МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

І.В. Красікова, Н.М. Д'яченко

ПІДГОТОВКА ДО ОЛІМПІАД, КОНКУРСІВ І НАУКОВОЇ РОБОТИ З МАТЕМАТИКИ В ПРОФІЛЬНІЙ ШКОЛІ

Навчальний посібник
для здобувачів ступеня вищої освіти магістра
спеціальності «Середня освіта» освітньо-професійної програми
«Середня освіта (Математика)»

Затверджено
вченою радою ЗНУ
Протокол №__ від _____

Запоріжжя
2025

УДК 373.5.091.27 : 51 (075.8)
К78

Красікова І. В., Д’яченко Н. М. Підготовка до олімпіад, конкурсів і наукової роботи з математики в профільній школі : навчальний посібник для здобувачів вищої освіти магістра спеціальності «Середня освіта» освітньо-професійної програми «Середня освіта (Математика)». Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2025. 76 с.

Навчальний посібник висвітлює питання організації підготовки учнів профільної школи до участі в різноманітних математичних змаганнях та конкурсах. Він містить інформацію про математичні олімпіади та конкурси, які проходять в Україні, правила їх проведення та особливості. Наведено приклади розв’язання задач, які пропонуються на математичних змаганнях, та рекомендації вчителю, як організувати підготовку учнів до таких змагань.

Окремий розділ присвячено організації наукової роботи з учнями профільною школі, де особлива увага приділяється підготовці до конкурсу-захисту дослідницьких робіт учнів-членів МАН. Надано список рекомендованої літератури з підготовки до математичних змагань. Ілюстративний матеріал міститься в додатках.

Посібник призначений для здобувачів ступеня вищої освіти магістра спеціальності «Середня освіта» освітньо-професійної програми «Середня освіта (Математика)», але може використовуватися студентами інших спеціальностей, працівниками освіти та всіма, хто цікавиться підготовкою учнів до математичних змагань.

Рецензент
П.Г. Стєганцева, кандидат фізико-математичних наук, професор кафедри загальної математики

Відповідальний за випуск
С. М. Гребенюк, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри фундаментальної та прикладної математики

ЗМІСТ

ВСТУП 4
1 УКРАЇНСЬКІ ТА МІЖНАРОДНІ МАТЕМАТИЧНІ ЗМАГАННЯ 6
1.1 Міжнародний математичний конкурс-гра «Кенгуру» 6
1.2 Приклад розв'язання завдання «Кенгуру» 7
1.3 Аналіз задач розв'язаної роботи 20
1.4 Міжнародний чемпіонат з розв'язання логічних математичних задач 22
1.5 Приклад розв'язання задач пів фіналу (березень 2019 року) 23
1.6 Аналіз задач розв'язаної роботи 31
Питання для самоконтролю, практичні завдання 32
2 УКРАЇНСЬКІ ТА МІЖНАРОДНІ МАТЕМАТИЧНІ ОЛІМПІАДИ 33
2.1 Відкриті олімпіади з лінгвістики 33
2.2 Математичні бої імені академіка Ляшка 36
2.3 Математичний занзібар 40
2.4 Всеукраїнська олімпіада з математики 43
2.5 Теми олімпіадної математики 47
2.6 Класичні нерівності, які зустрічаються в олімпіадних задачах 54
Питання для самоконтролю, практичні завдання 58
3 ОРГАНІЗАЦІЯ НАУКОВОЇ РОБОТИ УЧНІВ 59
3.1 Всеукраїнські онлайн-проєкти з математики 59
3.2 Конкурс-захист науково-дослідницьких робіт учнів-членів МАН 60
3.3 Підготовка дослідницької роботи 62
3.4 Підготовка до захисту та захист дослідницької роботи 64
Питання для самоконтролю, практичні завдання 68
4 ЗАГАЛЬНІ ПИТАННЯ ПІДГОТОВКИ ДО МАТЕМАТИЧНИХ ЗМАГАНЬ 69
4.1 Психологічні аспекти підготовки до математичних змагань 69
4.2 Корисні поради для олімпіадників та їх наставників 71
Питання для самоперевірки, практичні завдання 73
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 74
РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА 74
ДОДАТОК А 75
ДОДАТОК Б 76

ВСТУП

Інтелектуальні конкурси та олімпіади з навчальних предметів — це не лише змагання, а й потужний інструмент розвитку учнівського потенціалу. Участь у них формує аналітичне мислення, вміння працювати з нестандартними завданнями, розвиває наполегливість, самостійність і любов до навчання. Підготовка до олімпіад стимулює поглиблене вивчення предмету, дозволяє виявити та підтримати обдарованих учнів, а також мотивує до саморозвитку.

Для вчителів підготовка учнів до інтелектуальних змагань — це можливість підвищити власний фаховий рівень, вивчати сучасні методики викладання й формувати навчальне середовище, орієнтоване на досягнення. Школа, що підтримує олімпіадний рух, створює умови для зростання академічної культури та формує репутацію закладу з високим рівнем освіти.

Цей посібник має на меті допомогти майбутнім вчителям у системній та ефективній підготовці учнів до олімпіад, пропонуючи практичні інструменти, методичні поради та завдання, які сприятимуть формуванню глибоких знань і впевненості у своїх силах.

Метою вивчення навчальної дисципліни «Підготовка до олімпіад, конкурсів і наукової роботи з математики в профільній школі» є отримання здобувачами детальної інформації про проведення різноманітних Всеукраїнських та міжнародних конкурсів і олімпіад з математики для учнів закладів середньої освіти, розуміння, як організувати роботу з підготовки до таких заходів, а також навчання деяким методам розв’язання конкурсних задач.

Підготовка школярів до участі в різноманітних змаганнях, зокрема, з математики, є певним викликом для молодого вчителя. По-перше, він має добре орієнтуватися в різноманітті конкурсів та олімпіад; по-друге, має розуміти, як зацікавити учнів та допомогти їм підготуватися до участі в змаганнях; і, по-третє, вчитель має бути здатним розв’язувати олімпіадні завдання, оскільки саме так він може навчити учнів. Для допомоги майбутнім вчителям і пропонується цей курс.

Основними **завданнями** вивчення дисципліни «Підготовка до олімпіад, конкурсів і наукової роботи з математики в профільній школі» є:

– надання інформації про правила та умови проведення різноманітних Всеукраїнських та міжнародних математичних олімпіад та конкурсів для школярів;

– ознайомлення з ефективними методами підготовки учнів до участі в олімпіадах та конкурсах, а також організації наукової роботи школярів;

– навчання основних методів розв’язання олімпіадних задач з математики.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен набути таких **компетентностей**:

– Здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях.

– Здатність до міжособистісної та партнерської взаємодії, роботи в команді, спілкування з представниками різних груп (професійних і соціальних).

– Здатність до спілкування державною та іноземною мовами як усно так і письмово.

– Здатність генерувати нові ідеї, виявляти та розв’язувати проблеми.

– Здатність до безперервного професійного розвитку та самовдосконалення.

– Володіння спеціальною професійною термінологією та уміння її використовувати та передавати.

– Здатність до планування та організації освітнього процесу, прийняття ефективних рішень під час реалізації професійної діяльності.

– Здатність до формування в здобувачів освіти мотивації до вивчення математики та організації їх пізнавальної діяльності. Здатність до формування в здобувачів освіти мотивації до вивчення математики та організації їх пізнавальної діяльності.

– Здатність до самостійного опанування знаннями із сучасних тенденцій математики і педагогіки та впровадження їх в практику професійної діяльності в закладах загальної середньої та передвищої фахової освіти.

– Здатність до організації та проведення самостійної та дослідницької роботи учнів з математики.

– Здатність формувати в учнів критичне мислення, переконання в необхідності обґрунтування гіпотез, розуміння математичного доведення та математичного моделювання.

– Здатність працювати із навчально-методичною та науково-предметною літературою.

– Здатність аналізувати математичну задачу, створювати відповідну математичну модель та розглядати різні способи її розв’язування.

– Здатність навчати учнів розв’язувати задачі шкільного курсу математики різного рівня складності.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен досягти таких результатів навчання:

– Володіти методами і прийомами навчання математики у закладі загальної середньої освіти.

– Здійснювати усну та письмову комунікацію державною мовою в усіх професійних ситуаціях.

– Застосовувати ідеї, методи та термінологію математики.

– Створювати умови для формування мотивації здобувачів освіти до вивчення математики та застосовувати методи, технології та засоби для розвитку їх пізнавальної діяльності.

– Виявляти готовність навчатися упродовж життя і вдосконалювати з високим рівнем автономності здобуті під час навчання компетенції.

– Володіти загальними методичними схемами формування правил-орієнтирів розв'язування задач.

Дисципліна є основою для проведення виробничої практики, оскільки дозволяє застосувати здобуті навички, та для написання кваліфікаційної роботи. Читається паралельно з практикумом з розв'язання задач підвищеної складності в профільній школі, що дає можливість більш детально розглянути окремі типи задач. Курс «Методологія та організація наукових досліджень» застосовується при вивченні теми «Організація наукової роботи учнів».

1 УКРАЇНСЬКІ ТА МІЖНАРОДНІ МАТЕМАТИЧНІ ЗМАГАННЯ

1.1 Міжнародний математичний конкурс-гра «Кенгуру»

Конкурс «Кенгуру» добре відомий українським школярам, оскільки це найбільш популярне математичне змагання, в якому беруть участь учні 2-11 класів. Історія цього конкурсу починається з 80-х років XX століття, коли австралійський професор Пітер Холлоран започаткував конкурс-гру для місцевих школярів, який відрізнявся від вже існуючих тим, що задачі пропонувалися з набором відповідей, та перевіряв відповіді комп'ютер. Це означало, що тисячі школярів могли взяти участь у грі одночасно. Успіх австралійського національного математичного конкурсу був надзвичайний. Ідея сподобалася в інших країнах, і у 1991 році цю гру провели у Франції для учнів коледжів. Саме там з'явилася назва «Кенгуру», щоб підкреслити австралійське походження конкурсу.

В 1993 році у Франції участь в конкурсі взяло приблизно 500 тисяч учасників. Конкурсом зацікавилися представники інших країн, тому в 1994 році "Кенгуру" завітав до Угорщини, Іспанії, Голландії, Польщі та інших країн, а у липні 1994 року на Раді Європи Генеральна асамблея організувала Асоціацію «Кенгуру без кордонів». Сьогодні ця Асоціація об'єднує більше 30 країн, серед яких є Україна.

В Україні конкурс «Кенгуру» вперше було проведено в 1997 році на базі Львівського фізико-математичного ліцею при Львівському національному університеті імені Івана Франка та декількох шкіл в Львівській області. Його радо підхопили в інших областях України, тому за короткий термін конкурс «Кенгуру» став наймасовішим математичним змаганням в Україні. Учасником конкурсу може бути кожен учень від 2-го по 11-й клас. Насправді, доволі часто участь в конкурсі беруть навіть першокласники, але розв'язують вони завдання за 2 клас. Метою цього конкурсу є залучення учень у цікавий світ математики. В цьому конкурсі немає переможців, кожен учасник отримує свій особистий результат і свій окремий диплом. Недарма девізом конкурсу стали слова філософа Сенеки: «Propera ad me, sed at te prius» («Поспішай до мене, але до себе – насамперед»)

Наразі проведення «Кенгуру» в Україні покладено на організаційний комітет, який діє на базі Львівського фізико-математичного ліцею-інтернату при Львівському національному університеті імені Івана Франка. Згідно з умовами проведення, метою конкурсу є популяризація математичних ідей та підтримка талановитих школярів, розвиток їх інтелектуальних здібностей, активізація творчої діяльності вчителів, вироблення методичних рекомендацій щодо вдосконалення навчальних програм та підручників шляхом аналізу статистичних даних результатів конкурсу.

Міжнародний етап конкурсу традиційно проводиться в березні, але в 2012-2013 навчальному році в Україні було вперше додатково проведено Всеукраїнський етап конкурсу, розрахований на учнів 2-6 класів. Поява такого етапу мала підготувати учнів молодших класів до участі в Міжнародному етапі.

Тепер Всеукраїнський етап став щорічним та проводиться в грудні, перед Міжнародним етапом.

Вся інформація стосовно конкурсу, правила проведення, задачі, критерії оцінювання та результати знаходяться на офіційному сайті «Кенгуру» в Україні: https://www.kangaroo.com.ua/

На Всеукраїнському етапі учасники виконують завдання для свого класу, а учасники Міжнародного етапу конкурсу виконують завдання по рівнях: «Малюк-2» (учні 2 класу), «Малюк -3,4» (учні 3-4 класів), «Школярик» (учні 5-6 класів), «Кадет» (учні 7-8 класів). «Юніор» (учні 9-10 класів), «Випускник» (учні 11 класів). Для учнів 9-11 класів передбачені 2 варіанти завдань – для класів академічного рівня та для класів з поглибленим вивченням математики. Рівень «Малюк-2» містить 15 задач, рівень «Малюк-3,4» – задачі, всі інші рівні містять по 30 задач. Задачі розділені на три групи по 10 задач. Перші 10 задач оцінюються по 3 бали кожна, другі 10 задач – по 4 бали кожна, та останні 10 задач – по 5 балів кожна. Таким чином, учні 5-11 класів можуть набрати всього 120 балів. В залежності від набраної кількості балів учасник отримує червоний диплом (відмінний результат), синій диплом (добрий результат) або зелений диплом учасника конкурсу. Щорічно визначається кількість балів, потрібних для отримання диплома кожного рівня в залежності від загальних результатів по країні.

На розв’язання задач конкурсу кожного рівня дається 75 хвилин. Кожна задача має 5 запропонованих відповідей, з яких вірною є лише. За правильно обрану відповідь учасник отримує відповідну кількість балів. За неправильну відповідь бали не додаються та не знімаються. Користуватися калькулятором, довідниковою літературою заборонено. Хочеться зауважити, що під час пандемії та війни для проведення конкурсу застосовувалися дистанційні технології, що, зрозуміло, унеможливлює перевірку того, що кожен учасник працює над завданнями самостійно і без допоміжних засобів. Найкращим варіантом проведення конкурсу є розв’язання задач в один день і час для всієї країни в начальних закладах.

Кожен учасник перед початком змагання отримує кольоровий зошит з надрукованими завданнями, який може використовувати як чернетку та забрати з собою після завершення конкурсу. Обрані відповіді заносяться в спеціальний лист відповідей (він зашифрований, тобто прізвища учасника не видно), який потім відправляється на перевірку. Перевірка здійснюється за допомогою комп’ютерних технологій, коли звіряється шаблон правильних відповідей з листом відповідей учасника. Це дозволяє доволі швидко отримати результати перевірки по всій країні.

1.2 Приклад розв’язання завдання «Кенгуру»

В якості приклада розглянемо завдання Міжнародного етапу «Кенгуру» рівня «Випускник» 2023 року. Нагадаємо, що задачі 1–10 оцінюються в 3 бали кожна, задачі 11–20 – в 4 бали кожна, задачі 21–30 – в 5 балів кожна задача.

1 Чому дорівнює значення виразу $\frac{7777^2}{5555 \times 2222}$?

А: 1 **Б:** $\frac{7}{10}$ **В:** $\frac{49}{10}$ **Г:** $\frac{77}{110}$ **Д:** 49

Рис. 1.1 – Умова задачі 1

Задача 1. Спростимо вираз та отримаємо *відповідь В*:

$$\frac{7777^2}{5555 \cdot 2222} = \frac{7777 \cdot 7777}{5555 \cdot 2222} = \frac{7 \cdot 1111 \cdot 7 \cdot 1111}{5 \cdot 1111 \cdot 2 \cdot 1111} = \frac{7 \cdot 7}{5 \cdot 2} = \frac{49}{10}$$

2 Юля кидає п'ять гральних кубиків. Кількість крапок на їх верхніх гранях дорівнює 19. Яку максимальну кількість шісток вона могла вкинути?

А: 0 **Б:** 1 **В:** 2 **Г:** 3 **Д:** 4

Рис. 1.2 – Умова задачі 2

Задача 2. Зрозуміло, що 3 шістки вона не змогла викинути, оскільки в цьому випадку сума крапок на трьох кубиках вже б дорівнювала 18, а ще залишилося б 2 кубики з найменшою можливою кількість крапок – 2. Тобто 3 шістки – забагато. Розглянемо випадок, коли на двох кубиках випали шістки. Тоді сума крапок на трьох кубиках, що залишилися, дорівнює 7, що легко отримати (наприклад, 3+2+2). Отже, *відповідь В*.

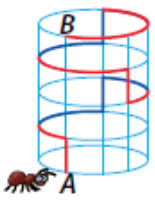
3 Якою цифрою закінчується добуток $(5^{21}+1)(5^{22}+1)(5^{23}+1)$?

А: 1 **Б:** 2 **В:** 3 **Г:** 4 **Д:** 6

Рис. 13 – Умова задачі 3

Задача 3. Проаналізуємо добуток $(5^{21}+1)(5^{22}+1)(5^{23}+1)$. Будь який степінь п'ятірки закінчується цифрою 5, тобто число в кожній дужці закінчується цифрою 6. Оскільки добуток трьох шісток закінчується на 6, це й буде остання цифра добутків. *Відповідь Д.*

4 Циліндрична банка має висоту 15 см, а периметр її круглої основи дорівнює 30 см. Мураха повзе від точки *A* на нижній основі до точки *B* на верхній. Її шлях або вертикально вгору, або горизонтально вздовж дуг навколо банки. Цей шлях показано товстішою лінією (червона для шляху на видимій частині банки та синя на невидимій). Чому дорівнює довжина шляху мурахи в см?



А: 45 см **Б:** 55 см **В:** 60 см **Г:** 65 см **Д:** 75 см

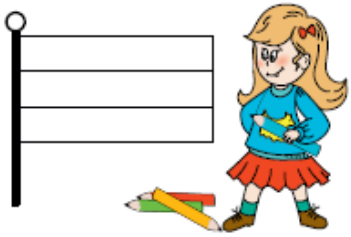
Рис. 1.4 – Умова задачі 4

Задача 4. Зрозуміло, що якщо скласти весь шлях мурахи, то вона двічі обійшла периметр круглої основи та одну висоту банки, тобто

$$2 \cdot 30 + 15 = 75 \text{ см}.$$

Відповідь Д.

5 Емілія має чотири різнокольорові олівці і розфарбовує прямокутний прапор, показаний малюнку у три кольори так, щоб кожна смуга була одноколірною і жодні дві сусідні смуги не були одного кольору. Скількома способами вона може це зробити?



А: 24 **Б:** 27 **В:** 32 **Г:** 36 **Д:** 64

Рис. 1.5 – Умова задачі 5

Задача 5. Кількість способів розфарбувати прапор в два кольори дорівнює A_4^2 (кількість залежить від порядку вибору). А кількість способів розфарбувати прапор в 3 кольори дорівнює A_4^3. Отже, остаточно

$$A_4^2 + A_4^3 = \frac{4!}{2!} + \frac{4!}{1!} = 12 + 24 = 36,$$

тобто *відповідь Г.*

6 Чому дорівнює сума цифр числа *N*, якщо *N*! = 6! • 7!?

А: 0 **Б:** 1 **В:** 2 **Г:** 3 **Д:** 4

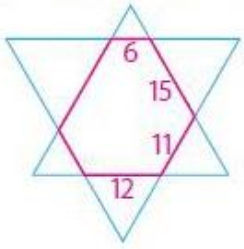
Рис. 1.6 – Умова задачі 6

Задача 6. Перетворимо числовий вираз:

$$6! \cdot 7! = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7! = 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7! = 7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 10!$$

Отже, $n! = 10!$, значить, $n = 10$, тобто сума цифр цього числа – 1, *відповідь Б.*

7 Два рівносторонні трикутники накладено так, що їхня спільна частина – шестикутник, протилежні сторони якого паралельні. Довжини чотирьох сторін цього шестикутника показано на малюнку. Чому дорівнює периметр цього шестикутника ?



А: 64 **Б:** 66 **В:** 68 **Г:** 70 **Д:** 72

Рис. 1.7 – Умова задачі 7

Задача 7. Позначимо більшу сторону шестикутника через x, а меншу сторону – через y. Зрозуміло, що 6 маленьких отриманих трикутників є рівносторонніми. Тоді $6 + x = 11 + 12$, тобто $x = 17$ см.

Отже, $17 + y = 15 + 11$, тобто $y = 9$ см. Тепер легко знайти периметр шестикутника: 6+15+11+12+9+17=70 см. *Відповідь Г.*



Рис. 1.8 – Умова задачі 8

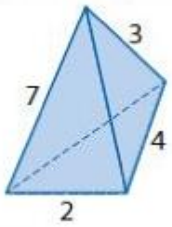
Задача 8. Порахуємо площі зафарбованих квадратів. Найбільший квадрат має площу $\frac{84}{4}$ см^2. Наступний за площею квадрат має площу в 4 рази меншу: $\frac{84}{4^2}$ см^2 і таксамо кожний наступний – в 4 рази мегший за площею, ніж попередній. Тобто площи зафарбованих квадратів утворюють геометричну прогресію зі знаменником $\frac{1}{4}$ і першим членом 21. Порахуємо її суму: $\frac{21}{1-\frac{1}{4}} = 7 \cdot 4 = 28$ см^2 . *Відповідь Б.*



Рис. 1.9 – Умова задачі 9

Задача 9. Оскільки вершини квадрата симетричні відносно точки перетину його діагоналей, яка збігається з початком координат, вершини мають, такі координати: $A(-2,5), B(-5,-2)$. Сума всіх координат цих вершин дорівнює -4. *Відповідь Б.*

10 Трикутна піраміда має ребра цілочисельної довжини. Довжини чотирьох ребер показано на малюнку. Чому дорівнює сума довжин двох інших ребер?



А: 9 **Б:** 10 **В:** 11 **Г:** 12 **Д:** 13

Рис. 1.10 – Умова задачі 10

Задача 10. Скористаємося нерівністю трикутника: сума довжин двох сторін трикутника більше за третю сторону. Сторона, позначена пунктиром, має бути менше 6 (дві інші сторони основи дорівнюють 2 та 4). Але враховуючи, що ця сторона також знаходиться в трикутнику зі сторонами 3 та 7, вона має бути більшою за 4, тобто єдине можливе її значення за таких умов – 5. Аналогічно міркуємо стосовно найближчого бічного ребра піраміди: воно не може бути більше 7 і менше 5, тобто єдиний можливий варіант – 6. Отже, сума довжин ребер – 11, *відповідь В.*

11 Дано п'ять чисел a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, сума яких дорівнює S. Для кожного k, $1 \le k \le 5$, $a_k = k + S$. Чому дорівнює значення S?

А: $\frac{15}{4}$ **Б:** $-\frac{15}{4}$ **В:** -15 **Г:** 15 **Д:** жодному з попередніх

Рис. 1.11 – Умова задачі 11

Задача 11. Оскільки $a_k = k + S$, сума цих чисел дорівнює

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + +5S = 15 + 5S = S,$$

звідки $S = -\frac{15}{4}$, *відповідь Б.*

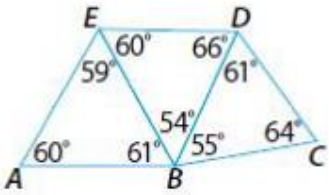
12 Називаємо натуральне число n **подвійно простим**, якщо воно має рівно три різні дільники, 1, 2 і n (саме число). Скільки існує різних **подвійно простих** цілих чисел?

А: 0 **Б:** 1 **В:** 2 **Г:** 3 **Д:** 4

Рис. 1.12 – Умова задачі 12

Задача 12. Зрозуміло, що такі числа мають бути парними, тобто мати вигляд $2k$, але k не може дорівнювати 1, бо число 2 має тільки 2 різні дільники, та не може бути більше 2, оскільки це число k також є дільником. Отже, єдиний можливий варіант: $k = 2$, єдине подвійно просте число – 4 (його дільники 1,2,4). *Відповідь Б.*

13 Сім відрізків утворюють три трикутники, так як показано на малюнку. Який із цих семи відрізків найдовший?



А: *BD* **Б:** *CD* **В:** *DE* **Г:** *BE* **Д:** *AE*

Рис. 1.13 – Умова задачі 13

Задача 13. Відомо, що в трикутнику навпроти найбільшого кута лежить найбільша сторона. Отже, в трикутнику BCD найбільшою стороною буде BD. Але в трикутнику EDB найбільша сторона EB. Остаточно в трикутнику AEB найбільша сторона – AE, тобто цей відрізок і буде найдовшим серед всіх. *Відповідь Д.*

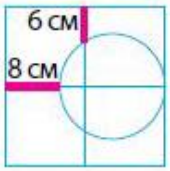
14 У лісі на галявині в ряд сидить 23 тваринки. Кожна тваринка або бобер, або кенгуру. У кожного є хоча б один сусід кенгуру. Яка найбільша можлива кількість бобрів у цьому ряду?

А: 7 **Б:** 8 **В:** 10 **Г:** 11 **Д:** 13

Рис. 1.14 – Умова задачі 14

Задача 14. Щоб задовольнити умову задачі, тварини мають сидіти так: та залучити найбільшу кількість бобрів, тварини мають сидіти так: БККББККББККББККББККББКК (якщо ряд починається з бобра) або так ККББККББККББККББККББККБ (якщо ряд починається з кенгуру). В будь-якому випадку бобрів 11. *Відповідь Г.*

15 Великий квадрат на малюнку розрізано на чотири менші квадрати. Коло дотикається правої сторони квадрата в його середині. Чому дорівнює довжина сторони великого квадрата? Зверніть увагу, що малюнок не намальований у масштабі задачі.



