МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра фундаментальної та прикладної математики

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА

на тему: **«РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ГАЗЕМАНА-РІМАНА ЗІ ЗСУВОМ»**

Виконала: студентка 2 курсу, групи 8.1113-м
спеціальності 111 Математика
(шифр і назва спеціальності)
освітньої програми Математика
(назва освітньої програми)
А.К. Скрильник
(ініціали та прізвище)
Керівник доцент кафедри фундаментальної та прикладної математики, к.ф.-м.н., доцент, Д'яченко Н.М.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)
Рецензент доцент кафедри комп'ютерних наук, к.т.н., доцент Матвіїшина Н.В.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Запоріжжя - 2024

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет математичний

Кафедра фундаментальної та прикладної математики

Рівень вищої освіти магістр

Спеціальність 111 Математика
(шифр і назва)

Освітня програма Математика

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри фундаментальної та прикладної математики, д.т.н., професор

_____ Гребенюк С.М.
(підпис)

“ ____ ” _____ 2024 р.

З А В Д А Н Н Я
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТОВІ

Скрильник Аліні Костянтинівни
(прізвище, ім’я та по-батькові)

1. Тема роботи Розв’язання крайової задачі Газемана-Рімана зі зсувом

керівник роботи Д'яченко Наталія Миколаївна, к.ф.-м. н., доцент
(прізвище, ім’я та по-батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом ЗНУ від « 01 » березня 2024 року № 385-с

2. Строк подання студентом роботи 19.11.2024

3. Вихідні дані до роботи 1. Постановка задачі.
2. Перелік літератури.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)
1. Постановка задачі.
– Основні теоретичні відомості.
– Розв’язання крайової задачі Газемана-Рімана зі зсувом

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов’язкових креслень)
презентація

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання 02.09.2024

К А Л Е Н Д А Р Н И Й П Л А Н

№	Назва етапів кваліфікаційної роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	Розробка плану роботи.	05.09.2024 – 10.09.2024	
2.	Збір вихідних даних.	11.09.2024 – 23.09.2024	
3.	Обробка методичних та теоретичних	25.09.2024 – 10.10.2024	
	джерел.		
4.	Розробка першого та другого розділу.	12.10.2024 – 03.11.2024	
5.	Розробка третього розділу.	07.11.2024 – 27.11.2024	
6.	Оформлення та нормоконтроль	30.11.2024 – 05.12.2024	
	кваліфікаційної роботи бакалавра.		
7.	Захист кваліфікаційної роботи.	10.12.2024	

Студент _____ А.К. Скрильник
(підпис) (ініціали та прізвище)

Керівник роботи _____ Н.М. Д’яченко
(підпис) (ініціали та прізвище)

Нормоконтроль пройдено

Нормоконтролер _____ О.Г Спиця
(підпис) (ініціали та прізвище)

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота магістра «Розв’язання крайової задачі Газемана-Рімана зі зсувом»: 53 с., 3 рис., 18 джерел, 1 додаток.

КРАЙОВА ЗАДАЧА ГАЗЕМАНА-РІМАНА ТЕОРІЇ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ, КРАЙОВА ЗАДАЧА ПРО СТРИБОК, НЕОДНОРІДНА ЗАДАЧА, ОДНОРІДНА ЗАДАЧА, ФУНКЦІЯ-ЗСУВ ЗІМКНЕНОГО КОНТУРА КОМПЛЕКСНОЇ ПЛОЩИНИ.

Об’єкт дослідження – крайові задачі Газемана-Рімана теорії аналітичних функцій.

Мета роботи: вивчити теоретичні аспекти щодо крайової задачі Газемана-Рімана теорії аналітичних функцій, розв’язати конкретні задачі Газемана-Рімана про стрибок, однорідні та неоднорідні.

Метод дослідження – описово-дослідницький, аналітичний, практичний.

У роботі викладено основні теоретичні аспекти щодо функції-зсуву зімкненого контура комплексної площини та крайової задачі Газемана-Рімана зі зсувом. Розглянуто дві конкретні функції, що визначають зсуви одиничного кола на комплексній площині, їх взято за основу в запропонованих для розв’язання прикладах задач Газемана-Рімана теорії аналітичних функцій. Відокремлені випадки розв’язання прикладів задач про стрибок, однорідних та неоднорідних задач Газемана-Рімана.

Застосовано метод послідовних наближень при розв’язанні інтегральних рівнянь Фредгольма, які потребують зазначені типи задач. Для отримання розв’язків використано формули, виписані в теоретичній частині.

SUMMARY

Master's Qualification Thesis «Solving of the Hasemann-Riemann Boundary Value Problem with the Shift»: 53 pages, 3 figures, 18 references, 1 supplement.

HAZEMANN-RIEMANN BOUNDARY PROBLEM OF THE THEORY OF ANALYTIC FUNCTIONS, BOUNDARY VALUE PROBLEM ABOUT THE JUMP, INHOMOGENEOUS PROBLEM, HOMOGENEOUS PROBLEM, FUNCTION-SHIFT OF THE CONTOUR OF THE COMPLEX PLANE.

Object of the study – Hazemann-Riemann boundary problem of the theory of analytic functions.

Aim of the study: to study the theoretical aspects of the Hasemann-Riemann boundary value problem of the theory of analytic functions, to solve specific Hasemann-Riemann jump problems, homogeneous and inhomogeneous.

Method of research: descriptive-research, analytical, and practical.

The paper describes the main theoretical aspects of the shift function of the closed contour of the complex plane and the Haseman-Riemann boundary value problem with a shift. Two specific functions that determine the shifts of the unit circle on the complex plane are considered, they are taken as a basis in the examples of the Hasemann-Riemann problems of the theory of analytic functions proposed for solution. The cases of solving examples of jump problems, homogeneous and inhomogeneous Hasemann-Riemann problems were separated.

The method of successive approximations is used for solving Fredholm's integral equations, which require the specified types of problems. Formulas written in the theoretical part were used to obtain solutions.

ЗМІСТ

Завдання на кваліфікаційну роботу 2
Реферат 1
Summary 2
Вступ 7
1 Попередні відомості 8
1.1 Класична теорема Коші 8
1.2 Інтеграл типу Коші на контурі 8
1.3 Сингулярний криволінійний інтеграл 9
2 Поняття зсуву та приклади 12
2.1 Поняття функції-зсуву зімкненого контура комплексної площини 12
2.2 Приклади функцій-зсувів 12
3 Постановка та розв'язання задачі газемана-рімана 17
3.1 Постановка задачі Газемана-Рімана 17
3.2 Задача Газемана-Рімана про стрибок 18
3.2.1 Відомі теоретичні викладки щодо отримання розв'язку задачі Газемана-Рімана про стрибок 18
3.2.2 Приклади розв'язання задачі Газамана-Рімана про стрибок 21
3.3 Однорідна задача \Газемана-Рімана 29
3.3.1 Відомі теоретичні викладки щодо отримання розв'язку однорідної задачі Газемана-Рімана 29
3.3.2 Приклади розв'язання однорідної задачі Газемана-Рімана 32
3.4 Неоднорідна задача Газемана-Рімана 40
3.4.1 Відомі теоретичні викладки щодо отримання розв'язку неоднорідної задачі Газемана-Рімана 40
3.4.2 Приклади розв'язання неоднорідної задачі Газемана-Рімана 41
Висновки 47
Перелік посилань ..... **Error! Bookmark not defined.**
Додаток А Деякі відомі теоретичні факти з теорії крайових задач 51

ВСТУП

Крайові задачі теорії аналітичних функцій мають теоретичне та практичне застосування. Наступні вчені внесли вклад в розвиток теоретичних аспектів цієї теорії: F. D. Gakhov (1990) [12], H. Begehr (2005) [10], J. Lin, Y. Xu (2021) [14], X. Wang, J. Du (2022) [16], G. Ramm Alexander (2023) [15], у тому числі для задач зі зсувом Т. Карлеман (1960) [4], Y. I. Karlovich, J. Rosales-Méndez (2022) [13], Y. Wang , J. Du (2007, 2010) [17, 18], а практичних застосувань – Т. Карлеман (1960) [4], Г. М. Зражевський (2005) [3], Р. М. Мартиняк, Х. І. Середницька (2017) [6], О. П. Козачок, Р. М. Мартиняк, Б. С. Слободян (2018) [5], Н. Д. Вайсфельд, З. Ю. Журавльова, В. В. Реут (2019) [1], O. E. Dugienko, O. V. Starovoitov, N. M. Dyachenko (2024) [11] та ін.

Розвиток даної проблематики свідчить про актуальність теми кваліфікаційної роботи.

В кваліфікаційні роботі вивчаються як відомі теоретичні викладки щодо отримання розв’язків різних типів задачі Газемана-Рімана зі зсувом, так і конкретні приклади розв’язання задач. Даного типу. Роботу побудовано так, що почережно викладаються теоретичні та практичні аспекти: спочатку – про функцію-зсув зімкненого контура комплексної площини, потім про задачу Газемана-Рімана про стрибок, однорідну та неоднорідну задачі.

Кожна із запропонованих задач передбачає розв’язання інтегральних рівнянь, до яких застосовано метод послідовних наближень.

Метою роботи вивчення теоретичних аспектів щодо крайової задачі Газемана-Рімана теорії аналітичних функцій, розв’язання конкретних задач Газемана-Рімана про стрибок, однорідної та неоднорідної.

1 ПОПЕРЕДНІ ВІДОМОСТІ

1.1 Класична теорема Коші

Розглянемо область G. Позначимо через γ її межу, яка визначає контур на комплексній площині. Вважаться, що контур має додатний напрям оббігу, якщо при пересуванні вздовж контура область G залишається зліва, що відповідає оббігу проти годинникової стрілки. У випадку визначення додатного напряму оббігу крива вважається орієнтовною.

Деякі задачі кваліфікаційної роботи потребуватимуть застосування класичної теореми Коші. Наведемо її формулювання нижче.

Теорема 1.1 [7] Якщо функція $f(z)$ аналітична в області D^+, а G – довільна однозв'язна область, яка компактно належить області D^+, то $\int_\gamma f(z)dz = 0$, де γ – орієнтовна межа області G.

1.2 Інтеграл типу Коші на контурі

Наведемо деякі теоретичні відомості з робіт [2, 9, 12], які будемо використовувати в роботі.

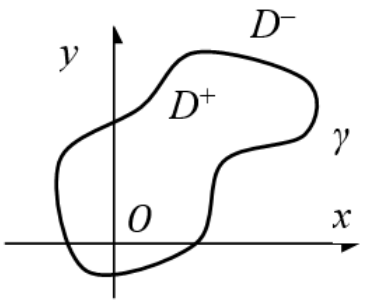


Рисунок 1.1

Розглянемо гладкий зімкнений контур γ комплексної площини. Область G точок, що обмежує контур γ, має множину внутрішніх точок, яку позначимо через D^+, а зовнішніх – D^-. Зауважимо, що нескінченно віддалена точка належить області D^- (див. рис.1.1).

