МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра фундаментальної та прикладної математики

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА

на тему: **«ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ ДЛЯ ПОЛІПШЕННЯ АПРОКСИМАЦІЇ В МЕТОДІ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ»**

Виконала: студентка 2 курсу, групи 8.1114-дн
спеціальності 111 Математика
(шифр і назва спеціальності)
освітньої програми Математика
(назва освітньої програми)
М.В. Перевозчикова
(ініціали та прізвище)
Керівник завідувач кафедри фундаментальної математики, д.т.н., професор С.М. Гребенюк
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)
Рецензент декан математичного факультету, д.т.н., професор С.І. Гоменюк
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Запоріжжя – 2026

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет математичний

Кафедра фундаментальної та прикладної математики

Рівень вищої освіти магістр

Спеціальність 111 Математика

Освітня програма Математика

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри фундаментальної та прикладної математики, професор, д.т.н.
_____ Гребенюк С.М.
(підпис)

____ _____ 2025 р.

ЗАВДАННЯ
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТУ

Перевозчиковій Марині Валеріївні

(прізвище, ім'я та по-батькові)

1. Тема роботи (проєкту) Застосування методу найменших квадратів для поліпшення апроксимації в методі скінченних елементів

керівник роботи (проекту) Гребенюк Сергій Миколайович, д.т.н., професор
(прізвище, ім'я та по-батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом ЗНУ від «28» лютого 2025 року № 326-с

2. Строк подання студентом роботи 30.01.2026

3. Вихідні дані до роботи 1. Постановка задачі.
2. Перелік літератури.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)

1. Вивчити основні ідеї та застосування методу скінченних елементів.

2. Вивчити застосування методу найменших квадратів до апроксимації.

3. Основні співвідношення теорії пружності.

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень)
Презентація

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання 01.09.2025

К А Л Е Н Д А Р Н И Й П Л А Н

№	Назва етапів кваліфікаційної роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	Розробка плану роботи.	05.09.2025 – 10.09.2025	
2.	Збір вихідних даних.	11.09.2025 – 23.09.2025	
3.	Обробка методичних та теоретичних	25.09.2025 – 10.10.2025	
	джерел.		
4.	Розробка першого та другого розділу.	12.10.2025 – 14.11.2025	
5.	Розробка третього та четвертого	17.11.2025 – 23.12.2025	
	розділів.		
6.	Оформлення та нормоконтроль	05.01.2026 – 30.01.2026	
	кваліфікаційної роботи магістра.		
7.	Захист кваліфікаційної роботи.	20.02.2026	

Студент _____ М.В. Перевозчикова
(підпис) (ініціали та прізвище)

Керівник роботи _____ С.М. Гребенюк
(підпис) (ініціали та прізвище)

Нормоконтроль пройдено

Нормоконтролер _____ О.Г. Спиця
(підпис) (ініціали та прізвище)

ЗМІСТ

Завдання на кваліфікаційну роботу 2
Реферат 5
Вступ 7
1 Застосування методу скінченних елементів до розв'язання крайових задач. 9
1.1 Основні тенденції розвитку скінченно-елементного моделювання процесів 10
1.2 Застосування методу найменших квадратів до апроксимації функцій 13
1.3 Висновки до розділу 1 14
2 Основні співвідношення для чотирикутного скінченого елементу 15
2.1 Чотирикутний двовимірний скінченний елемент 16
2.2 Класична апроксимація шуканої функції для чотирикутного скінченного елементу 17
2.3 Уточнена апроксимація функції для чотирикутного скінченного елементу 20
2.4 Основні співвідношення теорії пружності для плоскої задачі 21
2.5 Побудова матриці жорсткості чотиривузлового скінченного елементу на основі класичної та уточненої схеми 24
3 Розв'язання двомірної крайової задачі за допомогою класичної та уточненої схеми скінченного елементу 32
3.1 Постановка задачі 32
3.2 Скінченно-елементне розв'язання крайової задачі про деформування шарнірно опертої балки 33
Висновки 39
Перелік посилань 40

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота магістра «Застосування методу найменших квадратів для поліпшення апроксимації в методі скінченних елементів»:42 с., 7 рис., 1 табл., 24 джерел.

АПРОКСИМАЦІЯ, МАТРИЦЯ ЖОРСТКОСТІ, МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ, МЕТОД СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ, ФУНКЦІЇ ФОРМИ

Об’єкт дослідження – уточнена схема методу скінченних елементів.

Мета роботи: отримати матрицю жорсткості двовимірного скінченного елементу на основі покращеної апроксимації функцій форми та застосувати її до розв’язання крайової задачі.

Методи дослідження – аналітичний, чисельний.

У роботі розглянуто теоретичні основи методу скінченних елементів та методу найменших квадратів, проаналізовано їх застосування до розв’язання крайових задач для рівнянь теорії пружності. Наведено основні співвідношення для плоского чотиривузлового чотирикутного скінченного елементу. Запропоновано уточнену схему апроксимації функції переміщень на основі доповнення розкладу за степеневими функціями з визначенням додаткових коефіцієнтів методом найменших квадратів.

Отримано матрицю жорсткості скінченного елементу для класичної та уточненої схем. Виконано програмну реалізацію для чисельного розв’язання двовимірної крайової задачі про деформування шарнірно опертої балки під дією рівномірно розподіленого навантаження. Проведено порівняльний аналіз результатів чисельних розрахунків із аналітичним розв’язком.

Встановлено, що уточнена схема методу скінченних елементів забезпечує суттєве зменшення похибки та кращу збіжність результатів порівняно з класичною схемою при однакових сітках дискретизації.

SUMMARY

Master's Qualifying Theses "Application of the Least Squares Method for Improving Approximation in the Finite Element Method", 42 p., 7 figures, 1 tables, 24 references.

APPROXIMATION, STIFFNESS MATRIX, LEAST SQUARES METHOD, FINITE ELEMENT METHOD, SHAPE FUNCTIONS

The object of the study is a refined scheme of the finite element method for two-dimensional boundary value problems of elasticity theory.

The aim of the study is to obtain the stiffness matrix of a two-dimensional finite element on the basis of improved approximation of shape functions using the least squares method and to apply it to the solution of a boundary value problem.

The methods of research are analytical and numerical.

The thesis deals with the theoretical foundations of the finite element method and the least squares method and their application to the solution of boundary value problems of elasticity theory. The basic relations for a planar four-node quadrilateral finite element are derived. On the basis of the power series expansion of the displacement function, an extended approximation with additional terms is constructed. The coefficients of the additional terms are determined by minimizing the sum of squares according to the least squares method.

In this thesis the stiffness matrix of the finite element is obtained for both the classical and the refined schemes. A numerical solution of the two-dimensional boundary value problem of deformation of a simply supported beam under uniformly distributed load is performed. A comparison of numerical results with the analytical solution is carried out. It is shown that the refined finite element scheme provides higher accuracy and better convergence in comparison with the classical scheme for identical discretization meshes.

ВСТУП

У сучасній прикладній математиці та інженерній практиці значна кількість задач зводиться до розв'язування крайових задач для диференціальних рівнянь. Такі задачі описують стаціонарні або квазістаціонарні процеси, що відбуваються в обмежених областях, і передбачають визначення функції, яка задовольняє певне диференціальне рівняння в області та додаткові умови на її межі. Прикладами є задачі теплопровідності, електростатики, теорії пружності, фільтрації рідин у пористих середовищах, дифузії речовин тощо.

При розв'язанні практичних задач і математичній формалізації постановок задач виникає необхідність у описанні областей складної геометричної форми, самі процеси, що відбуваються у цих областях також описуються складними математичними конструкціями. Тому, в більшості випадків маємо громіздку математичну постановку задачі.

Застосування аналітичних методів розв'язання таких задач, які дають точний результат, або неможливе, або вимагає дуже значних витрат часу для реалізації. Тому застосування таких методів раціонально лише для дуже обмеженого кола зазначених задач.