А: 18 см **Б:** 20 см **В:** 24 см **Г:** 28 см **Д:** 30 см

Рис. 1.15 – Умова задачі 15

Задача 15. Позначимо довжини відрізків через x, y. Тоді, по-перше, $8 + x = 6 + y$. По-друге, домальований трикутник спирається на діаметр кола, тобто є прямокутним. Відрізок довжини y є висотою цього трикутника,

проведеною до гіпотенузи, тобто дорівнює середньому геометричному проєкцій катетів на гіпотенузу6 $y^2 = x(8+x)$. Таким чином, отримали систему рівнянь:

$$\begin{cases} 8+x = 6+y \\ y^2 = x(8+x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y-2 \\ y^2 = (y-2)(6+y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y-2 \\ 4y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}.$$

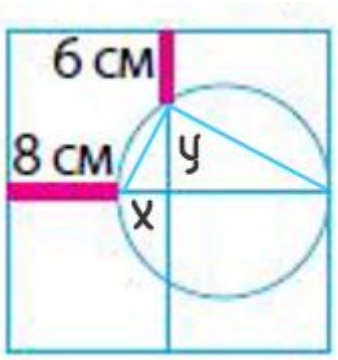


Рис. 1.16 – Розв'язання задачі 15

Отже, довжина сторони маленького квадрата дорівнює 9 см, значить, довжина сторони великого квадрата – 18 см. *Відповідь А*.

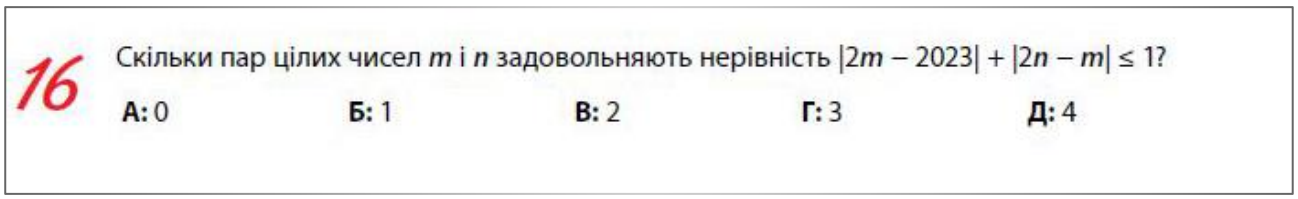


Рис. 1.17 – Умова задачі 16

Задача 16. Оскільки під кожним модулем стоять цілі числа, їхня сума буде не перебільшувати 1 в трьох випадках: коли кожний модуль дорівнює нулю, або коли один з двох модулів дорівнює нулю, а інший – одиниці. Зауважимо, що під знаком першого модуля записана різниця парного та непарного чисел, яка, зрозуміло, дорівнювати нулю не може. Тобто єдиним можливим варіантом залишається варіант, коли перший модуль дорівнює 1, а другий – нулю, тобто коли $m = 2n, 4n - 2023 = \pm 1$. Отже, можливі 2 випадки: $4n = 2024$ або $4n = 2022$. Але в другому випадку n – не ціле число, тобто залишається єдиний можливий варіант: $n = 1012, m = 2024$. *Відповідь Б.*

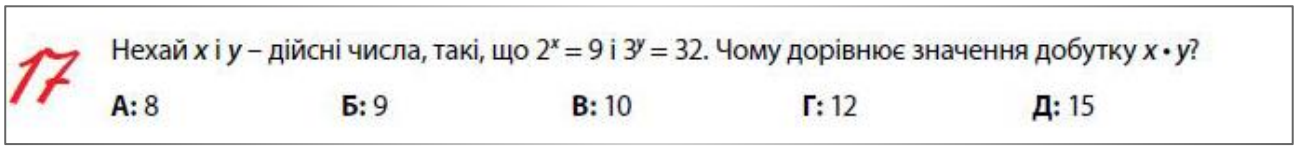


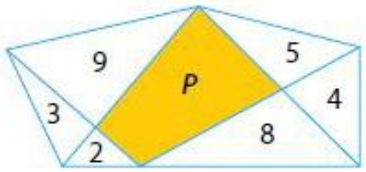
Рис. 1.18 – Умова задачі 17

Задача 17. Обчислимо цей добуток:

$$x = \log_2 9, \qquad y = \log_3 32,$$
$$x \cdot y = \log_2 9 \cdot \log_3 32 = 2\log_2 3 \cdot 5\log_3 2 = 10.$$

Відповідь В.

18 П'ятикутник розрізано на менші частини так, як показано на малюнку. Цифри всередині трикутників позначають їх площі. Чому дорівнює площа P заштрихованого чотирикутника?



А: 15 кв. од. **Б:** 16 кв. од. **В:** 17 кв. од. **Г:** 18 кв. од. **Д:** 19 кв. од.

Рис. 1.19 – Умова задачі 18

Задача 18. Якщо в жовтому чотирикутнику провести діагональ, як показано на малюнку, п'ятикутник розіб'ється на два опуклих чотирикутника.

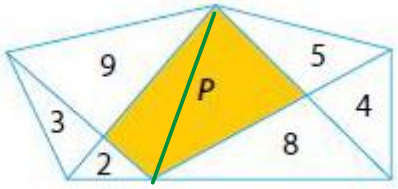


Рис. 1.20 – Розв'язання задачі 118

Діагоналі опуклого чотирикутника розбивають його на 4 трикутника, при чому добутки площ протилежних трикутників дорівнюють одне одному. Тоді площа жовтого трикутника, розташованого зліва від діагоналі жовтого чотирикутника, дорівнює $(2 \cdot 9) : 3 = 6$, а площа жовтого трикутника, розташованого справа від діагоналі жовтого чотирикутника, дорівнює $(5 \cdot 8) : 4 = 10$. Отже, площа жовтого чотирикутника P дорівнює 16см^2. *Відповідь Б.*

19 Дві функції $f(x)$ і $g(x)$ мають похідну для довільного $x \in R$ і задовольняють умову $f(x) + 2g(2-x) = x^2$ Чому дорівнює $g'(1)$,якщо $f'(1) = 2023$?

А: 1 **Б:** 2024 **В:** 2012 **Г:** 1012 **Д:** 1011

Рис. 1.21 – Умова задачі 19

Задача 19. Обчислимо похідну від обох частин заданого виразу, враховуючи, що другий доданок є складеною функцією: $f'(x) - 2g'(2-x) = 2x$. Підставимо в цей вираз $x = 1$: $f'(1) - 2g'(1) = 2$. Враховуючи, що $f'(1) = 2023$, отримуємо, що $g'(1) = 1010{,}5$. Як бачимо, потрібної відповіді серед запропонованих немає. Це означає, що є помилка або в умові, або у відповідях.

На превеликий жаль, такі прикрі помилки час від часу трапляються і відбирають дорогоцінний час на намагання учасника зрозуміти, що ж сталося. Спробуємо проаналізувати, *яка ж помилка в цій задачі*. Оскільки немає жодної нецілої відповіді, зайвою є одна з двійок в умові. Якщо б не було 2 біля функції $g(2-x)$, ми б отримали відповідь $g'(1) = 2021$, яка також не пропонується. А

якщо б в правій частині рівності $f'(1) - 2g'(1) = 2$ була б не двійка, а одиниця, тоді б $g'(1) = 1011$ – така відповідь є серед запропонованих. Тобто автор задачі неправильно продиференціював функцію x^2, що привело до неправильного набору відповідей. Зрозуміло, що такі помилки мають виправлятися навіть під час перевірки (наприклад, будь-яка відповідь зараховується, як правильна, або просто ця задача знімається з конкурсу). Це зайвий раз показує, що до підготовки конкурсних завдань слід підходити дуже ретельно.

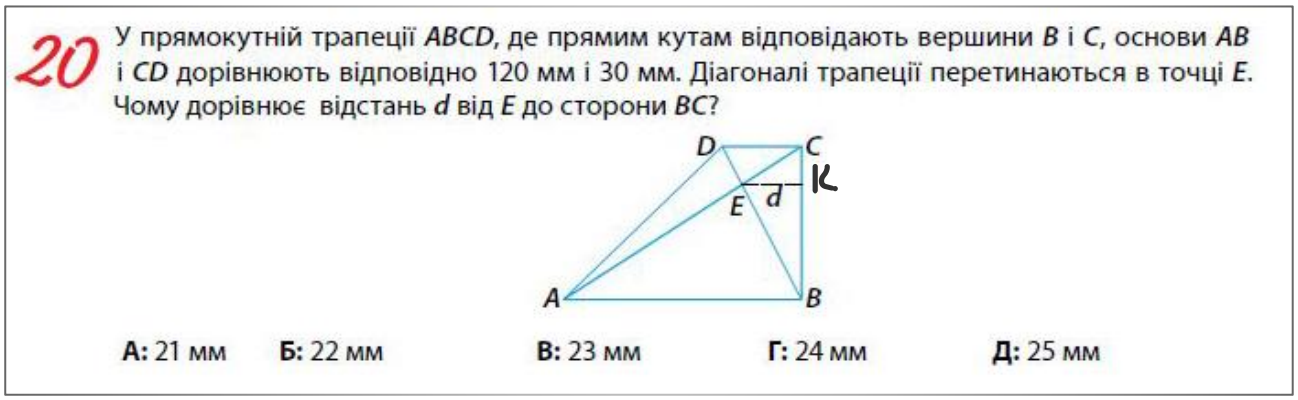


Рис. 1.22 – Умова задачі 20

Задача 20. Позначимо точку перетину відрізка довжини d з відрізком BC через K. Тоді CK дорівнює висоті трикутника EDC, а KB дорівнює висоті трикутника AEB. Оскільки трикутники EDC та AEB подібні, то $KB:CK = AB:DC = 4$. Трикутники CEK та CAB також подібні, тобто $EK:AB = CK:CB = CK:(CK + KB) = CK:(CK + 4CK) = 1:5$, звідки $EK = 120:5 = 24$ мм. *Відповідь Г.*

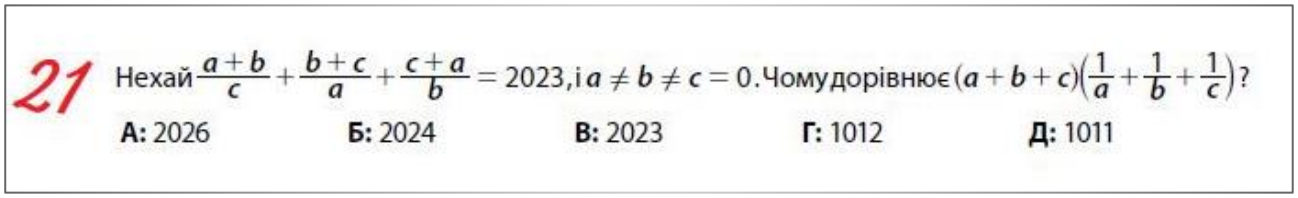


Рис. 1.23 – Умова задачі 21

Задача 21. Перетворимо вираз, значення якого нам треба знайти:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = 1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + 1 + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + 1 =$$

$$= 3 + \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = 3 + 2023 = 2026.$$

Відповідь А.

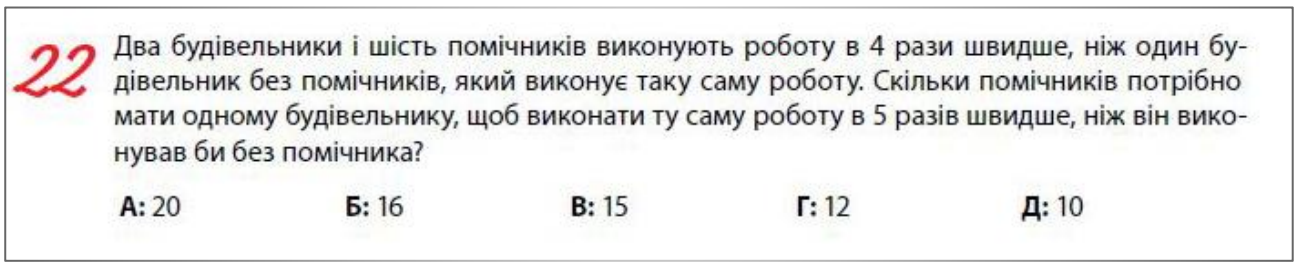


Рис. 1.24 – Умова задачі 22

Задача 22. Якщо вважати всю роботу за 1, кількість годин, за яку виконує цю роботу будівельник, за x, а кількість годин, за яку виконує цю роботу помічник, за y, з умови задачі отримаємо рівняння $\frac{2}{x}+\frac{6}{y}=\frac{4}{x}$ (тут $\frac{1}{x},\frac{1}{y}$ – продуктивності будівельника та помічника, відповідно). З цього рівняння отримуємо, що $3x = y$. Шукану кількість помічників позначимо через k, тоді ця кількість має бути такою, щоб $\frac{1}{x}+\frac{k}{y}=\frac{5}{x}$ або $\frac{1}{x}+\frac{k}{3x}=\frac{5}{x}$ або $k = 12$. *Відповідь Г.*

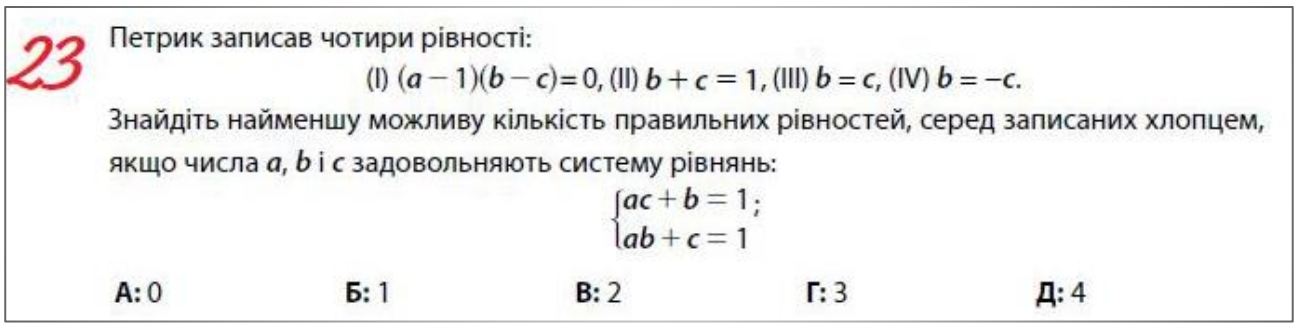


Рис. 1.25 – Умова задачі 23

Задача 23. Перетворимо систему рівнянь, віднімаючи від другого рівняння перше: $ab + c - ac - b = 0$, $a(b-c)-(b-c)=0$, $(a-1)(b-c)=0$. Тобто якщо числа задовольняють систему, то рівність (I) обов'язково виконується. В свою чергу, якщо має місце рівність (I), то або $b = c$ (III), або $a = 1$, але тоді обидва рівняння системи перетворюються на одне: $b + c = 1$ (II). Отже, обов'язково виконуються дві рівності: або (I) та (II), або (I) та (III). Принагідно зауважимо, що рівність (IV) виконуватися не може, оскільки в цьому випадку система стає несумісною: $\begin{cases} ac-c=1 \\ ac-c=-1 \end{cases}$. Отже, мінімальна кількість правильних рівностей – 2. *Відповідь В.*

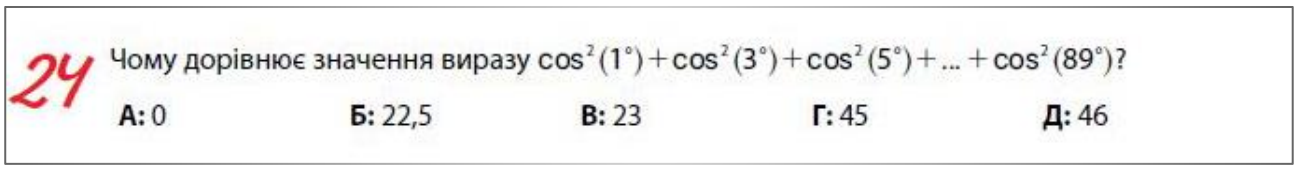


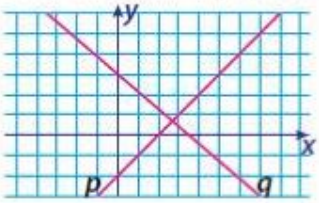
Рис. 1.26 – Умова задачі 24

Задача 24. Ця сума містить 45 доданків, середнім (23-м доданком) буле $cos^2(45^0) = 0{,}5$. Суми симетричних відносно середнього доданка доданків дорівнюють одиниці:

$$cos^2(1^0)+cos^2(89^0)=cos^2(1^0)+cos^2(90^0-1^0)=cos^2(1^0)+sin^2(1^0)=1$$
$$cos^2(3^0)+cos^2(87^0)=cos^2(3^0)+cos^2(90^0-3^0)=cos^2(3^0)+sin^2(3^0)=1$$
$$\ldots$$
$$cos^2(44^0)+cos^2(46^0)=cos^2(44^0)+cos^2(90^0-44^0)$$
$$=cos^2(44^0)+sin^2(46^0)=1$$

Таких пар буде 22, тобто остаточна сума $22 + 0{,}5 = 22{,}5$. *Відповідь Б.*

25 Лінії p і q на малюнку задані рівняннями $y = ax + b$ і $y = cx + d$ відповідно. У якій із відповідей правильними є обидва співвідношення між коефіцієнтами a, b, c і d?



А: $c > 0, c < a$ **Б:** $a < c, c < b$ **В:** $b < c, a < 0$ **Г:** $b < 0, d < a$ **Д:** $a < d, d < 0$

Рис. 1.27 – Умова задачі 25

Задача 25. Для розв'язання цієї задачі проаналізуємо запропоновані відповіді. Із загального вигляду прямих зрозуміло, що з розташування прямої p з рівнянням $y = ax + b$ випливає, що $a > 0$ (кут нахилу прямої до додатного напряму осі абсцис гострий) та $b < 0$ (ордината точки перетину прямої з віссю ординат). Аналогічно з розташування прямої q з рівнянням $y = cx + d$ випливає, що $c < 0$ (кут нахилу прямої до додатного напряму осі абсцис тупий) та $d > 0$ (ордината точки перетину прямої з віссю ординат). Отже, відповіді А, В, Д можна відкинути. Відповідь Б також відкидаєм, оскільки в ній є умова $a < c$, а у нас c від'ємне, а a – додатне. Отже, залишається відповідь Г. Перевіримо цю відповідь. Умова $b < 0$ виконується, а ось з другою умовою є проблема: якщо враховувати масштаб малюнка, $d = 3$, але $a = 1$, оскільки пряма p нахилена до осі абсцис під кутом 45^0. Відповідно, друга умова відповіді Г не виконується. Знову маємо *помилку* в написанні відповідей.

26 Кожне з цілих чисел від 1 до 9 потрібно розмістити по одному в клітинку на малюнку

	7		9					

так, щоб при додаванні будь яких трьох чисел в послідовних клітинках отримувалося число кратне 3. Числа 7 і 9 вже розставлені. Скількома різними способами можна заповнити інші клітинки?

А: 9 **Б:** 12 **В:** 15 **Г:** 18 **Д:** 24

Рис. 1.28 – Умова задачі 26

Задача 26. Проаналізуємо, які числа можуть стояти між 7 та 9: ними можуть бути 2, 5 або 8 (маємо 3 варіанти). В будь-якому варіанті сума цього числа та 7 буде кратна 3, тобто на першому місця в цьому ряду має стояти число, яке також кратно 3 – 3 або 6. Тобто ми маємо 2×3=6 варіантів розстановки чисел в першій та третій вільних клітинках. Оскільки сума чисел в третій та четвертій клітинках порівняна з 2 за модулем 3 (мають залишок 2 при діленні на 3), в п'ятій клітинці має стояти число, яке порівняно з 1 за модулем 3 – це лише 1 та 4 (оскільки 7 вже записано). Отже, кількість варіантів розстановки чисел в першій третій, п'ятій клітинках – 6×2=12. Оскільки сума чисел в четвертій та п'ятій клітинках порівняна з 1 за модулем 3 (це або 9+1=10, або 9+4=13), в шостій

клітинці можуть стояти числа, порівняні з 2 (це або 5 та 8, або 2 та 8, або 2 та 5) – в будь-якому разі таких можливих чисел знову 2, тобто кількість варіантів розстановки чисел до шостої клітинки включно – 12×2=24. В будь-якому випадку сума чисел в п'ятій та шостий клітинках кратна 3, в сьомій клітинці має стояти число, кратне 3. Таке число залишилося одне в кожному варіанті (оскільки 9 та 3 або 6 вже виставлені раніше). Отже, сьома клітинка кількість варіантів не змінює. Переходимо до визначення числа в восьмій клітинці. Оскільки в сьомій клітинці стоїть число, кратне 3, а в шостій – порівняне з 2, то в восьмій клітинці має стояти число, порівняне з 1, а це знову лише один можливий варіант – або 4, або 1, оскільки 7 вже виставлено. Отже, восьма клітинка не впливає на кількість варіантів, і, відповідно, дев'ята також, оскільки число там визначається однозначно. Значить, остаточна відповідь – 24 варіанти. *Відповідь Д*.

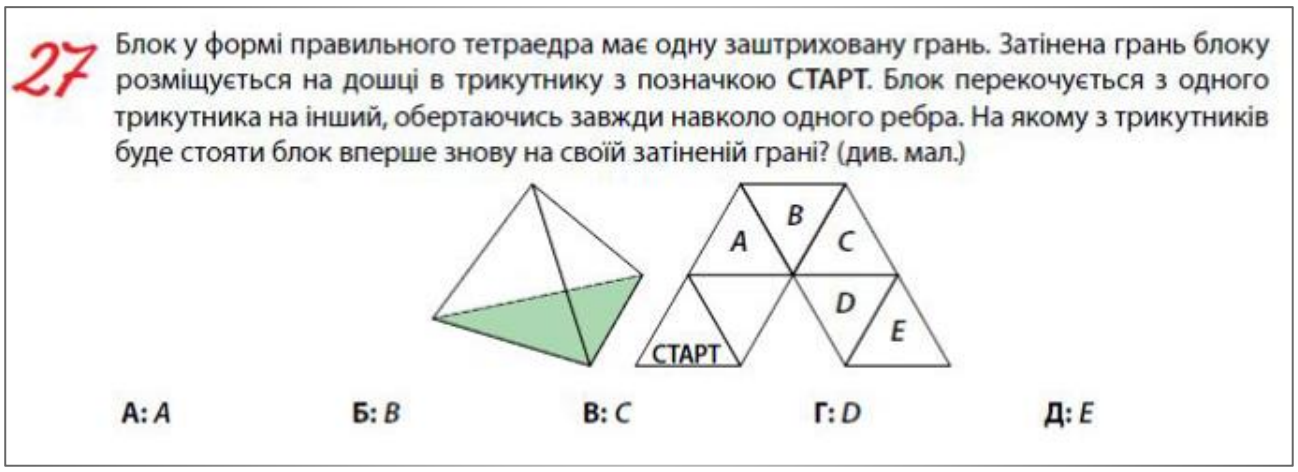


Рис. 1.29 – Умова задачі 27

Задача 27. Для розв'язання цієї задачі треба мати гарне просторове уявлення.

Уявимо, що ми поставили піраміду на СТАРТ. Грань, що перед нами, позначимо 1, праву грань – 2, ліву грань – 3 , а основу (зелену) – 4.Тоді, перевертаючи піраміду, як намальовано, отримаємо, що піраміда по черзі буде ставати на такі грані: 1 – 2 – 3 – 1 – 2 – 3 – 4. Отже, на грань 4 (зелену) піраміда стане в положенні Е. *Відповідь Д.*

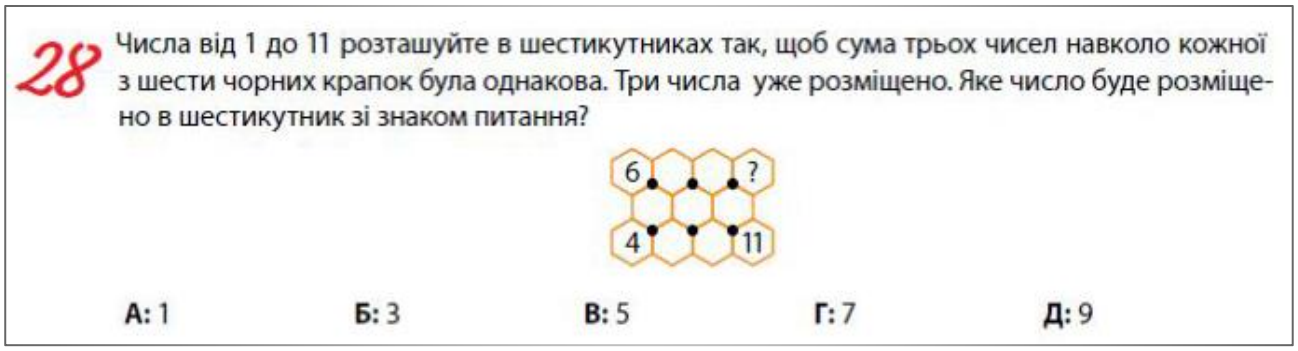
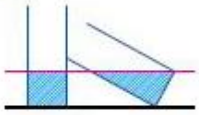


Рис. 1.30 – Умова задачі 28

Задача 28. Оскільки суми трьох чисел навколо кожної чорної крапки однакові, число справа від 6 має бути на 2 менше, ніж число справа від 4. Наступні за цими числами числа токож мають різницю 2, але тепер навпаки –

число в верхньому ряду зліва від знака питання має бути на 2 більше, ніж число в нижньому ряду зліва від 11. І нарешті зрозуміло, що число замість знака питання має бути на 2 менше, ніж 11, тобто 9. *Відповідь Д.*

29 У двох однакових циліндричних резервуарах міститься однакова кількість води. Один циліндр стоїть вертикально, а інший притулений до нього так, як зображено на малюнку. Рівень води в кожному з них однаковий. Дно кожного з циліндрів – коло з площею 3π м^2. Скільки води містить кожен резервуар?



А: 3π м^3 **Б:** 6π м^3 **В:** 9π м^3 **Г:** 34π м^3 **Д:** це неможливо визначити з наданої інформації

Рис. 1.31 – Умова задачі 29

Задача 29.