Як наслідок вивчених в комплексному аналізі теореми та формули Коші [7], можна отримати [2, 9,12]:

– якщо функція $f(z)$ – аналітична в D^+ і неперерна в $D^+ \cup \gamma$, то

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(\tau)}{\tau - z}d\tau = \begin{cases} f(z), & z \in D^{+}; \\ 0, & z \in D^{-}; \end{cases} \qquad (1.1)$$

– якщо функція $f(z)$ – аналітична в D^{-} (включаючи точку $z = \infty$) і неперервна в $D^{-} \cup \gamma$, то

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(\tau)}{\tau - z}d\tau = \begin{cases} f(\infty), & z \in D^{+}; \\ -f(z) + f(\infty), & z \in D^{-}. \end{cases} \qquad (1.2)$$

Інтеграли обчислюються вздовж контура γ, який оббігу вважається додатним. Інтеграл $\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(\tau)}{\tau - t}d\tau$ називають *інтегралом Коші*.

Означення 1.1 [2, 9,12] Нехай γ – гладкий зімкнений або незімкнений контур, який являє собою обмежену множину, а $\varphi(\tau)$ – неперервна функція точок контура γ. Тоді інтеграл

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau,$$

побудований так само, як і інтеграл Коші, називають *інтегралом типу Коші.* Функцію $\varphi(\tau)$ називають *функцією щільністю,* а $\frac{1}{\tau - z}$ – *ядром* інтеграла типу Коші.

1.3 Сингулярний криволінійний інтеграл

Продовжимо наведення відомих фактів, викладених в роботах [2, 9,12].

Розглянемо спрямлюваний контур $\gamma = \cup ab$ комплексної площини, а також точки t, τ причому будемо вивчати точку t, що не збігається з кінцями даного

контура a і b. Функцію $\varphi(\tau)$, задану на контурі γ, на етапі означення будемо вважати неперервною на цьому контурі. Розглянемо особливий криволінійний інтеграл

$$\int_{\gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau.$$

Означення 1.2 [2, 9,12] У зазначених вище припущеннях розглянемо точку $t \in \gamma$ і проведемо коло з центром в ній настільки малого радіусу ρ, щоб воно перетинало контур рівно у двох точках t_1, t_2. Тоді інтеграл $\int_{\gamma \setminus \cup t_1 t_2} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau$ є визначеним. Розглянемо границю $\lim\limits_{\rho \to 0} \int_{\gamma \setminus \cup t_1 t_2} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau$. Якщо вона існує, то її значення називають головним значенням за Коші особливого інтеграла або *сингулярним інтегралом Коші.*

Відомо [2, 9,12] , що сингулярний інтеграл $\int_{\gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau$ існує, якщо функція щільності $\varphi(\tau)$ задовольняє умову Гельдера на спрямлюваному контурі γ.

Розглянемо поняття кривої Ляпунова, для інтеграла вздовж якої буде мати місце наступні теорема.

Означення 1.3 Проста неперервна крива γ на комплексній площині називається кривою Ляпунова, якщо вона має такі властивості:

- у кожній точці кривої існує дотична і відповідна їй нормаль;
- існують числа $A > 0$ і $\lambda \in (0; 1]$, що для всіх пар точок $t_1, t_2 \in \gamma$ задовольняється нерівність

$$|\theta| < A|t_1 - t_2|^{\lambda},$$

де θ – кут між нормалями до кривої γ в точках t_1 та t_2.

Такі криві визначають підклас в класі простих гладких кривих на контурі γ.

Лема 1.1 [9, 12] Якщо γ – крива Ляпунова і $\alpha(t)$ – зсув такий, що $\alpha'(t) \neq 0,\ \alpha'(t)\epsilon H_\lambda(\gamma)$, тоді функція

$$K(t,\tau) = \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} - \frac{1}{\tau - t},$$

допускає оцінку

$$|K(t,\tau)| \leq \frac{M}{|\tau - t|^{1-\lambda}},$$

де M – додатна стала [1].

2 ПОНЯТТЯ ЗСУВУ ТА ПРИКЛАДИ

2.1 Поняття функції-зсуву зімкненого контура комплексної площини

Спочатку наведемо відоме означення відомого поняття [2, 9,12].

Означення 2.1 [2, 9,12] Нехай γ – простий зімкнений контур на площині комплексної змінної z. *Зсувом* $\alpha(t)$ контура γ будемо називати функцію, яка визначає взаємно однозначне і взаємно неперервне відображення контура γ на себе.

Якщо при відображенні $\alpha(t)$ зберігається орієнтація контура γ, то зсув $\alpha(t)$ будемо називати прямим, якщо ж орієнтація змінюється, то $\alpha(t)$ будемо називати оберненим зсувом.

2.2 Приклади функцій-зсувів

Приклад 2.1 Довести, що відображення $\alpha(t) = e^{\frac{\pi}{4}i}t$, задане на контурі $\gamma = \{t: |t| = 1\}$ визначає зсув.

Розв'язання. Перевіримо, що $\alpha(t)$ взаємно однозначно переводить контур γ на себе. Оскільки $\alpha(t)$ – це відображення, яке здійснює поворот точки t на кут $\frac{\pi}{4}$, тому що $\alpha(t) = e^{\frac{\pi}{4}i}t = e^{\frac{\pi}{4}i} \cdot |t| \cdot e^{\mathrm{i}\arg t} = e^{\left(\frac{\pi}{4}+\arg t\right)i} \cdot |t|$. Позначимо $\varphi = \arg t$. Якщо для $t = |t| \cdot e^{i\varphi}$ аргумент змінюється в межах відрізка $[-\pi; \pi]$, то комплексне число $\alpha(t) = e^{\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)i} \cdot |t|$ має аргумент $\frac{\pi}{4} + \varphi \ \epsilon \left[-\pi + \frac{\pi}{4}; \pi + \frac{\pi}{4}\right]$, тобто значення кута змінюється в межах одного періоду тригонометричних функцій.

Пояснімо, чому при даному відображені $\alpha(t)$ контур γ відображається в себе, тобто в γ. Контур γ визначається комплексними числами t такими що $|t| = 1$. Знайдемо модуль числа $\alpha(t)$:

$$|\alpha(t)| = \left|e^{\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)i}\right| \cdot |t| = 1,$$

тому що

$$\left|e^{\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)i}\right| = \left|\cos\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right) + i\sin(\frac{\pi}{4}+\varphi)\right| =$$

$$= \sqrt{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)} = 1.$$

Таким чином, образ при дії функції $\alpha(t)$ кола γ, де $|t| = 1$, дає точки, для яких $|\alpha(t)| = 1$, тобто точки $\alpha(t)$ лежать на колі γ.

Розглянемо зворотне відображення для $\alpha(t)$. Позначимо його як $\alpha^{-1}(\tau)$. Нехай, $\tau = \alpha(t)$, тобто $\tau = e^{\frac{\pi}{4}i}t$, тоді $t = e^{-\frac{\pi}{4}i}\tau$.

Якщо $\tau \in [-\pi;\ \pi]$, то $t \in \left[-\pi - \frac{\pi}{4};\ \pi + \frac{\pi}{4}\right]$, залишаючись в межах одного періоду. Оскільки $|\alpha(t)| = 1$, то $|\tau| = 1$, тоді для зворотного відображення матимемо:

$$|\alpha^{-1}(\tau)\left| = |e^{-\frac{\pi}{4}i}\tau\right| = \left|e^{-\frac{\pi}{4}i}|\tau| \cdot e^{i\psi}\right| = |\tau| \cdot \left|e^{-\left(\frac{\pi}{4}+\psi\right)i}\right| = 1.$$

Отже, відображення $\alpha^{-1}(\tau)$ переводить точки контура γ, де $|\tau| = 1$, в точки, для яких $|\alpha^{-1}(\tau)| = 1$, залишаючись на γ.

Тепер розглянемо неперервність прямого та зворотного відображень. Оскільки функція $\alpha(t) = e^{\frac{\pi}{4}i}t$ – лінійна, то вона є неперервною. Зворотна функція $\alpha^{-1}(\tau) = e^{-\frac{\pi}{4}i}\tau$ – лінійна, тому теж неперервна.

Приклад 2.2 Довести, що відображення $\alpha(t) = \frac{t - z_0}{\overline{z_0}\, t - 1}$, задане на контурі $\gamma = \{t: |t| = 1\}$ визначає зсув.

Розв'язання. Дослідимо чи дійсно ця функція є зсувом:

$$\alpha(t) = \frac{t\ -\ z_0}{\bar{z_0}\ t - 1}.$$

Перевіримо, що $|\alpha(t)| = 1$. Знаючи, що $t = cos\varphi + i\,sin\varphi$, а $z_0 = |z_0|(cos\psi + isin\psi)$ спростимо деякі вирази під знаком функції:

$$\bar{z_0} = |z_0|(cos\psi + isin\psi) = |z_0|\big(cos(-\psi) + isin(-\psi)\big);$$
$$\bar{z_0} \cdot t = |z_0|(\cos(\varphi - \psi) + isin(\varphi - \psi))\ -\ 1.$$

Знаходимо модуль знаменника:

$$|\bar{z_0} \cdot t\ -\ 1|^{\,2} = (Re\ w)^2 + (Im\ w)^2 =$$
$$=\ (|z_0|(cos(\varphi - \psi) - 1)^2 + (|z_0|\sin(\varphi - \psi))^2 =$$
$$= |z_0|^2 cos^2(\varphi - \psi) -\ 2|z_0|(\cos(\varphi - \psi) + 1 + |z_0|^2 sin^2(\varphi - \psi) =$$
$$= |z_0|^2 -\ 2|z_0|(\cos(\varphi - \psi) + 1.$$

Тепер обчислимо модуль чисельника:

$$|t\ - z_0|^2 = (cos\varphi + isin\varphi - |z_0|cos\psi - i|z_0|sin\psi)^2 =\ cos^2\varphi\ -$$
$$-2\ |z_0|cos\varphi cos\psi\ + |z_0|^2 cos^2\psi + sin^2\varphi\ -\ 2\ |z_0|sin\varphi sin\psi\ +$$
$$+|z_0|^2 sin^2\psi =\ 1\ + |z_0|^2\ -\ 2|z_0|\ (cos(\varphi - \psi).$$

Отже,

$$|\alpha(t)| = \frac{\sqrt{|z_0|^2\ -\ 2|z_0|(cos(\varphi - \psi) + 1}}{\sqrt{1\ + |z_0|^2\ -\ 2|z_0|\ (cos(\varphi - \psi)}} =\ 1.$$

Це дозволяє прийти до висновку, що точки контура γ функцією $\alpha(t)$ переводяться в точки того самого контура.

Розглянемо зворотну функцію. Для даного відображення $\alpha(t) = \frac{t - z_0}{\overline{z_0}t - 1}$. Нехай $\tau = \alpha(t)$. Розв'яжемо рівняння $\tau = \frac{t - z_0}{\overline{z_0}t - 1}$ відносно t. Отримаємо $t = \frac{\tau - z_0}{\overline{z_0}\tau - 1}$. Отже,

$$\beta(\tau) = \alpha^{-1}(\tau) = \frac{\tau - z_0}{\overline{z_0}\tau - 1}.$$

Форма функції не змінилась. Тому вона має властивість переведення контура в себе.