Іншою групою методів розв'язання є чисельні методи, які як результат мають масиви чисел, отриманих із певною точністю. До найбільш поширених із цієї групи методів відносять метод скінченних елементів (МСЕ), метод граничних елементів (МГЕ), метод колокацій, метод скінченних різниць (МСР) та інші.

Одним із найбільш перспективних із цієї групи методів є метод скінченних елементів, який широко використовують для розв'язання багатьох прикладних задач інженерного спрямування. Однією із основних проблем при

застосуванні методу скінченних елементів є проблема точності отриманих розв’язків.

Екстенсивним шляхом підвищення точності є збільшення кількості скінченних елементів при розрахунках, але це приводить до збільшення необхідного для обчислень машинного часу.

Більш перспективним для поліпшення точності розрахунків є вдосконалення властивостей типового скінченного елементу шляхом підвищення якості апроксимуючих функцій.

1 ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

Розглянемо основну ідею методу скінченних елементів на прикладі опису основних етапів розв'язання крайової задачі. У загальному вигляді лінійну крайову задачу для звичайного диференціального рівняння можна подати як задачу знаходження функції u, що задовольняє диференціальне рівняння в області Ω:

$$Lu = f$$

та граничні умови на межі $\partial\Omega$

$$Bu=g,$$

де L – диференціальний оператор другого порядку,

f – задана функція,

B – оператор граничних умов.

Метод скінченних елементів ґрунтується на заміні неперервної задачі її скінченновимірним наближенням. Область Ω розбивається на скінченну кількість під областей– елементів простої форми (трикутників, чотирикутників, тетраедрів тощо). Шуканий розв'язок апроксимується лінійною комбінацією базисних функцій, які для одновимірного випадку можуть бути представлені так:

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^{N} c_i \varphi_i(x), \qquad (1.1)$$

де φ_i – функції форми,

c_i – невідомі коефіцієнти,

N – кількість ступенів свободи.

У результаті застосування варіаційної постановки та методу Гальоркіна отримується система лінійних алгебраїчних рівнянь виду:

$$Ku = F, \tag{1.2}$$

де K – матриця жорсткості,

F– вектор навантаження.

Точність методу скінченних елементів визначається:

- розміром елементів сітки (h-уточнення),
- порядком функцій форми (p-уточнення),
- властивостями точного розв’язку.

Обмеження простору розв’язків скінченновимірним підпростором неминуче призводить до похибки апроксимації, тому питання покращення функцій форми є одним із ключових у теорії МСЕ.

1.1 Основні тенденції розвитку скінченно-елементного моделювання процесів

В монографії [21] представлено застосування методу скінченних елементів до розв’язання задач механіки деформівного твердого тіла для ізотропних середовищ, в тому числі викладено один із можливих шляхів поліпшення апроксимації шуканої функції (функції переміщень) – моментну схему скінченного елементу.

Згідно із цією схемою у ряд Тейлора розкладаються компоненти вектору переміщень та компоненти тензору деформацій, які є пов'язаними між собою. Порівняння цих розкладань показую, що не для всіх доданків розкладання тензору деформацій є відповідні доданки розкладання вектору переміщень. Тому для усунення цієї проблеми запропоновано два шляхи – або вилучення із розкладань деформацій цих доданків, або їх мінімізація на основі методу найменших квадратів. Другий варіант показано на прикладі просторового шестигранного скінченного елементу.

Застосування моментної схеми скінченного елементу при розв'язання крайових задач для анізотропних середовищ, а саме до конструкцій із волокнистих композитів представлено у роботі [6], де представлена матриця жорсткості паралелепіпедого скінченного елементу.

Іншим способом поліпшення точності розв'язків у задачах механіки є застосування напіваналітичного методу скінченних елементів [1], який застосовується у випадках коли закон розподілу шуканої функції по одному із координатних напрямків відомий (наприклад, коли один із розмірів тіла набагато менший двох інших – оболонки, пластини). В цьому випадку дискретизація проводиться лише по двом напрямкам, а по третьому шукана функція задається у аналітичному вигляді (як правило, досить простому – константа, пряма лінія тощо).

Одним із основних питань, що розглядаються у монографії [22],є побудова функцій форми для різних типів скінченних елементів та дослідження їх апроксимаційних властивостей.

У роботі [23] із використанням MATLAB продемонстровано застосування до задач механіки руйнування, задач взаємодії рідкого та твердого тіла тощо уточненого варіанту методу скінченних елементів, який називається розширеним методом скінченних елементів.

Монографія [24] присвячена широкому колу фундаментальних та прикладних питань застосування методу скінченних елементів. В тому числі описується процедура вибору функцій форми для різних типів скінченних елементів, поліпшення їх апроксимуючих властивостей за рахунок використання многочленів різних ступенів. Описано модернізацію скінченних елементів, в тому числі і за рахунок апроксимаційних процедур, для уникнення проблем, пов'язаних із особливостями досліджуваних середовищ (наприклад, нестисливі матеріали).

У статті [10] розглянуто застосування методу скінченних елементів до розв'язання стаціонарних і нестаціонарних задач теплопровідності. Подано варіаційне формулювання задачі, описано побудову дискретної моделі та формування системи алгебраїчних рівнянь. Проаналізовано точність і збіжність чисельного розв'язку, наведено приклади обчислювальних експериментів для різних граничних умов.

Досліджено побудову апостеріорних оцінок похибки для чисельних розв'язків еліптичних крайових задач, отриманих методом скінченних елементів [12]. Виведено двосторонні або односторонні оцінки похибки, проаналізовано їх ефективність та умови застосування. Наведено результати числових експериментів, що демонструють практичну придатність запропонованих оцінювачів.

Монографія [18] присвячена варіаційним принципам механіки суцільних середовищ та їх застосуванню в методі скінченних елементів. Викладено математичні основи варіаційних формулювань, побудову скінчено-елементних апроксимацій і аналіз їх збіжності. Розглянуто приклади задач пружності, теплопровідності та механіки деформівного твердого тіла.

У роботі [19] розглянуто змішане формулювання методу скінченних елементів для задач теорії пружності з урахуванням градієнта деформації. Запропоновано варіаційну постановку задачі з додатковими змінними та

проаналізовано її математичну коректність. Наведено результати чисельних досліджень, що демонструють переваги змішаного підходу в моделюванні складних деформаційних процесів.

Таким чином, підвищення точності може досягатися не лише шляхом згущення сітки, але й за рахунок удосконалення апроксимаційної моделі елемента.

1.2 Застосування методу найменших квадратів до апроксимації функцій

Метод найменших квадратів є універсальним підходом до побудови наближених розв'язків, який ґрунтується на мінімізації квадратичної міри похибки. Його застосування до апроксимації функцій відображено у багатьох роботах [5, 8, 9, 17, 20].

Нехай необхідно наблизити функцію $u(x)$у вигляді:

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^{m} c_i \varphi_i(x). \tag{1.3}$$

Коефіцієнти c_iвизначаються з умови мінімізації функціонала:

$$J(u_h) = \int_{\Omega} (u - u_h)^2 d\,\Omega. \tag{1.4}$$

У крайових задачах для диференціальних рівнянь мінімізується квадрат відхилу:

$$J(u_h) = \int_{\Omega} (Lu_h - f\,)^2 d\,\Omega. \tag{1.5}$$

Мінімізація цього функціонала приводить до системи рівнянь, яка є симетричною та додатно визначеною навіть у випадку несиметричних операторів. Це забезпечує хороші чисельні властивості та стійкість обчислень.

Поєднання методу скінченних елементів із методом найменших квадратів дозволяє побудувати уточнені апроксимаційні схеми, в яких додаткові коефіцієнти визначаються шляхом мінімізації квадратичної міри похибки. Такий підхід забезпечує покращення збіжності та зменшення похибки без істотного ускладнення структури скінченного елементу.