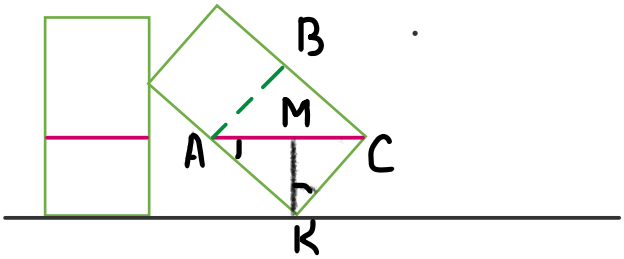


Рис. 1.32 – Розв’язання задачі 29

Оскільки площа круга, що лежить в основі циліндра, дорівнює 3π, діаметр d циліндра дорівнює $2\sqrt{3}$. Для обчислення обїему води потрібно знати висоту рівня води h (на рис. 1.32 це довжина відрізка MK): $V = 3\pi h$, а об’єм циліндра $ABCK$ вдвічі більше, ніж V (враховуючи, що кількість води в обох цилінрах однакова). В трикутнику MKC $MK = h, KC = 2\sqrt{3}, \cos\angle MKC = \frac{h}{2\sqrt{3}}$. В трикутнику AKC $MK = h, KC = 2\sqrt{3}, \tan\angle KAC = \frac{2\sqrt{3}}{AK}$. Оскільки $\angle MKC = \angle KAC$, $1 + \frac{12}{AK^2} = \frac{12}{h^2}$, звідки $AK = \frac{2\sqrt{3}h}{\sqrt{12-h^2}}$. Тоді, з одного боку, об’єм циліндра $ABCK$ дорівнює $6\pi h$, а з іншого боку, $3\pi \cdot AK$, тобто $6\pi h = 3\pi \cdot \frac{2\sqrt{3}h}{\sqrt{12-h^2}}, 1 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12-h^2}}, h = 3$. Тоді $V = 3\pi h = 9\pi$ м^2 . *Відповідь В.*

30 Чому дорівнює сума всіх значень параметра a, для яких рівняння $x^2 + ax + 2023 = 0$ і рівняння $x^2 + 2023x + a = 0$ мають принаймі один спільний розв’язок?

А: –4047 **Б:** –1 **В:** 0 **Г:** 1 **Д:** 4047

Рис. 1.32 – Умова задачі 30

Задача 30. Якщо число x є спільним розв'язком цих рівнянь, тоді $x^2 + ax + 2023 = x^2 + 2023x + a,$ що рівносильно умові $(a - 2023)x = a - -2023$. Зрозуміло, що якщо $a = 2023$, таких x безліч, оскільки обидва рівняння мають однаковий вигляд. Отже, одна значення параметра знайдено. Якщо ж $a \neq 2023$, тоді єдиним спільним коренем є число $x = 1$. Підставимо це число в будь-яке рівняння і знайдемо значення параметра, при якому $x = 1$ є коренем цього рівняння: $1 + a + 2023 = 0$, звідки $a = -2024$. Це є друге значення параметра. Тоді їхня сума: $2023 - 2024 = -1$. *Відповідь Б.*

1.3 Аналіз задач розв'язаної роботи

Проаналізуємо задачі, які були запропоновані одинадцятикласникам. Для кожної задачі охарактеризуємо коротко, які знання та уміння має мати учень, щоб розв'язати задачу.

1. Вміння виконувати прості обчислення;
2. Логічний аналіз умови задачі, відкидання зайвого та виконання елементарних обчислень;
3. Логічний аналіз та застосування властивостей степені;
4. Використання формули довжини кола;
5. Застосування простої комбінаторики;
6. Елементарні перетворення числових виразів;
7. Застосування властивостей рівносторонніх трикутників та формули периметра;
8. Застосування формули суми нескінченно спадної геометричної прогресії;
9. Метод координат на площині;
10. Застосування нерівності трикутника;
11. Уміння працювати з формулою загального члена послідовності;
12. Розуміння, що таке дільник числа;
13. Застосування співвідношення між сторонами та кутами в трикутниках (навпроти найбільшої сторони лежить найбільший кут)
14. Логічний аналіз умови та побудова правильного варіанта розташування;
15. Застосування властивостей прямокутного трикутника (кут, що спитається на діаметр, прямий, висота, проведена з вершини прямого кута є середнім геометричним між проєкціями катетів) та вміння розв'язувати системи рівнянь;
16. Логічний аналіз нерівності з модулем;
17. Виконання елементарних дій з логарифмами;
18. Знання властивості опуклого чотирикутника про те, що його діагоналі розбивають на 4 трикутники так, що добутки площ протилежних трикутників дорівнюють одне одному;
19. Вміння диференціювати;
20. Застосування подібності трикутників;
21. Вміння виконувати дії з раціональними виразами;
22. Уміння розв'язувати текстові задачі на роботу;

23. Уміння встановлювати логічний зв’язок між умовами, записаними в аналітичній формі;
24. Уміння виконувати тригонометричні перетворення;
25. Зв’язок між рівнянням прямої та її розташуванням на площині;
26. Порівняння чисел за модулем (залишки), логічний аналіз умови та проста комбінаторика;
27. Уявлення про рух тіла в просторі;
28. Логічний аналіз умови;
29. Застосування співвідношень в прямокутному трикутнику та формули об’єму циліндра.
30. Вміння аналізувати умову задачі з параметром та знаходити корені.

Як видо з наведеного переліку, запропоновані задачі охоплюють весь курс шкільної математики. Хоча б потроху, але присутні всі базові поняття та навички, якими оволодівають учні протягом навчання в школі. Тобто задачі не мають стати проблемою для людини, яка знає математику навіть не на профільному рівні.

Добре видно, що кожна група задач має різний рівень складності. Перша група задач (1-10) найбільш проста, тут від учнів вимагається швидко робити обчислення, проводити нескладний аналіз умов та знати найпростіші геометричні факти. Друга група (11-20 задачі) є більш складною, тут і задачі з модулями, і обчислення похідної, і дії з логарифмами, і більш складні геометричні властивості. Третя група (21-30 задачі) є найскладнішою, оскільки задачі вимагають більш глибокого аналізу та стосуються більш складних тем, які пов’язані саме зі старшою школою. Отже, для успішної участі в конкурсі «Кенгуру» не вимагається якась додаткова теоретична підготовка – жодних знань чи умінь за межами шкільної програми непотрібно.

Оскільки учасники конкурсу обмежені в часі (на виконання роботи відводиться 75 хвилин, а це в середньому 2,5 хвилини на одну задачу), дуже важливо розв’язувати задачі швидко. Зрозуміло, що перші задачі можуть бути розв’язані за 30 секунд, тоді як задачі з другої чи третьої груп можуть вимагати 3-4 хвилини на розв’язання. Від учасника не вимагається наводити розв’язок, тільки обрати правильну відповідь, тобто не приділяється увага поясненням та оформленню. Частину міркування учасник може проводити усно і робити позначки на чернетці за потреби. Зауважимо, що частина задач розв’язується безпосередньо (обчислення, перетворення, деякі геометричні задачі), але частина задач для економії часу вимагає попереднього аналізу умови, що допомагає відкинути неможливі відповіді або просто скоротити процес розв’язання. Наприклад, задача 16. Якщо намагатися розв’язувати цю нерівність безпосередньо, розкриваючи модулі, це займе багато часу. Але якщо попередньо проаналізувати цю нерівність, то стає зрозумілим, що безпосереднє розв’язання непотрібне. Або задача 28, в якій непотрібно перебирати можливі варіанти розстановки чисел, а достатньо лише побачити закономірність в розташуванні. Ось саме це «побачити» і є дуже важливою навичкою для учасників змагання. Тому при підготовці до участі в конкурсі «Кенгуру» доцільно буде пропонувати учасникам в якості тренування задачі попередніх років, на 1-2 рівні нижче, або на рівень вище.

1.4 Міжнародний чемпіонат з розв'язання логічних математичних задач

Заснована в 1987 році, Французька федерація математичних ігор (FFJM) поставила собі за основну мету розвивати цікавість до математики через гру. Асоціація очолюється волонтерами, які захоплюються математичними головоломками та іграми, та переконані, що ці ігри можуть сприяти як тому, щоб усі учні полюбили математику, так і виявленню молодих талантів. Сайт федерації знаходиться за адресою https://www.ffjm.org/fr/.

Таким чином, FFJM придумує математичні головоломки для школярів, учнів середньої школи, старшокласників, студентів і дорослих, що дозволяє їм займатися математикою будь-якого рівня.

Кожного навчального року FFJM організовує Міжнародний чемпіонат з математичних і логічних ігор, який був заснований в 1987 році. Участь в чемпіонаті можуть брати школярі, студенти та дорослі з різних країн. В Україні чемпіонат проводиться під егідою Міжнародного Комітету математичних змагань. Центральний оргкомітет чемпіонату працює на базі Вінницького міського Центру з інтеграції до європейського та світового освітнього простору.

Метою проведення Чемпіонату є популяризація математичних ідей та підтримка талановитої молоді, розвиток інтелектуальних здібностей учнів і студентів, активізація творчої діяльності вчителів, створення дієвих передумов щодо інтеграції України до європейського та світового освітнього простору.

Чемпіонат зазвичай проходить у 4 етапи:

- 1/4 фіналу між жовтнем і груднем (заочний етап);
- 1/2 регіонального або національного фіналу в суботу березня (одна дата на міжнародному рівні);
- національний фінал у травні (одна дата на міжнародному рівні);
- міжнародний фінал протягом 2 днів в кінці серпня (в одній з країн-учасниць чемпіонату).

Учасники чемпіонату розділяються на різні категорії, та кожній категорії пропонується своя кількість задач: для учнів 1–3 класів (категорія CE) – задачі 1–5; для учнів 4–5 класів (категорія CM) – задачі 1–8; для учнів 6–7 класів (категорія C1) – задачі 1–11, для учнів 8–9 класів (категорія C2) – задачі 1-14, для учнів 10-11 класів (категорія L1) – задачі №1–16, для студентів (категорія L2) – задачі №1–18.

Задачі чвертьфіналу розв'язуються заочно, оформлюються з повними докладними розв'язками в окремому зошиті, який надсилається журі на перевірку. Всі інші етапи змагання відбуваються очно, і на кожний наступний етап запрошуються переможці попереднього.

Протягом очних етапів задачі потрібно розв'язати за обмежений час, без використання калькулятора та без обов'язкового запису (потрібна лише відповідь). Учні 1–3 класів мають впоратися із задачами за 60 хвилин, учні 4–5 класів – за 90 хвилин, учні 6–7 класів – за 120 хвилин, учні 8–11 класів – за 180 хвилин. Слід зауважити, що задачі, починаючі з 9, можуть мати не єдиний розв'язок. У відповіді обов'язково слід вказати кількість розв'язків та навести

два будь-яких з них. Кожна задача має свій коефіцієнт (дорівнює кількості балів за правильно розв'язану задачу).

За результатами кожного очного етапу відбувається рейтингування учасників за наступними критеріями (у порядку зменшення важливості):

1. За кількістю розв'язаних задач.
2. У разі рівної кількості розв'язаних задач, за сумою коефіцієнтів, присвоєних розв'язаним задачам. Учасникам може бути присвоєна частина коефіцієнтів за задачу, яку вони повністю не вирішили. Тобто якщо учасники розв'язали однакову кількість задач, вище в рейтингу буде той, хто розв'язав задачу з більшим коефіцієнтом.
3. У разі однакової кількості балів за розв'язані задачі за часом, витраченим на розв'язання. Той, хто впорався швидше, буде вищим в рейтингу.
4. У разі абсолютної рівності за попередніми критеріями молодший учасник займає вищу позицію.

За результатами рейтингування після проведення національного фіналу перші три учасника в рейтингу отримують золоту, срібну та бронзову медалі. Всі інші – сертифікати учасника фіналу із зазначеною кількістю отриманих балів. Частина учасників з найвищим рейтингом з кожної категорії запрошується на відбіркові збори для формування команди на супер фінал.

1.5 Приклад розв'язання задач пів фіналу (березень 2019 року)

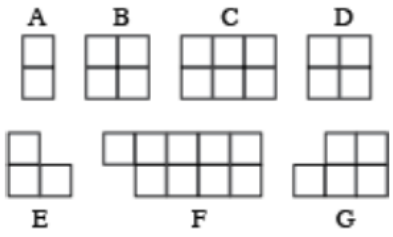
Задача 1 *(коефіцієнт 1).*



За допомогою штампа, що на малюнку, Тео надрукував число 483. Що має бути намальовано на іншому штампі, щоб за допомогою нього Тео зміг надрукувати 2019?

Розв'язання. Зрозуміло, що зображення на штампі та на папері симетричні відносно нижнього краю штампа. Тобто на штампі має бути написано 5018.

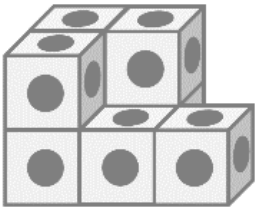
Задача 2 *(коефіцієнт 2).*



Аліса, Боб і Седрік справедливо ділять шоколад поміж собою. На малюнку зображено шматочки шоколадки. Аліса бере шматочок A, Боб бере B, а Седрік бере C. Завершіть цей розподіл, не ламаючи жодної частини.

Розв'язання. Аліса отримала найменшу кількість шоколаду (2 квадратики), відповідно, їй треба віддати шматок F. Тоді у неї буде 11 квадратиків. Седріку до 11 не вистачає 5 квадратиків, тобто він отримує шматок G. А шматочки D та E залишаються Бобу. Отже, *Аліса: A, F; Боб: B, D, E; Седрік: C, G*.

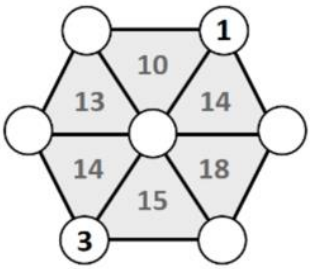
Задача 3 *(коефіцієнт 3).*



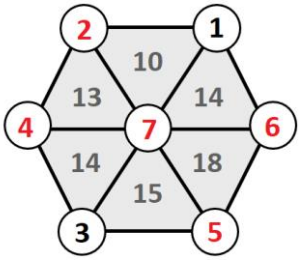
Климент побудував таку фігуру, як на малюнку, склеївши між собою 8 кубиків. Потім він поставив крапку на кожній відкритій грані, в тому числі й на нижній стороні. Порахуйте, скільки точок він поставив.

Розв'язання. Уявимо цю фігуру з кожного боку та порахуємо крапки: знизу та зверху їх по 5, зліва та справа – по 4, спереду та ззаду також по 5. Отже, всього *28 крапок*.

Задача 4 *(коефіцієнт 4).*

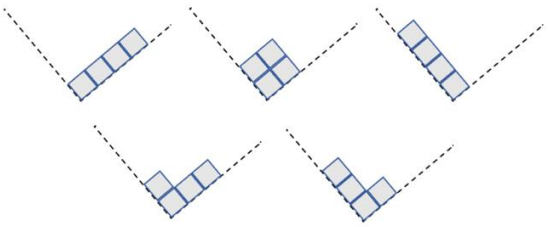


Гаррі має розставити цифри від 1 до 7 по одній в кожний кружечок. Він знає, що число, написане в кожному з шести трикутників дорівнює сумі трьох цифр у його вершинах. Цифри 1 та 3 Гаррі вже записав. Вставте інші числа.



Розв'язання. Почнемо аналіз з трикутника з числом 15. Сума чисел в двох порожніх вершинах має дорівнювати 12. Можливі варіанти 12=4+8, 12=5+7. Але в будь-якому разі третя вершина у трикутнику з числом 18 має цифру 6. Отже, в центральному кружечку буде цифра 7. Далі розстановка очевидна:

Задача 5 *(коефіцієнт 5).*



Метью зберігає свої кубики в коробці з нахилом внизу, як показано на малюнку. Товщина коробки допускає лише один шар кубиків. Існує п'ять способів зберігання чотирьох кубиків, як показано на малюнку. Скількома способами Метью може зберігати п'ять кубиків?

Розв'язання. Якщо проаналізувати цю задачу, стає зрозумілим, що вона на подання числа кубиків у вигляді суми доданків. Кожен доданок означає кількість кубиків в ряду. Наприклад, першим рядом назвемо ряд кубиків, який лежить на правій стороні коробки, другим – той, що на ньому і так надалі, при чому кожен наступний ряд не може мати більше кубиків ніж попередній. Тоді для 4 кубиків маємо такі можливості: 4+0, 3+1, 2+2, 2+1+1, 1+1+1+1. А для 5 кубиків: 5+0, 4+1, 3+2, 3+1+1, 2+2+1, 2+1+1+1, 1+1+1+1+1. Отже, маємо *7 варіантів* розташування кубиків.

На цьому задачі категорії СЕ (1–3 класи) завершено. Зрозуміло, що для учнів старших класів та ще й профільної школи ці задачі не створюють проблеми. Вимагається елементарне просторове уявлення, вміння швидко виконувати

додавання-віднімання та проводити елементарний аналіз умов задачі. Там, де молодші школярі будуть намагатися намалювати малюнки, щоб зрозуміти умову або навіть знайти розв'язок задачі, старшокласники будуть просто писати відповідь.

Задача 6 *(коефіцієнт 6).* $6 \times aaa + 7 \times a = 2019$. Тут літера a завжди означає одну й ту саму цифру, тобто a є однозначним числом, aaa – тризначним числом з однаковими цифрами. Яку цифру позначає a?

Розв'язання. Найпростіше – це записати рівняння відносно a, враховуючи, що $aaa = 100a + 10a + a$. Отримаємо рівняння

$$6 \times (100a + 10a + a) + 7 \times a = 2019$$

або $673a = 2019, a = 3$.

Задача 7 *(коефіцієнт 7).*

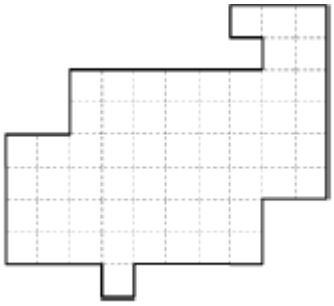


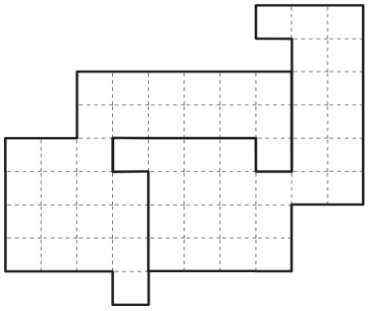
Метью купує на пошті стрічку з трьох марок вартістю 1, 2 і 3 монет. Щоб покласти стрічку в свій маленький гаманець, він згинає стрічку так, щоб жодна марка не була зім'ятою та товщина складеної стрічки дорівнювали товщині трьох марок. Скількома способами він може це зробити? Зауваження: зворотна сторона марок не є самоклеючою.

Розв'язання. Зауваження означає, що можна притискати марки одну до іншою будь-якою стороною. Тоді *кількість можливих варіантів – 6* (вона дорівнює кількості перестановок з 3 чисел, тобто 3!).

Задача 8 *(коефіцієнт 8).* Розріжте цю фігуру по пунктирних лініях на дві однакові частини. Якщо потрібно, одну з частин можна розвернути, щоб накласти її на іншу.

Розв'язання.





Підказкою в побудові такого розрізання є пошук однакових елементів заданої фігури, від яких можна відштовхнутися. В нашому випадку – це 2 прямі кути розміром 2×2. Враховуючи, що від верхнього прямого кута відходять сторони довжини 6 та 8, стає зрозумілим, де відповідні сторони будуть у нижнього кута.

На цьому задачі категорії СМ (4–5 класи) завершено. При аналізі задач 6–7 стає зрозумілим, що молодші школярі можуть розв'язувати ці задачі підбором або перебором варіантів, тоді як старшокласники легко записують та розв'язують

лінійне рівняння або використовують комбінаторну формулу, розібравшись, що насправді означає умова задачі. Наступна група задач може мати не єдиний розв'язок, тому потрібно визначити і кількість розв'язків, і самі ці розв'язки.

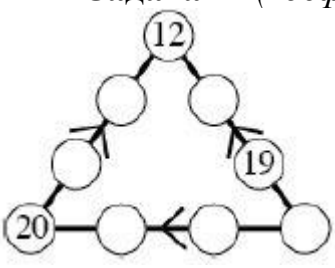
Задача 9 *(коефіцієнт 9).* В класі Матильди кожен учень повинен вибрати принаймні дві ігри із запропонованих: 1. математичні ігри; 2. мовні ігри; 3. стратегічні ігри. Усі учні вибрали два варіанти, крім двох учнів, які обрали всі три варіанти. 18 учнів обрали варіант 1, 22 вибрали варіант 2, а 26 вибрали варіант 3. Скільки учнів у класі Матильди?

Розв'язання. Порахуємо учнів, які обрали лише два варіанти із запропонованих: 16 учнів обрали варіант 1, 20 – варіант 2, 24 – варіант 3 (ми не враховуємо тих двох, хто обрав одразу три варіанти). Якщо підсумувати кількість всіх цих учнів, отримаємо подвоєну кількість учнів, які обрали лише два варіанти ігор, оскільки кожного учня ми порахували два рази. Отже, 16+20+24=60, значить, учнів, які обрали лише два варіанти, всього 30. Додамо ще двох, які обрали три варіанти, і отримаємо *32 учні* в класі.

Задача 10 *(коефіцієнт 10).*
Аліса: «Домінік старший за Едварда».
Берті: «Аліса старша за Едварда».
Колін: «Френсіс старший за Едварда».
Домінік: «Берті молодший за мене».
Едвард: «Колін старший за Френсіса».
Френсіс: «Тільки двоє з вас молодші за мене».
Брехали всі, хто старший за Едварда, всі інші сказали правду (включаючи Едварда). Розташуйте цих шість друзів, якщо всі вони різного віку, в порядку від наймолодшого до найстаршого.

Розв'язання. Для зручності будемо позначати того, хто говорить правду, (+), а того, хто бреше – (-). Отже, Е (+), тобто **Ф<К** (Колін старший за Френсіса). Якщо припустити, що К(+), то Е<Ф, але Ф<К, тобто Е<К, що означає, що Колін бреше. Приходим до суперечності з припущенням і робимо висновок, що К(-), тобто що **Ф<Е<К** та Ф(+). Оскільки з'ясувалося, що Френсіс говорить правду, молодше нього тільки дві людини з трьох, що залишилися: Аліса, Берті та Домінік. Причому обидві ці людини говорять правду. Якщо проаналізувати висловлювання Аліси та Берті, стає зрозумілим, що вони не можуть бути правдивими одночасно. Тобто молодшим за Френсіса точно буде Домінік та або Аліса, або Берті. Оскільки Д(+), то молодшим за Френсіса будуть Домінік та Берті: **Б<Д<Ф<Е<К**. Залишилося зрозуміти, де в цьому ланцюжку Аліса. Оскільки Берті(+), Аліса старша за Едварда, але невідомо, чи старша вона за Коліна. Отже, маємо 2 можливих варіанти розташування друзів: ***Б<Д<Ф<Е<К<А*** або ***Б<Д<Ф<Е<А<К***.

Задача 11 *(коефіцієнт 11).*



У кружечках цього трикутника записані числа від 12 до 20. Числа 12, 19 і 20 вже розміщені. Суми чотирьох чисел на кожній стороні трикутник однакові. Розставте інші числа. Зауваження: знаки «<» на сторонах трикутника вказують на відношення порівняння між двома сусідніми числами.

Розв'язання. Зрозуміло, що між 12 та 19 може стояти одне з чисел: 18, 17, 16, 15, 14, 13. Позначимо це невідоме число через m. Відкинемо неможливі варіанти, враховуючи, що сума двох невідомих чисел, що записані посередині нижньої сторони, має дорівнювати $m + 11$:

m	18	17	16	15	14	13
$m + 11$	29	28	27	26	25	24

Враховуючи, що число $m + 11$ є сумою двох різних чисел, більших за 12 та менших за 19, останні три варіанти неможливі, тобто m може дорівнювати 18, 17 або 16. Розглянемо при цьому, які числа можуть бути записані всередені нижньої сторони, сума яких дорівнює $m + 11$:

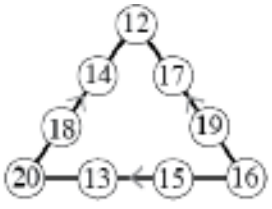
m	18	17	16
$m + 11$	29=13+16=14+15	28=13+15	27=13+14

Позначимо тепер суму чисел на лівій стороні трикутника через k, а число в правій нижній вершинц через p, тоді $k + 12 = m + 11 + p$, або $k = m + p - 1$. ЯВраховуючи цю додаткову залежність, розглянемо по черзі варіанти з таблиці.

Нехай $m = 16$, тоді $k = p + 15$ та поки ще не розставлені числа 15, 17, 18. На місці k могла б бути лише сума 17+18=35, але вона відмінна від 15+15=30. Отже, цей варіант відкидаємо.

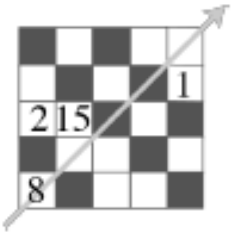
Нехай $m = 17$, тоді $k = p + 16$ та поки ще не розставлені числа 14, 16, 18. На місці k могла б бути лише сума 14+18=32, яка як раз дорівнює 16+14, тобто маємо один варіант розташування чисел.

Нехай $m = 18$, тоді $k = p + 17$. Треба розглянути 2 варіанти: коли 29=13+16 та коли 29=14+15. В першому варіанті не розставлені числа 14, 15, 17, тобто на місці k могла б бути лише сума 14+15=29, але вона відмінна від 17+17=34. Отже, цей варіант відкидаємо. В другому варіанті не розставлені числа 13, 16, 17, тобто на місці k могла б бути лише сума 13+16=29, але вона відмінна від 17+17=34. Отже, цей варіант також відкидаємо. Таким чином, задача має єдиний розв'язок:



На цьому задачі категорії С1 (6-7 класи) завершено. Як бачимо, задачі для цієї вікової групи вимагали більш складного аналізу та перебору більшої кількості варіантів, що вимагає уважності та більших затрат часу.

Задача 12 (коефіцієнт 12).



В цьому квадраті числа від 1 до 15 розставляють в білих клітинках (числа 1, 2, 8, 15 вже розставлені). Суми трьох чисел в кожному рядку, кожному стовпчику та діагоналі однакові. Заповніть порожні білі клітинки.