Поставимо запитання: «Чи змінить напрям оббігу цей зсув?» Нехай точка t_1 на контурі передує точці t_2, це означає, що

$$t_{1,2} = cos\varphi_{1,2} + i\, sin\varphi_{1,2}, \qquad \varphi_1 < \varphi_2,$$

де $\varphi_1 -$ це аргумент числаї t_1, а $\varphi_2 -$ це аргумент t_2.

Наслідки дій функції $\alpha(t)$ на задані точки зображено на рис. 2.1. Візуалізовано незмінність напрямку оббігу при дії функції $\alpha(t)$.

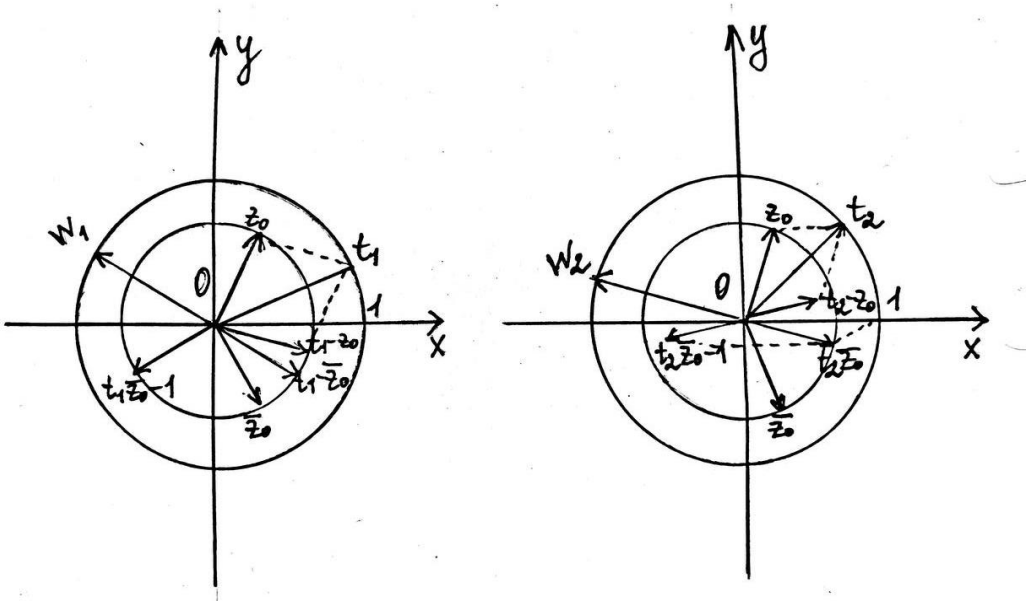


Рисунок 2.1

Отримане також свідчить про те, що різним точкам t_1 і t_2 відповідають різні образи $\alpha(t_1)$ і $\alpha(t_2)$. Таку ж властивість має і зворотне відображення.

Дана функція взаємно неперервна, оскільки розрив може бути там, де знаменник дорівнює нулю, тобто в точці

$$\bar{z_0}t^* - 1 = 0,$$

$$t^* = \frac{1}{\bar{z_0}} = \frac{z_0}{|z_0|}.$$

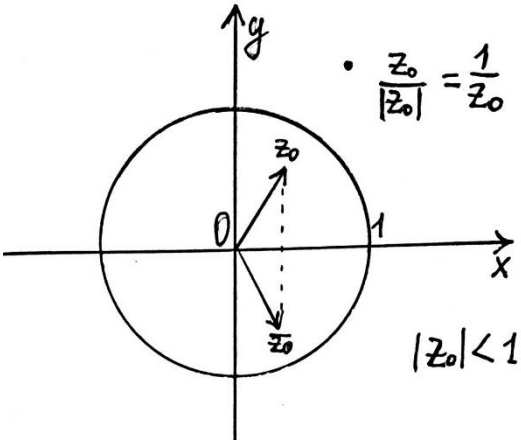


Рисунок 2.2

Така точка не лежить на контурі (див рис. 2.2). Таким чином, відображення $\alpha(t)$ є неперервним як дробово-лінійне. Те саме справедливо й для зворотного відображення.

Отже, функція $\alpha(t)$ визначає зсув одиничного кола γ.

3 ПОСТАНОВКА ТА РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ГАЗЕМАНА-РІМАНА

3.1 Постановка задачі Газемана-Рімана

Спочатку викладемо відомі теоретичні аспекти даної задачі [9, 12].

Нехай γ – простий гладкий зімкнений контур, який розбиває площину комплексної змінної на дві області: внутрішню D^+, яка містить точку $z = 0$, і зовнішню D^- (див. рис. 1.1). І нехай на контурі γ задані функції $G(t)$ і $g(t)$, які задовольняють умову Гельдера, причому $G(t) \neq 0$, і, крім того, $\alpha(t)$ - прямий зсув контура γ на себе, чия похідна $\alpha'(t)$ не перетворюється в нуль і задовольняє умову Гельдера [9, 12].

Знайти функцію $\Phi^+(z)$, аналітичну в області D^+, і функцію $\Phi^-(z)$, яка аналітична в області D^- і щезає на нескінченності, тобто $\Phi^-(\infty) = 0$, граничні значення яких на контурі γ неперервні і задовольняють умову

$$\Phi^+[\alpha(t)] = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \qquad t \in \gamma. \tag{3.1}$$

Для розв'язання прикладу (2.1) істотне значення має наступне твердження.

Лема 3.1 [12] Якщо кусково-аналітична функція $\Phi(z)$, яка щезає на нескінченності, задовольняє граничну умову

$$\Phi^+[\alpha(t)] = \Phi^-(t), \qquad t \in \gamma, \tag{3.2}$$

то вона тотожно дорівнює нулю.

Поставлена задача з крайової умовою (3.1) являє собою узагальнення крайової задачі Рімана. В окремому випадку, коли $\alpha(t)$ є крайове значення аналітичної в області D^+ функції, крайова умова (3.1) зводиться до задачі Рімана безпосередньо введенням нової шуканої кусково-аналітичної функції [9, 12]:

$$\Phi_1^+ = \Phi^+[\alpha(z)], \qquad \Phi_1^- = \Phi^-(z).$$

3.2 Задача Газемана-Рімана про стрибок

3.2.1 Відомі теоретичні викладки щодо отримання розв'язку задачі Газемана-Рімана про стрибок

Нижче наведемо теоретичні аспекти задачі Газемана-Рімана про стрибок, які є викладом матеріалу робіт [9, 12].

Переходячи до розв'язання поставленої крайової задачі (3.1), почнемо з випадку, коли $G(t) \equiv 1$, тобто розглянемо задачу про стрибок:

$$\Phi^+[\alpha(t)] = \Phi^-(t) + g(t), \qquad t \in \gamma. \tag{3.3}$$

На основі леми 3.1 можна побачити, що приклад (1.3) не може мати двох різних розв'язків, бо різниця таких розв'язків буде задовольняти крайову умову (3.2) і, отже, буде дорівнювати нулю [9, 12]. Надамо пояснення. Припустимо, що задача (3.3) має два розв'язки: $\Phi_1^-(z)$ і $\Phi_2^-(z)$. Тоді вони задовольняють крайові умови

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1^+[\alpha(t)] &= \Phi_1^-(t) + g(t); \\ \Phi_2^+[\alpha(t)] &= \Phi_2^-(t) + g(t), \end{aligned}\right\} \quad t \in \gamma.$$

Якщо ми віднімемо ці дві рівності, то отримаємо наступне:

$$(\Phi_1 - \Phi_2)^+[\alpha(t)] = (\Phi_1 - \Phi_2)^-(t).$$

Позначимо вираз $(\Phi_1 - \Phi_2) = \Phi^*$, тоді остання крайова умова вираз перетвориться в

$$\Phi^{*+}[\alpha(t)] = \Phi^{*-}(t).$$

Отже, задачу зведено до (3.2). Відповідно до леми 3.1, задача з крайової умовою (3.2) має один розв'язок, який дорівнює нулю. Тобто, $\Phi^* = 0, \Phi_1 = \Phi_2$.

Внаслідок однозначності розв'язку, форма його подання не впливає на результат. Розв'язок задачі (3.3) будемо шукати у вигляді

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{\varphi[\beta(\tau)]}{\tau - z}d\tau, \qquad z \in D^+, \tag{3.4}$$

$$\Phi^-(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau, \qquad z \in D^-, \tag{3.5}$$

де $\varphi(\tau)$ – шукана функція точок контура γ, яка задовольняє умову Гельдера, а $\beta(\tau)$ – зсув, обернений до $\alpha(t)$.

Із формули (3.4) маємо

$$\Phi^+(t^*) = \frac{1}{2}\varphi[\beta(t^*)] + \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{\varphi[\beta(\tau^*)]}{\tau^* - t^*}d\tau^*.$$

Зробимо заміну та відповідні їй перетворення

$$t^* = \alpha(t)\,; \quad \tau^* = \alpha(\tau), \quad \tau = \alpha^{-1}(\tau^*) = \beta(\tau^*),$$
$$d\tau^* = \alpha'(\tau)d\tau.$$

Зважаючи на те, що зсув переводить контур в себе, з останнього матимемо:

$$\Phi^+[\alpha(t)] = \frac{1}{2}\varphi\big[\beta\big(\alpha(t)\big)\big] + \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{\varphi(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)}\alpha'(\tau)d\tau,$$

Після спрощення отримуємо

$$\Phi^+[\alpha(t)] = \frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)}\alpha'(\tau)d\tau,$$

Отже, із формул (3.4) та (3.5) на основі формул Сохоцького отримуємо

$$\Phi^+[\alpha(t)] = \frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma} \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)}\varphi(\tau)\, d\tau, \qquad (3.6)$$

$$\Phi^-(t) = -\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau. \qquad (3.7)$$

Із формул (3.6) і (3.3) маємо

$$\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma} \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)}\varphi(\tau)\, d\tau = -\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma} \frac{\alpha(\tau)}{\tau - t}d\tau + g(t),$$

що еквівалентно рівнянню

$$\varphi(t) - \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma} \left[\frac{1}{\tau - t} - \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)}\right]\varphi(\tau)d\tau = g(t), \qquad t \in \gamma. \qquad (3.8)$$

Використаємо лему 1.1. Із властивостей функцій, що задовольняють умову Гельдера, випливає що при $\lambda > 1$ такі функції є сталими. Оскільки ми маємо справу з несталими функціями, то $0 < \lambda \leq 1$. Звідси $1 - \lambda \epsilon [0,1)$, що відповідає інтегровній особливості. Тому ми отримуємо рівняння Фредгольма другого роду. Базуючись, на лемі 3.1, однорідне рівняння (3.8) має лише нульовий розв'язок.

Отже, рівняння (3.8) має єдиний розв'язок $\varphi(t)$ за будь-якого значення функції $g(t)\epsilon H_\lambda(\gamma)$.

Обчислюючи розв'язок рівняння (3.8) і підставляючи його в формули (3.3) і (3.4), таким чином ми знаходимо розв'язок задачі про стрибок (3.1).

