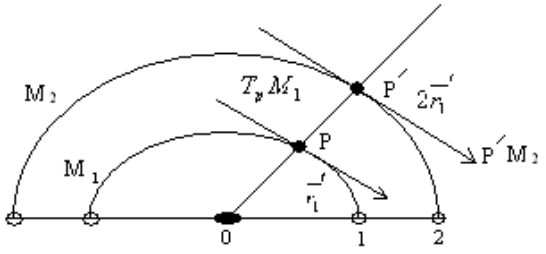


Рисунок 3 – Диференціал гладкого відображення півкіл

Розв'язання. Позначимо півкола відповідно M_1 і M_2. Вони є елементарними многовидами. Дійсно, пара (M_1, h_1), де $h_1 : \left(x, \sqrt{1-x^2}\right) \to x$, є картою на M_1, а пара (M_2, h_2), де $h_2 : \left(x, \sqrt{4-x^2}\right) \to x$ - карта на M_2.

За умовою образом будь-якої точки $P \in M_1$ є точка $P' = F(P) = OP \cap M_2$. Знайдемо декартові координати образа точки $P\left(x, \sqrt{1-x^2}\right)$. Оскільки P' належить прямій OP, рівняння якої має вигляд $y = kx$, де $k = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, то розв'язавши систему $\begin{cases} \tilde{y} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\tilde{x}, \\ \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = 4, \end{cases}$ отримаємо $P'\left(2x, 2\sqrt{1-x^2}\right)$. Можемо знайти координатне представлення f відображення F. За означенням координатного представлення відображення маємо $f = h_2 \circ F \circ h_1^{-1} : x \to 2x$, тобто воно задається функцією $f(x) = 2x$.

Дотичні простори до M_1 і M_2 в точках P і P' є прямими, які ми позначимо символами $T_P M_1$ і $T_{P'} M_2$. Якщо M_1 задати рівнянням $\bar{r}_1 = \bar{r}_1(x)$, то вектор $\bar{r}_1'$ буде базисним в $T_P M_1$. Тому $\forall \bar{a} \in T_P M_1 : \bar{a} = \xi\, \bar{r}_1'$ і, отже, ξ – локальна координата дотичного вектора $\bar{a}$. Якщо позначити через $\bar{b}$ образ вектора $\bar{a}$ при відображені dF_P і через η – локальну координату вектора $\bar{b}$, то отримаємо координатне представлення диференціала відображення F у вигляді

$$\eta = \frac{\partial f}{\partial x}\xi. \tag{4.5}$$

Отже, $\bar{r_1}(x) = \left(x, \sqrt{1-x^2}\right)$, тоді $\bar{r}_1' = \left(1, \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$. Виберемо в $T_P M_1$ вектор $\bar{a}$ з локальною координатою $\xi = 1$, тобто $\bar{a} = \bar{r}_1'$. Наприклад, в точці $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ вектор $\bar{a}$ має координати $\bar{a}\left(\frac{1}{2}\right) = \left(1, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. За формулою (4.5) знайдемо $\frac{\partial f}{\partial x} = 2$ і $\eta = 2 \cdot 1 = 2$. Для знаходження координат вектора $\bar{b}$ скористаємось рівнянням $\bar{r_2}(x) = \left(x, \sqrt{4-x^2}\right)$ півкола M_2. Базис простору $T_{P'} M_2$ утворює вектор

$\bar{r}_2' = \left(1, \dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}\right)$. Оскільки $\bar{b} = 2\bar{r}_2'$, то в точці $P'\left(1, \sqrt{3}\right)$ отримаємо $\bar{b} = 2\bar{r}_2'(1) = 2 \cdot \left(1, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Задача 17. Чи є півкубічна парабола зануреною кривою?

Розв'язання. Півкубічна парабола – це відображення $f : R \to E_2$, яке задається формулами $y^1 = x^2, y^2 = x^3$. Тоді $\left(\dfrac{\partial y^1}{\partial x}, \dfrac{\partial y^2}{\partial x}\right) = \left(2x, 3x^2\right)$. В точці $x = 0$ ранг диференціала відображення дорівнює нулю. Значить, це відображення не є зануренням.