1.3 Висновки до розділу 1

Для задач зі складною геометрією області, змінними коефіцієнтами або комбінованими граничними умовами аналітичні методи є практично непридатними. У таких випадках застосовують чисельні методи, серед яких особливе місце займає метод скінченних елементів.

У розділі розглянуто постановку крайових задач для диференціальних рівнянь та основні ідеї методу скінченних елементів як ефективного чисельного підходу до їх розв’язування. Показано, що точність МСЕ визначається якістю апроксимації функцій форми та структурою скінченного елементу. Проаналізовано відомі підходи до підвищення точності, зокрема моментну схему скінченного елементу.

Встановлено, що удосконалення апроксимації без збільшення кількості вузлів є перспективним напрямом розвитку методу. Це обґрунтовує доцільність застосування методу найменших квадратів для визначення додаткових коефіцієнтів апроксимації, що буде реалізовано у наступному розділі.

2 ОСНОВНІ СПІВВІДНОШЕННЯ ДЛЯ ЧОТИРИКУТНОГО СКІНЧЕННОГО ЕЛЕМЕНТУ

При розв’язанні двовимірних крайових задач використовуються плоскі скінченні елементи класичних форм, як правило, в вигляді трикутників та чотирикутників. Кожен скінчений елемент характеризується певною сукупністю дискретних точок – вузлів скінченного елементу. В основному кількість вузлів скінченного елементу напряму корелює із ступенями апроксимуючих функцій, а, відповідно, і з точністю розв’язання крайових задач. Як вузлові точки скінченого елементу приймаються в першу чергу його кутові точки, а у разі необхідності збільшення їх кількості додаються точки в середині скінченного елементу (середини ребер, центр тяжіння тощо).

Для різних задач шляхи підвищення точності при їх розв’язанні можуть бути різними. Окрім зазначеного вище способу – підвищення ступенів апроксимуючих функцій у традиційних функціях форми скінченного елементу – існують і інші підходи. Так, при розв’язанні задач механіки деформівного твердого тіла для областей, де один із розмірів набагато менше ніж інші (інший), використовують напіваналітичний метод скінченних елементів. Він полягає у тому, що по цьому напрямку шукана функція задається у аналітичному вигляді, як правило, простого виду. І таким чином розмірність задачі зменшується на одиницю.

Іншим способом підвищення точності при розв’язанні задач механіки є застосування так званої моментної схеми скінченного елементу, яка дозволяє нівелювати негативні властивості класичного методу скінченних елементів таких як неврахування абсолютно жорстких зміщень скінченного елементу та ефект «хибного зсуву».

Основна ідея моментної схеми полягає у представленні шуканої функції переміщень у виді розкладання у ряд Тейлора за степенями координатних функцій. Таким саме чином представляються і пов’язані із функцією переміщень компоненти вектору деформацій (розкладанням у ряд Тейлора). Після аналізу розкладань деформацій можна побачити, що деякі доданки не входять у розкладання компонент переміщень, тому вони мають бути видалені із цих розкладань згідно певних правил.

Ця схема дозволяє підвищити точність розв’язання задач механіки деформівного твердого тіла, але вона має певні обмеження, а саме кількість доданків в розкладаннях у ряд Тейлора напряму корелює із кількістю вузлів скінченного елементу (вони співпадають).

Для усунення цього обмеження скористаємось підходом, що викладений у роботі [1] для просторового шестигранного скінченного елементу. Основна ідея полягає у тому, що урізане розкладання у ряд Тейлора доповнюється ще низкою доданків. Але коефіцієнти розкладання цих додаткових членів залежать від коефіцієнтів розкладання для первісного ряду Тейлора і знаходяться вони за допомогою методу найменших квадратів. Адаптуємо цей підхід до визначення основних співвідношень матриці жорсткості плоского чотирикутного скінченного елементу.

2.1 Чотирикутний двовимірний скінченний елемент

Для багатьох двовимірних задач досить зручним є використання чотирикутних скінченних елементів, які у порівнянні із трикутними скінченними елементами мають більшу точність апроксимуючих функцій, хоча при побудові геометричної дискретної моделі досліджуваної області трикутні елементи є більш зручними.

Розглянемо плоский чотирикутний скінченний елемент із чотирма вузлами, розташованими у кутових точках прямокутника (див. рис. 2.1). Візьмемо елемент стандартного розміру із довжинами сторін 2×2.

При розв'язанні крайових задач основні співвідношення, отримані для цього елементу, можуть бути трансформовані для прямокутного елементу будь-яких розмірів за допомогою матриць перетворень координат.

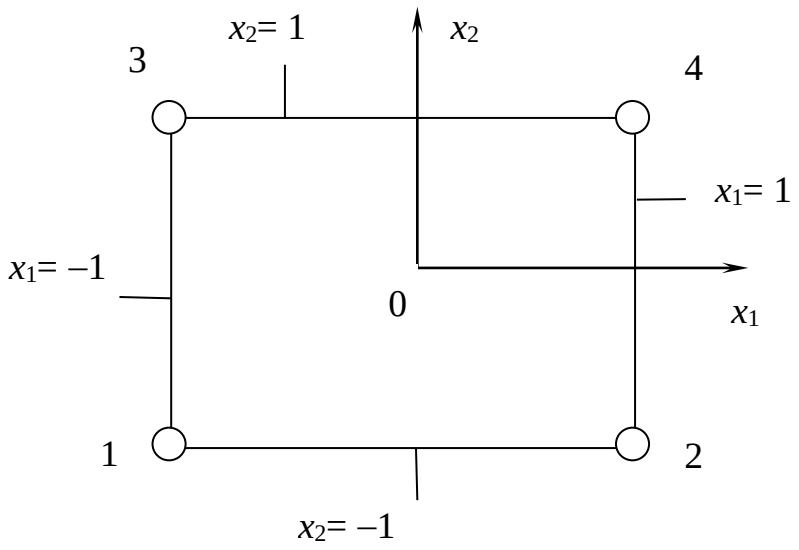


Рисунок 2.1 – Прямокутний чотиривузловий скінченний елемент

2.2 Класична апроксимація шуканої функції для чотирикутного скінченного елементу

Прямокутний чотиривузловий скінченний елемент, що розглядається, характеризується координатами чотирьох вузлів $x_1^{(i)}$, $x_2^{(i)} (i = 1, 2, 3, 4)$.

Якщо мова йде про задачі механіки деформівного твердого тіла, то як невідому функцію доцільно взяти функцію переміщень, і тоді поведінка такого

елементу буде описуватися вузловими значеннями вектору переміщень $u_1^{(i)}$, $u_2^{(i)} (i = 1, 2, 3, 4)$:

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \\ u_1^{(3)} \\ u_2^{(3)} \\ u_1^{(4)} \\ u_2^{(4)} \end{Bmatrix}.$$

Тоді у загальному випадку переміщення будь-якої точки чотиривузлового скінченного елементу буде описуватися вектором переміщень:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix},$$

компоненти якого, в свою чергу, можуть бути представлені через вузлові значення переміщень.