Розв'язання. Порахуємо суми всіх чисел, які будуть записані в цьому квадраті: $\frac{1+15}{2} \cdot 15 = 120$. Отже, сума чисел в кожному рядку, стовпчику та по діагоналі дорівнює 24. З цього випливає, що ми можемо записати рядок 2, 15, 7; стовпчик 14, 2, 8; рядок 14, 9, 1:



Розглянемо останній стовпчик. Сума чисел в двох порожніх клітинках має дорівнювати 23, тобто можливі 4 варіанти: +13, 13+10, 11+12, 12+11. Переберемо ці варіанти по черзі і з'ясуємо, що серед чотирьох залишається лише один варіант, який і буде розв'язком цієї задачі.



Задача 13 *(коефіцієнт 13).* Як і в будь-якій криптограмі, різні цифри позначаються різними літерами, різні літери позначають різні цифри та жодне число не починається з нуля: $DIX + NEUF = 19 \times UN$. Крім того, в цьому випадку жодна літера не замінює цифру 6 або цифру 9. Яке число позначає $DEUX$?

Розв'язання. Навіть якщо UN дорівнює найбільш можливому за умовою числу 87, добуток $19 \times UN = 1653$, тобто цифра десятків тисяч у числа, що записано зліва в цій рівності, може дорівнювати лише 1, тобто $N = 1$, та рівність перетворюється на таку: $DIX + 1EUF = 19 \times U1$. При множенні справа остання цифра добутку буде дорівнювати 9, тобто $X + F = 9$. Враховуючи, що цифра 1 вже визначена, а цифри 6 та 9 за умовою відсутні, маємо лише такі варіанти подання $X + F$: 2+7, 7+2, 4+5, 5+4. Серед добутків $19 \times U1$ чотиризначними будуть лише добутки 19 на 71 та на 81 (61 та 91 неможливі за умовою).

Розглянемо перший варіант – коли $U = 7$, і рівність перетворюється на таку: $DIX + 1E7F = 1349$. Числа X, F обираються серед 4 та 5, а число I має дорівнювати 7, щоб при переході через розряд отримати на місці десятків 4. Але оскільки число 7 вже відповідає іншій літері, цей варіант неможливий.

Отже, має місце варіант $U = 8$, тоді маємо, що $DIX + 1E8F = 1539$, тобто $X + F = 9$, як зазначено вище, а при додаванні I до 8 має відбутися перехід через розряд, тобто $I + 8 = 13$, значить, $I = 5$, відповідно, числа X, F обираються серед 2 та 7, тобто маємо рівність $D5X + 1E8F = 1539$ та висновок, що сума $D + E + 1 = 5$ або $D + E = 4$. Враховуючи числа, які ще залишилися, можливий єдиний варіант: $D = 4, E = 0$ (оскільки 1 вже визначена раніше). Отже, криптограма має 2 розв'язки: $452 + 1087 = 19 \times 81, 457 + 1082 = 19 \times 81$, а задача має 2 відповіді: $DEUX = 4082$ або $DEUX = 4087$.

Задача 14 *(коефіцієнт 14).* «Перевернуте» число до 12, тобто 21, має квадрат 441, що є «перевернутим» до квадрата числа 12, тобто 144. Знайдіть трицифрове число, відмінне від свого «перевернутого», і таке, що квадрат «перевернутого» до цього числа є «перевернутим» до його квадрата. Зауваження: перша цифра числа або «перевернутого» до нього ніколи не дорівнює нулю.

Розв'язання. Проаналізуємо, які цифри можуть стояти на місці одиниць в шуканому числі. Якщо ця цифра 9, то квадрат числа буде закінчуватися на 1. Якщо ж 9 буде стояти на місці сотень (в «перевернутому» числі), то квадрат цього перевернутого числа буде починатися з 8 або з 9, тобто умова виконуватися не буде. Перевіримо цифру 8 на місці одиниць, тоді квадрат числа закінчується на 4, але 8 на місці сотень в «перевернутому» числі дасть на початку 6, 7 або 8, тобто умова знову не виконується. Аналогічно перевіряються числа 7, 6, 5, 4 – вони також не задовольняють умову. А ось цифри 1, 2, 3 цілком можливі на місці цифр шуканого числа.

Нехай шукане число має вигляд $\overline{abc} = 100a + 10b + c$. Потрібно розглянути варіанти $\overline{1b2}$, $\overline{1b3}$, $\overline{2b3}$.

Розглянемо перше число $\overline{1b2}$, його квадрат закінчується на 4, тобто квадрат «перевернутого» числа $\overline{2b1}$ має починатися з 4, тобто b не може бути більшим за 2, оскільки $231^2 = 53361$. Отже, треба перевірити лише числа 102, 112 та 122. При перевірці вони всі задовольняють умову задачі: $102^2 = 10404$, $201^2 = 40401$; $112^2 = 12544, 211^2 = 44521$; $122^2 = 14844, 221^2 = 48841$.

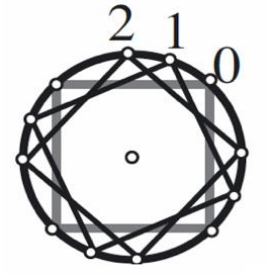
Розглянемо друге число $\overline{1b3}$, його квадрат закінчується на 9, тобто квадрат «перевернутого» числа $\overline{3b1}$ має починатися з 9, тобто b не може бути більшим за 1, оскільки $321^2 = 103041$. Отже, треба перевірити лише числа 103 та 113. При перевірці вони також задовольняють умову задачі: $103^2 = 10609, 301^2 = 90601$; $113^2 = 12769, 311^2 = 96721$.

Розглянемо третє число $\overline{2b3}$, його квадрат закінчується на 9, тобто квадрат «перевернутого» числа $\overline{3b2}$ має починатися з 9, тобто b не може бути більшим за 1, оскільки $322^2 = 103684$. Отже, треба перевірити лише числа 203 та 213. При перевірці виявляється, що вони не задовольняють умову задачі: $203^2 = 41209, 301^2 = 9124$; $213^2 = 45369, 311^2 = 97344$.

Отже, ми отримали 5 чисел, які задовольняють умову, і ще 5 «перевернутих» до них чисел: *102, 112, 122, 103, 113, 201, 211, 221, 301, 311*.

На цьому задачі категорії С2 (8-9 класи) завершено. Слід зауважити, що ці задачі вимагали ще більш складного аналізу, хоча з практичних навичок потрібно було тільки вміти виконувати додавання, віднімання та множення. Враховуючи, що час виконання завдання істотно впливає на рейтинг учасника, потрібно вміти швидко рахувати без використання калькулятора.

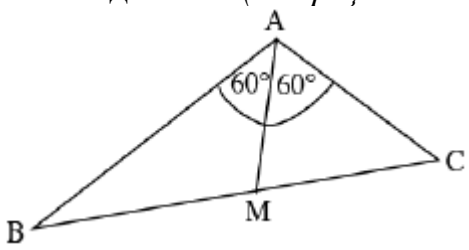
Задача 15 *(коефіцієнт 15).*



Матильда грається з платівкою для програвача її дідуся. Платівка прикрашена зверху квадратом, вершини якого не відрізняються одна від іншої. Матильда має фотокамеру, яка автоматично фотографує платівку, яка обертається на програвачі з постійною швидкістю 33 обороти в хвилину, з інтервалом в одну секунду між двома послідовними знімками. На малюнку наближено показано перші три фотографії під номерами 0, 1 і 2, накладені друг на друга. Яким буде номер першого знімка, який буде в точності збігатися із знімком з номером 0?

Розв'язання. Оскільки платівка обертається зі швидкістю 33 обороти в хвилину, за 1 с вона робить $\frac{33}{60} = \frac{11}{20}$ обороти та повертається при цьому на $\frac{11}{20} \cdot 360 = 198^0$. Для того, щоб якийсь знімок збігся з нульовим, в точку з номером 0 має потрапити якась вершина квадрата, тобто за k секунд платівка має повернутися на кут, кратний 90^0, причому k має бути мінімально можливим. Зрозуміло, що $k = 5$, тоді кут дорівнює 990^0, тобто кратний 90^0. Отже, знімок, зроблений через 5 секунд від нульового, буде збігатися з ним, тобто це буде знімок з *номером 5*.

Задача 16 *(коефіцієнт 16).*



Цей ліс має форму трикутника ABC так, що $AB = 2AC$ і кут при вершині A дорівнює 120°. Прямолінійна стежка AM перетинає ліс уздовж бісектриси кута A. Довжина цієї стежки дорівнює 2019 метри. Яка довжина сторони BC? Округліть відповідь до найближчого метра і, якщо необхідно, візьміть $\sqrt{7}$ як 2,646.

Розв'язання. Позначимо кут B через α, тоді кут C буде дорівнювати $60^0 - \alpha$. В трикутнику ABC має місце співвідношення:

$$\frac{AB}{\sin(60^0 - \alpha)} = \frac{AC}{\sin\alpha}, \frac{2AC}{\sin(60^0 - \alpha)} = \frac{AC}{\sin\alpha},$$

$$2 = \frac{\sin(60^0 - \alpha)}{\sin\alpha} = \frac{\sin 60^0 \cos\alpha - \cos 60^0 \sin\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cot\alpha - \frac{1}{2},$$

$$\cot\alpha = \frac{5}{\sqrt{3}}, \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}, \cos\alpha = \frac{5}{2\sqrt{7}}.$$

Скористаємося теоремою синусів в трикутниках ABM та ACM:

$$\frac{BM}{\sin 60^0} = \frac{AM}{\sin\alpha}, \frac{MC}{\sin 60^0} = \frac{AM}{\sin(60^0 - \alpha)},$$

$$BC = BM + MC = AM \sin 60^0 \left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin(60^0 - \alpha)}\right) =$$

$$= \frac{2019\sqrt{3}}{2}\left(\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sin 60^0 \cos\alpha - \cos 60^0 \sin\alpha}\right) =$$

$$= \frac{2019\sqrt{3}}{2}\left(\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{5}{2\sqrt{7}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}}\right) = 2019\left(\sqrt{7} + \frac{1}{\frac{5}{2\sqrt{7}} - \frac{1}{2\sqrt{7}}}\right) =$$

$$= \frac{3\cdot 2019\sqrt{7}}{2} \approx 8013{,}411.$$

При округленні до цілих отримаємо *відповідь* 8013 м.

На цьому завершуються задачі для учасників категорії L1, GP (10-11 класи). В наведеній роботі ці задачі можна вважати геометричними, але знання саме з курсу геометрії фактично обмежуються теоремою синусів, тобто матеріалом не старшої школи.

1.6 Аналіз задач розв'язаної роботи

Якщо проаналізувати розв'язані задачі, стає зрозумілим, що частину задач взагалі можна назвати математичними головоломками. Майже всі задачі мають практичний зміст, в умові просто описується якась ситуація, яку потрібно вирішити. На наш погляд саме таке формулювання задачі є більш цікавим, тому що учасники можуть бачити, що математика навколо них. Для розв'язання задач потрібно добре вміти аналізувати умову, робити правильні логічні висновки, швидко перебирати можливі варіанти (не забуваючи проводити аналіз). Серед задач обов'язково зустрічаються криптограми (задачі 6, 13), задачі на розстановку чисел за певними умовами (задачі 4, 11, 12), задачі на розрізання чи розфарбовування (задача 8), комбінаторні задачі (задачі 5, 7), нескладні геометричні задачі (задачі 15, 16).

Найголовніше для учасників – зрозуміти, що саме запитується в задачі, та обрати доцільний спосіб розв'язання. Треба зауважити, що одну й ту саму задачу учень 4 класу і учень 11 класу можуть розв'язувати різними способами. При підготовці учнів то участі в чемпіонаті потрібно пропонувати їм саме логічні задачі та тренувати розв'язання задач на швидкість. Враховуючи, що є заборона користування обчислювальними засобами, учасники мають вміти швидко виконувати арифметичні дії (усно або на папері). При підготовці до змагань треба пояснити загальні принципи розв'язання криптограм: оцінити всі можливі варіанти та швидко їх перебрати. В задачах на розстановку чисел потрібно шукати ті місця, з яких найпростіше почати розстановку (наприклад, якщо існує єдине число, яке можна записати на певне місце). В задачах на розрізання потрібно вчити дітей бачити однакові частини фігури, які при розрізанні будуть належати різним фігурам.

Ще раз зауважимо, що задачі не вимагають дуже довгого та складного розв'язання. Оскільки вони є абсолютно різними за складністю, а найперший критерій рейтингування – кількість розв'язаних задач), треба пояснити учням, що доцільною стратегією є почати з перших задач з низькими коефіцієнтами.

Питання для самоконтролю, практичні завдання

1. Які українські та міжнародні математичні конкурси Вам відомі?
2. Скільки турів має конкурс «Кенгуру» в Україні? Які особливості кожного туру?
3. Як розподіляються учасники конкурсу «Кенгуру» за віком?
4. Яка система оцінювання робіт учасників конкурсу «Кенгуру»?
5. Яка система оцінювання робіт учасників очних турів Міжнародного чемпіонату з розв'язання логічних математичних задач?
6. Як розподіляються учасники Міжнародного чемпіонату з розв'язання логічних математичних задач за віком?
7. Як формується рейтинг учасників очних турів Міжнародного чемпіонату з розв'язання логічних математичних задач?
8. Чим відрізняються задачі конкурсу «Кенгуру» від задач Міжнародного чемпіонату з розв'язання логічних математичних задач? На що слід звертати найбільшу увагу при підготовці до кожного конкурсу?
9. Як краще організувати підготовку учнів до конкурсу «Кенгуру»? А до чемпіонату з розв'язання логічних математичних задач?
10. В архіві задач конкурсу «Кенгуру» оберіть задачі категорії Юніор» або «Випускник» за довільний рік. Спробуйте розв'язати ці задачі за 75 хвилин (користуватися допоміжними засобами неможна, докладне розв'язання писати непотрібно). Скільки задач Ви розв'язали? Перевірте свої відповіді. Скільки задач Ви розв'язали правильно? Порахуйте свої бали. Проаналізуйте, які задачі викликали у Вас найбільші труднощі. Яких знань Вам не вистачало, щоб швидко впоратися з цими задачами?
11. Проаналізуйте теми шкільної математики, які потрібно опанувати, щоб вдало розв'язати обрані задачі.
12. Створіть перелік порад для учнів, яку краще обрати стратегію при розв'язанні задач «Кенгуру».
13. На сторінці курсу в СЕЗН ЗНУ розташований файл із задачами пів фіналу 30-го Міжнародного чемпіонату з розв'язання логічних математичних задач. Спробуйте розв'язати 16 задач за 3 години. Користуватися допоміжними засобами неможна, записувати докладне розв'язання непотрібно. Треба навести лише відповіді (якщо відповідей декілька, треба записати всі). Скільки задач Ви змогли розв'язати за цей час? Яку кількість балів отримали?
14. Проаналізуйте свою роботу. Які задачі були простими, а які викликали найбільші труднощі? В чому саме полягали ці труднощі? Чого Вам не вистачало, щоб розв'язати ці задачі?
15. Створіть перелік порад для учнів, яку краще обрати стратегію при розв'язанні задач Міжнародного чемпіонату з розв'язання логічних математичних задач.
16. Який конкурс, на Ваш погляд, є більш цікавим? Поясніть свою думку.

2 УКРАЇНСЬКІ ТА МІЖНАРОДНІ МАТЕМАТИЧНІ ОЛІМПІАДИ

2.1 Відкриті олімпіади з лінгвістики

Незважаючи на те, що лінгвістика – наука, що вивчає мову, в олімпіадах з лінгвістики охоче беруть участь ті, хто полюбляє розв'язувати логічні задачі. Насправді, завдання цих олімпіад не передбачають, що учасники мають знати будь-яку мову, крім рідної. Причому треба мати поняття про базові мовні структури: частини мови, частини слова, відмінки тощо.

Ця олімпіада доволі молода, вона започаткована в Україні в 2015 році. Олімпіада відкрита, тобто в ній можуть брати участь всі охочі. До початку повномасштабного вторгнення олімпіада проводилася в регіонах очно. Після початку війни щорічно формат проведення олімпіади новий, інформація надається на сайті https://ling.org.ua/contests/. На цьому сайті можна подивитися умови задач попередніх років, зразки розв'язань, критерії оцінювання та результати олімпіади.

Учасники олімпіади розділяються на *2 категорії*: старші класи (9-11 класи) та молодші класи (6-8 класи). На кожному з турів учасникам пропонується розв'язати 4 задачі протягом 4 годин. Задачі рівноцінні, кожна оцінюється в 20 балів. Розв'язати задачу означає надати в письмовому вигляді свої відповіді та розлогі пояснення. Забороняється користуватися будь-якими джерелами інформації.

Задачі щорічно мають приблизно однакову структуру умов (це спрощує підготовку до олімпіади, бо зрозуміло, на що саме треба звернути увагу). В одній з задач подаються декілька слів певною мовою з перекладами українською (у наближеній транскрипції). Потрібно проаналізувати залежність між словами двома мовами та зробити переклад заданих слів з української та українською. Друга задача має аналогічну умову, тільки задані не окремі слова з перекладами, а словосполучення з перекладами. Відповідно, перекласти треба також словосполучення. В третій задачі наведені речення з перекладами та запропоновані речення, які потрібно перекласти. Четверта задача присвячена словозміні. Деякі задачі пропонуються учасникам і старших, і молодших класів.

Розглянемо *приклади задач з V Запорізької відкритої олімпіади з лінгвістики 2019 року для учнів старших класів*.

Задача 2.1.1. Мова насі – сино-тибетська група діалектів, якими розмовляють понад 300 тисяч осіб у західній частині півдня Китаю.

Нижче наведено словосполучення мовою насі разом із перекладами. Замість деяких слів записано числа від 1 до 12. Заповніть 12 пропусків. На місці одного з них має стояти слово *liu*.

Словосполучення	Переклад
sseeggv ddee keeq	*одна стежка*
go ddee (1)	*один журавель*
derq ddee mei	*один демон*
zalpiail ddee (2)	*одна фотографія*
bal ddee keeq	*один черпак*
hameil ddee gvl	*один жебрак*
er'lo ddee peil	*один гонг*
aizerf ddee mei	*одне курча*
ggaiqbbei ddee (3)	*одна тарілка*
erq ddee keeq	*один канат*
qeq ddee (4)	*один м'яч*
ni ddee mei	*одна риба*
emei ddee (5)	*одна матір*

Словосполучення	Переклад
gvgal ddee peil	*одна кришка*
ddvqleesee ddee (6)	*одна стріла*
mil ddee gvl	*одна дівчина*
laqseelzo ddee peil	*один рушник*
zzee ddee (7)	*один друг*
ge ddee (8)	*одне дзеркало*
afwu ddee (9)	*одне чудовисько*
bbeegeel ddee (10)	*один пояс*
ceel ddee mei	*один козел*
ssahol ddee (11)	*один шнурок*
meebiq ddee keeq	*один батіг*
kaq ddee gvl	*один король*
ruakeesso ddee (12)	*одне лоша*

Рис. 2.1 – Умова задачі 2.1.1

Зрозуміло, що слово *ddee* – це чисельник «один», і записано це слово посередині словосполучення. Серед перших слів мовою насі немає однакових, тобто, скоріше за все, перше слово в кожному сполученні означає іменник, який називає предмет або істоту. А серед наведених останніх слів є однакові: наприклад, *gvl* – слово, поєднане з українськими словами *жебрак, дівчина, король*. Можна припустити, що це слово позначає людину як категорію. Тоді це слово має стояти замість цифр 5 та 7. Слово *mei* пов'язано зі словами *демон, курча, риба, козел*, тобто позначає тварину або надприродну істоту. Тобто це слово має стояти замість цифр 1, 9, 12. Всі інші слова позначають предмети. На останньому місці записано або слово *peil* (*гонг, рушник*), або слово *keeq* (*стежка, черпак, канат, батіг*). Слово *keeq* характеризує видовжені предмети, тобто має стояти замість чисел 6, 10, 11. Залишилися незаміненими числа 2, 3, 4, 8 – *фотографія, тарілка, м'яч, дзеркало*. Зі словами *гонг* та *рушник* до однієї категорії можна віднести всі, крім слова *м'яч* (це об'ємний предмет, тоді як інші пласкі). Отже, слово *peil* означає пласкі предмети і має бути записаним замість чисел 2, 3, 8. А слово *liu* записується замість числа 4 та характеризує *м'яч*.

Відповідні (пропущені слова підкреслено):

№	Словосполучення	Переклад
1	**go ddee <u>mei</u>**	*один журавель*
2	**zalpiail ddee <u>peil</u>**	*одна фотографія*
3	**ggaiqbbei ddee <u>peil</u>**	*одна тарілка*
4	**qeq ddee <u>liu</u>**	*один м'яч*
5	**emei ddee <u>gvl</u>**	*одна матір*
6	**ddvqleesee ddee <u>keeq</u>**	*одна стріла*
7	**zzee ddee <u>gvl</u>**	*один друг*
8	**ge ddee <u>peil</u>**	*одне дзеркало*
9	**afwu ddee <u>mei</u>**	*одне чудовисько*
10	**bbeegeel ddee <u>keeq</u>**	*один пояс*
11	**ssahol ddee <u>keeq</u>**	*один шнурок*
12	**ruakeesso ddee <u>mei</u>**	*одне лоша*

Рис. 2.2 – Відповідь до задачі 2.1.1

Задача 2.1.2. Мова кічé — мова однойменного народу Гватемали чисельністю понад мільйон осіб. Належить до майянських мов. Літери зі штрихами *b′* та *q′* позначають особливі приголосні звуки цієї мови. Нижче подано кілька речень мовою кіче з перекладами:

1	**Kawar lee tijoxeel.**	Цей учень спить.
2	**Katb'iinik.**	Ти ходиш.
3	**Oj oj ajyuq'aab'.**	Ми пастухи.
4	**Keechakun lee ajtijaab'.**	Ці вчителі працюють.
5	**Kixwarik.**	Ви спите.
6	**Na kapeet ta lee elaq'oom.**	Цей крадій не приходить.
7	**In in tijoxeel.**	Я учень.
8	**Elaq'oom lee ajtiij.**	Цей учитель — крадій.
9	**Kojpeetik.**	Ми приходимо.

Рис. 2.3 – Умова задачі 2.1.2

Завдання 1. Перекладіть українською: 10. At at ajtiij. 11 Elaq'oom lee tijoxeel. 12 Na keeb'iin ta lee elaq'omaab'.

Завдання 2. Перекладіть мовою кіче: 13 Я працюю. 14 Ці пастухи сплять. 15 Цей учитель ходить. 16 Ви учні. 17 Цей крадій — не пастух.

Спочатку створимо невеличкий словничок, використовуючи наведені слова:

Іменники (однина)	
ajtiij	учитель
ajyuuq'	пастух
elaq'oom	крадій
tijoxeel	учень

Займенники			
я	**in**	**oj**	ми
ти	**at**	**ix**	ви

Дієслова (основи)	
b'iin	ходити
chakun	працювати
peet	приходити
war	спати

Рис. 2.4 – Словник для задачі 2.1.2

Зауважимо, що множина іменника утворюється шляхом приєднання суфікса -aab' та заміни останнього голосного перед суфіксом з подвійного на одинарний: ajtiij – вчитель, ajtijaab' – вчителі.

Тепер проаналізуємо структуру речень. Слова na/ta, якщо вони наявні у реченні, позначають заперечення того члена речення, навколо якого стоять.

<table>
<tr><td>займенник + дія</td><td colspan="2">k-</td><td>займенник</td><td>основа дієслова</td><td colspan="3">-ik</td></tr>
<tr><td>займенник + іменник</td><td colspan="6">займенник двічі</td><td rowspan="2">іменник</td></tr>
<tr><td>цей + іменник одн. + дія</td><td rowspan="3">(na)</td><td colspan="2">ka-</td><td rowspan="2">основа дієслова</td><td rowspan="3">(ta)</td><td rowspan="3">lee</td></tr>
<tr><td>ці + іменник мн. + дія</td><td colspan="2">kee-</td><td rowspan="2">іменник</td></tr>
<tr><td>цей + іменник$_1$ — іменник$_2$</td><td colspan="3">іменник$_2$</td><td>іменник$_1$</td></tr>
</table>

Рис. 2.5 – Структура речення для задачі 2.1.2

Враховуючи все вищенаведене, можна виконати завдання.

Завдання 1: 10. At at ajtiij. Ти вчитель. 11. Elaq'oom lee tijoxeel. Цей учень — крадій. 12. Na keeb'iin ta lee elaq'omaab'. Ці крадії не ходять.

Завдання 2: 13. Я працюю. Kinchakunik. 14. Ці пастухи сплять. Keewar lee ajyuq'aab'. 15. Цей учитель ходить. Kab'iin lee ajtiij. 16. Ви учні. Ix ix tijoxelaab'. 17. Цей крадій — не пастух. Na ajyuuq' ta lee elaq'oom.

Слід зауважити, що завдання олімпіад з лінгвістики мають свою специфіку, тому можуть бути не до вподоби кожному. Це все ж таке не математичне змагання в чистому вигляді, хоча участь в таких олімпіадах залюбки беруть ті, хто вміє логічно міркувати, аналізувати та має терпіння, оскільки лінгвістичні задачі вимагають уваги та посидючості. Підготовка до таких олімпіад полягає а розв’язанні завдань попередніх років, що поліпшить навички розв’язання.

2.2 Математичні бої імені академіка Ляшка

Математичний олімпіадний рух налічує велику кількість різноманітних олімпіад. Сайт https://matholymp.com.ua/ має бути в закладках кожного вчителя, який цікавиться математичними олімпіадами, оскільки саме тут структуровано подається інформація про різноманітні змагання (анонси, посилання на реєстрацію, умови участі, результати тощо). Велика кількість заходів проводиться в Києві, але в багатьох з них можуть брати участь діти з будь-якого міста України та навіть з закордону. Команда, яка організовує та підтримує олімпіадний рух, складається переважно з вчителів навчальних закладів Києва та викладачів і студентів вишів Києва, здебільшого – Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Особливістю проведення математичних олімпіад в Україні є те, що пропонуються різноманітні змагання для дітей різного віку, починаючи з 4 класу. Це дає можливість не чекати до старших класів, щоб брати участь в змаганнях, та «не загубити» талановитих дітей, які цікавляться математикою. Навичку розв’язувати математичні задачі також треба тренувати, як і будь-яку іншу навичку, тому цей сайт стане в нагоді не лише вчителям, що працюють в профільній старшій школі, але й вчителям середніх класів. Більш того, чим раніше дитина почне долучатися до різноманітних змагань, тим краще можуть бути її особисті результати.