Задача 18. Чи є відображення $f : S^1 \to R^2$ за правилом $f(\varphi) = (\cos\varphi, \sin 2\varphi)$ вкладенням?

Розв'язання. $(\forall \varphi)$ $\dfrac{\partial f}{\partial \varphi} = (-\sin\varphi, 2\cos 2\varphi) \neq \bar{0}$, тобто $\operatorname{rang}\left(\dfrac{\partial f}{\partial \varphi}\right) = 1$. З цього випливає, що f – занурення. Оскільки $f(0) = f(2\pi)$, то f не є бієкцією, а тому не є вкладенням.

Задача 19. Задано відображення листа Мебіуса у тривимірний простір:

$$\begin{cases} x(u^1, u^2) = (1 + \dfrac{u^2}{2}\cos\dfrac{u^1}{2})\cos u^1, \\ y(u^1, u^2) = (1 + \dfrac{u^2}{2}\cos\dfrac{u^1}{2})\sin u^1, \\ z(u^1, u^2) = \dfrac{u^2}{2}\sin\dfrac{u^1}{2}. \end{cases}$$ де $0 \le u^1 < 2\pi$, $-1 \le u^2 \le 1$. Показати, що воно задає неорієнтовну поверхню.

Розв'язання. Вектори локального базису в довільній точці $M = \bar{r}(u^1, u^2)$ мають вигляд

$$\bar{r}_1 = \left(-\frac{u^2}{4}\sin\frac{u^1}{2}\cos u - \left(1 + \frac{u^2}{2}\cos\frac{u^1}{2}\right)\sin u^1, \quad -\frac{u^2}{4}\sin\frac{u^1}{2}\sin u^1 + \left(1 + \frac{u^2}{2}\cos\frac{u^1}{2}\right)\cos u^1, \quad \frac{u^2}{4}\cos\frac{u^1}{2}\right),$$

$$\bar{r}_2 = \left(\frac{1}{2}\cos\frac{u^1}{2}\cos u^1, \quad \frac{1}{2}\cos\frac{u^1}{2}\sin u^1 \quad \frac{1}{2}\sin\frac{u^1}{2}\right).$$

Обчислимо компоненти метричного тензору $g_{ij} = (\bar{r}_i, \bar{r}_j)$:

$$g_{11} = (\bar{r}_1, \bar{r}_1) = \frac{u^2}{16} + \left(1 + \frac{u^2}{2}\cos\frac{u^1}{2}\right)^2$$

$$g_{12} = (\bar{r}_1, \bar{r}_2) = 0,\ g_{22} = (\bar{r}_2, \bar{r}_2) = \frac{1}{4}.$$

Далі знайдемо компоненти метричного тензора типу $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$: так як

$$(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{4}\left(\frac{(u^2)^2}{16} + \left(1 + \frac{u^2}{2}\cos\frac{u^1}{2}\right)^2\right)} \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix}$$

то $g^{11} = \dfrac{1}{\frac{(u^2)^2}{16} + \left(1 + \frac{u^2}{2}\cos\frac{u^1}{2}\right)^2}$ $\quad g^{12} = g^{21} = 0 \quad$ $g^{22} = 4$.

Обчислимо символи Кристофеля 1 роду за формулами $\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}(-g_{ij,k}, g_{jk,i}, g_{ki,j})$, де $g_{ij,k} = \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}$. Отримаємо

$$\Gamma_{111} = -\frac{u^2}{4}\left(1 + \frac{u^2}{2}\cos\frac{u^1}{2}\right)\sin\frac{u^1}{2},\ \Gamma_{112} = \frac{1}{2}\left(-\left(\frac{u^2}{8} + \left(1 + \frac{u^2}{2}\cos\frac{u^1}{2}\right)\cos\frac{u^1}{2}\right)\right),$$

$$\Gamma_{121} = \frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{8} + \left(1 + \frac{u^2}{2}\cos\frac{u^1}{2}\right)\cos\frac{u^1}{2}\right), \quad \Gamma_{211} = \frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{8} + \left(1 + \frac{u^2}{2}\cos\frac{u^1}{2}\right)\cos\frac{u^1}{2}\right),$$