Апроксимуюча функція у цьому випадку прийме вид:

$$u_1(x_1, x_2) = N_1(x_1, x_2)u_1^{(1)} + N_2(x_1, x_2)u_1^{(2)} + N_3(x_1, x_2)u_1^{(3)} + N_4(x_1, x_2)u_1^{(4)}, \quad (2.1)$$

$$u_2(x_1, x_2) = N_1(x_1, x_2)u_2^{(1)} + N_2(x_1, x_2)u_2^{(2)} + N_3(x_1, x_2)u_2^{(3)} + N_4(x_1, x_2)u_2^{(4)}. \quad (2.2)$$

У векторно-матричній формі співвідношення (2.1)-(2.2) запишуться таким чином:

$$\{u\} = [N]\{U\}, \tag{2.3}$$

де $\{U\}$ – вектор вузлових переміщень;

$[N]$ – матриця функцій форми, яка має такий вид:

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}.$$

Апроксимуючі функції $N_1(x_1, x_2), N_2(x_1, x_2), N_3(x_1, x_2), N_4(x_1, x_2)$, щоназиваються функціями форми скінченного елементу, і у випадку лінійної апроксимації за кожним координатним напрямком можуть бути визначені такими співвідношеннями:

$$N_1(x_1, x_2) = \frac{1}{4}\left(1 + x_1 x_2^{(1)}\right)\left(1 + x_2 x_2^{(1)}\right),$$
$$N_2(x_1, x_2) = \frac{1}{4}\left(1 + x_1 x_2^{(2)}\right)\left(1 + x_2 x_2^{(2)}\right),$$
$$N_3(x_1, x_2) = \frac{1}{4}\left(1 + x_1 x_2^{(3)}\right)\left(1 + x_2 x_2^{(3)}\right),$$
$$N_4(x_1, x_2) = \frac{1}{4}\left(1 + x_1 x_2^{(4)}\right)\left(1 + x_2 x_2^{(4)}\right),$$

де $x_1^{(i)}$, $x_2^{(i)} (i = 1, 2, 3, 4)$ для даного чотирикутного скінченного елементу приймають значення ± 1.Загальну формулу для функцій форми можна записати у такому виді:

$$N_i(x_1, x_2) = \frac{1}{4}\left(1 + x_1 x_2^{(i)}\right)\left(1 + x_2 x_2^{(i)}\right). (i = 1,2,3,4) \tag{2.4}$$

2.3 Уточнена апроксимація функції для чотирикутного скінченного елементу

Спочатку для чотиривузлового прямокутного скінченного елементу (рис. 2.1) представимо функції переміщень у вигляді розкладання у ряд Тейлора за степеневими функціями:

$$\tilde{u}_i = \sum_{p=0}^{1}\sum_{q=0}^{1} \omega_i^{(pq)} x_1^p\, x_2^q, \tag{2.5}$$

де $\omega_i^{(pq)}$ – коефіцієнти розкладання $(i = 1,2)$.

В розгорнутому вигляді співвідношення (2.4) мають вид:

$$\tilde{u}_1 = \omega_1^{(00)} + \omega_1^{(10)} x_1 \; + \omega_1^{(01)} x_2 \; + \omega_1^{(11)} x_1 \; x_2 \; , \tag{2.6}$$

$$\tilde{u}_2 = \omega_2^{(00)} + \omega_2^{(10)} x_1 \; + \omega_2^{(01)} x_2 \; + \omega_2^{(11)} x_1 \; x_2 \; . \tag{2.7}$$

Скориставшись допоміжними апроксимуючими поліномами функцію переміщень можна представити у виді:

$$u_i = \tilde{u}_i + \Delta u_i, \tag{2.8}$$

тут Δu_i – добавка обумовлена додатковою апроксимацією, яку можна записати у такій формі:

$$\Delta u_i = \frac{1}{2}\left(V_i^{(20)} x_1^2 + V_i^{(02)} x_2^2 + V_i^{(21)} x_1^2 x_2 \; + V_i^{(12)} x_1 \; x_2^2 + V_i^{(22)} x_1^2 x_2^2\right), \tag{2.9}$$

де $V_i^{(rt)}$ – коефіцієнти розкладання $(i = 1,2)$.

Для подальших перетворень необхідно навести основні співвідношення механіки деформівного твердого тіла для двовимірного випадку.

2.4 Основні співвідношення теорії пружності для плоскої задачі

Розв'язання задачі механіки деформівного твердого тіла полягає у знаходженні компонентів напружено-деформованого стану тіла при певних заданих крайових умовах, до яких можна віднести задані сила та переміщення для частини тіла (як правило, на межі тіла). До компонентів напружено-деформованого стану можна віднести вже описаний вектор переміщень, а також тензор напружень та тензор деформацій. Для двовимірного випадку тензор напружень має три незалежні складові –дві компоненти нормальних напруженьσ_{11}, σ_{22}і дотичне напруження σ_{12}. У векторній формі будемо мати таке представлення:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}. \tag{2.10}$$

Тензор деформацій також має три незалежні складові: дві компоненти – це лінійні деформації ε_{11}, ε_{22} та зсувну компоненту – кут зсуву γ_{12} $\left(\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\gamma_{12}\right)$.Їх представлення у векторній формі буде мати вид:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}. \tag{2.11}$$

Усі зазначені вище складові напружено-деформованого стану пов’язані між собою певними залежностями. Так, так компоненти тензору деформацій і компоненти вектору переміщень описуються геометричними співвідношеннями, або співвідношеннями Коші. У випадку двомірної задачі вона мають такий вигляд:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \tag{2.12}$$

або у розгорнутому вигляді

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \gamma_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}.$$

В свою чергу, компоненти тензора деформацій пов’язані із компонентами тензору напружень законом стану, у нашому випадку це закон Гука, який можна записати у виді:

$$\sigma_{11} = (2\mu + \lambda)\varepsilon_{11} + \lambda\varepsilon_{22},$$
$$\sigma_{22} = \lambda\varepsilon_{11} + (2\mu + \lambda)\varepsilon_{22},$$
$$\sigma_{12} = \mu\gamma_{12},$$

або у векторно-матричній формі:

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\}, \tag{2.13}$$

де $[C]$ – матриця пружних сталих, яку можна представити у вигляді:

$$[C] = \begin{bmatrix} (2\mu + \lambda) & \lambda & 0 \\ \lambda & (2\mu + \lambda) & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}.$$

Сталі μ та λ, що називаються сталими Ляме, можуть бути виражені через дві інші, більш поширені, пружні сталі– модуль пружності E та коефіцієнт Пуассона ν. Для двомірних задач можливі два різних типу напружено-деформованого стану – плоский напружений стан і плоска деформація. У випадку плоского напруженого стану залежність між пружними сталими буде мати такий вид:

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \lambda = \frac{E\nu}{(1-\nu^2)}.$$

Для випадку плоскої деформації ця залежність може бути представлена такими виразами:

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}.$$

Враховуючи останні залежності між пружними константами можемо навести інший вид для матриці пружних сталих. У випадку плоскої деформації ця матриця може бути представлена у виді:

$$[C] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}.$$

У випадку плоского напруженого стану будемо мати:

$$[C] = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}.$$

2.5 Побудова матриці жорсткості чотиривузлового скінченного елементу на основі класичної та уточненої схеми

Повернимось тепер до процедури апроксимації шуканої функції – вектору переміщень – за уточненою схемою. Скориставшись співвідношенням (2.12) та заданою апроксимацією (2.8) можемо записати такі апроксимації для компонент деформацій:

лінійні деформації

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \omega_1^{(10)} + \omega_1^{(11)} x_2 \; +$$

$$+V_1^{(20)} x_1 \; + V_1^{(21)} x_1 \, x_2 \; + \frac{1}{2} V_1^{(12)} x_2^2 + V_1^{(22)} x_1 \, x_2^2, \qquad (2.14)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \omega_2^{(01)} + \omega_2^{(11)} x_1 \; +$$

$$+V_2^{(02)} x_2 \; + \frac{1}{2} V_2^{(21)} x_1^2 + V_2^{(12)} x_1 \, x_2 \; + V_2^{(22)} x_1^2 x_2 \; , \qquad (2.15)$$

зсувна складова

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) = \frac{1}{2}\Big(\omega_1^{(01)} + \omega_1^{(11)} x_1 \; +$$

$$+V_1^{(02)} x_2 \; + \frac{1}{2} V_1^{(21)} x_1^2 + V_1^{(12)} x_1 \, x_2 \; + V_1^{(22)} x_1^2 x_2 \; +$$

$$+\omega_2^{(10)} + \omega_2^{(11)} x_2 \; +$$
$$+V_2^{(20)} x_1 \; + V_2^{(21)} x_1 \; x_2 \; + \frac{1}{2} V_2^{(12)} x_2^2 + V_2^{(22)} x_1 \; x_2^2 \Big),$$