Ми розглянемо лише деякі, найбільш відомі, математичні змагання, в яких можуть брати участь діти з будь-якого міста України.

Почнемо з Всеукраїнського турніру математичних боїв. Студенти, які підтримують олімпіадний рух, приїжджали на навчання до Києва з усіх куточків України. Саме тому виникла ідея організувати змагання для усіх найкращих юних математиків України. У Першому Всеукраїнському турнірі восени 2006 року, в двох лігах брали участь усього лише 14 команд, при цьому 10 з них представляли місто Київ. Але турнір набував більшої популярності і інколи кількість команд перевищувала 30. З сезону 2008–2009 н.р. Всеукраїнський турнір математичних боїв носить ім’я академіка Івана Івановича Ляшка, що був разом з Віктором Глушковим засновником факультету кібернетики в КНУ ім.

Шевченка – першого подібного факультету на теренах колишнього СРСР. Базою проведення турніру є Український фізико-математичний ліцей КНУ ім. Шевченка.

Загалом, якщо в області з'являлася талановита дитина з певними амбіціями, то вона за допомогою своїх вчителів та рідних мала змогу приїхати на змагання. Так само і вчителі, які хотіли дати більше різних можливостей для своїх учнів, намагалися привозити дітей. Це єднало представників різних міст та областей, які спілкувалися, допомагали один одному, розвивалися і в математичному і в людському розумінні.

Турнір проводиться в трьох лігах: молодша ліга (МЛ – учні до 8 класу включно), середня ліга (СЛ – учні 9 класу) та старша ліга (СтЛ – учні 10–11 класів). Це командне змагання, команда складається з 6 учнів або з одного навчального закладу чи регіону, або утворюються збірні команди. Триває 6 днів на осінніх канікулах:

1 день. Заїзд, відкриття, математичний занзібар (карусель).

2 день. Усна командна олімпіада.

3–5 дні. 1-й, 2-й та 3-й математичні бої.

6 день. Усна особиста олімпіада, закриття, роз'їзд.

Математичний бій – змагання двох команд, що полягає в розв'язуванні 10 задач, оповіді власних розв'язків та пошуку й викритті недоліків у розв'язках суперників. Спершу команди-учасниці отримують умови задач бою. Набір задач однаковий для обох команд та не відомий їм заздалегідь. Упродовж певного часу команди самостійно розв'язують задачі, а потому збираються в спільній аудиторії та розпочинають, власне, бій.

Представник однієї з команд – доповідач – показує розв'язання задачі, а представник другої команди – опонент – намагається знайти недоліки або довести, що наведений розв'язок є хибним та навести свій. За кожну задачу журі розподіляє 12 балів між доповідачем та опонентом, або (за наявності істотних помилок) забирає частину балів собі.

Проміжок часу, впродовж якого учасники бою обговорюють одну задачу (або з'ясовують, що жодна з команд не знає її розв'язку), називається раундом. Задача, яку вже розглядали в якомусь із раундів (хай і безуспішно), повторно розглядатися не може. Переможцем бою є команда, сума балів якої є більшою.

В якості прикладу наведемо *задачі старшої ліги математичного бою №2 XVI Всеукраїнського турніру (2023-2024 н.р.)*

Задача 2.2.1. Невід'ємні числа a, b, c задовольняють умову $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Доведіть, що справджується нерівність $\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \geq 5abc + 2$.

Розв'язання. Спочатку покажемо, що

$$\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \geq \sqrt{7(a+b+c) - 3}. \qquad (2.1)$$

Нехай $x = a + b + c$, тоді $ab + bc + ca = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$. З нерівності Коші-

Буняковського (Коші-Шварца) випливає, що

$$1 = a^2 + b^2 + c^2 \le (a + b + c)^2 \le 3(a^2 + b^2 + c^2) = 3,$$

таким чином, $1 \le x \le \sqrt{3}$. Далі використаємо рівність:

$$\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} =$$
$$= 2\left(\sqrt{a^2 + \frac{1}{2}(x^2-1)} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{2}(x^2-1)} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{2}(x^2-1)}\right).$$

Оскільки $0 \le a \le 1$, $1 \le x \le \sqrt{3}$, тоді

$$\sqrt{a^2 + \tfrac{1}{2}(x^2-1)} \ge a + \tfrac{1}{2}(x-1) \qquad (2.2)$$

Дійсно, достатньо піднести цей вираз до квадрату, тоді матимемо нерівність $a^2 + \frac{1}{2}(x^2-1) \ge a^2 + a(x-1) + \frac{1}{4}(x^2-1)$, яка рівносильна нерівності $(x-1)(x+3-4a) \ge 0$, що, в свою чергу, випливає з доведених вище нерівностей. Далі з (2.2) випливає (2.1). Для завершення доведення заданої нерівності достатньо показати, що

$$7(a+b+c) - 3 \ge (5abc+2)^2.$$

З нерівності між середніми $ab + bc + ca \ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$ та

$$(5abc+2)^2 \le \left(2 + 5\left(\frac{x^2-1}{6}\right)^{\frac{3}{2}}\right)^2.$$

Щоб завершити доведення, достатньо показати, що

$$\left(2 + 5\left(\frac{x^2-1}{6}\right)^{\frac{3}{2}}\right)^2 \le 7x - 3 \Leftrightarrow 7(x-1) \ge 25\left(\frac{x^2-1}{6}\right)^3 + 20\left(\frac{x^2-1}{6}\right)^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{25(x^2-1)^2(x+1)}{216} + \frac{5\sqrt{6}(x^2-1)^{\frac{1}{2}}(x+1)}{9} - 7\right)(x-1) \le 0.$$

Треба показати, що при $1 \le x \le \sqrt{3}$ виконується нерівність

$$\frac{25(x^2-1)^2(x+1)}{216} + \frac{5\sqrt{6}(x^2-1)^{\frac{1}{2}}(x+1)}{9} \le 7.$$

Оскільки остання функція – зростаюча при $x \ge 1$, то її максимум досягається при $x = \sqrt{3}$, при цьому маємо, що $\frac{205+85\sqrt{3}}{54} \le 7$, що й завершує доведення.

При розв'язанні цієї задачі використовувалася нерівність Коші-Буняковського (або Коші-Шварца): для двох наборів довільних дійсних чисел $(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n)$ має місце нерівність:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2),$$

причому знак рівності має місце тоді та тільки тоді, коли набори чисел пропорційні, тобто коли $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$.

Задача 2.2.2. Доведіть, що для довільного цілого числа N рівняння $10xy + 17xz + 27yz = N$ має розв'язок у цілих числах.

Розв'язання. Розглянемо рівняння $Axy + Bxz + Cyz = N$. Якщо числа A та B взаємно прості, тоді існують такі цілі числа x, z, що $Ay + Bz = 1$. Тому $x = N - Cyz$, тому наше рівняння має такий розв'язок у цілих числах: $y = -5$, $z = 3$, $x = N + 27 \cdot 3 \cdot 5$. *Твердження доведене*.

Задача 2.2.3. Нехай пряма l перетинає сторони AC та BC трикутника ABC у точках D та E відповідно, пряму AB у точці F, а бісектрису $\angle BAC$ у точці P. Припустимо, що точки F та A лежать по різні боки від прямої BC, $CD = CE$ та P – внутрішня точка трикутника ABC. Доведіть рівносильність:

$$FA \cdot FB + CP^2 = CF^2 \Leftrightarrow AD \cdot BE = PD^2.$$

Розв'язання.

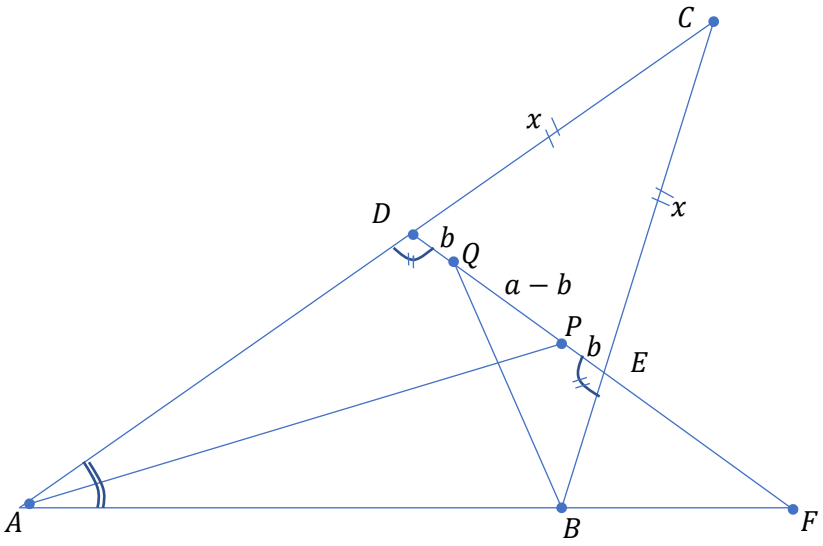
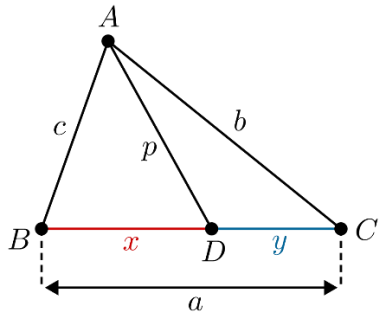


Рис. 2.6 – задача 2.2.3

Позначимо довжини відрізків таким чином: $DP = a, PE = b, EF = c, CD = CE = x$. З теореми Стюарта $CP^2 = x^2 - ab$ та $CF^2(a + b) = x^2c = (a + b + c)((a + b)c + x^2)$, звідки $CF^2 - CP^2 = (a + c)(b + c)$.

Нехай Q – точка на відрізку DE, що задовольняє умову $EQ = a$ (рис. 2.6) Тоді $CF^2 - CP^2 = (a + c)(b + c) = FP \cdot FQ$. Якщо $CF^2 - CP^2 = FB \cdot FA = FP \cdot FQ$, то точки A, B, P, Q – циклічні, тому $\angle BQE = \angle BAP = \angle DAP$. Оскільки $\angle BQE = \angle ADP$, то трикутники ADP та QEB – подібні, звідки матимемо, що $AD \cdot BE = PD \cdot QE = PD^2$. Якщо $AD \cdot BE = PD^2 = PD \cdot QE$, то трикутники ADP та QEB – подібні, далі маємо, що $\angle EQB = \angle PAB = \angle DAP$, звідки точки A, B, P, Q – циклічні. Тоді остаточно маємо, що $FB \cdot FA = FP \cdot FQ = (a + c)(b + c) = CF^2 - CP^2$, що й завершує доведення.

При розв'язанні цієї задачі використовувалася *теорема Стюарта*:



Якщо точка D належить стороні BC трикутника ABC, тоді

$$p^2 = b^2\frac{x}{a} + c^2\frac{y}{a} - xy.$$

Відрізок AD називається чевіаною трикутника ABC.

Задача 2.2.4. Маємо k різних кольорів та піраміду, в основі якої лежить 2016-кутник. Аліса та Боб вибирають по черзі ще не зафарбоване ребро піраміди та фарбують його в один із заданих кольорів так, що жодні два суміжні ребра (ребра, що мають спільну вершину) не були пофарбовані в однаковий колір. Розпочинає фарбування Аліса. Для якого найменшого k Боб зможе належним чином зафарбувати усі ребра піраміди?

Відповідь: 2016.

Розв'язання. Ребра, що виходять з вершини O піраміди назвемо бічними, інші – ребрами основи. Вершини многокутника в основі позначимо за рухом годинникової стрілки через $v_1, v_2, \dots, v_{2016}$. З умови задачі очевидно, що $k \geq 2016$. Покажемо, як Боб гарантовано може пофарбувати ребра при $k = 2016$. Поставимо у відповідність бічні ребра та ребра основи, $f(v_i, v_{i+1}) = Ov_{i+2}$, індекси циклічні за модулем 2016. Коли Аліса фарбує одне ребро з пари $(e, f(e))$ у колір, що досі не використовували, то Боб фарбує у той самий колір інше ребро з цієї пари. Якщо Аліса фарбує ребро у колір, що вже був використаний, то Боб фарбує друге ребро цієї пари, що є бічним, у новий колір. Такою стратегією Боб пофарбує усі ребра і використає рівно 2016 ребер.

Навіть наведених прикладів достатньо, щоб зрозуміти рівень задач, які пропонуються в математичних боях. Добре видно, що для успішного розв'язання потрібно мати знання, що виходять за межі шкільної програми. Наприклад, в наведених задачах використовувалися нерівність Коші-Буняковського та теорема Стюарта. Це означає, що підготовка до участі в математичних боях є значно більш складною справою, ніж, наприклад, до конкурсу «Кенгуру». Крім того, математичні бої – це командне змагання, тобто вимагає уміння ефективно працювати в команді. Нижче ми поговоримо про те, як краще організувати таку підготовку.

2.3 Математичний занзібар

Це командне змагання було придумане у 2014 році. Як і математичні бої, проводиться в трьох лігах. Кожна команда має в своєму складі 6 або менше гравців. Перед початком занзібару командам видаються одразу усі задачі (від 10 до 20), які вони розв'язують протягом 2 годин. Журі перевіряє лише відповідь. Якщо вона правильна, то вважається, що команда цю задачу розв'язала

правильно, якщо відповідь неправильна або не повна, то задача команді зараховується як не розв'язана.

На початку занзібару кожна задача оцінюється в 10+N балів, де N – кількість команд, що беруть участь в змаганні. Подальше нарахування балів за задачі та вартість задачі оцінюються таким чином. Якщо команда першою розв'язала деяку задачу, то вона отримує за неї 10+N балів Якщо ще одна команда її розв'язала правильно, то вартість задачі зменшується на 1, тобто стає 9+N балів, для обох команд. Якщо ще одна команда її розв'язала правильно, то усі три команди отримають за задачу по 8+N балів. Якщо деяка команда неправильно розв'язала цю задачу, то вона за неї отримує 0 балів, а усі команди, що її розв'язали, на 1 бал більше. Таким чином, в процесі занзібару, чергова команда, що розв'язала певну задачу правильно, зменшує на 1 бал результат по цій задачі для всіх команд, що її розв'язали, зокрема, і для самої себе . Якщо чергова команда розв'язала задачу неправильно, то в усіх команд, які вже розв'язали цю задачу правильно, отримують на 1 бал більше за цю задачу. Отож по завершенню занзібару ціна кожної задачі обчислюється за формулою: 11+N–C+L, де C – кількість команд, що розв'язали задачу правильно, а L – кількість команд, що розв'язали задачу неправильно.

Остаточний результат команди складається з суми балів, що набрані за кожну задачу. Якщо деяку задачу правильно розв'язала лише 1 команда, то вартість цієї задачі по завершенню занзібару для неї подвоюється. Це повинно стимулювати команди спробувати правильно розв'язувати найскладніші задачі.

Наведемо приклади задач математичного занзібару 2024-2025 н.р. (старша ліга).

Задача 2.3.1. Додатні числа a, b, c задовольняють умову

$$a + b + c + \frac{1}{abc} = \frac{19}{2}.$$

Яке найбільше значення може приймати число a?

Відповідь: 8.

Розв'язання. З нерівності між середніми можна отримати:

$$\frac{19}{2} = a + \left(b + c + \frac{1}{abc}\right) \geq a + 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{bc}{abc}} = a + 3 \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{a}}.$$

Позначимо $\sqrt[3]{a} = x$ та отримаємо нерівність $\frac{19}{2} \geq x^3 + \frac{3}{x}$, яка рівносильна $2x^4 - 19x + 6 \leq 0$ або $(x-2)(2x^3 + 4x^2 + 8x - 3) \leq 0$. Очевидно, що при $x > 2$ ця нерівність місця не має, тобто найбільше можливе значення для $\sqrt[3]{a} = x$ – це 2, а для a – це 8.

Задача 2.3.2. Сторони трикутника – послідовні цілі числа, а радіус вписаного кола дорівнює 4. Знайдіть радіус описаного кола цього трикутника.

Відповідь: $\frac{65}{8}$.

Розв'язання. Позначимо сторони трикутника $b-1, b, b+1$ та застосуємо формулу Герона: $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) = p^2r^2$. Оскільки $p = \frac{3b}{2}, r = 4$, маємо, що $\frac{3b}{2}\left(\frac{b}{2}-1\right)\frac{b}{2}\left(\frac{b}{2}+1\right) = \frac{9b^2}{4}\cdot 16 \Rightarrow \frac{3b^2(b^2-4)}{16} = 36b^2 \Rightarrow b^2 = 196 \Rightarrow b = 14\ a = 13, c = 15, p = 21, S = 84 \Rightarrow R = \frac{abc}{4S} = \frac{65}{8}$.

Задача 2.3.3. Знайдіть усі натуральні числа, які можна єдиним чином подати у вигляді $\frac{x^2+y}{xy+1}$.

Відповідь: усі натуральні числа, крім 1.

Розв'язання: Для числа 1 достатньо розглянути пару $(1, y)$, тобто таке подання не єдине. Нехай тепер $N = \frac{x^2+y}{xy+1} > 1$. Звідси випливає, що квадратне рівняння $x^2 - Nxy + y - N = 0$ має мати дискримінант, який є точним квадратом, тобто $N^2y^2 - 4y + 4N = k^2$. Оскільки

$$k^2 - (Ny-2)^2 = 4Ny - 4y + 4N - 4 = (N-1)(4y+4) > 0,$$
$$(Ny+2)^2 - k^2 = 4Ny + 4y - 4N + 4 = 4N(y-1) + 4y + 4 > 0,$$

тоді $Ny - 2 < k < Ny + 2$. Якщо $k = Ny \pm 1$, тоді $k^2 = N^2y^2 \pm 2Ny + 1$ та $4(N-y) = \pm 2Ny + 1$ – отримали суперечність, бо права частина рівності не ділиться 2, а ліва ділиться. Отже, можливий лише варіант $k = Ny$, звідки $y = N, x = y^2$.

Задача 2.3.4. Відомо, що існує функція $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, що для кожного натурального n задовольняє такі умови: $f(1) = 1$, $f\big(f(n)\big) = n$, $f(2n) = 2f(n) + 1$. Знайдіть усі можливі значення $f(2020)$.

Відповідь: 1051.

Розв'язання. З рівності $f\big(f(n)\big) = n$ випливає, що $f(n) = k \Leftrightarrow f(k) = n$. Нехай $k = f(n)$, тоді $n = f(k)$ та $f(2k) = 2f(k) + 1 = 2n + 1$. Звідси $2f(n) = 2k = f(2n+1)$.

Методом математичної індукції по k доведемо, що

$$f(2^k n) = 2^k f(n) + 2^k - 1, k \geq 0, n \in \mathbb{N}.$$

При $k = 0$ маємо, що $f(n) = f(n)$. Нехай формула вірна при деякому k, тоді

$$f(2^{k+1}n) = f(2\cdot 2^k n) = 2f(2^k n) + 1 =$$
$$= 2(2^k f(n) + 2^k - 1) + 1 = 2^{k+1}f(n) + 2^{k+1} - 1,$$

що й треба було довести.

Оскільки $f(1) = 1$, з доведеної рівності маємо, що

$$f(2^k) = 2^k f(1) + 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1,$$

звідки

$$f(2^{k+1} - 1) = f\left(f(2^k)\right) = 2^k.$$

Цього достатньо, щоб обчислити $f(2020)$:

$$f(2020) = f(4\cdot 505) = 4f(505) + 3 = 4f(2\cdot 252 + 1) + 3 = 8f(252) + 3 =$$
$$= 8f(4\cdot 63) + 3 = 8(4f(63) + 3) + 3 = 32f(63) + 27 = 32f(2^6 - 1) + 27 =$$
$$= 32\cdot 2^5 + 27 = 1051.$$

Задача 2.3.5. Два правильних многокутника мають різну кількість вершин та спільне описане коло. Сума площ вписаних кіл цих многокутників дорівнює площі їх спільного описаного кола. Скільки вершин можуть мати ці многокутники? Вкажіть усі можливі відповіді.

Відповідь: 3 та 6.

Розв'язання. Для правильного n-кутника відношення радіуса вписаного та описаного кіл дорівнює $\cos\frac{180^0}{n}$, тому відношення площ цих кіл дорівнює $\left(\cos\frac{180^0}{n}\right)^2$. Нехай $m < n$ та спільне описане коло має площу 1. Тоді має справджуватися рівність:

$$\left(\cos\frac{180^0}{n}\right)^2 + \left(\cos\frac{180^0}{m}\right)^2 = 1 \Rightarrow \left(\cos\frac{180^0}{n}\right)^2 = \left(\sin\frac{180^0}{m}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\frac{180^0}{n} = \sin\frac{180^0}{m} \Rightarrow \frac{180^0}{n} + \frac{180^0}{m} = 90^0 \Rightarrow \frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{1}{2}.$$

Якщо $n = 3$, то $m = 6$. Якщо $n = 4$, то $m = 4$, тобто цей випадок не задовольняє умову. При $n > 4$ маємо, що $\frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, тобто рівність неможлива.

Аналіз наведених прикладів показує, що задачі, які пропонуються на математичному занзібарі, відрізняються від задач математичних боїв – вони значно простіше та, як правило, не вимагають якихось додаткових знань, крім шкільного курсу. В певному сенсі можна сказати, що ці задачі (як і саме змагання) дещо схожі на чемпіонат з розв'язання логічних математичних задач. Перевіряються лише відповіді (отже, відсутні задачі на доведення) та для розв'язання 20 задач командою надається лише 2 години. Відповідно, команда має мати чітку стратегію, як виконувати ці завдання.

2.4 Всеукраїнська олімпіада з математики

Найголовнішим математичним змаганням року серед школярів, беззаперечно, є Всеукраїнська олімпіада з математики. Саме ця олімпіада об'єднує учнів всіх областей України та дає старт до відборів для участі в міжнародній олімпіаді з математики. Найчастіше коли говорять про математичну олімпіаду, мають на увазі саме цю олімпіаду. В 2024-2025 навчальному році вона проводилася 64-й раз. Вся інформація, яка стосується організації, проведення, результатів олімпіади знаходиться на сайті https://matholymp.com.ua/.

Традиційно олімпіада проходила в 4 етапи: шкільний, районний, обласний та Всеукраїнський тури. Вона проводилася з вересня по березень, після чого починалися відбори на міжнародний етап, який щорічно проходить влітку. Потрапити в команду, яка представляє Україну на міжнародній олімпіаді, дуже почесно, і це право щорічно важко виборюють найкращі юні математики країни. Слід зауважити, що наша команда дуже гідно виступають на міжнародному етапі і зазвичай всі учасники привозять додому медалі.

В районному етапі олімпіади беруть учні 6-11 класів, в обласному – учні 7-11 класів, в державному – учні 8-11 класів. Як видно, учні 5 класів залишаються поза увагою. Максимум, що на них очікує, це шкільний етап. Такий стан речей організатори математичних олімпіад вважали неприйнятним (учні певного віку не мали цікавих змагань), тому ситуацію було виправлено, і в цьому році сьомий раз проводилася Всеукраїнська олімпіада 5-7 класів, яка зараз носить ім'я Юлії Здановської. Тобто молодші школярі мають свою олімпіаду та можуть змагатися між собою. Але ми докладно говоримо про олімпіади для старшокласників.

Декілька останніх років проведенням олімпіад опікується Мала академія наук України, тому олімпіади зазнали деяких змін. А з 1 червня 2025 року вступає в силу нове Положення про олімпіадний та турнірний рух, яке презентувало Міністерство освіти і науки України. Зупинимся на основних змінах, які висвітлені в цьому Положенні [6].

1. Всеукраїнські олімпіади відбуватимуться в 3 етапи:

I етап — місцевий з відкритою реєстрацією для всіх охочих,
II етап — обласний + учасники з-за кордону + учні наукових ліцеїв,
III етап — державний + переможці закордонного округу + учні УФМЛ (в олімпіадах з математики, астрономії, фізики).

2. Більше можливостей для залучення нових талантів:

- можливість самовисування на I (місцевий) етап олімпіади, без посередництва школи чи вчителів;
- доступність олімпіад і турнірів для дітей з ООП (особливими освітніми потребами);
- можливість участі українських учнів із-за кордону: такі учні приєднуватимуться до II етапу олімпіади і писатимуть її дистанційно з дотриманням заходів для академічної доброчесності;
- системна підготовка учнівського олімпіадного резерву (школи, навчальні збори, відбіркові та тренувальні збори);
- доступність для учнів наукових ліцеїв участі на II етапі, а для учнів з Українського фізико-математичного ліцею КНУ імені Тараса Шевченка (УФМЛ) на III етапі в олімпіадах з математики, фізики, астрономії.

3. Рівні умови участі та справедливість:

- На II (обласному) етапі — учасники з усіх областей матимуть однакові завдання;
- Чітко визначено роль журі та предметно-методичної комісії, персональна відповідальність за передчасне розголошення завдань;
- Алгоритм уникнення конфлікту інтересів.

4. Більше шансів пройти на III етап олімпіади завдяки оновленій системі рейтингів. Тепер склад учасників III етапу формуватиметься з двох частин. Регіональний склад команди (РСК) — визначається за індивідуальним регіональним рейтингом, який враховує результати виступів усіх учасників команди за останні два роки. За кожен отриманий диплом нараховуються рейтингові бали:

- І місце — +5 балів
- ІІ місце — +3 бали
- ІІІ місце — +1 бал

Додатковий склад команди (ДСК) — формується за Всеукраїнським рейтингом серед учасників ІІ етапу. Цей рейтинг складають окремо для кожного класу, впорядковуючи учасників за кількістю балів — від найбільшого до найменшого.

Кількість учасників додаткового складу команди у межах кожного класу визначається як різниця між граничною кількістю в 48 учасників на відповідний клас та кількістю учнів цього класу, що вже визначені в РСК. Тож у ДСК можуть потрапити ті учні, які набрали найбільше балів у своєму класі по Україні, але не були зараховані до регіонального складу.