$$\Gamma_{122} = \Gamma_{212} = \Gamma_{221} = \Gamma_{222} = 0.$$

Коефіцієнти зв'язності обчислюються за формулою $\Gamma_{ij}^m = g^{mk}\Gamma_{ijk}$.
Для листа Мебіуса вони мають вигляд:

$$\Gamma_{12}^1 = -\frac{\frac{u^2}{4}\left(1 + \frac{u^2}{2}\cos\frac{u^1}{2}\right)\sin\frac{u^1}{2}}{\frac{u^2}{16} + \left(1 + \frac{u^2}{2}\cos\frac{u^1}{2}\right)^2} \qquad \Gamma_{12}^1 = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{8} + \left(1 + \frac{u^2}{2}\cos\frac{u^1}{2}\right)\cos\frac{u^1}{2}\right)}{\frac{u^2}{16} + \left(1 + \frac{u^2}{2}\cos\frac{u^1}{2}\right)^2}$$

$$\Gamma_{21}^1 = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{8} + \left(1 + \frac{u^2}{2}\cos\frac{u^1}{2}\right)\cos\frac{u^1}{2}\right)}{\frac{u^2}{16} + \left(1 + \frac{u^2}{2}\cos\frac{u^1}{2}\right)^2} \qquad \Gamma_{12}^1 = -\frac{u^2}{4} - 2\left(1 + \frac{u^2}{2}\cos\frac{u^1}{2}\right)\cos\frac{u^1}{2}$$

$$\Gamma_{22}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{22}^2 = 0.$$

Паралельне перенесення вектора $\bar{l} = \xi^i \bar{r}_i$ по поверхні уздовж кривої $x^i = x^i(s)$ задається рівняннями $d\xi^i + \Gamma_{jl}^i du^j \xi^l = 0$, або, в розгорнутому вигляді

$$\begin{cases} d\xi^1 + \Gamma^1_{11} du^1 \xi^1 + \Gamma^1_{12} du^1 \xi^2 = 0 \\ d\xi^2 + \Gamma^2_{11} du^1 \xi^1 + \Gamma^2_{12} du^1 \xi^2 = 0 \end{cases}$$

У нашому випадку ці рівняння набувають вигляду

$$\begin{cases} d\xi^1 + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{u^1}{2}\right) \cdot \xi^2 du^1 = 0 \\ d\xi^2 - 2\cos\left(\frac{u^1}{2}\right) \cdot \xi^1 du^1 = 0 \end{cases}.$$

Знаходимо $du^1 = -\frac{d\xi^1}{\frac{1}{2}\cos\left(\frac{u^1}{2}\right)\cdot\xi^2} = \frac{d\xi^2}{2\cos\left(\frac{u^1}{2}\right)\cdot\xi^1} \Rightarrow -2\xi^1 d\xi^1 = \frac{\frac{1}{2}\cos\left(\frac{u^1}{2}\right)}{\cos\left(\frac{u^1}{2}\right)}\xi^2 d\xi^2$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow -2\xi^1 d\xi^1 = \frac{1}{2}\xi^2 d\xi^2$$

Після інтегрування отримаємо

$-(\xi^1)^2 = \frac{(\xi^2)^2}{4} - C_1 \Rightarrow \xi^1 = \sqrt{C_1 - \frac{(\xi^2)^2}{4}}$, де C_1 – довільна функція від u^1.