або

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\omega_1^{(01)} + \omega_2^{(10)}\right) + \frac{1}{2}\left(\omega_1^{(11)} + V_2^{(20)}\right) x_1 \; + \frac{1}{2}\left(\omega_2^{(11)} + V_1^{(02)}\right) x_2 \; +$$
$$+ \frac{1}{4} V_1^{(21)} x_1^2 + \frac{1}{2}\left(V_1^{(12)} + V_2^{(21)}\right) x_1 \; x_2 \; + \frac{1}{4} V_2^{(12)} x_2^2 +$$
$$+ \frac{1}{2} V_1^{(22)} x_1^2 x_2 \; + \frac{1}{2} V_2^{(22)} x_1 \; x_2^2. \qquad (2.16)$$

У більш загальному представленні для лінійних деформацій будемо мати:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^{(00)} + \varepsilon_{11}^{(10)} x_1 \; + \varepsilon_{11}^{(01)} x_2 \; + \varepsilon_{11}^{(11)} x_1 \; x_2 \; + \frac{1}{2} \varepsilon_{11}^{(02)} x_2^2 + \frac{1}{2} \varepsilon_{11}^{(12)} x_1 \; x_2^2, \quad (2.17)$$

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{22}^{(00)} + \varepsilon_{22}^{(10)} x_1 \; + \varepsilon_{22}^{(01)} x_2 \; + \frac{1}{2} \varepsilon_{22}^{(20)} x_1^2 + \varepsilon_{22}^{(11)} x_1 \; x_2 + \frac{1}{2} \varepsilon_{22}^{(21)} x_1^2 x_2 \; , \quad (2.18)$$

де $\varepsilon_{ij}^{(pq)}$ – коефіцієнти розкладання, що називаються моментами деформацій.

Аналогічно, для зсувної складової будемо мати:

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{12}^{(00)} + \varepsilon_{12}^{(10)} x_1 \; + \varepsilon_{12}^{(01)} x_2 \; + \frac{1}{2} \varepsilon_{12}^{(20)} x_1^2 +$$
$$+ \varepsilon_{12}^{(11)} x_1 \; x_2 \; + \frac{1}{2} \varepsilon_{12}^{(02)} x_2^2 + \frac{1}{2} \varepsilon_{12}^{(21)} x_1^2 x_2 \; + \frac{1}{2} \varepsilon_{12}^{(12)} x_1 \; x_2^2. \qquad (2.19)$$

Для визначення додаткових коефіцієнтів $V_i^{(rt)}$ скористаємося ідеєю методу найменших квадратів. Для цього з моментів деформацій, що представляються

через переміщення і містять додаткові коефіцієнти, складемо суму квадратів. Мінімізація цієї суми приводить до системи рівнянь, розв'язання якої дає можливість знайти додаткові коефіцієнти розкладання переміщень.

Наведемо ті коефіцієнти, що містять додаткові коефіцієнти:

$$\varepsilon_{11}^{(10)} = V_1^{(20)}, \varepsilon_{11}^{(11)} = V_1^{(21)}, \varepsilon_{11}^{(02)} = V_1^{(12)}, \varepsilon_{11}^{(12)} = V_1^{(22)},$$
$$\varepsilon_{22}^{(01)} = V_2^{(02)}, \varepsilon_{22}^{(20)} = V_2^{(21)}, \varepsilon_{22}^{(11)} = V_2^{(12)}, \varepsilon_{22}^{(21)} = V_2^{(22)},$$
$$\varepsilon_{12}^{(10)} = \frac{1}{2}\left(\omega_1^{(11)} + V_2^{(20)}\right), \varepsilon_{12}^{(01)} = \frac{1}{2}\left(\omega_2^{(11)} + V_1^{(02)}\right),$$
$$\varepsilon_{12}^{(20)} = \frac{1}{2}V_1^{(21)}, \varepsilon_{12}^{(11)} = \frac{1}{2}\left(V_1^{(12)} + V_2^{(21)}\right), \varepsilon_{12}^{(02)} = \frac{1}{2}V_2^{(12)},$$
$$\varepsilon_{12}^{(21)} = V_1^{(22)}, \varepsilon_{12}^{(12)} = V_2^{(22)}. \qquad (2.20)$$

Із умови мінімуму суми квадратів моментів деформацій знайдемо додаткові коефіцієнти:

$$V_1^{(20)} = V_1^{(21)} = V_1^{(22)} = 0, V_2^{(02)} = V_2^{(12)} = V_2^{(22)} = 0,$$
$$V_1^{(12)} = V_2^{(21)} = 0,$$
$$V_2^{(20)} = -\omega_1^{(11)}, V_1^{(02)} = -\omega_2^{(11)}. \qquad (2.21)$$

Із урахуванням значень (2.21), можемо уточнити закон апроксимації переміщень (2.8):

$$u_1 = \omega_1^{(00)} + \omega_1^{(10)}x_1 + \omega_1^{(01)}x_2 + \omega_1^{(11)}x_1 x_2 - \frac{1}{2}\omega_2^{(11)}x_2^2, \qquad (2.22)$$

$$u_2 = \omega_2^{(00)} + \omega_2^{(10)}x_1 + \omega_2^{(01)}x_2 + \omega_2^{(11)}x_1 x_2 - \frac{1}{2}\omega_1^{(11)}x_1^2. \qquad (2.23)$$

А компоненти тензора деформацій при такій апроксимації переміщень (2.22), (2.23) будуть мати такий вид:

$$\varepsilon_{11} = \omega_1^{(10)} + \omega_1^{(11)} x_2 \, , \varepsilon_{22} = \omega_2^{(01)} + \omega_2^{(11)} x_1 \, ,$$
$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\omega_1^{(01)} + \frac{1}{2}\omega_2^{(10)}. \qquad (2.24)$$

Для виконання основної операції методу скінченних елементів – побудови матриці жорсткості – розглянемо величину енергії пружної деформації скінченного елементу, яка для двомірного випадку визначається формулою:

$$U = t \int_S \frac{\{\varepsilon\}^T \{\sigma\}}{2} dS, \qquad (2.25)$$

тут S – площа скінченного елементу, t – товщина скінченного елементу.

Спочатку отримаємо основні співвідношення матриці жорсткості чотиривузлового скінченного елементу для класичної схеми. Представляючи геометричні співвідношення (2.12) у матричній формі:

$$\{\varepsilon\} = [\partial]\{u\}, \qquad (2.26)$$

де $[\partial]$ – матриця диференціювання виду:

$$[\partial] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix},$$

з урахуванням (2.3), будемо мати

$$\{\varepsilon\} = [\partial][N]\{U\} = [B]\{U\}, \qquad (2.27)$$

де матриця $[B]$ має вид:

$$[B] = [\partial][N] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & \frac{\partial N_3}{\partial x_2} & \frac{\partial N_3}{\partial x_1} & \frac{\partial N_4}{\partial x_2} & \frac{\partial N_4}{\partial x_1} \end{bmatrix}.$$

Підставляючи матрично-векторне представлення деформацій (2.27) у вираз для закону стану (2.13), матимемо:

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} = [C][B]\{U\}.$$

Повертаючись до співвідношення для енергії пружної деформації скінченного елементу, будемо мати:

$$U = t \int_S \frac{([B]\{U\})^T [C][B]\{U\}}{2} dS = \frac{1}{2} t \{U\}^T \int_S [B]^T [C][B] dS \, \{U\}.$$

Із останнього виразу виокремимо співвідношення, що описує матрицю жорсткості скінченного елемента:

$$[K] = t \int_S [B]^T [C][B] dS. \tag{2.28}$$

Повернемося до уточненої схеми апроксимації шуканої функції, а точніше до співвідношень для компонент деформацій, які отримані на основі методу найменших квадратів для суми квадратів моментів деформацій, ці апроксимації представимо у матричному виді, підібравши матриці так, щоб в результаті множення отримувати співвідношення (2.24):

$$\{\varepsilon\} = [F]\{\Psi\}\{\Omega\}, \tag{2.29}$$

де $\{\Psi\}$ – матриця, що складається із степеневих функцій,

$[F]$– матриця числових сталих (у нашому випадку це або 0, або 1, або $1/2$),

$\{\Omega\}$ – вектор коефіцієнтів розкладання переміщень $\omega_i^{(pq)}$.