3.2.2 Приклади розв'язання задачі Газемана-Рімана про стрибок

Приклад 3.1 Нехай $\gamma = \{t : |t| = 1\}$. Знайти розв'язки задачі Газемана

$$\Phi^+\left(e^{i\xi}t\right) = \Phi^-(t) + \frac{t+1}{t^2}, \qquad t \in \gamma,$$

де $0 < \xi < 2\pi$.

Розв'язання. Узагальнюючи приклад 2.1, приходимо до висновку, що відображення $\alpha(t) = e^{i\xi}t$ є зсувом. Зворотне відображення має вигляд $\beta(t) = e^{-i\xi}t$.

Використаємо рівняння (3.8)

$$\varphi(t) - \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \left[\frac{1}{\tau - t} - \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)}\right]\varphi(\tau)d\tau \quad = g(t), \qquad t \in \gamma.$$

Спростимо ядро інтегрального рівняння Фредгольма другого роду $\frac{1}{\tau - t} - \frac{\alpha`(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)}$ у цьому випадку:

$$\alpha'(\tau) = e^{i\xi} \cdot 1;$$

$$\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} = \frac{e^{i\xi}}{e^{i\xi}\tau - e^{i\xi}t} = \frac{1}{\tau - t}.$$

Отже, $K(t,\tau) = \frac{1}{\tau - t} - \frac{1}{\tau - t} = 0$, тобто ядро дорівнює нулю. Підставляючи отримане до (3.8), знайдемо

$$\varphi(t) + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \cdot 0 = \frac{t+1}{t^2};$$

$$\varphi(t) = \frac{t+1}{t^2}.$$

Тепер знайдемо розв'язок задачі за допомогою формул (3.4) та (3.5). За формулою (3.4)

$$\Phi^-(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{\tau+1}{\tau^2} \cdot \frac{d\tau}{\tau - z}, \qquad z \in D^-.$$

Тут $\frac{\tau+1}{\tau^2} = \varphi(\tau)$ – функція щільності інтервалу типу Коші. Подовження $\varphi(\tau)$ на всю комплексну площину $\varphi(z) = \frac{z+1}{z^2}$. Особливою точкою цієї функції є $z = 0 \in D^+$, тому $\varphi(z)$ аналітична в області D^- і неперервна в $D^- \cup \gamma$, крім того, $\varphi(\infty) = 0$, тому застосуємо формулу (1.2) у вигляді

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau = \begin{cases} \varphi(\infty), & z \in D^+; \\ \varphi(\infty) - \varphi(z), & z \in D^-. \end{cases}$$

Отже,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{\tau+1}{\tau^2} \cdot \frac{d\tau}{\tau - z} = \begin{cases} 0, & z \in D^+; \\ 0 - \frac{z+1}{z^2}, & z \in D^-. \end{cases}$$

Тому,

$$\Phi^{-}(z) = -\frac{z+1}{z^2}, \qquad z \in D^{-}.$$

Тепер маємо знайти розв'язок, де $z \in D^{+}$. Для цього скористаємось формулою (3.4)

$$\Phi^{+}(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{\varphi[\beta(\tau)]}{\tau - z}d\tau, \qquad z \in D^{+}, \tag{3.4}$$

Відомо, що $\varphi(\tau) = \frac{\tau+1}{\tau^2}, \beta(\tau) = e^{-i\xi}\tau$, тому

$$\varphi[\beta(\tau)] = \frac{e^{-i\xi}\tau + 1}{(e^{-i\xi}\tau)^2} = \frac{e^{-i\xi}\tau + 1}{e^{-2i\xi}\tau^2}.$$

Отримане підставляючи до (3.4)

$$\Phi^{+}(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{e^{-i\xi}\tau + 1}{e^{-2i\xi}\tau^2}\cdot\frac{d\tau}{\tau - z}, \qquad z \in D^{+}.$$

Функцією щільності є $f(\tau) = \frac{e^{-i\xi}\tau+1}{e^{-2i\xi}\tau^2}$. Її подовженням на всю комплексну площину є $f(z) = \frac{e^{-i\xi}z+1}{e^{-2i\xi}z^2}$. Особливі точки даної функції $z = 0 \in D^{+}$, тому $f(z)$ – аналітична в області D^{-}. Оскільки $f(\infty) = 0$, то

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{e^{-i\xi}\tau + 1}{e^{-2i\xi}\tau^2}\cdot\frac{d\tau}{\tau - z} = \begin{cases} 0, z \in D^{+} \\ 0 - \dfrac{e^{-i\xi}z + 1}{e^{-2i\xi}z^2}, z \in D^{-}. \end{cases}$$

Тому

$$\Phi^+(z) = 0.$$

В результаті отримали

$$\Phi^+(z) = 0,\ \Phi^-(z) = -\frac{z+1}{z^2}.$$

Проведемо перевірку отриманого розв'язку. Знаючи, що $\Phi^+(z) = 0$, обчислимо граничне значення на контурі γ в точці $t \in \gamma$:

$$\Phi^+(t) = \Phi^+\left(e^{i\xi}t\right) = 0,$$

Тепер знайдемо граничне значення на конурі для функції $\Phi^-(z) = -\frac{z+1}{z^2}$. Оскільки функція $-\frac{z+1}{z^2}$ неперервна на контурі γ, то

$$\Phi^-(t) = \lim_{z\to t}\Phi^-(z) = \lim_{z\to t}\left(-\frac{z+1}{z^2}\right) = -\frac{t+1}{t^2}.$$

Підставимо отримані вище функції до крайової умови

$$\Phi^+\left(e^{i\xi}t\right) = \Phi^-(t) + \frac{t+1}{t^2},$$
$$0 = -\frac{t+1}{t^2} + \frac{t+1}{t^2},$$

що є тотожністю. Перевірка підтверджує правильність знайденого розв'язку.

Приклад 3.2 Нехай $\gamma = \{t : |t| = 1\}$. Знайти розв'язки задачі Газемана

$$\Phi^+\left(\frac{t - z_0}{\bar{z_0}t - 1}\right) = \Phi^-(t) + \frac{2t^2+1}{t+2}, \qquad t \in \gamma, \qquad z_0 \in D^+.$$

Розв'язання. У прикладі 1.2 було доведено, що відображення $\alpha(t) = \frac{t - z_0}{\overline{z_0}\, t - 1}$ визначає зсув одиничного кола. У прикладі 1.2 також знайдено зворотну функцію $\beta(t^*)$ до функції $\alpha(t) -$

$$\beta(t^*) = \frac{t^* - z_0}{\overline{z_0}\, t^* - 1}.$$

Розглянемо інтегральне рівняння (3.8) і знайдемо його ядро $\left[\frac{1}{\tau - t} - \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)}\right]$. Проведемо деякі перетворення:

$$\alpha'(\tau) = \frac{z_0 \overline{z_0} - 1}{(\overline{z_0}\tau - 1)^2} \neq 0;$$

$$\alpha(\tau) - \alpha(t) = \frac{\tau - z_0}{\overline{z_0}\tau - 1} - \frac{t - z_0}{\overline{z_0} t - 1} = \frac{(z_0 \overline{z_0} - 1)(\tau - t)}{(\overline{z_0}\tau - 1)(\overline{z_0} t - 1)};$$

$$\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} = \frac{\overline{z_0} t - 1}{(\tau - t)(\overline{z_0}\tau - 1)};$$

$$\frac{1}{\tau - t} - \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} = \frac{\overline{z_0}}{\overline{z_0}\tau - 1}.$$

Отже, інтегральне рівняння набуває вигляду

$$\varphi(t) - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\overline{z_0}}{\overline{z_0}\tau - 1} \varphi(\tau) d\tau = \frac{2t^2 + 1}{t + 2}, \qquad t \in \gamma.$$

В п. 3.2.1 було зазначено, що інтегральне рівняння має єдиний розв'язок, тому його пошук не залежить від методу. Розв'язувати дану задачу будемо методом послідовних наближень. Збіжність послідовних наближень перевіримо в процесі розв'язання. Якщо послідовність буде збігатися, то гранична функція

буде розв’язком рівняння. У супротивному випадку потрібно шукати інший метод.

Отже, наступне та попереднє наближення в методі послідовних наближень пов’язані співвідношенням:

$$\varphi_{n+1}(t) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} \frac{\bar{z_0}}{\bar{z_0}\tau - 1}\varphi_n(\tau)d\tau + \frac{2t^2+1}{t+2}, \quad t \in \gamma.$$

Знайдемо послідовні наближення, обравши за нульове наближення $\varphi_0(t) = 0$. Тоді знайдемо перше і друге наближення:

$$\varphi_1(t) = 0 + \frac{2t^2+1}{t+2};$$

$$\varphi_2(t) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} \frac{\bar{z_0}}{\bar{z_0}\tau - 1}\cdot\frac{2\tau^2+1}{\tau+2}d\tau + \frac{2t^2+1}{t+2}, \qquad t \in \gamma.$$

Розглянемо підінтегральну функцію другого наближення і подовжимо її на всю комплексну площину

$$f(z) = \frac{\bar{z_0}}{\bar{z_0}z - 1}\cdot\frac{2z^2+1}{z+2}.$$

Особливі точки цієї функції:

$$\begin{bmatrix} \bar{z_0}z - 1 = 0, \\ z + 2 = 0; \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} z_1 = \frac{1}{\bar{z_0}} = \frac{z_0}{|z_0|}, \\ z_2 = -2. \end{bmatrix}$$

Точки $z_1, z_2 \in D^-$, тому функція $f(z)$ – аналітична в D^+. Отже, за теоремою Коші (класичною)

$$\int_\gamma f(\tau)d\tau = 0.$$

Отже, послідовність наближень є стаціонарною

$$\varphi_2(t) = \frac{2t^2+1}{t+2} = \varphi_3(t) = \ldots = \varphi_n(t),$$

а її границя має вигляд

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \frac{2t^2+1}{t+2} = \varphi(t), \qquad t \in \gamma.$$

Що і буде розв'язком даного інтегрального рівняння.