Отже, диференціальне рівняння паралельного перенесення може бути записане у вигляді

$$du^1 = \frac{d\xi^2}{2\cos\left(\frac{u^1}{2}\right)\cdot\sqrt{C_1 - \frac{(\xi^2)^2}{4}}} \quad \text{або} \quad \cos\left(\frac{u^1}{2}\right)du^1 = \frac{d\xi^2}{2\sqrt{\frac{4C_1 - (\xi^2)^2}{4}}}, \text{ звідки}$$

$$\cos\left(\frac{u^1}{2}\right)du^1 = \frac{d\xi^2}{\sqrt{4C_1 - (\xi^2)^2}}$$

Проінтегруємо останнє рівняння, отримаємо

$$2\sin\frac{u^1}{2} + C_2 = \arcsin\frac{\xi^2}{2\sqrt{C_1}}.$$

Система набуває вигляду $\begin{cases} -(\xi^1)^2 = \frac{(\xi^2)^2}{4} - C_1 \\ 2\sin\frac{u^1}{2} + C_2 = \arcsin\frac{\xi^2}{2\sqrt{C_1}} \end{cases}$

При $\xi^1 = 1$, $\xi^2 = 0$ довільні змінні $C_1 = 1$, $C_2 = -2\sin\frac{u^1}{2}$.

Покладемо $u^1 = 0$, тоді $C_2 = 0$.

Таким чином $\begin{cases} -(\xi^1)^2 = \dfrac{(\xi^2)^2}{4} - 1 \\ 2\sin\dfrac{u^1}{2} = \arcsin\dfrac{\xi^2}{2} \end{cases}$

Отримаємо $\xi^1 = \cos(2\sin\frac{u^1}{2})$, $\xi^2 = 2\sin(2\sin\frac{u^1}{2})$.

Початковий вектор буде мати вид $\bar{l}_0 = \bar{r}_1(u^1 = 0) = \left(0, \quad 1+\frac{u^2}{2}, \quad \frac{u^2}{4}\right)$. А після паралельного перенесення $\bar{l}_k = \xi^1 \cdot \bar{r}_1 + \xi^2 \cdot \bar{r}_2 = \xi^1 \cdot \bar{r}_1(u^1 = 2\pi) = \left(0, \quad 1-\frac{u^2}{2}, \quad -\frac{u^2}{4}\right)$.

При $\xi^1 = 0$, $\xi^2 = 1$, C_1 та C_2 приймуть значення $C_1 = \frac{1}{4}$, $C_2 = \frac{\pi}{2}$, а для координат матимемо

$$\xi^1 = \frac{1}{2}\sin\left(2\sin\frac{u^1}{2}\right), \quad \xi^2 = \cos\left(2\sin\frac{u^1}{2}\right).$$

Початковий вектор $\bar{p} = \xi^1 \cdot \bar{r}_1 + \xi^2 \cdot \bar{r}_2$ буде мати вигляд

$\bar{p}_0 = \bar{r}_2(u^1 = 0) = (\frac{1}{2}, \quad 0, \quad 0)$, а кінцевий - $\bar{p}_k = \xi^2 \cdot \bar{r}_2(u^1 = 2\pi) = (-\frac{1}{2}, \quad 0, \quad 0)$.

Отже, вектори $\bar{r}_1$ та $\bar{r}_2$ у початковій та кінцевій точках після їх паралельного обнесення вздовж середньої лінії листа Мебіуса набули такого вигляду

$$\bar{r}_1(u^1 = 0) = \left(0, \quad 1+\frac{u^2}{2}, \quad \frac{u^2}{4}\right), \quad \bar{r}_1(u^1 = 2\pi) = \left(0, \quad 1-\frac{u^2}{2}, \quad -\frac{u^2}{4}\right)$$

$$\bar{r}_2(u^1 = 0) = (\frac{1}{2}, \quad 0, \quad 0), \quad \bar{r}_2(u^1 = 2\pi) = (-\frac{1}{2}, \quad 0, \quad 0)$$

Оскільки паралельне перенесення є рухом у евклідовому просторі, то воно описується матрицею із групи $SO(3)$. Ця група є зв'язною, і тому, орієнтація рухомого репера в початковій і кінцевій точках є однаковою. Це означає, що напрями нормальних векторів поверхні у початковій та кінцевій точках протилежні. Це і доводить, що лист Мебіуса – є неорієнтовною поверхнею.

Задача 20. Показати, що поверхня обертання

$$\begin{cases} x(u^1, u^2) = u^1 \cos u^2, \\ y(u^1, u^2) = u^1 \sin u^2, \\ y(u^1, u^2) = f(u^1). \end{cases}$$

є орієнтовною.