Ця система дає змогу більшій кількості учнів узяти участь у фінальних змаганнях, навіть якщо вони не стали переможцями обласного етапу, але показали високі результати у всеукраїнському рейтингу. Таким чином підвищено доступність олімпіад для понад 30-40% учнів та учениць.

5. Нова STEM-олімпіада. На заміну інтернет-олімпіадам тепер буде STEM-олімпіада: інтелектуальне змагання з дисциплін природничої, математичної, технологічної та інформатичної освітніх галузей серед учнів 9–11 класів шкіл та профтехів, що відбуватиметься у 2 етапи – очний і заочний. Ця олімпіада стимулюватиме розвиток учнівських компетенцій, що є ключовими для майбутніх фахівців у науці та технологіях.

6. Якісна підготовка до міжнародних змагань

- Відбіркові збори — формують команди учнів з-поміж переможців ІІІ етапу для участі в Міжнародних олімпіадах. Кількість учасників, хто проходить на відбіркові збори, визначається за формулою: кількість учасників відповідно до правил міжнародного змагання × 3. Так більше учнів матимуть змогу тренуватися перед змаганнями та вдосконалювати свої навички.
- Тренувальні збори — підготовка переможців Відбіркових зборів до міжнародних змагань, що організовує Національний центр «Мала академія наук України».

7. Поліпшення організації олімпіадного і турнірного руху, якісний супровід на кожному етапі, ефективна координація:

- Відповідальним органом за координацію олімпіад визначено Національний центр «Мала академія наук України».
- Координатори (національні та регіональні) — забезпечуватимуть організаційно-методичний супровід олімпіади за предметом та підтримку учасників.
- Також злагодженій роботі будуть сприяти: оргкомітети, журі, предметно-методичні комісії, що відповідатимуть за формування завдання, рейтингів, а також експерти-консультанти, що надаватимуть допомогу, зокрема в питаннях апеляції.

Однією з основних змін стає проведення олімпіади в три, а не чотири етапи. Фактично скасовано шкільний етап олімпіад, а замість районного етапу буде проводитися місцевий етап (скоріше за все, його проведенням будуть опікуватися місцеві департаменти освіти), участь в якому зможе взяти будь-який охочий. Це означає, що вчителі не буть вимушені обов'язково «виставляти» своїх учнів на олімпіаду, та що не будуть застосовуватися рейтинги шкіл та районів для виходу на обласний етап олімпіади. В цілому це нововведення є позитивним (приблизно так, до речі, зараз проходить олімпіада в Києві), оскільки унеможливлює ситуацію, коли сильна дитина не могла потрапити навіть на районний тур, оскільки кількість учасників від школи була обмеженою. Наразі важко передбачити, як ці нововведення будуть втіленні в життя (організація перевірки робіт на місцевому рівні, організація проведення олімпіади за кордоном з дотриманням академічної доброчесності тощо). Нове Положення фактично знімає «обов'язок» вчителя готувати учнів до олімпіади, але ми чудово розуміємо, наскільки важливо підтримувати бажання дітей займатися математикою, тобто поговоримо про те, як організувати таку підготовку, орієнтуючись на дітей, які хочуть і можуть брати участь в олімпіадах.

На прикладі задач, запропонованих в математичних боях, зрозуміло, що розв'язання олімпіадних задач вимагає спеціальної підготовки. Бажано підготовку до участі в олімпіаді починати хоча б з 5-6 класу, пропонуючи учням задачі, які спираються на теми, що вивчаються за шкільною програмою, та поступово поглиблюючи їхню теоретичну та практичну підготовку.

Обговоримо деякі аспекти організації такої підготовки. Найголовніше – наявність тих, кого ми готуємо, тобто майбутні учасники олімпіад та конкурсів. Важливо знайти таких дітей, які дійсно цікавляться математико, мотивовані займатися додатково, можуть знайти достатню кількість часу для занять. Бажання дитини – це основний фактор. Математикою можна займатися так само, як музикою, живописом, спортом тощо. Небажано, коли в олімпіадах примушують брати учнів, які мають високі в порівнянні з однокласниками оцінки з предмету, оскільки доволі часто виникали ситуації, коли одна й та сама дитина вимушена «бігати» між олімпіадами. Така участь заради звіту впевнено відбиває бажання чути про олімпіади. Отже, орієнтуємося на дітей, які хочуть займатися олімпіадною математикою додатково. Звісно, бажано, щоб діти ще й мали певні здібності, оскільки далеко не з кожної дитини можна виростити олімпіадника. Але відвідувати заняття доцільно дозволяти всім, хто має бажання, та ставитися до учнів неупереджено. Обов'язково слід пояснювати учням та їхнім батькам (особливо якщо мова про молодші класи), що ці заняття не є додатковими заняттями зі шкільної математики, не є підготовкою до НМТ (для старшокласників). Можливо, якась частина дітей сама по собі перестане приходити на заняття – це також нормальне явище.

Наступний крок – вирішити, хто саме буде проводити заняття з цими вмотивованими учнями. Зрозуміло, що мова про вчителів. Досвід показує, що найкращі результати отримуються там, де є командна робота вчителів. Тобто де є група людей, яка має час, здібності та бажання займатися з олімпіадниками. Практика, коли кожен вчитель в школі готує тільки своїх учнів, доволі часто має

місце, але найкращі результати будуть там, де є команда однодумців, які працюють на спільну справу. Сподіваємося, що після набуття чинності новим Положенням зникне нездорова конкуренція між вчителями в межах однієї школи, яка шкодить якісній підготовці учнів. Більше того, команда з підготовки до олімпіад не обов'язково має обмежуватися вчителями однієї школи. Чудово, коли об'єднують зусилля вчителі різних навчальних закладів одного міста, викладачі університетів, колишні олімпіадники. Прикладом саме такої організації підготовки до олімпіад в Україні є гурток «Кванта» в Києві https://kvanta.xyz/, школа «Фізматик» у Харкові https://fizmatik.com/, Всеукраїнська Літня Математична Школа «Математичний олімп» та інші. До речі, в таких гуртках та школах організовують також заняття в дистанційній формі, що дає можливість доєднуватися до них дітям з будь-якого міста України та світу. Заняття в таких гуртках та школах платні, що мотивує працювати вчителів, оскільки їхній час оплачується, та мотивує учнів більше виважено ставитися до відвідування занять.

Організація занять вимагає креативного підходу. Обов'язково треба надавати основну інформацію – теоретичні факти, основні методи та прийоми розв'язання задач, і пропонувати учням задачі для самостійного розв'язання в аудиторії, щоб подивитися, як вони міркують. На окремих заняттях можна проводити бліци, на яких пропонувати нескладні логічні задачі на швидкість. Вище ми говорили про те, що різні змагання висувають різні вимоги до учасників – десь потрібно швидко розв'язувати задачі, десь час не має вирішального значення, але задача може бути більш складною.

Якщо учні беруть участь у командному змаганні, це вимагає підготовки саме команди, а не кожного учасника окремо. Діти мають навчитися працювати командою, чути один одного, знати сильні та слабкі сторони кожного (хтось добре розв'язує геометричні задачі, а хтось добре будує стратегії). Можна сказати, що при підготовці команди роль вчителя зростає, оскільки треба не просто навчити учнів розв'язувати задачі, а навчити їх взаємодіяти між собою.

2.5 Теми олімпіадної математики

Наведемо орієнтовний перелік тем, які традиційно вважаються олімпіадними:

1. Метод математичної індукції
2. Комбінаторика
3. Інваріанти
4. Принцип Діріхле
5. Парність
6. Графи
7. Подільність, остачі, алгоритм Евкліда
8. Рівняння в цілих числах
9. Раціональні та ірраціональні числа
10. Ціла та дробова частини числа
11. Числа з різними властивостями

12. Послідовності
13. Класичні нерівності
14. Методи доведення нерівностей
15. Нестандартні рівняння та системи рівнянь
16. Застосування нерівностей при розв'язуванні рівнянь та систем рівнянь
17. Застосування властивостей функцій
18. Функціональні рівняння
19. Ігрові задачі, побудова стратегій
20. Розміщення фігур на площині, покриття, розфарбовування, розрізання фігур
21. Задачі на побудову
22. Задачі з планіметрії
23. Координатно-векторний метод
24. Стереометричні задачі
25. Задачі з параметрами
26. Геометричні нерівності
27. Застосування похідної та інтеграла

Зрозуміло, що цей перелік є приблизним, тому кожний вчитель може побудувати свій власний план підготовки учнів. Але я є деякі загальні моменти, які стосуються розв'язання та оформлення задач, на які потрібно звернути увагу.

Обов'язково треба вчити учнів уважно читати умову задачі та чітко розуміти, що саме в ній вимагається. Показувати різницю між частковим розв'язком і загальним розв'язком. Якщо учню вдалося підібрати якийсь частковий розв'язок, обов'язково слід показати, що цей розв'язок задовольняє умову задачі. Особливу увагу слід звернути на задачі на доведення, оскільки наразі в шкільному курсі багато тверджень дається без доведення, тому учні можуть навіть не уявляти, що таке доведення від супротивного, чим відрізняється необхідна умова від достатньої, що таке рівносильні умови тощо. Треба наполегливо пояснювати, що всі припущення та твердження слід доводити. Якщо при розв'язанні задачі виникає декілька допоміжних тверджень, їх краще оформлювати у вигляді лем. Потрібно вчити оформлювати роботу – робити малюнки, чітко описувати процес розв'язання. Коли розв'язок записано, бажано, щоб учень перечитав його та подивився «очима журі» - чи все зрозуміло та чітко написано.

Наразі існує велика кількість літератури з підготовки до олімпіад. Задачі минулорічних олімпіад можна знайти на сайті олімпіадного руху [4], тому підготувати якісний матеріал для учнів з будь-якої теми не є проблемою.

Наведемо *приклади розв'язання задач з різних тем та в кожній задачі відмітимо її «родзинку».*

Задача 2.5.1. (III етап, 2019 рік, 11 клас) У кожну клітину таблиці 5×9 записано одне з двох чисел 0 або 1. Після цього порахували суми чисел у

кожному з 5 рядків та 9 стовпчиків. Яка найбільша кількість різних значень серед цих 14 чисел може утворитися?

Відповідь: 9.

Розв'язання. Суми можуть приймати значення від 0 до 9, тобто 10 різних значень. Покажемо, що усі ці 10 значень набуватися не можуть. *Припустимо супротивне:* нехай всі можливих 10 значень набуваються, тобто серед цих значень є 0, що означає, що в таблиці є нульовий рядок чи стовпчик. Якщо є нульовий стовпчик, то сума чисел в жодному рядку не може бути більше 8. Якщо є нульовий рядок, то у стовпчиках можуть утворитися суми від 0 до 4. Але тоді в рядках, при наявності нульового рядку, ще можуть бути лише 4 інших значення – 5, 6, 7, 8. Тобто разом маємо не більше 9 різних значень, що суперечить нашому припущенню і доводить, що 10 значень набуватися не можуть.

1	1	1	1	1	1	1	1	1	**9**
0	1	1	1	1	1	1	1	1	**8**
0	0	1	1	1	1	1	1	1	**7**
0	0	0	1	1	1	1	1	1	**6**
0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**
1	**2**	**3**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	

Рис. 2. 7 – задача 2.5.1

Для того, щоб показати, що 9 різних значень набуватися можуть, *наведемо приклад* такого розміщення (рис. 2.7).

Зауваження. При розв'язанні застосовувалося доведення від супротивного, щоб показати неможливість існування 10 значень, та було наведено приклад, який підтверджує існування 9 різних значень.

Задача 2.5.2. (ІІІ етап, 2018 рік, 11 клас) Знайдіть пари натуральних чисел x, y, які задовольняють систему рівнянь:

$$\begin{cases} [x, y] + (x, y) = 2018 \\ x + y = 2018 \end{cases},$$

де через$[x, y]$ та (x, y) позначені НСК та НСД чисел x, y.

Відповідь: маємо такі пари чисел: (1, 2017), (2, 2016). (1009, 1009). (2016, 2). (2017, 1).

Розв'язання. Оскільки $[x, y] \cdot (x, y) = xy$, перше рівняння системи можна переписати таким чином:

$$\frac{xy}{(x, y)} + (x, y) = 2018,$$

тобто маємо квадратне рівняння відносно (x, y): $(x, y)^2 - 2018(x, y) + xy = 0$.

Його дискримінант, з урахуванням другого рівняння системи, дорівнює

$$D^2 = 2018^2 - 4xy = 2018^2 - 4x(2018 - x) = (2x - 2018)^2.$$

Звідси $\frac{2018\pm(2x-2018)}{2}$, тобто $x_1 = x, x_2 = 2018 - x = y$. Отже, одне з чисел співпадає з НСД чисел x, y, а тому на нього ділиться друге число. Нехай, наприклад, $x \leq y$, тоді $y = kx$, тому $(k+1)x = 2018 = 2 \cdot 1009 = 1 \cdot 2018$. Таким чином, можливі наступні випадки:

$$k + 1 = 2 \implies x = y = 1009;$$
$$k + 1 = 2018 \implies x = 1, y = 2017;$$
$$k + 1 = 1009 \implies x = 2, y = 2016.$$

Інші варіанти отримаємо у випадку $x \geq y$.

Задача 2.5.3. (ІІІ етап, 2018 рік, 10 клас) Знайдіть найбільше натуральне число, яке має усі різні цифри та ділиться на кожну з цих цифр.

Відповідь: 9867312.

Розв'язання. Очевидно, що серед цифр числа немає 0. Для подільності на 5 число повинно закінчуватись на 5, але тоді відразу воно не буде ділитись на 2, 4, 6 та 8, тобто більше цифр воно буде мати, якщо не буде ділитись на 5. Але якщо залишити всі цифри, крім 0 та 5, тоді це число не буде ділитись на 3, 6 та 9, оскільки сума його цифр – 40. Отже, достатньо прибрати ще одну цифру і можна досягти, щоб число ділилось на 3. Але тоді ми маємо такі випадки.

Випадок 1. Якщо прибрати 1 чи 7, то число може ділитись на 3 та 6, але не на 9, а тому доведеться прибрати ще й цифру 9, і число стане шестицифровим;

Випадок 2. Якщо прибрати цифру 4, то його можна зробити таким, щоб ділилось на усі цифри, окрім 0, 4 та 5, тобто число може бути семицифровим.

Таким чином, шукане число має такі 7 цифр: 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9. Треба його зробити найбільшим можливим. Зрозуміло, що при будь-якому розподілі цифр, це число буде ділитися на 3 та на 9. Підберемо останні три цифри таким чином, щоб це трицифрове ділилось на 8 (тоді воно буде ділитися на 2 та на 6). Тоді залишиться перевірити, щоб одержане семицифрове число ділилося на 7 і було найбільшим можливим.

Починаємо з 987, тоді з цифр 1, 2, 3, 6 можна утворити такі числа, що кратні 8: 6312, 1632, 2136, 3216. Але якщо ці числа дописати після 987, жодне з отриманих чисел не буде ділитися на 7.

Тоді почнемо з 9867. З цифр 1, 2, 3, що залишилися, можна утворити єдине число, кратне 8 – це число 312. Тоді отримано число 9867312 ділиться на 7 і є шуканим.

Зауваження. Розглянута задача передбачає лише знання ознак ділення на одноцифрові числа.

Задача 2.5.4. (ІІІ етап, 2018 рік, 10 клас) Є країна, в якій 30 міст, деякі з яких сполучені авіарейсами. При цьому сукупність усіх рейсів задовольняє таку умову: якщо з неї прибрати будь-які 26 міст з усіма рейсами, що мають принаймні один з кінців у цих містах, то між 4 містами, що лишилися буде система рейсів, в якій з будь-якого міста можна дістатися до будь-якого іншого, можливо з

пересадками. При якій найменшій кількості авіарейсів у початковій сукупності рейсів таке можливе?

Відповідь: 405.

Розв'язання. Нехай A – вершина початкового графу з найменшою кількістю $k(A)$ ребер, що з неї виходять. Якщо $k(A) < 27$, то ця вершина не з'єднана принаймні з 3 іншими вершинами. Якщо тепер залишити лише ці 3 вершини разом з A, отримаємо не зв'язний граф, що суперечить умові. Таким чином, найменша кількість ребер $\frac{1}{2} \cdot 27 \cdot 30 = 405$.

Покажемо, що шуканий граф з такою кількістю вершин існує. Позначимо вершини $A_1, A_1, \dots, A_{29}, A_0 = A_{30}, A_1 = A_{31}$. Зєднаємо кожну точку A_i з 27 точками, окрім A_{i-1} та A_{i+1}, $i = \overline{1,30}$. Покажемо, що такий граф задовольняє умови. Припустимо супротивне: нехай, наприклад, порушується умова зв'язності графу між точками A_i, A_j, A_k, A_l , де $i < j < k < l$, при цьому найбільша кількість точок розташована між A_i та A_l. Тоді є ребра між такими точками $A_i \leftrightarrow A_k$, $A_i \leftrightarrow A_l$ та $A_j \leftrightarrow A_l$, бо вони не можуть бути сусідніми. Одержана супепечність завершує доведення.

Зауваження. Для розв'язання цієї задачі потрібно бути знайомим з основними поняттями теорії графів.

Наведемо *приклад завдань обласної олімпіади Запорізької області 2024 року (11 клас).*

Задача 2.5.5. Нехай A – двоцифрове натуральне число. Скільки різних значень може приймати вираз $\left[\sqrt{159 + A}\right]$, де через $[x]$ позначена ціла частина числа x, тобто найбільше ціле число, що не перевищує x?

Відповідь: 4.

Розв'язання. Зрозуміло, що $10 \le A \le 99 \Rightarrow 169 \le A + 159 \le 258 \Rightarrow 13 \le \sqrt{A + 159} \le \sqrt{258} \Rightarrow 13 \le \left[\sqrt{A + 159}\right] \le 16$. Таким чином цей вираз приймає рівно 4 різних значення – $13, 14, 15, 16$. Покажемо, що всі ці значення досягаються:

$$\left[\sqrt{A + 159}\right] = 13 \Rightarrow 169 \le A + 159 < 196 \Rightarrow 10 \le A < 37;$$
$$\left[\sqrt{A + 159}\right] = 14 \Rightarrow 196 \le A + 159 < 225 \Rightarrow 37 \le A < 66;$$
$$\left[\sqrt{A + 159}\right] = 15 \Rightarrow 225 \le A + 159 < 256 \Rightarrow 66 \le A < 97;$$
$$\left[\sqrt{A + 159}\right] = 16 \Rightarrow 256 \le A + 159 < 289 \Rightarrow 97 \le A < 130.$$

Задача 2.5.6. Скільки існує чотирицифрових чисел, що кратні 15 та мають рівно 15 дільників включно з 1 та самим числом?

Відповідь: 2.

Розв'язання. З формули кількості дільників для числа $n = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}$ маємо, що кількість дільників обчислюється за формулою: $(1 + a_1) \dots (1 + a_k)$. Щоб останній вираз дорівнював 15, то має бути $k = 2$ та $a_1 = 2$, $a_2 = 4$ або

$k = 1$ та $a_1 = 14$. З подільності числа n на 15, число k має бути принаймні 2, причому $p_1 = 3, p_2 = 5$ або навпаки $p_1 = 5, p_2 = 3$. Таким чином треба подивитися на кількість цифр кожного з двох чисел: $n_1 = 3^2 \cdot 5^4 = 5625$, $n_2 = 3^4 \cdot 5^2 = 2025$. Тобто обидва ці числа умову задовольняють.

Задача 2.5.7. Дійсні числа a, b, c, d задовольняють такі умови:

$$a + b + c + d = 0 \text{ та } a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 12.$$

Яке найбільше значення може приймати добуток $abcd$?

Відповідь: 9.

Розв'язання. З першої умови зрозуміло, що не усі числа мають один знак. Для досягнення максимуму має бути два додатних та два від'ємних (нуля серед чисел немає, бо нульовий добуток не є максимальним). Без обмеження загальності вважатимемо, що $a, b > 0$ та $c, d < 0$.

Зрозуміло, що $2(ab + cd) \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 12 \Rightarrow ab + cd \leq 6$, тоді

$$(ab) \cdot (cd) \leq \left(\frac{ab + cd}{2}\right)^2 \leq 9.$$

Зрозуміло, що таке значення досягається: $a = b = \sqrt{3}, c = d = -\sqrt{3}$.

Задача 2.5.8. Усі натуральні числа пофарбовані у два кольори – жовтий та блактиний. При цьому справджуються такі умови: чисел, що пофарбовані в кожний з кольорів, нескінченна кількість; сума 3-х, не обов'язково різних, чисел одного кольору, має той самий колір. Скільки існує різних подібних розфарбувань?

Відповідь: 2.

Розв'язання. Припустимо, що число k – жовте. Доведемо методом математичної індукції, що $\forall n \geq 0$ кожне з чисел $(2n + 1)k$ є жовтим. База індукції для $n = 1$ справджується. Якщо припустити, що число $(2n - 1)k$ – жовте, то число $(2n + 1)k = (2n - 1)k + k + k$ також жовте. Аналогічно й для блакитних фарбувань.

Без обмеження загальності вважатимемо, що 1 – жовте, тоді усі непарні числа – жовті. Якщо деяке парне число $2m$ – жовте, то очевидно, що усі числа вигляду $2m + 2n$ також жовті, для чого достатньо додавати непарні числа, які усі жовті. Звідси випливає, що блакитних чисел буде лише скінченна кількість, що суперечить умові. Таким чином усі парні числа мають бути блакитними.

Зрозуміло, що шуканих фарбувань усього 2. Покажемо, що обидва таких розфарбування задовольняють умові задачі: парних і непарних чисел нескінченна кількість, сума трьох парних чисел є парним числом, а сума трьох непарних чисел є непарним числом.

Задача 2.5.9. У гострокутному трикутнику ABC $\angle A < \angle C$, Γ – описане навколо ΔABC коло, AE – діаметр цього кола. Точка K – перетин прямої AC та

дотичної до кола Γ у точці B, точка L – ортогональна проєкція точки K на пряму AE, D – точка перетину прямих KL та AB. Доведіть, що CE – бісектриса $\angle BCD$.

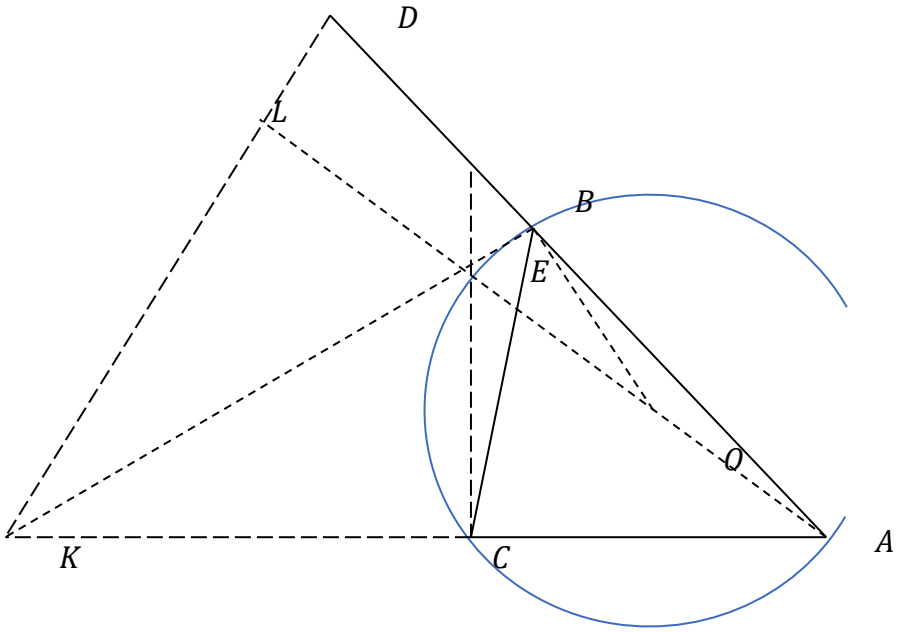


Рис. 2.8 – задача 2.5.9

Розв'язання. Розглянемо зображену на рис. 2.8 конфігурацію. Оскільки $\angle LAD = \angle EAB = \angle ECB$, то

$$\angle BDK = \angle ADL = 180° - \angle DLA - \angle LAD = 90° - \angle LAD = 90° - \angle ECB = \\ = \angle ECA - \angle ECB = \angle BCA = 180° - \angle BCK.$$

Звідси випливає, що чотирикутник $BDKC$ – вписаний. Звідси

$$\angle BCD = \angle BKD.$$

Тепер доведемо, що $\angle BKD = 2\angle BCE$, звідки буде випливати шукане твердження.

З властивостей вписаних кутів маємо, що $\angle EBK = \angle BCE$, тому

$$\angle ABK = \angle ABE + \angle EBK = 90° + \angle BCE \Rightarrow$$
$$\angle BKA = 180° - (90° + \angle BCE) - \angle BAK = 90° - \angle BCE - \angle BAK.$$

З властивостей вписаних кутів $\angle BAK = \angle EAK + \angle BAE = \angle EAK + \angle BCE$, звідки знаходимо, що $\angle AKB = 90° - 2\angle BCE - \angle EAK = 90° - 2\angle BCE - \angle LAK$.

З суми кутів ΔAKL випливає, що $\angle AKL = 90° - \angle LAK$, звідки $\angle AKB = \angle AKL - 2\angle BCE$, звідки випливає, що $\angle BKD = \angle AKL - \angle AKB = 2\angle BCE$, що й завершує доведення.

Зауваження. Для розв'язання задач потрібно знати: означення цілої частини числа; формулу кількості дільників числа; нерівність між середнім арифметичним та середнім геометричним; метод математичної індукції; властивості вписаних кутів.

2.6 Класичні нерівності, які зустрічаються в олімпіадних задачах

Розглянемо одну із найпоширеніших тем олімпіадної математики – доведення нерівностей. Такі задачі зустрічаються практично на кожній олімпіаді та викликають певні труднощі у учасників. Для розв'язання таких задач потрібно бути знайомим з деякими класичними нерівностями, які ми наведемо без доведень.