Тепер, використовуючи формули (3.4) та (3.5), знайдемо розв'язок задачі. Спочатку розглянемо функцію $\Phi^-(z)$:

$$\Phi^-(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{2\tau^2+1}{\tau+2}\cdot\frac{d\tau}{\tau-z}. \tag{3.9}$$

Особлива точка функції щільності $\varphi(z)$ – це $z_2 = -2 \in D^-$, тому функція $\varphi(z)$ аналітична в D^+. Отже, за формулою (1.2)

$$\Phi^-(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{2\tau^2+1}{\tau+2}\cdot\frac{d\tau}{\tau-z} = 0.$$

Тепер шукаємо $\Phi^+(z)$. Знайдемо функцію щільності відповідного інтеграла

$$\varphi\big(\beta(\tau)\big) = \frac{2\left(\frac{\tau - z_0}{\bar{z}_0\tau - 1}\right)^2 + 1}{\frac{\tau - z_0}{\bar{z}_0\tau - 1} + 2} = \frac{2(\tau - z_0)^2 + (\bar{z}_0\tau - 1)^2}{\big(\tau - z_0 + 2(\bar{z}_0\tau - 1)\big)(\bar{z}_0 t - 1)}.$$

Розглянемо функцію $\varphi\big(\beta(z)\big)$ і подовжимо її на всю комплексну площину.

$$\varphi\big(\beta(z)\big) = \frac{2\left(\frac{z - z_0}{\bar{z}_0 z - 1}\right)^2 + 1}{\frac{z - z_0}{\bar{z}_0 z - 1} + 2} = \frac{2(z - z_0)^2 + (\bar{z}_0 z - 1)^2}{\big(z - z_0 + 2(\bar{z}_0 z - 1)\big)(\bar{z}_0 z - 1)} = H(z).$$

Особливі точки:

$$z_1 = \frac{1}{\bar{z}_0} = \frac{z_0}{|z_0|} \in D^-;$$

$$z - z_0 + 2(\bar{z}_0 z - 1) = 0 \Leftrightarrow z_3 = \frac{-2 + z_0}{1 - 2\bar{z}_0}.$$

Щоб дізнатись місце розміщення другої точки, необхідно порівняти модулі чисельника і знаменника. Нехай $z_0 = x + iy$. Тоді

$$|-2 + z_0|^2 \overset{?}{<>} |1 - 2\bar{z}_0|^2;$$

$$|-2 + x + iy|^2 \overset{?}{<>} |1 - 2(x - iy)|^2;$$

$$(-2 + x)^2 + y^2 \overset{?}{<>} (1 - 2x)^2 + 4y^2;$$

$$4 - 4x + x^2 + y^2 \overset{?}{<>} 1 - 4x + x^2 + 4y^2;$$

$$3 \overset{?}{<>} 3x^2 + 3y^2.$$

Оскільки $z_0 \in D^+$, то $1 > x^2 + y^2$. Отримане означає, що модуль чисельника більший за модуль знаменника, тобто точка $z_3 \in D^-$. Отже, обидві особливі точки функції $\varphi\big(\beta(z)\big) = H(z)$ лежать в області D^-. З цього випливає, що функція

$$H(z) = \frac{2(z - z_0)^2 + (\bar{z_0}z - 1)^2}{\big(z - z_0 + 2(\bar{z_0}z - 1)\big)(\bar{z_0}z - 1)}; \tag{3.10}$$

аналітична в D^+. Відповідно до формули (1.1)

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{H(\tau)}{\tau - z}d\tau = H(z), \qquad z \in D^+ . \tag{3.11}$$

Відповідь.

$$\Phi^+(z) = \frac{2(z - z_0)^2 + (\bar{z_0}z - 1)^2}{\big(z - z_0 + 2(\bar{z_0}z - 1)\big)(\bar{z_0}z - 1)}, \qquad \Phi^-(z) = 0.$$

3.3 Однорідна задача Газемана-Рімана

3.3.1 Відомі теоретичні викладки щодо отримання розв'язку однорідної задачі Газемана-Рімана

Нижче наведемо теоретичні аспекти щодо розв'язання однорідної задачі Газемана-Рімана, які є викладом матеріалу робіт [9, 12].

Розглянемо однорідну задачу

$$\Phi^+[\alpha(t)] = G(t)\Phi^-(t), \quad t \in \gamma , \tag{3.12}$$

за умови $\Phi^{-}(\infty) = 1$, і нехай $\kappa = Ind\ G(t)$.

Вивчимо спочатку випадок $\kappa = 0$. Тоді, логарифмуючи крайову умову (3.8), приходимо до крайової задачі

$$\ln \Phi^{+}[\alpha(t)] = ln\, G(t) + ln\, \Phi^{-}(t), \qquad t \in \gamma,$$

розв'язок якої, аналогічно до випадку задачі про стрибок, будемо шукати у вигляді

$$\ln \Phi^{+}(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\varphi_1[\beta(\tau)]}{\tau - z} d\tau, \qquad z \in D^{+},$$

$$\ln \Phi^{-}(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\varphi_1(\tau)}{\tau - z} d\tau, \qquad z \in D^{-},$$

де невідома щільність $\varphi_1(t)$ є розв'язком рівняння

$$\varphi_1(t) - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \left[\frac{1}{\tau - t} - \frac{\alpha`(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)}\right] \varphi_1(\tau) d\tau = ln\, G(t), \qquad t \in \gamma. \quad (3.13)$$

Знаходячи розв'язок рівняння (3.13), тим самим знаходимо розв'язок задачі (3.12) у випадку $\kappa = 0$, тобто із цього випливає, що будь-яку функцію $G(t)$, яка відмінна від нуля на контурі γ і задовольняє на ньому умову Гельдера, можна зобразити у вигляді

$$G(t) = \frac{X^{+}[\alpha(t)]}{X^{-}(t)}, \qquad t \in \gamma, \quad (3.14)$$

де $X^{\pm}(t)$ – крайові значення функцій, аналітичних у верхній та нижній півплощинах, що визначаються формулами

$$X^{+}(z) = e^{\Gamma^{+}(z)}, \qquad X^{-}(z) = e^{\Gamma^{-}(z)},$$

де

$$\Gamma^{+}(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{\varphi_1[\beta(\tau)]}{\tau - z}d\tau, \qquad \Gamma^{-}(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{\varphi_1(\tau)}{\tau - z}d\tau.$$

Нехай $\kappa \neq 0$. Тоді функція $t^{-\kappa}G(t)$ зображується у вигляді

$$t^{-\kappa}G(t) = \frac{X^{+}[\alpha(t)]}{X^{-}(t)}, \qquad t \in \gamma, \tag{3.15}$$

де

$$X^{+}(z) = e^{\Gamma^{+}(z)}, \qquad X^{-}(z) = e^{\Gamma^{-}(z)}, \tag{3.16}$$

$$\Gamma^{+}(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{\omega[\beta(\tau)]}{\tau - z}d\tau, \qquad \Gamma^{-}(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{\omega(\tau)}{\tau - z}d\tau, \tag{3.17}$$

а функція $\omega(t)$ – розв'язок рівняння

$$\omega(t) - \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\left[\frac{1}{\tau - t} - \frac{\alpha`(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)}\right]\omega(\tau)d\tau = ln\,[t^{-\kappa}G(t)], \qquad t \in \gamma. \tag{3.18}$$

Звідси крайову умову (3.12) можна переписати у вигляді

$$\frac{\Phi^{+}[\alpha(t)]}{X^{+}[\alpha(t)]} = t^{\kappa}\frac{\Phi^{-}(t)}{X^{-}(t)}, \qquad t \in \gamma.$$

Тоді у випадку $\kappa > 0$, використовуючи теорему Леувіля [2, 7, 9], розв'язок останньої задачі шукаємо у вигляді

$$\Phi^+(z) = \frac{X^+(z)}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\frac{\rho[\beta(\tau)]}{\tau\ -\ z}\ d\tau, \tag{3.19}$$

$$\Phi^-(z) =\ z^{-\kappa}X^-(z)\left\{\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\frac{\rho(\tau)}{\tau\ -\ z}\ d\tau\ +\ P_\kappa(z)\right\}, \tag{3.20}$$

де $P_\kappa(z)$ – довільний многочлен степеня κ , а невідома щільність $\rho(t)$ є розв'язком рівняння

$$\rho(t)\ -\ \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\left[\frac{1}{\tau-t}-\frac{\alpha`(\tau)}{\alpha(\tau)-\alpha(t)}\right]\rho\,(\tau)d\tau\ \ = P_\kappa(t),\qquad t\,\epsilon\,\gamma. \tag{3.21}$$

Таким чином, при додатному індексі однорідна задача Газемана-Рімана є розв'язною і в класі обмежених функцій має $\kappa + 1$ лінійно незалежних розв'язків.

Якщо ж $\kappa < 0$, то на основі леми 3.1 одержуємо, що $\Phi^+(z) = \Phi^-(z)\ \equiv 0$, тобто при від'ємному індексі однорідна задача Газемана має лише тривіальний розв'язок і є нерозв'язною.

3.3.2 Приклади розв’язання однорідної задачі Газемана-Рімана

Приклад 3.3 Розв’язати задачу Газемана-Рімана

$$\Phi^+\left(\mathrm{e}^{i\xi}t\right) = t\ \Phi^-(t),\qquad t\,\epsilon\,\gamma$$

на контурі $\gamma = \{t : |t| = 1\}$.

Розв’язання. Для даної задачі $G(t) = t$, $g(t) = 0$, тому поставлена задача є однорідною.

Знайдемо індекс функції $G(t)$, який позначається $ind\, G(t) = \kappa$. Нулем функції $G(z) = z$ є точка $z = 0$, полюсів функція не має, тому $N^+ = 1$, $P^+ = 0$, звідки $\kappa = N^+ - P^+ = 1$.

В прикладі 3.1 було знайдено ядро рівняння (3.18)

$$K(t, \tau) = 0,$$

тоді його розв'язком буде функція

$$\omega(t) = \ln[t^{-1} \cdot t] = 0.$$

Застосуємо формули (3.17), а потім (3.16):

$$\Gamma^+(z) = \Gamma^-(z) = 0;$$
$$X^+(z) = \lambda^-(z) = \mathrm{e}^0 = 1.$$

Тепер для однорідної задачі спочатку знайдемо розв'язок рівняння (3.21) з урахуванням того, що його ядро нульове. Маємо:

$$\rho(t) = P_\kappa(t) = At + B.$$

Застосуємо формулу (3.19)

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{Ae^{-i\xi}\tau + B}{\tau - z}\, d\tau.$$

Функцією щільності інтеграла, що визначає шукану функцію, є $f(z) = Ae^{-i\xi}z + B$. Вона не має особливих точок в області D^+, тому є аналітичною в D^+. Застосовуємо формулу (1.1), отримуємо:

$$\Phi^+(z) = Ae^{-i\xi}z + B.$$

Тепер використаємо формулу (3.20):

$$\Phi^-(z) = z^{-1} \cdot 1 \cdot \left\{ \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{A\tau \ + \ B}{\tau \ - \ z} \, d\tau + Az \ + \ B \right\}.$$

Розглянемо інтеграл $\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{A\tau \ + B}{\tau - z} \, d\tau$, де $z \in D^-$. Відповідно до (1.1) матимемо $\varphi(z) = 0$. Отже,

$$\Phi^-(z) = z^{-1}\{0 + Az \ + \ B\}.$$

Отримаємо

$$\Phi^+(z) = Ae^{-i\xi}z + B,$$
$$\Phi^-(z) = \frac{Az \ + \ B}{z}.$$

Застосуємо умову із загальної постановки задачі Газемана-Рімана $\Phi^-(\infty) = 1$. Із подання функції $\Phi^-(z)$ маємо $\Phi^-(\infty) = \mathrm{A}$,з урахуванням умови одержимо $\mathrm{A} = \ 1$.

Відповідь:

$$\Phi^+(z) = e^{-i\xi}z + B,$$
$$\Phi^-(z) = \frac{z \ + B}{z}.$$

Перевірка показує, що отримані функції будуть розв'язками крайової задачі, оскільки перетворюють крайову умову на тотожність.