Розв'язання.

Знайдемо вектори $\bar{r}_i$, отримаємо

$$\bar{r}_1 = \left(\cos u^2, \quad \sin u^2, \quad f'(u^1)\right), \quad \bar{r}_2 = \left(-u^1 \sin u^2, \quad u^1 \cos u^2, \quad 0\right).$$

Далі послідовно знайдемо компоненти g_{ij} метричного тензору та компоненти метричного тензору типа $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$, коефіцієнти зв'язності:

$$g_{11}=(\bar{r}_1,\bar{r}_1)=1+f'^2,\ g_{12}=(\bar{r}_1,\bar{r}_2)=0,\ g_{22}=(\bar{r}_2,\bar{r}_2)=(u^1)^2,$$

$$g^{11}=\frac{1}{1+f'^2},\quad g^{12}=g^{21}=0,\ g^{22}=(u^1)^2.$$

$$\Gamma^1_{11}=-\frac{ff''}{1+f'^2},\quad \Gamma^2_{11}=0,\ \Gamma^1_{12}=0,\ \Gamma^2_{12}=\frac{1}{u^1},\quad \Gamma^1_{22}=-\frac{u^1}{1+f'^2},\quad \Gamma^2_{22}=0.$$

Система рівнянь паралельно перенесеного вектора $\bar{l}=\xi^i\bar{r}_i$ по поверхні уздовж кривої $x^i=x^i(s)$ у випадку поверхні обертання зводиться до вигляду

$$d\xi^1=\frac{u^1}{1+f'^2}\xi^2du^2 \qquad d\xi^2=-\frac{1}{u^1}\xi^1du^2$$

або

$$\frac{d\xi^1}{\frac{u^1}{1+f'^2}\xi^2}=\frac{d\xi^2}{-\frac{1}{u^1}\xi^1}=du^2$$

Після інтегрування $\begin{cases}\frac{1}{u^1}(\xi^1)^2+\frac{u^1}{1+f'^2}(\xi^2)^2=C_1\\ u^2+C_2=-\sqrt{1+f'^2}\cdot\arcsin\left(\sqrt{\frac{u^1}{C_1(1+f'^2)}}\cdot\xi^2\right)\end{cases}$, де C_1, C_2 – довільні функції від u^1.

У початковий момент $\xi^1=1$, $\xi^2=0$, функції C_1, C_2 рівні виразам

$$C_1=\frac{1}{u^1},\ C_2=-u^2.$$

Покладемо $u^2=0$, тоді $C_1=\frac{1}{u^1}$, $C_2=0$.

Таким чином

$$\xi^1=\sqrt{1-u^1\sqrt{1+f'^2}\cdot\sin\left(\frac{u^2}{\sqrt{1+f'^2}}\right)},\qquad \xi^2=\frac{\sqrt{1+f'^2}}{u^1}\cdot\sin\left(\frac{u^2}{\sqrt{1+f'^2}}\right)$$

Для вектора $\bar{l}$ в початковій точці матимемо

$$\bar{l}_0=\bar{r}_1(u^2=0)=(1,\quad 0,\quad f'),$$

а після паралельного перенесення

$$\bar{l}_k(u^2 = 2\pi) = \left[\sqrt{1 - u^1 \sqrt{1 + f'^2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\sqrt{1 + f'^2}} \right)}, \sqrt{1 + f'^2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\sqrt{1 + f'^2}} \right), \right.$$

$$\left. f' \cdot \sqrt{1 - u^1 \sqrt{1 + f'^2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\sqrt{1 + f'^2}} \right)} \right]$$

При $\xi^1 = 0$, $\xi^2 = 1$, C_1 та C_2 матимуть вигляд

$$C_1 = \frac{u^1}{1 + f'^2}, \; C_2 = -u^2 - \frac{\pi}{2} \sqrt{1 + f'^2}$$

Таким чином, початковий та кінцевий вектори $\bar{p} = \xi^1 \cdot \bar{r}_1 + \xi^2 \cdot \bar{r}_2$ будуть мати вигляд

$$\bar{p}_0 = \bar{r}_2(u^2 = 0) = (0, \quad u^1, \quad 0) \text{ та } \bar{p}_k = \xi^2 \cdot \bar{r}_2(u^2 = 2\pi) = (0, \quad u^1, \quad 0).$$