Тоді апроксимацію переміщень (2.22), (2.23) також можна представити у матричному виді:

$$\{u\} = \{\Psi\}[H]\{\Omega\}, \tag{2.30}$$

де $[H]$ – матриця числових сталих (у нашому випадку це або 0, або 1, або $-1/2$).

І тепер у (2.13) та (2.25) замість вектору деформацій, отриманого через функції форми, відставимо вираз (2.29), тоді енергія пружної деформації скінченного елементу прийме вид:

$$U = \frac{1}{2} t \int_S ([F]\{\Psi\}\{\Omega\})^T [C][F]\{\Psi\}\{\Omega\}\, dS. \tag{2.31}$$

В результаті певних матричних перетворень будемо мати:

$$U = \frac{1}{2} t \int_S \{\Omega\}^T \{\Psi\}^T [F]^T [C][F]\{\Psi\}\{\Omega\}\, dS. \tag{2.32}$$

Перевага побудови розв’язувальних рівнянь за класичною схемою полягає у тому, що у співвідношення входять вузлові значення переміщень, які мають зрозумілий сенс. В уточненій схемі оперуємо із числовими коефіцієнтами розкладання переміщень $\omega_i^{(pq)}$, які не мають жодного механічного сенсу. Тому покажемо підхід до переходу в співвідношеннях уточненої схеми до компонентів вузлових переміщень, для чого прирівняємо праві частини співвідношень (2.3) та (2.30):

$$\{\Psi\}[H]\{\Omega\} = [N]\{U\}. \tag{2.33}$$

У (2.33) матриця степеневих функцій $\{\Psi\}$та матриця функцій форми$[N]$сформовані із наборів степеневих функцій, отже між ними можна знайти зв’язок:

$$[N] = \{\Psi\}[A], \tag{2.34}$$

тоді будемо мати

$$\{\Omega\} = [H]^{-1}[A]\{U\}, \tag{2.35}$$

або позначивши $[T] = [H]^{-1}[A]$, будемо мати:

$$W = \{U\}^T \cdot \frac{1}{2} t \int_S \{T\}^T \{\Psi\}^T [F]^T [C][F]\{\Psi\}[T]\, dS \cdot \{U\}, \tag{2.36}$$

Звідки маємо матрицю жорсткості чотиривузлового чотирикутного скінченного елементу на основі уточненої апроксимації компонентів переміщень:

$$[K] = t \int_S \{T\}^T \{\Psi\}^T [F]^T [C][F]\{\Psi\}[T]\, dS. \tag{2.37}$$

3 РОЗВ'ЯЗАННЯ ДВОМІРНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ЗА ДОПОМОГОЮ КЛАСИЧНОЇ ТА УТОЧНЕНОЇ СХЕМИ СКІНЧЕННОГО ЕЛЕМЕНТУ

3.1 Постановка задачі

Розглянемо крайову задачу про деформування шарнірно опертої балки під дією розподіленого навантаження, розрахункова схема для якої показана на рис. 3.1.

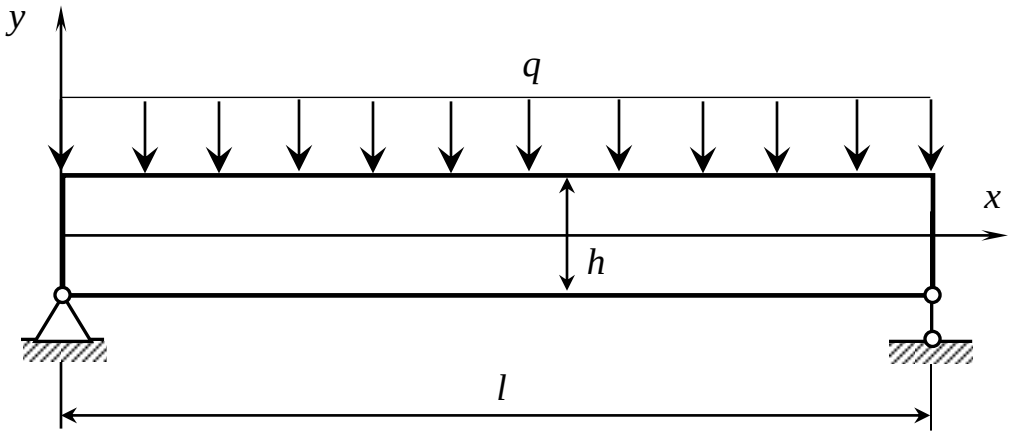


Рисунок 3.1 – Розрахункова схема для шарнірно опертої балки під дією розподіленого навантаження

Розміри балки: довжина l=2 м, висота h=0,2 м, ширина b=0,1 м.

Механічні властивості матеріалу балки: модуль пружності $E = 10^6$ Па, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0{,}49$.

Прикладене розподілене навантаження – $q = 100$Н/м.

3.2 Скінченно-елементне розв’язання крайової задачі про деформування шарнірно опертої балки

Запропоновані методики розрахунку реалізовані у вигляді пакету програм, за допомогою якого розв’язана описана крайова задача. Розрахунки проводились як за класичною схемою методу скінченних елементів, так і з застосуванням уточненої схеми.

Аналітична формула для максимального прогину балки на двох шарнірних опорах під дією рівномірно розподіленого навантаження має такий вигляд:

$$v_{max} = \frac{5ql^4}{384EI}, \tag{3.1}$$

де q –інтенсивність навантаження,

l –довжина балки,

E – модуль пружності,

I – момент інерції поперечного перерізу, що визначається для прямокутного перерізу за формулою:

$$I = \frac{bh^3}{12},$$

тут b – ширина балки,

h – висота балки.

При заданих розмірах, механічних характеристиках та рівномірно розподіленому навантаженню максимальний прогин шарнірно опертої балки буде дорівнювати:

$$I = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}2^3}{12} = 0{,}667 \cdot 10^{-4}\text{м}^4,$$

$$v_{max} = \frac{5 \cdot 100 \cdot 2^4}{384 \cdot 10^6 \cdot 0{,}667 \cdot 10^{-4}} \approx 0{,}313 \text{ м}.$$

Уточнена схема скінченних елементів, описана у розділі 2, реалізована у вигляді пакету прикладних програм. За допомогою цього пакету була розв'язана крайова задача теорії пружності про деформування шарнірно опертої балки під дією розподіленого навантаження. При такому виді навантаження, коли конструкція випробовує значні згині деформації, особливо чітко можна побачити суттєві переваги уточненої скінченно-елементної схеми у порівнянні із класичною.

Для дослідження точності та збіжності результатів скінченно-елементних розрахунки проводились для різної кількості вузлів дискретизації досліджуваної конструкції, які наведені у таблиці 3.1 для класичної та уточненої скінченно-елементної схеми. Як досліджуваний параметр наводиться максимальний прогин балки.

Таблиця 3.1 – Результати чисельних розрахунків

Сітка розбиття	Класична схема		Уточнена схема	
	v_{max}, м	ε, %	v_{max}, м	ε, %
7×3	0,055	-82,4	0,277	-11,5
11×3	0,062	-80,2	0,287	-8,3
15×3	0,121	-61,3	0,290	-7,4
19×3	0,141	-55,0	0,293	-6,4
25×3	0,167	-46,7	0,303	-3,2

Похибка скінченно-елементних розрахунків у таблиці 3.1 обчислюється за такою формулою:

$$\varepsilon = \frac{v_{max}^{(\text{р})} - v_{max}^{(\text{т})}}{v_{max}^{(\text{т})}} \cdot 100\ \%, \qquad (3.2)$$

де $v_{max}^{(\text{р})}$ – розрахункове значення максимального прогину балки;

$v_{max}^{(\text{т})}$ – теоретичне значення максимального прогину балки, обчислене за формулою (3.1).