1. Нехай $a_1, a_2, \dots, a_n$ – додатні числа. Середнім арифметичним цих чисел називається число $A(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$, середнім геометричним називається число $G(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$, середнім гармонічним – число $H(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$ та середнім квадратичним – число $S(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}$. Тоді має місце наступна ***нерівність між середніми*:**

$$\min(a_1, a_2, \dots, a_n) \le H \le G \le A \le S \le \max(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

2. Для двох наборів довільних дійсних чисел $(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n)$ має місце нерівність, яка носить назву ***нерівності Коші-Буняковського (Коші-Шварца)*:**

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2),$$

причому знак рівності має місце тоді та тільки тоді, коли набори чисел пропорційні, тобто коли $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$.

3. Якщо в цій нерівності покласти $a_i = \frac{x_i}{\sqrt{y_i}}, b_i = \sqrt{y_i}$, де x_i – довільне дійсне число y_i – довільне додатне дійсне число, отримаємо іншу форму ***нерівності Коші-Буняковського***:

$$\frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2}{y_1 + y_2 + \cdots + y_n} \le \frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \cdots + \frac{x_n^2}{y_n}.$$

4. Впорядкуємо два довільних набора чисел за зростанням: $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$ та $b_1 \le b_2 \le \dots \le b_n$. Тоді має місце нерівність, яка носить назву ***транснерівності***:

$$a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1 \le a_1b_{i_1} + a_2\,b_{i_2} + \cdots + a_nb_{i_n} \le \\ \le a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$$

5. З транснерівності можна отримати ***нерівність Чебишова***:

$$\frac{a_1b_n+\cdots+a_nb_1}{n} \le \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\cdot\frac{b_1+\cdots+b_n}{n} \le \frac{a_1b_1+\cdots+a_nb_n}{n}.$$

6. Функція $f(x)$ називається опуклою вниз на (a,b), якщо $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$ та $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]$: $\lambda_1+\lambda_2=1$ виконується умова

$$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2) \le \lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2).$$

Критерій опуклості функції. Нехай функція $f(x)$ двічі диференційовна на (a,b). Функція $f(x)$ опукла вниз на (a,b) тоді та тільки тоді, коли $f''(x) \ge 0$ при всіх $x \in (a,b)$.

Якщо $f(x)$ опуклою вниз на (a,b), тоді для довільних $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a,b)$ та довільних невід'ємних чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, таких, що $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$ має місце ***нерівність Єнсена***:

$$f\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k\right) \le \sum_{k=1}^{n}\lambda_k f(x_k).$$

Покажемо, як застосовувати ці нерівності на прикладі деяких задач.

Задача 2.6.1. Довести нерівність для довільних $a,b,c>0$:

$$\frac{2a}{b+c}+\frac{2b}{c+a}+\frac{2c}{a+b} \ge 3.$$

Розв'язання. Без обмеження загальності можна вважати, що $a \ge b \ge c$. З цього випливає, що $a+b \ge a+c \ge b+c$ та $\frac{1}{b+c} \ge \frac{1}{a+c} \ge \frac{1}{a+b}$. Перетворимо ліву частину нерівнсоті та застосуємо транснерівність:

$$\frac{2a}{b+c}+\frac{2b}{c+a}+\frac{2c}{a+b} = \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \ge$$
$$\ge \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}+\frac{a}{a+b} = \frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{c+a}+\frac{a+c}{a+b} \ge$$
$$\ge \frac{b+c}{b+c}+\frac{a+c}{c+a}+\frac{a+b}{a+b} = 3.$$

Задача 2.6.2. Доведіть для додатних чисел нерівність:

$$\frac{y}{2x+y}+\frac{z}{2y+z}+\frac{x}{2z+x} \ge 1.$$

Розв'язання. Домножимо ліву частину нерівності на $(x+y+z)^2$ та застосуємо нерівність Коші-Шварца:

$$\left(\frac{y}{2x+y}+\frac{z}{2y+z}+\frac{x}{2z+x}\right)(x+y+z)^2 =$$
$$= \left(\frac{y}{2x+y}+\frac{z}{2y+z}+\frac{x}{2z+x}\right)(y(2x+y)+z(2y+z)+x(2z+x)) \ge$$
$$\ge \left(\sqrt{\frac{y}{2x+y}}\cdot\sqrt{y(2x+y)}+\sqrt{\frac{z}{2y+z}}\cdot\sqrt{z(2y+z)}+\sqrt{\frac{x}{2z+x}}\cdot\sqrt{x(2z+x)}\right)^2 =$$
$$= (x+y+z)^2,$$

Звідки випливає те, що потрібно було довести.

Задача 2.6.3. Для додатних чисел a, b, c, що задовольняють умову $a + b + c = 1$, доведіть нерівність:

$$\frac{a}{a+b^2} + \frac{b}{b+c^2} + \frac{c}{c+a^2} \le \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

Розв'язання. Розглянемо такі перетворення:

$$\frac{a}{a+b^2} = \frac{a}{a(a+b+c)+b^2} = \frac{a}{a^2+ab+ac+b^2} \le \frac{a}{2ab+ab+ac} = \frac{1}{3b+c}.$$

З нерівності між середніми маємо, що

$$\frac{4}{\frac{3}{b}+\frac{1}{c}} = \frac{4}{\frac{1}{b}+\frac{1}{b}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \le \frac{b+b+b+c}{4} = \frac{3b+c}{4},$$

звідки

$$\frac{16}{3b+c} \le \frac{3}{b} + \frac{1}{c}.$$

Тепер попередня нерівність підсилюється таким чином:

$$\frac{a}{a+b^2} \le \frac{1}{3b+c} \le \frac{1}{16}\left(\frac{3}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

Аналогічно отримаємо ще дві нерівності:

$$\frac{b}{b+c^2} \le \frac{1}{16}\left(\frac{3}{c} + \frac{1}{a}\right), \frac{c}{c+a^2} \le \frac{1}{16}\left(\frac{3}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

Додамо тепер отримані три нерівності:

$$\frac{a}{a+b^2} + \frac{b}{b+c^2} + \frac{c}{c+a^2} \le \frac{1}{16}\left(\frac{3}{b} + \frac{1}{c}\right) + \frac{1}{16}\left(\frac{3}{c} + \frac{1}{a}\right) + \frac{1}{16}\left(\frac{3}{a} + \frac{1}{b}\right) =$$
$$= \frac{1}{16}\left(\frac{4}{a} + \frac{4}{b} + \frac{4}{c}\right) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

Задача 2.6.4. Для довільних додатних чисел x, y, z доведіть нерівність:

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y} \ge \frac{(3x-y-z)^2}{2\,(x+y+z)}.$$

Розв'язання. Розглянемо такі рівності:

$$(2x-y-z) + (2y-z-x) + (2z-x-y) = 0 \iff$$

$$\Leftrightarrow (x-(y+z-x)) + (y-(z+x-y)) + (z-(x+y-z)) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-(y+z-x))(y+z)}{y+z}+\frac{(y-(z+x-y))(z+x)}{z+x}+$$
$$+\frac{(z-(x+y-z))(x+y)}{x+y}=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{(x-(y+z-x))(x+(y+z-x))}{y+z}+\frac{(y-(z+x-y))(y+(z+x-y))}{z+x}+$$
$$+\frac{(z-(x+y-z))(z-(x+y-z))}{x+y}=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2-(y+z-x)^2}{y+z}+\frac{y^2-(z+x-y)^2}{z+x}+\frac{z^2-(x+y-z)^2}{x+y}=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}=\frac{(y+z-x)^2}{y+z}+\frac{(z+x-y)^2}{z+x}+\frac{(x+y-z)^2}{x+y}.$$

З другої форми запису нерівності Коші-Буняковського маємо:

$$\frac{(y+z-x)^2}{y+z}+\frac{(z+x-y)^2}{z+x}+\frac{(x+y-z)^2}{x+y}\geq$$
$$\geq \frac{(|x-y-z|+|x+z-y|+|x+y-z|)^2}{2\,(x+y+z)}\geq \frac{(3x-y-z)^2}{2\,(x+y+z)}.$$

В останньому рядку ми скористалися нерівністю трикутника для модулів:

$$|3x-y-z|\leq |x-y-z|+|x+z-y|+|x+y-z|.$$

Задача 2.6.5. Для довільних додатних чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ та числа $s=x_1+x_2+\cdots+x_n$ нерівність:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{s-x_i}\geq\frac{n}{n-1}.$$

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x)=\frac{x}{s-x}$. Оскільки $f''(x)=\frac{2\mathrm{i}}{(s-x)^3}>0$ при $x\in(0,s)$, то вона є опуклою вниз на $(0,s)$. Покладемо в нерівності Єнсена $\lambda_i=\frac{1}{n}$, отримаємо:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{n}}{s-\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{n}}\leq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{s-x_i},$$

тобто

$$\frac{\frac{s}{n}}{s-\frac{s}{n}}=\frac{n}{n-1}\leq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{s-x_i}.$$

Питання для самоконтролю, практичні завдання

1. Які математичні олімпіади та турніри, що відбуваються в Україні, Вам відомі?
2. Поясніть, яке відношення мають лінгвістичні олімпіади до математики.
3. Як щорічно проходить турнір математичних боїв? В чому його особливості?
4. Які правила проведення математичного занзібару?
5. Оберіть одне зі змагань та підготуйте інформацію стосовно нього за планом: основна інформація про захід (історія виникнення, коли і де проводиться, хто бере участь, як відбувається реєстрація); правила проведення та оцінювання; приклади завдань з розв'язками; аналіз завдань заходу – рівень завдань, що потрібно знати та вміти, щоб розв'язувати завдання, поради з підготовки до участі в такому конкурсі. Підготуйте презентацію стосовно заходу з цією інформацією.
6. Спробуйте самостійно, без підказок, розв’язати декілька задач з будь-якого турніру. Порівняйте свій розв’язок з авторським. Проаналізуйте, чи складно Вам було? Якщо так, то чому саме складно? Яких знань не вистачало?
7. Охарактеризуйте основні зміни в проведенні Всеукраїнських олімпіад, які вносяться новим Положенням про олімпіадний і турнірний рух (етапи, рейтинги, особливості проведення). Як Ви вважаєте, чи є ці зміни позитивними, чи покращать вони процес проведення олімпіад та турнірів?
8. Назвіть теми, які традиційно відносять до олімпіадної математики.
9. Оберіть тему з переліку тем олімпіадної математики. Підготуйте та оформіть конспект заняття (занять) з цієї теми для підготовки до участі у Всеукраїнській олімпіаді з математики. Конспект має обов'язково містити основні теоретичні факти, які слід надати учням – означення, формули, теореми, якусь корисну інформацію (можна без доведень). Підберіть задачі з обраної теми, які пропонувалися на олімпіадах в попередні роки. Для пошуку таких задач використовуйте сайт олімпіадного руху або посібники, в яких такі задачі публікуються. Для кожної запропонованої задачі обов'язково вкажіть джерело її походження (де і коли ця задача пропонувалася). Кількість задач – до 10 (залежить від складності). Намагайтеся не пропонувати однотипні задачі, шукайте задачі, які мають різні методи.
10. Спробуйте самостійно розв’язати декілька задач з тієї теми, яку Ви обрали. Проаналізуйте, що саме викликає труднощі та як доцільніше навчати учнів розв’язання таких задач.

    11. Створіть перелік з 10 тем, які б Ви вважали за потрібне пояснити учням в умовах обмеженого часу підготовки до олімпіади. Обґрунтуйте свій вибір.

3 ОРГАНІЗАЦІЯ НАУКОВОЇ РОБОТИ УЧНІВ

3.1 Всеукраїнські онлайн-проєкти з математики

Розглянемо основні проєкти, які пропонує МАН для зацікавлених математикою. Таких проєктів декілька, докладна інформація про них, правила участі знаходиться на сайті МАН.

1. Лекції майбутнього. Це онлайн-проєкт, розрахований на цчнів, старших 12 років. Лекції майбутнього — це платформа для діалогу між українською молоддю та нобелівськими лавреатами й науковцями з усього світу. Вони не лише діляться своїми знаннями з різних галузей, але й мотивують дітей заглиблюватися в науку, експериментувати, досліджувати світ навколо, щоб перетворити це хобі на успішну кар'єру. Наразі проведено більше 30 лекцій з 5 нобелівськими лавреатами. Зрозуміло, що оскільки нобелівських лавреатів з математики не існує, ці лекції не з математики (вони з екології, фізики, хімії, біології, інженерії), але вони розраховані саме на молодь, тобто можуть бути цікавими будь-якій дитині та мотивувати її займатися наукою. На сайти викладено записи попередніх лекцій, які можна передивитися в зручний час. Інформація про нові лекції подається на сторінці в соціальних мережах Facebook та Instagram.

2. Онлайн-курс «Математика як інструмент мислення» для учнів 7-9 класів. Це курс для учнів, які хочуть поглиблено вивчати математику. В курсі не розглядаються задачі шкільної програми, він присвячений розв'язанню нетипових задач, ознайомленню з методами розв'язання, логічного міркування, доведення тощо. Заняття проходять протягом навчального року на платформі Zoom та викладаються на YouTube-каналі.

3. Онлайн-проєкт «День з професором» розрахований на учнів 9-11 класів. Лектори українських і світових ЗВО просто й цікаво розповідають про науку. Лекції стосуються абсолютно різних тем, тому кожен зможе знайти для себе щось цікаве. Записи лекцій також викладено на YouTube-каналі.

4. Всеукраїнські літні школи для учнів 8-11 класів. Набір в ці школи розпочинається в травні. Охочі подають заявки, проходять тестування та потрапляють в групу. Навчання у літній школі триває 6–8 днів онлайн або офлайн і поєднує індивідуальну та командну роботу. Учні відвідують лекції, практичні і лабораторні заняття, а також працюватимуть над власним дослідницьким проєктом. Після завершення школи учасники презентують свої ідеї та напрацювання перед іншими. Також діти просто спілкуються з однодумцями.

Інформація про регістрацію надсилається в регіональні центри та розміщується на сторінках в соціальних мережах.

Додатково слід зауважити, що на сайті МАН є окрема сторінка для освітян – для вчителів, які хочуть підвищити свої професійні навички та отримати інформацію про конкурси для своїх учнів. Для освітян проводяться спецкурси, семінари-практикуми, які можуть бути корисними при підготовці своїх учнів до олімпіад та конкурсів.

Наведені в якості прикладів проєкти призначені для розвитку зацікавленості наукою, науковими дослідженнями взагалі. Вони дають можливість школярам побачити відомих науковців, почути відповіді на свої питання, краще зрозуміти, що таке наука, познайомитися та поспілкуватися з однодумцями. Це дуже корисний досвід, оскільки в школі такий досвід набути важко.

3.2 Конкурс-захист науково-дослідницьких робіт учнів-членів МАН

Найчастіше при згадці про МАН спадає на думку саме проведення конкурсу захисту науково-дослідницьких робіт. Саме цей щорічний конкурс є найбільш відомим та популярним серед учнів-дослідників. Учасниками конкурсу можуть стати учні 9-11 класів. Для участі в конкурсі майбутній дослідник має визначитися з галуззю наукового дослідження. Наразі існує 12 наукових відділень та 65 наукових секцій. У відділенні «Математика» існують 3 секції, в кожній з яких пропонуються орієнтовні напрями досліджень:

- Математика:
  - елементарна теорія чисел;
  - математичний аналіз;
  - алгебра;
  - геометрія;
  - теорія ймовірностей;
  - комбінаторика.
- Прикладна математика:
  - прикладні задачі механіки, фізики;
  - прикладні задачі біології, хімії, медицини;
  - прикладні задачі економіки;
  - застосування елементів комп’ютерної математики;
  - прикладні аспекти дискретної математика та комбінаторики;
  - прикладні задачі оптимізації;
  - застосування геометричних методів до розв’язування прикладних задач;
  - елементи наближених обчислень, інтерполяція, екстраполяція;
  - елементи теорії ймовірностей і її застосування;
  - елементи теорії графів і їх застосування;
  - елементи обчислювальної геометрії і її застосування.
- Статистика:
  - опрацювання великих масивів інформації;
  - математичні моделі поширення інформації;
  - математичні моделі в теорії прийняття рішень;
  - математичне моделювання та дослідження екологічних процесів;
  - ймовірнісні та статистичні методи в математичному моделюванні;
  - моделювання часових рядів;

- статистичний аналіз у дослідженнях індивідуальних психологічних особливостей особистості;
- статистичний аналіз текстів;
- статистичний аналіз епідеміологічних даних;
- статистичний аналіз успішності учнів;
- порівняльний статистичний аналіз цін на товари та послуги в різних регіонах.

Як видно, перелік напрямів доволі великий, тому учень може обрати те, що йому до вподоби. Зрозуміло, що шкільний вчитель може мати певні проблеми з тим, щоб керувати такою науковою роботою та направлять учня. Крім того, деякі напрями можна вважати міждисциплінарними, де учню знадобляться консультації з біології, фізики, економіки, ІТ дисциплін тощо. Це означає, що бути науковим керівником (ментором) юного дослідника – доволі складна задача. Вона істотно відрізняється від, наприклад, підготовки учнів до олімпіад. Саме тому керівників свого дослідження можна шукати і в закладах вищої освіти, і в територіальних відділеннях МАН, і в школах.

Конкурс-захист проводиться в 3 етапи. Перший етап – районний, другий етап – обласний, та третій етап – Всеукраїнський. Терміни проведення визначаються щорічно МОН та департаментами освіти. В деяких містах перший етап конкурсу не проводиться.

На кожний етап разом з заявкою на участь подаються: дослідницька робота, мотиваційний лист, декларація академічної доброчесності та постер.

Згідно з Вимогами до написання, оформлення та представлення дослідницьких робіт [8], на конкурс подаються *дослідницькі роботи* проблемно-пошукового характеру, які відображають методологію, процес, результати власного дослідницького проєкту та відповідають віковим інтересам і пізнавальним можливостям учасників конкурсу. Тематика проєктів (відповідно й робіт) має відповідати напрямам наукових секцій наукових відділень Малої академії наук України.

Проєкт має ґрунтуватись на певних науковій та експериментальній базах, містити дані особисто проведених дослідів, спостережень чи пошукової роботи; результати їх обробки, аналізу та узагальнення; посилання на відповідні наукові джерела; відображати власну позицію дослідника. У проєкті мають бути чітко визначені: мета, об’єкт і предмет дослідження, завдання, методи дослідження, відмінність та перевага запропонованих підходів і результатів. Зміст і результати досліджень викладаються стисло, логічно, грамотно та аргументовано, без загальних слів і міркувань, бездоказових тверджень, тавтології. Назва проєкту має бути стислою та відповідати суті наукової проблеми (завдання), що вирішується.

До роботи мають бути додані відгуки наукового керівника та рецензія фахівця у відповідній галузі (досвідченого педагогічного, наукового чи науково-педагогічного працівника). Достовірність наведених у проєкті результатів підтверджується у відгуку науковим керівником.

Мотиваційний лист – короткий текст, який супроводжує дослідницький проєкт і відображає причини, що спонукали автора до виконання дослідницького проєкту; особисті цінності; пояснює, що дослідник хоче змінити своїм проєктом; ким бачить себе в майбутньому.

Мотиваційний лист повинен розкрити таке: як виникла ідея дослідження, що наштовхнуло на неї; які були етапи реалізації, хід дослідження (наприклад: спеціалізовані курси, прослухані за напрямом дослідження (у тому числі онлайн), літні школи, інші освітні/наукові заходи, листування з експертами, публічні заходи з відповідної тематики, які відвідував автор, поїздки, експедиції тощо); які труднощі постали перед дослідником у процесі роботи над проєктом.

Декларація академічної доброчесності має підтверджувати, що надана дослідницька робота є самостійним дослідженням та не містить академічного плагіату.

Постер – вертикально розміщений плакат формату А0, що оформлюється українською мовою. Постер повинен містити: зазначення територіального відділення (області); заголовок (назву проєкту, що співпадає, з назвою дослідницької роботи); інформацію про автора (прізвище, ім’я, по батькові (за наявності); повне найменування закладу освіти; клас; населений пункт; прізвище, ім’я, по батькові та посада наукового керівника); короткий зміст проєкту (мета і завдання проєкту, матеріали та методи його виконання, об’єкт, предмет, результати й висновки).

3.3 Підготовка дослідницької роботи

Опишемо основні етапи підготовки дослідницької роботи. Вважаємо, що учень визначився з напрямом дослідження та обрав собі керівника – людину, яка має допомогти правильно організувати процес дослідження та наступного захисту. Може статися так, що визначитися з напрямом учню складно. Тоді слід пояснити, чим відрізняються різні напрями, та намагатися обрати той, який найбільш приваблює майбутнього дослідника.

Вибір теми – дуже важливий етап, від якого значною мірою залежить успіх дослідження. Перед формулюванням теми потрібно відповісти на питання: Що насправді тебе цікавить? В чому полягає проблема, яку ти хочеш вирішувати? Яка ідея твоєї роботи і яким ти бачиш її результат? Що тобі потрібно для проведення дослідження?

Вдало обрана тема має бути точною (не слід намагатися сформулювати тему занадто загальною), лаконічною, актуальною, перспективною, науковою. Треба чітко розуміти, що нового може зробити дослідник при роботі над цією темою. Тема має відповідати віковим інтересам дослідника, мати джерела для опрацювання. Оскільки ми говоримо про математику, не слід обирати теми реферативного характеру, коли учень просто розбирається з якимось питанням (можливо, для нього особисто невідомим, але загальновідомим для широкого кола спеціалістів). Обов’язково слід бачити кінцевий результат дослідження – розв’язання задачі, розробка методики, доведення твердження, обробка результатів експерименту тощо. Тобто починаючи роботу над проєктом, учень

має розуміти, в якому напрямку він має рухатися. При формулюванні потрібно враховувати загальновідомі факти (тобто те, що аналізується) та прогнозований результат (тобто власне дослідження).

Наведемо приклад вдалих тем для дослідження: «Застосування теорії графів для аналізу критичної інфраструктури в умовах надзвичайних ситуацій», «Моделювання руху крупногабаритного міського транспорту», «Використання математичних ідей в елементарній криптографії», «Дослідження особливостей геометрії дельтоїда». І декілька не дуже вдалих тем: «Геометрія в природі», «Магічні квадрати» (дуже загальне формулювання, з якого незрозуміло, про що буде йтися мова), «Число π та кількість зіткнень кубиків» (хотілося б більше конкретики, що саме за кубики та чому або як вони стикаються). Отже, тема має буди сформульована таким чином, щоб було зрозуміло, про що йдеться в дослідженні.

Після вибору теми слід визначитися з об'єктом та предметом дослідження, а також визначити мету дослідження. Мета має дати відповідь на запитання, навіщо проводиться це дослідження, і результати досягнення мети будуть сформульовані у висновках до роботи.

Етапи роботи над дослідженням детально описані в книзі [15], з якою бажано ознайомитися та потім використовувати отриману інформацію при керівництві науковими проєктами своїх учнів.

Математичні проєкти мають деякі особливості, на яких ми зупинимося. Як правило, такий проєкт передбачає розв'язання задачі/задач. Отже, виконавцю роботи спочатку слід ознайомитися з теоретичними засадами дослідження. І в цьому має допомогти керівник роботи: надати потрібну інформацію, порадити джерела для ознайомлення з об'єктом дослідження, допомогти розібратися зі складними моментами, впевнитися, що учень «погрузився» в тему. Після цього можна переходити до практичної частини роботи. Це може бути пошук відповідей на питання, поставлені на початку дослідження, пошук гіпотез та їх доведення або спростування, розв'язання задач, аналіз результатів. Загалом цей процес може бути доволі різноманітним. Бажано, щоб учень намагався проводити дослідження самостійно, звертаючись до керівника за порадами або коли виникають реальні труднощі. Треба мати достатньо часу на підготовку роботи, оскільки пошук або реалізація ідеї можуть тривати довго. Керівник не має виконувати роботу за свого учня. Якщо робота «не йде» (можливо, тема є складною, або учень втратив цікавість, або переоцінив свої можливості), треба об'єктивно зважити, чи є сенс продовжувати дослідження. Керівництво учасником МАН може бути доволі складним для вчителя, оскільки буде вимагати залученості в роботу учня. Треба буде в потрібний момент підказати, в якому напрямку краще рухатися, а для цього самого треба непогано орієнтуватися в дослідженні. Нагадаємо, що керівник надає відгук на роботу, в якому своїм підписом підтверджує достовірність наведеної в роботі інформації, тобто правильність наведених доведень та розв'язань задач. Фактично саме керівник несе відповідальність за зміст роботи.

Після виконання дослідження потрібно правильно оформити роботу. Вимоги до оформлення можна знайти на сторінці МАН, тому це має бути

проблемою. Але керівнику слід уважно перечитати роботу, що подається на конкурс, особливо якщо учасник пише таку роботу вперше. Слід звернути увагу на оформлення списку використаних джерел, на дотримання структури роботи.

3.4 Підготовка до захисту та захист дослідницької роботи

Нові правила, за якими проводиться конкурс-захист МАН, визначено наказом МОН №147 від 08.02.2021 року «Про затвердження Правил проведення Всеукраїнського конкурсу-захисту науково-дослідницьких робіт учнів - членів Малої академії наук України» [8]. Зупинимося на основних факторах моделі визначення результатів конкурсу.

Як було зазначено вище, на конкурс учасник подає: текст дослідницької роботи, оформлений за правилами (2 примірники), мотиваційний лист, декларацію академічної доброчесності, відгук наукового керівника та рецензія фахівця у відповідній галузі (досвідченого педагогічного, наукового чи науково-педагогічного працівника).

Оскільки мотиваційні листи поступово стали обов'язковими елементами при вступі до закладів вищої освіти або до участі в конкурсах, існує велика кількість майстер-класів з написання таких листів з порадами та прикладами. Приклад мотиваційного листа, розміщеного на сайті Кіровоградської МАН, наведено в Додатку А.

Номінації представлення та оцінювання дослідницького проєкту:

- Подання тексту дослідницького проєкту, після чого відбувається його заочне оцінювання членами журі;
- Постерний захист – стендова доповідь про методологію, хід та отримані результати дослідження перед журі;
- Наукова конференція – доповідь про найбільш вагомі здобутки дослідження перед іншими учасниками конкурсу-захисту.