Після паралельного обнесення вздовж середньої лінії поверхні обертання вектори $\bar{r}_1$ та $\bar{r}_2$ у початковій та кінцевій точках набудуть вигляду

$$\bar{r}_1(u^2 = 2\pi) = (1, \quad 0, \quad f'), \; \bar{r}_2(u^2 = 2\pi) = (0, \quad u^1, \quad 0).$$

Так як паралельне перенесення – це рух у евклідовому просторі, то воно описується матрицею $SO(3)$, яка є зв'язною, а значить орієнтація репера у початковій та кінцевій точках є однаковою. Таким чином, розглянута поверхня обертання є орієнтовною.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Довести, що визначник Грама лінійно незалежної системи векторів додатний.

2. Знайти базис, взаємний до ортонормованого базису.

3. Який базис буде взаємним до базису $\bar{e}^1, \bar{e}^2, ..., \bar{e}^n$?

4. Показати, що вектори $\bar{e}_1 = (1,1,0)$, $\bar{e}_2 = (-1,0,3)$, $\bar{e}_3 = (2,0,1)$ утворюють базис, знайти взаємний до нього базис за формулами Гіббса, ковариантні та контрваріантні координати вектора $\bar{x} = (2,0,3)$.

5. Дано базис $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$. Відомо, що $|\bar{e}_1| = \frac{1}{2}$, $|\bar{e}_2| = 2$, $\angle(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = \frac{\pi}{3}$. Використовуючи означення взаємного базису, з'ясувати взаємне розташування векторів даного та взаємного базисів і побудувати їх.

6. Дано базис $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$. Відомо, що $\bar{e}_1 = (1,1,0)$, $\bar{e}_2 = (-1,0,3)$, $\bar{e}_3 = (2,0,1)$. Знайти координати векторів взаємного базису, користуючись лише означенням.

7. Знайти нові координати тензора типу $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, якщо його старі координати є елементами матриці $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ і зв'язок між векторами нового і старого базисів має вигляд:

$$\begin{cases} \bar{e}_1 = \bar{e}'_1 + \bar{e}'_2 - 2\bar{e}'_3, \\ \bar{e}_2 = -\bar{e}'_1 + n\bar{e}'_2 + \bar{e}'_3, \\ \bar{e}_3 = \bar{e}'_1 - \bar{e}'_2 + \bar{e}'_3. \end{cases}$$

8. Трійка $(1,-2,3)$ є набором старих коваріантних координат вектора $\bar{x}$ відносно базису $(\bar{e}_i)$. Знайти набір нових контрваріантних координат цього вектора, если зв'язок між векторами нового і старого базисів має вигляд:

$$\begin{cases} \bar{e}_1 = \bar{e}'_1 + \bar{e}'_2 - 2\bar{e}'_3, \\ \bar{e}_2 = -\bar{e}'_1 + n\bar{e}'_2 + \bar{e}'_3, \\ \bar{e}_3 = \bar{e}'_1 - \bar{e}'_2 + \bar{e}'_3. \end{cases}$$

9. Чи утворює регулярну систему координат в просторі E_2 система функцій

$$\begin{cases} y^1 = 2x^1 + 2x^2, \\ y^2 = x^1 - x^2. \end{cases}$$

10. Чи утворює регулярну систему координат в області $X: 1 < \left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2 < 2$ простору E_2 система функцій

$$\begin{cases} y^1 = \left(x^1\right)^2 - \left(x^2\right)^2, \\ y^2 = 2x^1x^2. \end{cases}$$

11. Довести, що поверхня евклідового простору є топологічним многовидом. Яка його розмірність?

12. Чи є два трикутники зі спільною вершиною топологічним многовидом?

13. Побудувати гомеоморфізм, який переносить гладку структуру з трикутника на квадрат.