На рисунках 3.2, 3.3 показані переміщення балки у відповідних напрямах, отримані при розрахунках для сітки 19×3.



Рисунок 3.2 – Переміщення балкиu_2 (вертикальна складова)

На рисунках 3.4 – 3.6 показані складові напружень балки, отримані при розрахунках для сітки 19×3.

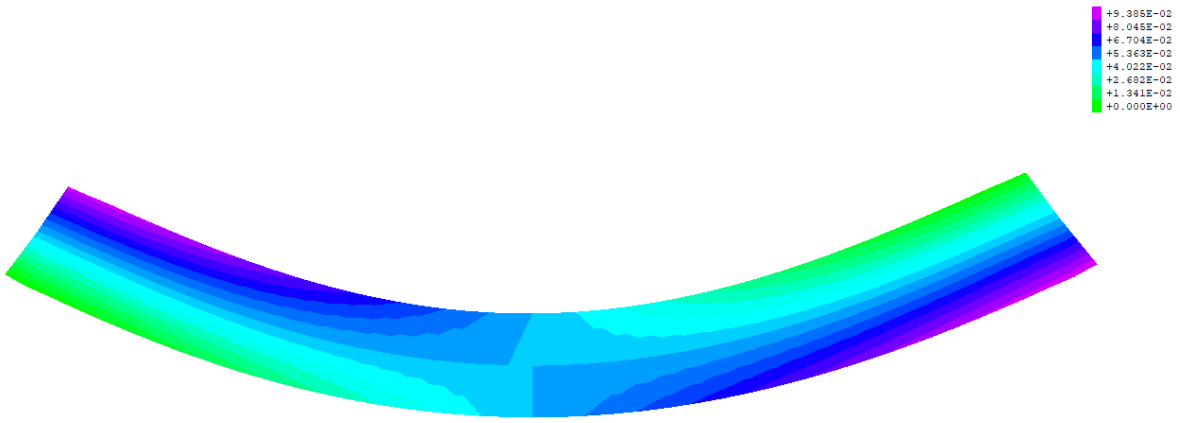


Рисунок 3.3 – Переміщення балкиu_1 (горизонтальна складова)