Приклад 3.4 Розв’язати задачу Газемана-Рімана

$$\Phi^{+}\left(\frac{t\ -\ z_0}{\overline{z_0}t-1}\right)=\left(\frac{t\ -\ z_0}{\overline{z_0}t-1}\right)^{2}\Phi^{-}(t),\qquad t\,\epsilon\,\gamma$$

на контурі $\gamma=\{t:|t|=1\}$.

Розв’язання. Оскільки $g(t)=0$, то поставлена задача є однорідною.

Для даної задачі $G(t)=\left(\frac{t-z_0}{\overline{z_0}t-1}\right)^{2}$. Шукаємо індекс функції $G(t)$, який позначається $ind\ G(t)=\kappa$. З урахуванням другого степеня в даній задачі, нулем другого порядку функції $G(z)=z$ є точка $z=z_0$, тому $N^{+}=2$. Оскільки $\overline{z_0}\,\epsilon\,D^{+}$, то $\frac{1}{\overline{z_0}}\,\epsilon\,D^{-}$. Таким чином, в області D^{+}полюсів немає, тобто $P^{+}=0$, звідки

$$\kappa=N^{+}-\ P^{+}=2.$$

Наступним кроком є розв’язання інтегрального рівняння (3.18). У раніше розв’язаному прикладі 3.2 ми вже спрощували ядро аналогічного рівняння і отримали $K(t,\tau)=\frac{\overline{z_0}}{\overline{z_0}\tau-1}$.

Тепер застосуємо модифіковану формулу (3.18), де замість $t^{-\kappa}$ підставимо вираз $(t-z_0)^{-\kappa}$, тим самим спростивши розв’язання рівняння. Для даного прикладу відповідне рівняння набуде вигляду

$$\omega(t)-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{\overline{z_0}}{\overline{z_0}\tau-1}\omega(\tau)d\tau=ln\left[(t-z_0)^{-2}\left(\frac{t\ -\ z_0}{\overline{z_0}t-1}\right)^{2}\right]$$

Перетворимо його:

$$\omega(t)\ -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{\overline{z_0}}{\overline{z_0}\tau-1}\omega(\tau)d\tau\ \ =-2ln\,[\overline{z_0}t-1].$$

Знайдемо розв’язок інтегрального рівняння методом послідовних наближень. За нульове наближення візьмемо функцію

$$\omega_0(t) = -2ln\,[\bar{z_0}t - 1].$$

Тоді

$$\omega_1(t) = -2\,\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\frac{\bar{z_0}}{\bar{z_0}\tau - 1}\,ln\,[\bar{z_0}\tau - 1]\,d\tau \quad - 2ln\,[\bar{z_0}t - 1].$$

Розглянемо підінтегральну функцію $h(z) = \frac{\bar{z_0}}{\bar{z_0}z-1}\,ln\,[\bar{z_0}z - 1]$, подовжену на всю комплексну площину. Вона має особливу точку $z = \frac{1}{\bar{z_0}}$, що лежіть назовні контура, тому функція аналітична всередині контура. Застосуємо класичну теорему Коші, матимемо

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\frac{\bar{z_0}}{\bar{z_0}\tau - 1}\,ln\,[\bar{z_0}\tau - 1]\,d\tau = 0,$$

$$\omega_1(t) = -2ln\,[\bar{z_0}t - 1].$$

Звідси випливає, що

$$\omega_0(t) = \omega_1(t) = \ldots = \omega_n(t) = \cdots = -2ln\,[\bar{z_0}t - 1].$$

$$\omega(t) = \lim_{n}\omega_n(t) = -\,2ln\,[\bar{z_0}t - 1].$$

Тепер застосуємо формулу (3.17), ураховуючи (1.1)

$$\Gamma^+(z) = -2\,\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\frac{1}{\tau - z}\,ln\,\left[\bar{z_0}\,\frac{\tau - z_0}{\bar{z_0}\tau - 1} - 1\right]d\tau =$$

$$= -2\,\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\frac{1}{\tau - z}\,ln\,\left[\frac{1 - \bar{z_0}z_0}{\bar{z_0}\tau - 1}\right]d\tau = -2ln\,\left[\frac{1 - \bar{z_0}z_0}{\bar{z_0}z - 1}\right];$$

$$\Gamma^-(z) = -2\,\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\frac{1}{\tau - z}\,ln\,[\bar{z_0}\tau - 1]\,d\tau = 0.$$

Результат отримано внаслідок аналітичності обох функцій щільності в області D^+.

За формулою (3.16) отримуємо

$$X^+(z) = \; e^{-2ln\left[\frac{1-\bar{z_0}z_0}{\bar{z_0}\tau - 1}\right]} = \left(\frac{\bar{z_0}z - 1}{1 - \bar{z_0}z_0}\right)^2;$$

$$X^-(z) = 1.$$

Наступним кроком шукаємо розв’язок рівняння (3.21)

$$\rho(t) \; - \; \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\frac{\bar{z_0}\,\rho(\tau)}{\bar{z_0}\tau - 1}\,d\tau \; = \; A\,t^2 + B\,t \; + C$$

Для розв’язання даного рівняння використаємо метод послідовних наближень:\. За нульове наближення обираємо

$$\rho_0(t) \; = \; A\,t^2 + B\,t \; + C.$$

Тоді перше наближення набуде вигляду

$$\rho_1(t) \; = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\frac{\bar{z_0}}{\bar{z_0}\tau - 1}\cdot(A\,\tau^2 + B\,\tau \; + C)\,d\tau + A\,t^2 + B\,t \; + C.$$

Розглянемо підінтегральну функцію

$$f\ (z)\ =\ \frac{\overline{z_0}}{\overline{z_0}\tau - 1}\cdot (A\ \tau^2 + B\ \tau\ + C).$$

Її особлива точка $z\ =\ \frac{1}{\overline{z_0}}$ не лежить всередині контура, тому ця функція $f\ (z)$ аналітична в D^+. За класичною теоремою Коші, інтеграл, що обчислюється, дорівнює нулю. Таким чином, отримуємо:

$$\rho_1(t)\ = A\ t^2 + B\ t\ + C\ =\ \rho_2(t)\ = \ldots =\ \rho_n(t)\ = \ldots$$

Тобто, границя послідовних наближень дорівнює

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n(t) =\ A\ t^2 + B\ t\ + C\ =\ \rho(t).$$

Далі шукаємо $\Phi^+(z)$ за формулою (3.19)

$$\Phi^+(z) = \left(\frac{\overline{z_0}z - 1}{1 - \overline{z_0}z_0}\right)^2 \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \left[\mathrm{A}\left(\frac{\tau - z_0}{\overline{z_0}\tau - 1}\right)^2 + \mathrm{B}\frac{\tau - z_0}{\overline{z_0}\tau - 1} + \mathrm{C}\right]\frac{d\tau}{\tau - z},$$

Якщо функцію щільності $f_1(z)$ подовжити на всю комплексну множину, то отримаємо

$$f_1(z)\ =\ \mathrm{A}\left(\frac{z - z_0}{\overline{z_0}z - 1}\right)^2 + \mathrm{B}\frac{z - z_0}{\overline{z_0}z - 1} + \mathrm{C}.$$

Оскільки особлива точка цієї функції $z\ =\ \frac{1}{\overline{z_0}}\ \epsilon\ D^-$, тому функція $f_1(z)$ аналітична в D^+. Маємо:

$$\Phi^{+}(z) = \left(\frac{\bar{z_0}z - 1}{1 - \bar{z_0}z_0}\right)^2 \left(\mathrm{A}\left(\frac{z - z_0}{\bar{z_0}z - 1}\right)^2 + \mathrm{B}\frac{z - z_0}{\bar{z_0}z - 1} + \mathrm{C}\right).$$

Тепер треба обчислити $\Phi^{-}(z)$ за модифікованою формулою (3.20), де замість $z^{-\kappa}$ буде множник $(z - z_0)^{-\kappa}$:

$$\Phi^{-}(z) = (z - z_0)^{-2} \cdot 1 \cdot \left\{\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{A\,\tau^2 + B\,\tau + C}{\tau - z}\,d\tau + A\,z^2 + B\,z + C\right\}.$$

Функція щільності інтеграла в останній формулі є аналітичною в D^{+}, тому значення інтеграла типу Коші в точках області D^{-} дорівнює 0. Отже,

$$\Phi^{-}(z) = (z - z_0)^{-2} \cdot (A\,z^2 + B\,z + C) = \frac{A\,z^2 + B\,z + C}{(z - z_0)^2}.$$

За постановкою однорідної задачі Газемана-Рімана $\Phi^{-}(\infty) = 1$. Зважаючи на вигляд функції $\Phi^{-}(z)$, знайдемо $\Phi^{-}(\infty) = A$, тому $A = 1$.

Відповідь:

$$\Phi^{+}(z) = \left(\frac{\bar{z_0}z - 1}{1 - \bar{z_0}z_0}\right)^2 \left(\left(\frac{z - z_0}{\bar{z_0}z - 1}\right)^2 + \mathrm{B}\frac{z - z_0}{\bar{z_0}z - 1} + \mathrm{C}\right),$$

$$\Phi^{-}(z) = (z - z_0)^{-2} \cdot (z^2 + B\,z + C).$$

Проведемо перевірку. Знаходячи граничні значення на контурі для функцій-розв'язків задачі, підставимо їх до крайової умови поставленої задачі. При цьому врахуємо, що $\frac{\frac{t - z_0}{\bar{z_0}t - 1} - z_0}{\bar{z_0}\frac{t - z_0}{\bar{z_0}t - 1} - 1} = t$. Підставимо та зробимо перетворення:

$$\left(\frac{\bar{z}_0\dfrac{z-z_0}{\bar{z}_0 z-1}-1}{1-\bar{z}_0 z_0}\right)^2 (t^2+\mathrm{B}t+\mathrm{C}) = \left(\frac{t-z_0}{\bar{z}_0 t-1}\right)^2 (t-z_0)^{-2}\cdot (t^2+B\,t+C),$$

$$\left(\frac{1}{\bar{z}_0 t-1}\right)^2 (t^2+\mathrm{B}t+\mathrm{C}) = \left(\frac{1}{\bar{z}_0 t-1}\right)^2 (t^2+B\,t+C).$$

Крайова умова перетворилася на тотожність, що підтверджує правильність знайденого розв’язку.