14. Розглянути а колі S^1 атлас з 4 карт. Побудувати гомеоморфізм, який переносить гладку структуру з кола на квадрат. Знайти карти на квадраті, які індукуються цим гомеоморфізмом.

15. Довести, що сфера S^n евклідового простору E_{n+1} є гладким многовидом. Знайти розмірність цього многовиду.

16. Довести, що спеціальна ортогональна група $SO(n,R)$ є гладким многовидом. Знайти його розмірність.

17. Побудувати структуру гладкого многовиду, атлас якого містить принаймні дві карти, на множині точок, координати яких задовольняють рівняння $M = \left\{(x,y) \in R^3 : y^2 + x^2 = 2z\right\}$. Знайти локальні координати точки $M(1,1,1)$ в локальних картах, яким вона належить.

18. Побудувати гомеоморфізм f, який переносить гладку структуру многовиду M на топологічний простір N, де M – відкритий круг, N – одна порожнина двопорожнинного гіперболоїду.

19. Довести, що проєктивна площина і зв'язка прямих тривимірного афінного простору дифеоморфні.

20. Довести, що лінійний простір R^{n^2} і множина квадратних матриць порядку n дифеоморфні.

21. З'ясувати, чи є відображення $f(x) = x^3$ дифеоморфізмом із R в R.

22. Довести, що відображення $f: R \to R^2$, задане формулами $y^1 = x^2, y^2 = x(x^2 - 1)$, є зануренням. Чи буде це відображення вкладенням?

23. Довести, що графік функції арктангенса є вкладенням дійсної прямої в R^2.

24. Довести, що еліпс є вкладенням кола в R^2.

25. Довести, що гладке відображення $f: S^1 \to S^2$, розглянуте в прикладі 4.10 є гладким вкладенням.

26. Довести, що відображення $F: R^2 \to R$, яке задається функцією $F(x, y) = x$, тобто є ортогональною проєкцією на вісь абсцис, є прикладом гладкої субмерсії.

27. Довести, що відображення $f: (x, y) \to \left(y \sin \pi x \cdot \cos \pi x, y \sin^2 \pi x\right)$ є гладким відображенням $f: R^2 \to R^2$, яке переводить границю квадрата $[0,1] \times [0,1]$ в коло $x^2 + y^2 - y = 0$.

28. Довести, що група $O(n)$ ортогональних $n \times n$ - матриць може бути вкладена у простір R^{n^2} .

29. Чи є відображення $f: R_+ \to R^2$ за правилом $f(x) = \left(x, \sin \frac{1}{x}\right)$ вкладенням?

30. Побудувати диференціал dF_P гладкого відображення F параболи $y = x^2$ на параболу $y = x^2 - 1$, якщо F – центральне проєктування із точки $C(0,1)$, а P – точка перетину першої параболи і прямої, яка містить точку C і паралельна вісі абсцис. Знайти образ у відображенні dF_P дотичного до першої параболи вектора $\overline{PQ}$, де Q належить вісі абсцис.

СПИСОК ПОЗНАЧЕНЬ

R^n – арифметичний n-вимірний векторний простір із скалярним добутком виду $(\bar{x}, \bar{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n$.

E_n – евклідів точково-векторний n-вимірний простір.

$SL(n, R)$ – спеціальна лінійна група.

S^n – n-вимірна сфера.

(T, τ) – топологічний простір.

(M, ρ) – метричний простір.

$\rho(x, y)$ – відстань між точками x та y у метричному просторі.

$\exists$ – квантор існування.

$\forall$ – квантор загальності.

$x \in M$ – елемент x належить множині M.

$\varnothing$ – порожня множина.

$A \cup B$ – об'єднання множин A та B.

$A \cap B$ – перетин множин A та B.

$A \setminus B$ – різниця множини A та множини B.

$A \subseteq B$ – множина A є підмножиною множини B.

$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ – декартовий добуток множин $A_1, A_2, ..., A_n$.

$\varphi : A \to B$ – відображення множини A у множину B.

$\varphi|_A$ – обмеження відображення на множину A.

$f \circ \varphi$ – композиція (або суперпозиція) відображень φ та f.