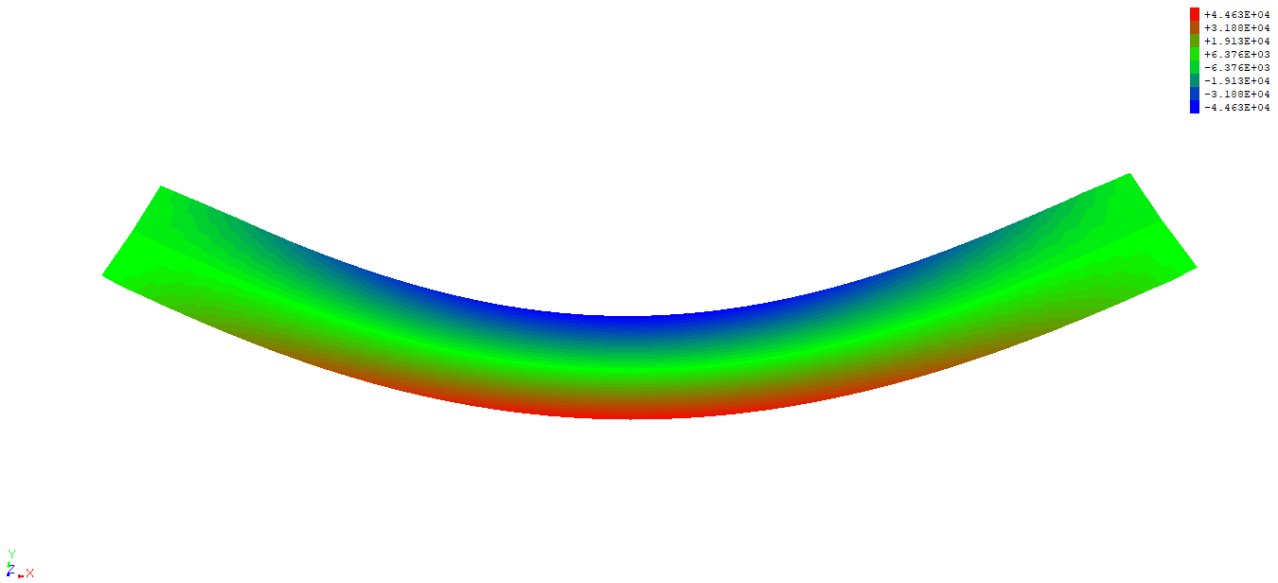


Рисунок 3.4 – Нормальні напруження балкиσ_{11}

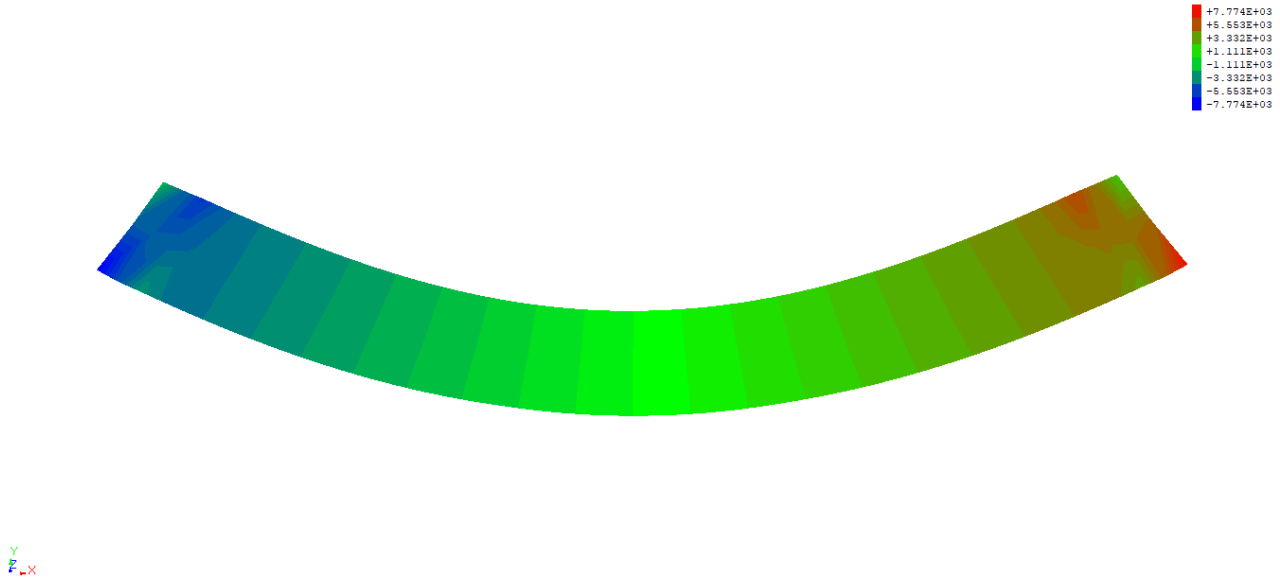


Рисунок 3.5 – Дотичні напруження балкиσ_{12}

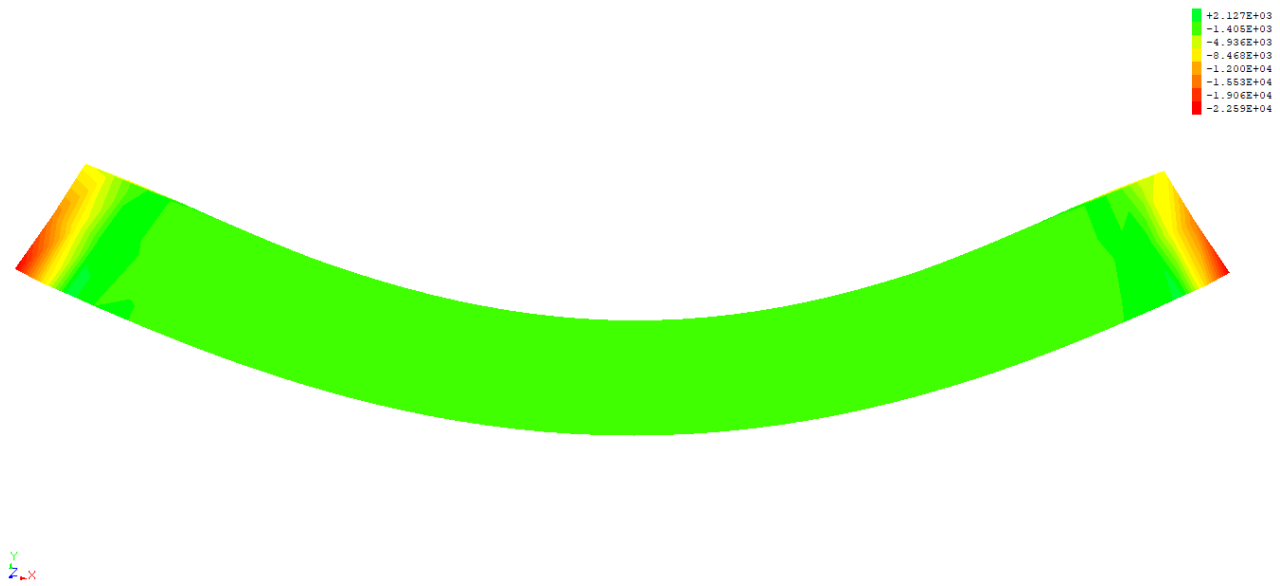


Рисунок 3.6 – Нормальні напруження балкиσ_{22}

Аналізуючи результати чисельних розрахунків, можна зауважити, що не зважаючи на те, що і для класичної схеми, і для уточненої схеми спостерігається збіжність результатів до аналітичного розв’язку при згущенні сітки розбиття на скінченні елементи, для класичної схеми маємо значні похибки навіть при великій кількості скінченних елементів. В цьому випадку для уточнення

результатів потрібно збільшувати кількість скінченних елементів, поки результат не перестане суттєво змінюватися.

Уточнена ж схема, завдяки поліпшеній апроксимації, дозволяє отримувати прийнятний результат навіть при грубому розбитті на скінченні елементи. А при подальшому збільшенні кількості елементів маємо асимптотичну збіжність до точного розв’язку.

ВИСНОВКИ

Кваліфікаційна робота присвячена розгляду питання підвищення точності розрахунків методом скінченних елементів за допомогою покращення апроксимації функцій форми скінченного елементу.

У роботі наведено основні теоретичні відомості про метод скінченних елементів, проблему вибору функцій форми скінченного елементу та шляхи підвищення точності обчислень.

Запропоновано підхід до вибору апроксимуючих функцій скінченного елементу, що полягає у додаванні додаткових складових при степеневій апроксимації. Для підвищення точності застосовується мінімізація певних складових цього представлення за допомогою методу найменших квадратів. Цей підхід був реалізований при побудові матриці жорсткості чотирикутного чотиривузлового скінченного елементу, для якого наведені усі етапи цієї побудови.

Отриману матрицю жорсткості було використано для розв’язання крайової задачі про деформування шарнірно опертої балки під дією розподіленого навантаження. Аналіз результатів чисельних розрахунків дозволяє стверджувати, що уточнена схема дає кращий результат у порівнянні із класичною схемою при однакових сітках розбиття на скінченні елементи.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Баженов В. А., Гуляр О. І., Пискунов С. О., Сахаров О. С. Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах руйнування просторових тіл. Київ : КНУБА, 2005. 298 с.

2. Бурак Я. Й., Кінаш Б. М., Лопушанський О. В. Чисельні методи в задачах математичної фізики : навч. посіб. Львів : ЛНУ ім. Івана Франка, 2019. 304 с.

3. Вовк О. М., Квасниця Г. С., Остапов О. М., Шинкаренко Г. В. Апостеріорні оцінювачі похибки серендипових квадратичних апроксимацій МСЕ для еліптичних крайових задач. *Вісник Львівського університету. Серія прикладна математика та інформатика*. 2014. № 21. С. 12–27.

4. Вовк О. М., Квасниця Г. С., Шинкаренко Г. В. Точна сумарна оцінка апостеріорних похибок апроксимацій методу скінченних елементів для двоїстих задач кручення стрижнів. *Вісник Львівського університету. Серія прикладна математика та інформатика*. 2016. № 24. С. 34–48.

5. Гнатюк В. О., Мельник О. П. Поліноміальна апроксимація та стійкість методу найменших квадратів. *Наукові вісті НТУУ «КПІ»*. 2021. № 4. С. 27–35.

6. Гребенюк С. М., Гоменюк С. І., Клименко М. І. Напружено-деформований стан просторових конструкцій на основі гомогенізації волокнистих композитів : монографія. Херсон : Видавничий дім «Гельветика», 2019. 350 с.

7. Гребенюк С. М. Чисельні методи розв’язання механічних задач : навч. посіб. Запоріжжя : ЗНУ, 2022. 280 с.

8. Долішній Б. В. Чисельна реалізація апроксимації функцій методом найменших квадратів. *Прикладні проблеми механіки і математики*. 2020. Вип. 18. С. 112–118.

9. Коваленко І. І. Застосування методу найменших квадратів для обробки експериментальних даних. *Математичне моделювання*. 2019. Т. 1, № 2. С. 34–41.

10. Ковтун О. М., Ткаченко О. В. Застосування методу скінченних елементів до розв’язання задач теплопровідності. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки.* 2021. № 2. С. 45–52.

11. Кравчук І. Т., Кравчук М. І. Чисельні методи : навч. посіб. Київ : Вища школа, 2005. 447 с.

12. Лавренюк С. П. Апостеріорні оцінки похибки методу скінченних елементів для еліптичних задач. *Математичні методи та фізико-механічні поля.* 2017. Т. 60, № 3. С. 112–123.

13. Ляшенко І. І., Соколов О. Ю. Методи апроксимації та інтерполяції функцій : навч. посіб. Харків : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2017. 256 с.

14. Мартиненко О. М. Чисельні методи розв’язання крайових задач : навч. посіб. Харків : ХНУ ім. В. Н. Каразіна, 2020. 268 с.

15. Марчук Г. І., Агошков В. І. Методи обчислювальної математики : підручник. Київ : ВПЦ «Київський університет», 2017. 416 с.

16. Мельник О. Р. Чисельні методи диференціальних рівнянь : навч. посіб. Івано-Франківськ : ПНУ ім. В. Стефаника, 2021. 290 с.

17. Петренко С. В. Застосування зваженого методу найменших квадратів у задачах регресійного аналізу. *Вісник Львівського університету. Серія прикладна математика та інформатика*. 2022. Вип. 30. С. 58–66.

18. Скопецький В. В., Чорний М. І. Варіаційні методи і метод скінченних елементів у задачах механіки : монографія. Київ : Наукова думка, 2018. 352 с.

19. Чирков О. Ю. Змішане формулювання методу скінченних елементів у теорії пружності з градієнтом деформації. *Доповіді Національної академії наук України*. 2025. № 3. С. 45–57.

20. Шинкаренко В. І. Метод найменших квадратів у задачах апроксимації функцій. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки*. 2018. № 3. С. 45–52.

21. Die Methode der finitenElemente in der Festkörpermechanik. J. Altenbach, A.S. Sacharov. Leipzig: Fachbuchverlag, 1982. 496 s.

22. Ern A., Guermond J.-L. Finite Elements I: Approximation and Interpolation. TextsinAppliedMathematics, vol. 72. Springer,2021. 325 p.

23. RabczukT., Song J.-H., Zhuang X., Anitescu C. Extended Finite Element and Meshfree Methods. Academic Press,2020, 617p.

24. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Fox D.D. The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics. Oxford: Elsevier, 2014. 657 p.