3.4 Неоднорідна задача Газемана-Рімана

3.4.1 Відомі теоретичні викладки щодо отримання розв’язку неоднорідної задачі Газемана-Рімана

Розглянемо неоднорідну задачу, крайову умову якої з урахуванням (3.15) – (3.17) можна переписати у вигляді

$$\frac{\Phi^+[\alpha(t)]}{X^+[\alpha(t)]} = t^{\kappa}\frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} + \frac{g(t)}{X^+[\alpha(t)]}, \quad t\in\gamma.$$

При цьому, якщо $\kappa > 0$, то $\Phi^+(z)$ і $\Phi^-(z)$ шукаються у вигляді

$$\Phi^+(z) = \frac{X^+(z)}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{\varphi[\beta(\tau)]}{\tau - z}\,d\tau, \tag{3.22}$$

$$\Phi^-(z) = z^{-\kappa}X^-(z)\left\{\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\,d\tau + P_{\kappa-1}(z)\right\}, \tag{3.23}$$

де $P_{\kappa-1}(z)$ – довільний многочлен степеня κ, а невідома щільність $\varphi(t)$ є розв'язком рівняння

$$\varphi(t) - \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\left[\frac{1}{\tau - t} - \frac{\alpha`(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)}\right]\varphi(\tau)d\tau =$$

$$= \frac{g(t)}{X^{+}[\alpha(t)]} + P_{\kappa-1}(t), t \in \gamma. \qquad (3.24)$$

Якщо $\kappa = 0$, то розв'язок неоднорідної задачі єдиний, будується за формулами (3.22), (3.23), (3.16) – (3.18), при цьому $P_{\kappa-1}(z) \equiv 0$. Якщо ж $\kappa < 0$, то неоднорідна задача нерозв'язна.

Вона буде розв'язною в разі виконання умов розв'язності

$$\oint_{\gamma} h_k(t)\, g(t)\, dt = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, -\kappa.$$

Якщо умови розв'язності виконані, то неоднорідна задача має єдиний розв'язок, що визначається формулами (3.22), (3.23), (3.16) – (3.18), при цьому $P_{\kappa-1}(z) \equiv 0$.

Таким чином, щоб побудувати розв'язок задачі Газемана, необхідно знайти розв'язки рівнянь (3.18) і (3.24), а потім ці розв'язки підставити в формули (3.22) та (3.23)

3.4.2 Приклади розв'язання неоднорідної задачі Газемана-Рімана

Приклад 3.5 Розв'язати задачу Газемана-Рімана

$$\Phi^{+}(\lambda^{i\xi}t) = t\,\Phi^{-}(t) + \frac{t+1}{t^2}, \qquad t \in \gamma$$

на контурі $\gamma = \{t : |t| = 1\}$.

Розв'язання. Для даної неоднорідної крайової задачі індекс $\kappa = 1$ та функції $X^{\pm}(z)$ збігаються з тими, що отримано в прикладі 3.3:

$$X^+(z) = X^-(z) = 1.$$

Шукаємо розв'язок даної задачі, використовуючи формулу (3.24). Ядро інтегрального рівняння нульове, тому (3.24) набуде наступного вигляду

$$\varphi(t) = \frac{t+1}{t^2} + \mathrm{C}.$$

Продовжимо розв'язання застосовуючи формулу (3.22)

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \left(\frac{e^{-i\xi}\tau + 1}{e^{-2i\xi}\tau^2} + C\right)\frac{d\tau}{\tau - \mathrm{z}},$$

Функцією щільності інтеграла, що визначає шукану функцію, є

$$f(z) = \frac{e^{-i\xi}\mathrm{z} + 1}{e^{-2i\xi}\mathrm{z}^2} + \mathrm{C}.$$

Її особливою точкою є $z = 0\ \epsilon\ D^+$. На нескінченності матимемо $f(\infty) = C$, тому функція $f(z)$ – аналітична в D^-. Використовуючи формулу (1.2) при обчисленні функції $\Phi^+(z)$, також враховуємо те, що $z\ \epsilon\ D^+$, звідки $\Phi^+(z) = C$.

Тепер обчислимо функцію $\Phi^-(z)$ за формулою (3.23)

$$\Phi^-(z) = z^{-1}\cdot 1\left\{\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \left(\frac{\tau+1}{\tau^2} + C\right)\frac{d\tau}{\tau - \mathrm{z}} + C\right\}.$$

Оскільки $z\ \epsilon\ D^-$, то інтеграл під знаком функції, що обчислюється, дорівнює

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\left(\frac{\tau+1}{\tau^2}+C\right)\frac{d\tau}{\tau-z}=C-\left(\frac{z+1}{z^2}+C\right)=-\frac{z+1}{z^2}.$$

Таким чином,

$$\Phi^{-}(z)=z^{-1}\left\{-\frac{z+1}{z^2}+C\right\}.$$

На нескінченності отримаємо $\Phi^{-}(\infty)=0$, тому умова задовольняється. Якщо підставити знайдені розв'язки в крайову умову, то вони задовольняють її тотожно.

Відповідь.

$$\Phi^{+}(z)=C,$$
$$\Phi^{-}(z)=-\frac{z+1}{z^3}+\frac{C}{z}.$$

Приклад 3.6 Нехай $\gamma=\{t:|t|=1\}$. Знайти розв'язки задачі Газемана-Рімана

$$\Phi^{+}\left(\frac{t-z_0}{\bar{z_0}t-1}\right)=\left(\frac{t-z_0}{\bar{z_0}t-1}\right)^2\Phi^{-}(t)+\frac{2t^2+1}{t+2},\qquad t\in\gamma,\ z_0\in D^{+}.$$

Розв'язання. З попередньо розв'язаної однорідної задачі 3.4 вже відомо, що $\kappa=2$ та

$$X^{+}(z)=\left(\frac{\bar{z_0}z-1}{1-\bar{z_0}z_0}\right)^2;$$
$$X^{-}(z)=1.$$

Ці дані необхідно використати для розв'язання даної неоднорідної задачі.

Наступним кроком, треба знайти розв'язок інтегрального рівняння (3.24). Таке інтегральне рівняння можна розв'язати методом послідовних наближень. Ядро цього рівняння – $K(t,\tau)=\frac{\overline{z_0}}{\overline{z_0}\tau-1}$ було знайдено в прикладі 3.2. В правій частині рівняння (3.24) вийшов такий вираз:

$$\frac{g(t)}{X^{+}[\alpha(t)]}+\ P_{\kappa-1}(t)=(\overline{z_0}t-1)^2\frac{2t^2+1}{t+2}\ +Az\ +B,$$

внаслідок того, що

$$\left(\frac{\overline{z_0}\dfrac{t\ -\ z_0}{\overline{z_0}t-1}-1}{1-\ \overline{z_0}z_0}\right)^2=\left(\frac{1}{\overline{z_0}t-1}\right)^2.$$

Тепер підставляємо отриманий вираз в рівняння (3.24)

$$\varphi(t)\ -\ \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{\overline{z_0}}{\overline{z_0}\tau-1}\varphi(\tau)d\tau=(\overline{z_0}t-1)^2\frac{2t^2+1}{t+2}+At\ +B$$

Розв'яжемо рівняння аналогічно до прикладу 3.2 та 3.4 методом послідовних наближень. Запишемо нульове та перше наближення

$$\varphi_0(t)=(\overline{z_0}t-1)^2\frac{2t^2+1}{t+2}+At+B\ ,$$

$$\varphi_1(t)=\ \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{\overline{z_0}}{\overline{z_0}\tau-1}\left((\overline{z_0}\tau-1)^2\frac{2\tau^2+1}{\tau+2}+A\tau+B\right)d\tau+$$

$$+(\overline{z_0}t-1)^2\frac{2t^2+1}{t+2}+At+B.$$

Інтеграл в першому наближенні має аналітичну в D^+ підінтегральну функцію, тому дорівнює нулю. Таким чином, границя в методі послідовних наближень має наступний вигляд

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = (\bar{z_0}t - 1)^2 \frac{2t^2+1}{t+2} + At + B = \varphi(t).$$

За модифікованою формулою (3.23) отримаємо

$$\Phi^-(z) = (z - z_0)^{-2} \cdot 1 \cdot \left\{ \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \left((\bar{z_0}\tau - 1)^2 \frac{2\tau^2+1}{\tau+2} + A\tau + B \right) \frac{d\tau}{\tau - z} + Az + B \right\}.$$

Функція щільності в інтегралі типу Коші в останній формулі є аналітичною в D^+, звідки випливає, що інтеграл в точках області D^- дорівнює 0. Отже,

$$\Phi^-(z) = (z - z_0)^{-2}\{Az + B\}.$$

Тепер шукаємо значення $\Phi^+(z)$ за формулою (3.22) та використовуючи вже отримані дані (3.10) та (3.11)

$$\Phi^+(z) = \left(\frac{\bar{z_0}z - 1}{1 - \bar{z_0}z_0}\right)^2 \times$$

$$\times \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \left(\left(\bar{z_0}\frac{\tau - z_0}{\bar{z_0}\tau - 1} - 1\right)^2 \frac{2\left(\frac{\tau - z_0}{\bar{z_0}\tau - 1}\right)^2 + 1}{\frac{\tau - z_0}{\bar{z_0}\tau - 1} + 2} + A\tau + B \right) \frac{d\tau}{\tau - z},$$

$$H(\tau) = \frac{2\left(\frac{\tau - z_0}{\bar{z_0}\tau - 1}\right)^2 + 1}{\frac{\tau - z_0}{\bar{z_0}\tau - 1} + 2} = \frac{2(\tau - z_0)^2 + (\bar{z_0}\tau - 1)^2}{\big(\tau - z_0 + 2(\bar{z_0}\tau - 1)\big)(\bar{z_0}\tau - 1)},$$

$$\bar{z_0}\frac{\tau - z_0}{\bar{z_0}\tau - 1} - 1 = \frac{1 - \bar{z_0}z_0}{\bar{z_0}\tau - 1}$$

Подовжена на всю комплексну площину функція щільності інтеграла, що розглядається, має вигляд

$$Q(z) = \frac{1 - \bar{z_0}z_0}{\bar{z_0}z - 1}\, H(z) + Az + B.$$

В прикладі 3.2 було досліджено на аналітичність функцію $H(z)$, де отримано висновок, що вона аналітична в D^+. Функція $\frac{1-\bar{z_0}z_0}{\bar{z_0}z-1}$ має особливу точку в області D^-, тому аналітична в D^+. Той самий тип аналітичності має й многочлен $Az + B$. Звідси випливає, що функція $Q(z)$ аналітична в D^+. Отже,

$$\Phi^+(z) = \left(\frac{\bar{z_0}z - 1}{1 - \bar{z_0}z_0}\right)^2 \left(\frac{1 - \bar{z_0}z_0}{\bar{z_0}z - 1}\, \frac{2(z - z_0)^2 + (\bar{z_0}z - 1)^2}{\big(z - z_0 + 2(\bar{z_0}z - 1)\big)(\bar{z_0}z - 1)} + Az + B\right) =$$

$$= \frac{2(z - z_0)^2 + (\bar{z_0}z - 1)^2}{\big(z - z_0 + 2(\bar{z_0}z - 1)\big)(1 - \bar{z_0}z_0)} + (Az + B)\left(\frac{\bar{z_0}z - 1}{1 - \bar{z_0}z_0}\right)^2.$$

Відповідь.

$$\Phi^+(z) = \frac{2(z - z_0)^2 + (\bar{z_0}z - 1)^2}{\big(z - z_0 + 2(\bar{z_0}z - 1)\big)(1 - \bar{z_0}z_0)} + (Az + B)\left(\frac{\bar{z_0}z - 1}{1 - \bar{z_0}z_0}\right)^2;$$

$$\Phi^-(z) = (z - z_0)^{-2}\{Az + B\}.$$

ВИСНОВКИ

Крайові задачі теорії аналітичних функцій мають не лише теоретичний, а й практичний розвиток в публікаціях різних років. Ці задачі являють інструмент, до якого зводиться розв’язання деяких задач контактної механіки, акустики, механіки руйнування, кінетичної теорії газів, теорії потенціалу [1–6, 12] та інших галузях. Дослідженню методів розв’язання таких задач присвячено роботи [10–18]. Окреме місце в класі таких задач займають задачі зі зсувом, що змінює або не змінює напрям оббігу контура [4, 9, 12, 13, 17, 18]. Першим розв’язав крайову задачу зі зсувом без зміни напряму оббігу C. Haseman [12]. Внаслідок значного розвитку даного напрямку, дослідження в цій галузі є актуальним.