U_x – окіл точки x у метричному або топологічному просторі.

∂_{u^k} – вектор швидкості k - тої координатної лінії поверхні евклідового простору.

$(\bar{a}, \bar{b})$ – скалярний добуток векторів $\bar{a}$ та $\bar{b}$.

$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ – мішаний добуток векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$ та $\bar{c}$.

$T_{i_1 i_2 ... i_q}$ – компоненти тензора або тензорного поля типу $\begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix}$.

$T^{j_1 j_2 ... j_p}$ – компоненти тензора або тензорного поля типу $\begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix}$.

$T^{j_1 j_2 ... j_p}_{i_1 i_2 ... i_q}$ – компоненти тензора або тензорного поля типу $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$.

g_{ij} – компоненти метричного тензора.

δ_i^j – символ Кронекера.

$\nabla_k T$ – коваріантна похідна тензора.

$\overline{\text{grad } f} = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2}, ..., \frac{\partial f}{\partial x^n} \right)$ – градієнт функції $f\left(x^1, x^2, ..., x^n\right)$.

M_n - n – вимірний многовид.

(U, f) – карта многовиду.

dF_p – диференціал відображення F у точці P.

ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Борисенко О.А. Диференціальна геометрія і топологія. Харків : Основа, 1995. 304 с.
2. Никифорчин О.Р. Вступ до топології. Івано-Франківськ : Прикарпатський університет, 2022. 324 с.
3. Пришляк О.О. Топологія многовидів : навчальний посібник. Київ : КНУ ім. Т.Г.Шевченко, 2013. 83 с.
4. Стєганцева П.Г. Гладкі многовиди : навчальний посібник для студентів освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр» напряму підготовки «Математика». Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2015. 81 с.
5. Стєганцева П.Г., Величко І.Г. Диференціальна геометрія: курс лекцій. Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2014. 144с.
6. Кузаконь В.М., Кириченко В.Ф., Пришляк О.О. Гладкі многовиди. Геометричні та топологічні аспекти. Праці Ін-ту математики НАН України. Математика та її застосування, 2013. Т.97. 500 с.
1. Aminov Yu. The Geometry of Submanifolds. CRC Press, 2001. 371 p.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Бондаренко Н. В., Отрашевська В. В. Аналітична геометрія : конспект лекцій. Київ : Київ. нац. ун-т буд-ва і архіт., 2022. 79 с.
2. Гречнєва М.О., Стєганцева П.Г. Геометрія грассманового образу неізотропної поверхні простору Мінковського. Innovative paradigm of the development of modern physical-mathematical sciences. Riga : Baltija Publishing. 2022. 300 p., P. 18-41.
3. Пришляк О.О. Диференціальна геометрія : Курс лекцій. Київ. Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2004. 68 с.
4. Grechneva M.O., Stegantseva P.G. On The Existence of a Surface in the Pseudo-Euclidean Space with Given Grassmann Image. Ukrainian Mathematical Journal. 2017. Т. 68. № 10. С. 1519–1529.
5. Stegantseva P.G., Grechneva M.O. Two-dimensional nonisotropic surfaces with flat normal connection and a nondegenerate grassmann image of constant curvature in the minkowski space. Ukrainian Mathematical Journal. 2024. Vol. 76. № 4. С. 533-551.
6. Tu L.W. An introduction to Manifolds. Springer, 2011. 430 p.

ІНФОРМАЦІЙНІ ДЖЕРЕЛА

1. An introduction to Riemannian Geometry. Lecture notes in mathematics. https://www.matematik.lu.se/matematiklu/personal/sigma/Riemann.pdf

Навчальне видання
(українською мовою)

Стєганцева Поліна Георгіївна
Гречнєва Марина Олександрівна
Стєганцев Євгеній Вікторович

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНА ГЕОМЕТРІЯ МНОГОВИДІВ

Навчальний посібник
для здобувачів ступеня вищої освіти магістра
спеціальності «Математика»
освітньо-професійної програми «Математика»

Рецензент *І.В. Красікова*
Відповідальний за випуск *І.В. Зіновєєв*
Коректор *М.О. Гречнєва*