За мету роботи було поставлено: вивчити теоретичні аспекти щодо крайової задачі Газемана-Рімана теорії аналітичних функцій, розв’язати конкретні задачі Газемана-Рімана про стрибок, однорідні та неоднорідні.

Ця мета була досягнута. В роботі надано поняття зсуву зімкненого контура комплексної площини та наведено два приклади функцій зсуву одиничного кола. Потім після надання відомих теоретичних викладок, на основі яких будується розв’язок кожного з типів задач Газемана-Рімана (про стрибок, однорідної та неоднорідної) наведено по два приклади задач відповідного типу, заснованих на двох зсувах одиничного кола, розглянутих напочатку. В деяких прикладах проведено перевірку шляхом підстановки знайденого розв'язку до відповідної крайової умови.

Кожна із задач потребувала розв’язання рівнянь Фредгольма, до яких застосовано метод послідовних наближень.

За темою роботи було зроблено доповідь з публікацією тез доповіді на конференції «Актуальні проблеми математики та інформатики» (2024 р.) [8].

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Вайсфельд Н. Д., Журавльова З. Ю., Реут В. В. Плоскі мішані задачі теорії пружності для півнескінченної смуги : наукова монографія. Одеса : Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, 2019. 149 с.

2. Гоменюк С. І., Гребенюк С. М., Д'яченко Н. М. Крайові задачі теорії аналітичних функцій : навчальний посібник для здобувачів вищої освіти магістра спеціальності «Математика» освітньо-професійної програми «Математика». Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2024. 107 с. URL : https://dspace.znu.edu.ua/xmlui/handle/12345/24057 (дата звернення : 23.09.2024).

3. Зражевський Г. М. Застосування теорії аналітичних функцій в задачах механіки : навчальний посібник. Київ : Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2005. 61 с.

4. Карлеман Т. Математичні задачі кінетичної теорії газів. Москва : Іноземна література, 1960. 125 с.

5. Козачок О. П., Мартиняк Р. М., Слободян Б. С. Взаємодія тіл з регулярним рельєфом за наявності міжконтактного середовища. Львів : Растр-7, 2018. 200 с. URL : http://surl.li/usdeo (дата звернення : 23.09.2024).

6. Мартиняк Р. М., Середницька Х. І. Контактні задачі термопружності для міжфазних тріщин в біматеріальних тілах. Львів : Растр-7, 2017. 168 с. URL : http://surl.li/usdex (дата звернення: 23.09.2024).

7. Навчальний посібник з дисципліни "Комплексний аналіз". Ряди та інтеграли функцій комплексної змінної для студентів механіко-математичного факультету, які навчаються за освітнім рівнем "Бакалавр" спеціальність "Математика" освітні програми "Комп'ютерна математика", "Комп'ютерна механіка" / Г.В. Верьовкіна. Київ : Кравченко Я.О., 2019. 52 с. URL : https://mechmat.knu.ua/wp-content/uploads/2020/10/ka_2_verovkina_2019.pdf (дата звернення : 23.09.2024).

8. Скрильник А. К., Д’яченко Н. М. Крайова задача Газемана-Рімана зі зсувом. *Актуальні проблеми математики та інформатики* : збірка тез п’ятнадцятої Всеукраїнської, двадцять другої регіональної наукової конференції молодих дослідників (Запоріжжя, 27 квітня 2024). Запоріжжя : ЗНУ, 2024. С. 159-160/ URL : https://www.znu.edu.ua/faculty/math/confirences/Tez_APMI_2024.pdf (дата звернення : 23.09.2024)

9. Сніжко Н. В. Крайові задачі теорії аналітичних функцій: навчальний посібник для студентів математичних спеціальностей. Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2007. 95 с.

10. Begehr H. Boundary value problems in complex analysis. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, Vol. XII, No. 1. 2005. P. 65-85. URL : http://emis.muni.cz/journals/BAMV/conten/vol12/Begehr-I.pdf (дата звернення : 23.09.2024).

11. Dugienko O. E., Starovoitov O.V, Dyachenko N. M. Application of the riemann boundary value problems for solving some problems of contact mechanics. *XXX International scientific and practical conference «Actual Problems of Science and Technology – from Theory to Practice»: Collection of abstracts (July 3-5, 2024)* Bern : International Scientific Unity, 2024. P. 70–76. URL : http://surl.li/zmokld (дата звернення : 29.09.2024).

12. Gakhov F. D. Boundary Value Problems. Courier Corporation, 1990. 561 p. URL : http://surl.li/nwuwqg (дата звернення : 23.09.2024)

13. Karlovich Y. I., Rosales-Méndez J. The Haseman Boundary Value Problem with Quasicontinuous Coefficients and Shifts. *Complex Anal. Oper. Theory*. 2022. Vol. 16. Article no. 68. UR L: https://doi.org/10.1007/s11785-022-01245-4. (дата звернення : 29.09.2024).

14. Lin J., Xu Y. Riemann problem of (λ, k) bi-analytic functions. *Applicable Analysis*/ 2021. 101(11), 3804–3815. URL : https://doi.org/10.1080/00036811.2021.1987417 (дата звернення : 23.09.2024)

15. Ramm Alexander G. Boundary values of analytic functions. *Far East Journ. of Appl. Math*. Vol. 116, No 3, 2023. P. 215-227. URL : http://surl.li/usfja (дата звернення : 23.09.2024).

16. Wang X., Du J. Periodic Riemann boundary value problem. *Complex Variables and Elliptic Equations*. 2022. Vol. 68. No. 7. P. 1077–1092. URL : https://doi.org/10.1080/17476933.2022.2035929 (дата звернення : 23.09.2024)

17. Wang Y., Du J. Y. Haseman boundary value problems for metaanalytic functions with different shifts on the unit circumference. *Complex Variables and Elliptic Equations.* 2008. Vol. 53. No/ 4. P. 325–342. URL : https://doi.org/10.1080/17476930701739945 (дата звернення : 29.09.2024)

18. Wang Y., Du J. Mixed boundary value problems with a shift for a pair of metaanalytic and analytic functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2010. Vol. 369: P. 510–524. URL : https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2010.03.051 (дата звернення : 23.09.2024)

ДОДАТОК А

Деякі відомі теоретичні факти з теорії крайових задач

А.1 Функції, які задовольняють умову Гельдера

Наведемо ряд відомих теоретичних фактів [2, 9, 12].

Нехай γ – деякий спрямлюваний контур і $\varphi(t)$ – функція, задана на контурі γ.

Означення А.1 [2, 9, 12] Функція $\varphi(t)$ задовольняє на контурі γ умову Гельдера, якщо

$$\exists\, A > 0, \exists\, \lambda > 0: \forall\, t_1, t_2 \in \gamma\, |\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leq A\, |t_1 - t_2|^{\lambda}.$$

Константу A називають сталою Гельдера, а λ – показником Гельдера. При $\lambda = 1$ умову Гельдера називають умовою Ліпшиця.

Множину функцій, що задовольняють на контурі γ умову Гельдера з показником λ, позначають $H_{\lambda}(\gamma)$.

1.2 Поняття та властивості індексу функції

Наведені нижче факти є відомими, вони викладені в роботах [2, 9, 12].

Означення А.2 [2, 9, 12] Нехай γ – гладкий зімкнений контур і $G(t)$ – задана на ньому неперервна функція, яка не обертається в нуль на γ. Індексом κ функції $G(t)$ відносно контура γ називається поділений на 2π приріст її аргументу при повному оббігу кривої γ в додатному напрямі.

$$\kappa = Ind\ G(t) = \frac{1}{2\pi}[\arg G(t)]\Big|_{\gamma}. \qquad (A.1)$$

Властивість А.1 [2, 9, 12] Індекс добутку функцій дорівнює сумі індексів цих функцій. А саме:

$$Ind[G_1(t) \cdot G_2(t)] = IndG_1(t) + IndG_2(t).$$

Властивість А.2 [2, 9, 12] Індекс частки двох функцій дорівнює різниці індексів цих функцій. А саме:

$$Ind[\frac{G_1(t)}{G_2(t)}] = IndG_1(t) - IndG_2(t).$$

Властивість А.3 [2, 9, 12] Якщо $G(t)$ є крайовим значенням функції, аналітичної всередині (зовні) контура, то її індекс дорівнює кількості нулів N^+ розташованих всередині контура γ, тобто $\kappa = N^+$ (числу нулів N^-, що знаходяться зовні контура γ, взятому з протилежним знаком, тобто $\kappa = -N^-$) з урахуванням їх кратності.

Властивість А.4 [2, 9, 12] Якщо функція $G(t)$ аналітична всередині (зовні) контура γ, за винятком скінченного числа точок, де вона може мати полюси, то індекс такої функції дорівнює різниці кількості нулів N^+ і полюсів P^+, тобто $\kappa = N^+ - P^+$ (різниці кількості нулів N^- і полюсів P^- зовні контура γ, взятій з протилежним знаком, тобто $\kappa = -[N^- - P^-]$) з урахуванням їх кратності.

А.1 Формули Сохоцького

Накладемо наступні припущення:

- γ – гладкий замкнений контур,

- функція $\varphi(\tau)$задовольняє на γ умову Гельдера.

Тоді мають місце формули Сохоцького [2, 9, 12]:

$$\Phi^{+}[t] = \frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau,$$

$$\Phi^{-}(t) = -\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau. \qquad (\text{A. } 2)$$

Декларація
академічної доброчесності
здобувача ступеня вищої освіти ЗНУ

Я, _____

студент(ка) ____ курсу, _____ форми навчання, математичного факультету, спеціальності _____, адреса електронної пошти _____, –

підтверджую, що написана мною кваліфікаційна робота бакалавра на тему «_____
_____»
відповідає вимогам академічної доброчесності та не містить порушень, що визначені у ст. 42 Закону України «Про освіту», зі змістом яких ознайомлений/ознайомлена;

– заявляю, що надана мною для перевірки електронна версія роботи є ідентичною її друкованій версії;

– згоден/згодна на перевірку моєї роботи на відповідність критеріям академічної доброчесності у будь-який спосіб, у тому числі за допомогою інтернет-системи, а також на архівування моєї роботи в базі даних цієї системи.

Студент

_____	_____	_____
(дата)	(підпис)	(ініціали, прізвище)

Науковий керівник

_____	_____	_____
(дата)	(підпис)	(ініціали, прізвище)