Наразі існує так звана факторно-критеріальна модель визначення результатів конкурсу. Всього є три фактори оцінювання: заочне оцінювання дослідницьких проєктів (максимальна оцінка – 20 балів), постерний захист (максимальна оцінка – 45 балів) та наукова конференція (максимальна оцінка – 25 балів). Отже, учасник може набрати максимально 100 балів.

Переможців кожного етапу конкурсу визначають окремо в кожній науковій секції за сумою балів, які учасники набрали в усіх номінаціях. Як правило, кількість переможців не перебільшує 50% від загальної кількості учасників.

Кількість балів, необхідна для отримання призових місць: 85 і більше — перше місце; 80–84 — друге місце; 75–79 — третє місце.

Якщо учасники мають однакову кількість балів, журі визначає переможця, враховуючи результати постерного захисту.

Розглянемо, що оцінюється в кожній номінації. Спочатку відбувається заочне оцінювання дослідницького проєкту, під час якого члени журі знайомляться з поданими проєктами, уважно їх читають та оцінюють. Критеріями заочного оцінювання є:

- Аргументованість вибору теми дослідження, наукове/прикладне значення роботи;
- Системність і повнота розкриття теми;
- Вміння чітко та ясно викладати свої думки, критично осмислювати використані джерела;
- Рівень виконання завдань, їх відповідність меті дослідження;
- Відповідність вимогам оформлення дослідницьких робіт (науковий стиль мовлення, наявність всіх структурних елементів, коректність оформлення джерел та цитування, грамотність)

Наводити значення вагомості кожного критерію ми не будемо, але з переліку критеріїв стає зрозуміло, що саме оцінюється в роботи. Це і вдалий вибір теми, і рівень розкриття теми, зміст та рівень виконання завдань, а також стиль подання інформації та дотримання вимог оформлення роботи. Саме про це ми говорили в п.3.3.

Після заочного оцінювання відбувається постерний захист роботи. Кожен учасник готує постер, на якому стисло подається інформація про проведене дослідження та його результати. Влаштовується навіть виставка постерів, на якій всі охочу можуть познайомитися з роботами, представленими на конкурс. Постерний захист – це саме захист результатів своєї роботи. Учасник має розкрити предмет, об’єкт дослідження, Завдання, методи дослідження, основні результати роботи. Журі задає питання, для того, щоб з’ясувати компетентність учасника у вибраній темі дослідження.

Критерії, за якими оцінюється постерний захист:

- Дослідницький характер проєкту;
- Доцільність та коректність використаних методів дослідження, відповідність висновків (результатів) поставленим завданням;
- Ступень самостійності і особистий внесок автора в дослідження;
- Презентаційні навички: культура мовлення, вільне володіння матеріалом, вичерпність, змістовність та наукова коректність відповідей;
- Відповідність постера вимогам.

Оскільки оцінка саме за постерний захист є максимальною, зрозуміло, що нього треба добре підготуватися. При постерному захисті проєкт оцінюється всебічно. Умовно можна розділити критерії оцінювання на 3 групи: які стосуються безпосередньо проєкту, які стосуються уміння його презентувати та які стосуються самого постера.

Журі може задавати питання, які стосуються вибору теми, методів дослідження, отриманих результатів, особистого внеску автора. Якщо робота виконана з високим ступенем самостійності, автор розуміється на дослідженні, може відповісти на будь-яке питання, яке стосується проекту, він отримає високі бали. Ще раз підкреслимо важливість самостійного виконання дослідження. Як правило, досвідчене журі з відповідей конкурсанта доволі швидко може

зрозуміти, наскільки автор роботи орієнтується в проєкті, який він представляє. Обов'язково треба підготувати учасника до виступу – підготувати доповідь, в якій він представить свою роботу, подумати, які питання можуть виникнути у членів журі та задати їх учню. Якщо він легко знаходить відповідь на поставлене питання, це добре, а якщо з цим виникають проблеми, треба обговорити такі питання завчасно. Конкурсант має розуміти, що питання не мають на меті його «завалити», доволі часто членам журі дійсно цікаво почути докладні пояснення стосовно роботи. Керівнику роботи доцільно провести пробний постерний захист (може, навіть, не один) для того, щоб учень почував себе більш впевнено. На такий пробний захист можна запросити інших знайомих учасників конкурсу або просто однокласників, які також можуть задавати питання.

Тут ми переходимо до другого аспекту постерного захисту – уміння презентувати своє дослідження. Навіть ідеальне дослідження треба гідно подати. Багато чого буде залежати від особистості та характеру конкурсанта: наскільки він вільно почувається перед сторонніми людьми, наскільки впевнено себе поводить, який у нього стиль мовлення. В сучасному світі багато дітей мають проблеми зі спілкуванням (і з однолітками, і з дорослими), з умінням вислухати опонента та потім донести свою думку. Загалом, такі навички мають розвивати школа та позашкільні заклади, але під час тривалого дистанційного навчання з цим існують істотні проблеми. Тобто керівнику слід готувати свого учня до захисту роботи завчасно. Доцільно буде проводити заняття, на яких учні будуть не лише слухати вчителя, але й самі говорити, робити якісь доповіді, відповідати на питання. Чудово, якщо дитина відвідує якісь гуртки, де вона вчиться спілкуванню або виступу перед іншими людьми. Слід звернути увагу на те, що така підготовка починається не за тиждень до захисту, а значно раніше. Бажано вчити учня розповідати текст своїми словами, не читаючи доповідь з аркуша. Такий досвід для учасника олімпіади може не бути потрібним, а ось для учасника МАН – обов'язковим!

Третій аспект стосується оформлення постера. На наш погляд, це найпростіше, що є у постерному захисті. Наразі існує багато ресурсів для створення красивих постерів, тобто особливих проблем не має виникнути. Більшість учнів доволі добре володіють такими програмами і можуть легко створити гарний плакат. Керівнику лише потрібно завчасно обговорити з учнем зміст постера та потім перевірити результат. В Додатку Б ми наводимо приклад постера учасників конкурсу-захисту.

І, нарешті, останній етап захисту – наукова конференція. Ця частина захисту проводиться саме як конференція, в якій беруть участь всі учасники конкурсу і на якій кожний учасник представляє свою роботу. Журі також присутнє на науковій конференції, але тут питання задають інші учасники конференції. Доповідь на постерному захисті і доповідь на науковій конференції мають бути різними. Структура доповіді на постерному захисті регламентована, тоді як на конференції учасник говорить про те, що вважає за потрібне. Наприклад, про найбільш цікавий результат роботи, або про найцікавішу частину

дослідження – вибір з доповідачем. Зрозуміло, що слід загально представити свою роботу, але дублювати інформацію з постерного захисту непотрібно. Бажано винести на конференцію ту інформацію, яку журі ще не чуло, але яку учасник вважає такою, що заслуговує на увагу.

Критерії, за якими оцінюється наукова конференція:

- Актуальність теми дослідження;
- Чіткість, логічність і послідовність викладення матеріалу;
- Критичний аналіз досліджуваної проблеми з зазначенням особистого внеску учасника в її вирішенні;
- Самостійність, оригінальність і доказовість суджень;
- Культура мовлення, вільне володіння матеріалом, доступність та оригінальність подання інформації, кваліфіковане ведення дискусії (вичерпність відповідей і змістовність, наукова коректність заданих питань.

Аналізуючи критерії, бачимо, що найголовнішим на конференції є не сама робота, хоча її актуальність береться до уваги, а саме її презентація. Учасник має переконати слухачів в тому, що його дослідження важливе, цікаве, розповісти про свій внесок, про якісь найбільш цікаві частини роботи або результати. І при всьому цьому доповідь має бути чіткою, послідовною, доказовою. Учасник за час доповіді має захопити аудиторію своїм дослідженням. І слід врахувати, що під час конференції можуть відбуватися дискусії навколо питань, пов’язаних з роботою (під час постерного захисту дискусії зазвичай не відбуваються). Учасники конференції уважно слухають доповідача та задають йому питання. Враховуючи наявність конкуренції, питання можуть бути складними та неочікуваними. Журі оцінює при цьому, як доповідач відповідає, чи вміє вести дискусію, а також враховує коректність заданих питань, за що учасники також отримують бали. Отже, щоб виступ на науковій конференції був вдалим, доцільно проводити міні-конференції для членів гуртка з підготовки до змагань. Це можуть бути дуже короткі заходи в форматі доповідь-відповіді на питання-дискусія. Такі тренінги навчать учнів уважно слухати інших, формулювати питання, відповідати на питання та ввічливо і кваліфіковано вести дискусію.

Підбиваючи підсумки, можна стверджувати, що підготовка учнів до участі в олімпіадах та підготовка до наукової роботи мають певні відмінності, хоча доволі часто одні й ті самі учні беруть участь і в олімпіадах, і, наприклад, в конкурсі-захисті МАН. Але якщо при підготовці до письмових конкурсів та олімпіад акцент треба робити саме на вмінні розв’язувати задачі, то при підготовці до конкурсів, які передбачають виступ учасника з доповіддю та відповіді на питання, слід звертати увагу на презентаційні та комунікаційні навички учасника.

Питання для самоконтролю, практичні завдання

1. Які наукові проєкти для школярів України Вам відомі? Коротко охарактеризуйте їх.
2. Опишіть основні частини конкурсу-захисту дослідницьких робіт учнів-учасників МАН.
3. Охарактеризуйте основні вимоги до дослідницьких робіт учасників МАН.
4. Що таке постерний захист і чим він відрізняється від наукової конференції?
5. Які основні критерії оцінювання учасників в конкурсі-захисті дослідницьких проєктів?
6. Чим відрізняється підготовка учнів до олімпіад від підготовки до захисту дослідницьких проєктів?
7. Охарактеризуйте основні етапи роботи над дослідницьким проєктом. Поясніть, на якому етапі яка саме допомога від керівника потрібна учню-досліднику.
8. Перегляньте сторінку для освітян на платформі МАН за адресою https://man.gov.ua/educators. Яка інформація, представлена там, Вас зацікавила? Чому? Як можна використовувати її для свого професійного розвитку?
9. В збірках тез знайдіть інформацію стосовно робіт учасників конкурсу-захисту МАН, відділення МАТЕМАТИКА (секції Математика, Прикладна математика, Статистика), ознайомтеся з ними та зробіть аналіз: вкажіть, з роботами якого етапу та якого року Ви знайомилися, проаналізуйте теми робіт та їх зміст (наскільки це може бути складним, цікавим, актуальним тощо), поділіться своїм особистим враженням від тематики та змісту робіт.
10. Завітайте до виставки постерів учасників Всеукраїнського конкурсу-захисту наукових робіт поточного року, відділення Математика. Ознайомтеся з представленими постерами та анотаціями робіт. Оберіть для себе 2 постери та надайте аналіз цих двох робіт так, як в попередньому завданні, та додайте свої враження і коментарі до зовнішнього вигляду постера. Якщо голосування за постери буде відкритим, проголосуйте. Якщо закритим, вкажіть, за який би постер голосували Ви особисто, якщо б голосування було актуальним, та поясніть свій вибір.
11. Уявіть себе учасником конкурсу-захисту та напишіть мотиваційний лист. В якості теми можете обрати тему своєї кваліфікаційної роботи, а в мотиваційному листі представте себе як майбутнього випускника магістратури.
12. За бажанням зробіть постер до якогось зі своїх попередніх досліджень (наприклад, курсової роботи).

4 ЗАГАЛЬНІ ПИТАННЯ ПІДГОТОВКИ ДО МАТЕМАТИЧНИХ ЗМАГАНЬ

Зрозуміло, що різноманітні змагання найперше вимагають гарної математичної підготовки. Це вміння розв'язувати задачі, логічно міркувати, проводити доведення, це глибоке знання та розуміння теоретичних фактів, це зацікавленість в пошуку правильного розв'язання, бажання дізнаватися щось нове, уміння працювати самостійно. Саме тому попередні розділи посібника були присвячені питанням математичної підготовки до участі в змаганнях. Але лише математичною підготовкою справа не обмежується.

4.1 Психологічні аспекти підготовки до математичних змагань

Математичне змагання – це в першу чергу змагання, а не екзамен чи контрольна робота, під час яких перевіряються та оцінюються знання та вміння конкретної дитини. Змагання — це організований процес або подія, у якій кілька учасників намагаються досягти кращого результату в певній діяльності, щоб визначити переможця. Мета змагання — показати, хто є найсильнішим та найвправнішим у конкретній сфері. Тобто в процесі будь-якого змагання учасники порівнюються один з іншим, що само по собі може бути стресовим, особливо для дитини, яка не звикла, щоб її порівнювали з іншими, яка впевнена в своїй унікальності і боляче сприймає будь-яке порівняння не на свою користь.

Підготовка до математичних змагань — це не лише розв'язування складних задач, але й серйозне психологічне випробування. Емоційна стабільність, вміння керувати стресом та впевненість у власних силах часто відіграють не меншу роль, ніж знання й навички. Це стосується не лише інтелектуальних конкурсів, а й будь-яких змагань – спортивних, творчих також.

Зупинимося на деяких психологічних аспектах участі в змаганнях.

1. Мотивація та цілі учасника. Починаючи підготовку до конкурсів, важливо розуміти, чому учень планує брати участь в змаганнях. Якщо присутні внутрішні мотиватори – інтерес до математики, прагнення до самореалізації, бажання перевірити себе, це чудово. Така дитина займається математикою як улюбленою справою і мріє розвиватися в цьому напрямку. Точно так, як і в спорті, танцях, грі на музичних інструментах, малюванні тощо. Але якщо має місце сильний зовнішній тиск (наприклад, очікування батьків або вчителів), він може призвести до емоційного вигорання і небажання займатися будь-чим.
2. Керування стресом. Навіть добре підготовані учні стикаються з хвилюванням перед конкурсами, особливо якщо бракує досвіду участі (досвід показує, що діти, які часто беруть участь у змаганнях, краще вміють налаштувати себе). Бажано розповісти учням про деякі техніки, які

допомагають впоратися зі стресом: техніка дихання та релаксації, візуалізація успішного проходження олімпіади, уникання надмірного перенавантаження в дні перед змаганням. Такі практики будуть корисними не лише для учасників змагань. Уміння контролювати себе в стресовій ситуації буде корисним будь-кому.

3. Витривалість. Олімпіади часто тривають 3-4 години, тож важлива витривалість учасників. Регулярні тренування в умовах, наближених до реальних (з таймером, без перерв), допомагають привчити мозок до тривалої концентрації. Зауважимо, що для сучасних дітей може бути реальною проблемою сконцентруватися на одній справі протягом довгого часу. Прокрастинація, кліпове мислення можуть заважати зосередженню. Якщо видно, що дитина має проблеми з тривалою концентрацію на одній справі, слід з'ясувати в чому проблема та намагатися її усунути.
4. Робота над помилками. І це не про задачі. Після кожного змагання слід проаналізувати психологічні чинники: що заважало, коли виникло хвилювання, які думки заважали зосередитися. Це дозволить з кожним разом ставати емоційно сильнішим та напрацьовувати правильну тактику участі в змаганні.
5. Впевненість. Віра у власні сили — ключовий чинник. Навіть якщо деякі задачі видаються надто складними, не варто панікувати. Досвідчені учасники знають: важливо не здатися і спробувати знайти серед задачах те, що точно знаєш. Не слід вважати, що всі навколо розумніші та спритніші.

Отже, враховуючи ці психологічні аспекти, ми пропонуємо невеликий перелік загальних порад, які будуть корисними кожному учаснику при підготовці та участі в змаганнях:

- Визначте свою мету. Розуміння, навіщо ви берете участь в змаганні, допоможе зберегти мотивацію. Спілкуйтеся з тими, хто вас підтримує, і уникайте надмірного тиску з боку.
- Пам'ятайте, що регулярні тренування значно більш продуктивні, ніж інтенсивна робота протягом короткого терміну. Складіть такий розклад, в якому буде місце і для занять, і для відпочинку, і для спілкування з друзями.
- Навчіться заспокоюватись. Прості техніки дихання, легка фізична активність або коротка медитація допоможуть зняти напругу. Оберіть для себе те, що допомагає саме вам. Вірте в свої сили та налаштовуйтесь на позитивний результат.
- Працюйте над помилками спокійно. Помилки — частина навчання. Аналізуйте їх без самокритики. Не кожен конкурс — перемога. Але кожен — шанс навчитися чомусь новому. Ставтеся до невдач як до досвіду.
- Не порівнюйте себе з іншими. Не кожний стає переможцем, але ваш прогрес — найкращий показник.

4.2 Корисні поради для олімпіадників та їх наставників

Як видно з попередніх розділів, в Україні існує велика кількість різноманітних інтелектуальних змагань математичного напряму, з яких кожний охочий може обрати те, що йому до вподоби. В кожному розділі ми розказали про особливості різних змагань та про те, як краще організувати підготовку до них та на слід звернути особливу увагу. Наведемо тепер узагальнений перелік порад, який стане у нагоді учням, що планують брати участь в математичних змаганнях:

- Вивчайте теорію поглиблено. Олімпіадна математика виходить за межі шкільної програми, тобто вам потрібно додатково розбиратися з темами олімпіадної математики. Намагайтеся не просто дізнатися про якісь теореми, формули або теоретичні факти, а й зрозуміти, звідки вони випливають та як доводяться.
- Вивчайте типові задачі. Ознайомтеся з основними прийомами розв’язання таких задач та практикуйтеся в їх розв’язанні.
- Розв’язуйте задачі поступово. Починайте з базового рівня і поступово переходьте до складніших задач. Бажано не «стрибати» між задачами з різних тем, краще ґрунтовно розібратися з задачами однієї теми, потім переходити до іншої.
- Аналізуйте розв’язки. Після кожної задачі намагайтеся зрозуміти не лише як, а й чому вона так розв’язується. Якщо існують альтернативні розв’язки, розберіться і з ними.
- Сплануйте час так, щоб ви могли розв’язувати задачі регулярно (можливо, кілька разів на тиждень). Це значно краще, ніж інтенсивно працювати лише напередодні змагання.
- Обов’язково майте зошит (паперовий або цифровий), в якому ви будете працювати – записувати теоретичні відомості, розв’язки типових задач, цікаві ідеї, методи розв’язання.
- Ознайомтесь із завданнями попередніх років — це допоможе зрозуміти формат і рівень складності. Намагайтеся розв’язувати ці задачі, не зазираючи одразу у готові розв’язання.
- Приєднуйтеся до груп однодумців, знайдіть наставника, до якого зможете звертатися за порадами та консультаціями. Робота в команді, обговорення рішень допомагає краще зрозуміти матеріал і помітити слабкі місця. Не бійтеся задавати питання, якщо щось не розумієте.
- Беріть участь в роботі математичних гуртків (це можна робити дистанційно), літніх математичних таборів. Відвідуйте лекції та майстер-класи. Спілкування з людьми, які займаються олімпіадною математикою професійно, допоможе вам.
- Розвивайте математичну ерудицію. Читайте математичні книги й журнали для школярів, розв’язуйте нестандартні задачі.

І наостанок – перелік порад для вчителів, які вирішили готувати своїх учнів до математичних змагань:

- Визначте свою мету. Підготовка дітей до змагань буде займати багато часу, тобто слід чітко розуміти, що на вас очікує. Наявність внутрішньої мотивації, а не примусу з боку керівництва значно спростить справу.
- Спробуйте знайти однодумців серед колег. Сумісно легше організувати якісну підготовку учнів. Намагайтеся знайти підтримку у адміністрації навчального закладу в організації такої роботи.
- Підвищуйте свій рівень. Для роботи з олімпіадниками не вистачить лише шкільного курсу математики. Навчити можна того, що добре знаєш сам. Читайте літературу, відвідуйте вебінари, обговорюйте питання з колегами.
- Намагайтеся відібрати тих учнів, які зацікавлені в математиці та участі в конкурсах. Не орієнтуйтеся на відмінників – мотивація часто важливіша за початковий рівень.
- Продумайте та створіть план роботи вашого гуртка хоча б на навчальний рік. Ваші зустрічі мають бути регулярними, до них треба готуватися, як до уроків. Подумайте, які теми ви маєте розглянути, ретельно підбирайте задачі до кожного заняття. Пояснюйте поняття глибше, ніж у підручнику. Розширюйте шкільну програму, вводьте додаткову теорію. Не починайте одразу з дуже складних задач.
- Навчайте різним стратегіям розв’язання. Показуйте учням кілька підходів до однієї задачі — це розвиває гнучкість мислення.
- Створюйте атмосферу співпраці. Заохочуйте обговорення розв’язків у групах, проведення міні-семінарів чи «математичних боїв». Привчайте дітей пояснювати свої розв’язання, відстоювати свою думку, дискутувати.
- Навчайте працювати з часом. Тренуйте навички тайм-менеджменту – навчіть розподіляти час при роботі над завданнями, обирати правильну тактику при роботі.
- Системно працюйте над помилками своїх учнів. Аналізуйте їх типові хиби та «підводні камені» олімпіадних задач. Пояснюйте, що без помилок не буває руху вперед.
- Надавайте зворотний зв’язок. Учень повинен розуміти, що у нього виходить, а над чим треба попрацювати — і не лише у балах, а словами.
- Підтримуйте психологічно. Допоможіть учням справлятись зі страхом помилки, невдач і «завалених» турів. Оцінюйте прогрес, а не тільки результат. Не сваріть за невдалі виступи.
- Якщо ви любите математику, будьте прикладом для своїх учнів, намагайтеся показати їм її красу та необхідність.

Питання для самоконтролю, практичні завдання

1. Як, на Ваш погляд, краще організувати роботу математичного гуртка з підготовки до математичних змагань?
2. З якими труднощами може зустрітися вчитель, який вирішив готувати своїх учнів до участі в математичних змаганнях?
3. На які психологічні аспекти підготовки до змагань слід звернути увагу? Що саме слід враховувати?
4. Якщо б Вам було потрібно скласти річний план роботи математичного гуртка в 10 класі, які в теми Ви в нього включили?
5. Які поради Ви б дали учню, який висловив бажання брати участь в математичних конкурсах?
6. Створіть свій особистий рейтинг з 5 найбільш цікавих, на Ваш погляд, математичних конкурсів. Поясніть свій вибір.
7. Розробіть план роботи гуртка з підготовки учнів 9-10-11 класу до участі в математичних конкурсах та олімпіадах. Розраховуйте на 1 заняття на тиждень протягом навчального року (35 тижнів). Продумайте, які теми варто розглянути (навести перелік питань), які задачі запропонувати (тільки умови), в якому форматі провести те чи інше заняття (лекція, бліц, практикум тощо). Конспект занять не потрібен, розв'язання задач також не потрібні, тільки план, враховуючі участь Ваших учнів у можливих заходах, про які говорилось протягом курсу (терміни їх проведення відомі). Спробуйте зробити план, який зміг би Вам знадобитися в Вашій майбутній роботі. Зробіть посилання на джерела, якими Ви користуєтеся.
8. Поміркуйте та запишіть свої особисті поради, як доцільніше готувати учнів до математичних олімпіад. Чудово, якщо врахуєте свій особистий досвід, якщо він є. Спробуйте чесно сформулювати своє ставлення до олімпіад, до необхідності готувати учнів до цих змагань, які труднощі це викликає.
9. Подумайте та запишіть свої думки з приводу організації підготовки до олімпіад в межах одного навчального закладу. Припустіть, що підготовкою до олімпіад разом з Вами також будуть займатися Ваші колеги. Які умови бажано створити для вчителів?
10. Підсумуйте свої особисті враження від прослуханого курсу. Що було для Вас добре відомим, а що Ви почули вперше? Що Вас найбільше вразило? Як Ви вважаєте, особисто Вам було б складно займатися підготовкою учнів до математичних змагань? Якщо так, то чому? Було б Вам цікаво чи Ви б воліли не братися за цю справу? З чого Ви почнете, коли до Вас звернуться учні, які бажають брати участь в олімпіадах чи інших змаганнях? Сформулюйте декілька порад самим собі.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Міжародний математичний конкурс «Кенгуру». URL : http://www.kangaroo.com.ua/
2. Міжнародний чемпіонат з розв'язання логічних математичних задач. URL : https://www.ffjm.org/
3. Відкриті олімпіади з лінгвістики. URL : https://ling.org.ua/contests/types/olympiads/
4. Математичний олімпіадний рух України. URL : http://matholymp.org.ua/contests/
5. Сарана О. А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч : навчальний посібник. Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2011. 400 с.
6. Положення про олімпіадний та турнірний рух. URL : https://mon.gov.ua/news/nove-polozhennia-pro-olimpiadnyi-ta-turnirnyi-rukh-zminy-shcho-vidkryvaiut-novi-mozhlyvosti
7. Мала Академія Наук. URL : https://man.gov.ua/about
8. Наказ МОН України №147 від 08.02.2021 «Про затвердження Правил проведення Всеукраїнського конкурсу-захисту науково-дослідницьких робіт учнів - членів Малої академії наук України». URL : https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/z0441-21#n7

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Кравчук В. Р. Задачі математичних олімпіад. Тернопіль : Підручники і посібники, 2015. 112 с.
2. Кривошея І. М., Збожинська Т. С. Задачі міжнародних математичних чемпіонатів : навч.-метод. посіб. Вінниця : ТОВ «Нілан-ЛТД», 2015. 172 с.
3. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2016/2017 навч.рік : навч.-метод.посіб. / за ред. Б. В. Рубльова. Харків : Гімназія, 2018. 464 с.
4. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2015/2016 навч.рік: навч.-метод.посіб. / за ред. Б Б. В. Рубльова. Харків : Гімназія, 2017. 432 с.
5. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2014/2015 навч.рік: навч.-метод.посіб. / за ред. Б. В. Рубльова. Харків : Гімназія, 2016. 464 с.
6. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2013/2014 навч.рік: навч.-метод.посіб. / за ред. Б. В. Рубльова. Харків : Гімназія, 2015. 465 с.
7. Коваль Т. В. 400 задач з математичних олімпіад. 8-11 класи. Тернопіль : Мандрівець, 2004. 80 с.
8. Математичні олімпіадні змагання школярів: 2006–2007 рр. / А.В. Анікушин, А.Р. Арман та ін. Київ : Літера, 2008. 224 с.
9. Київські міські математичні олімпіади. 2003-2011 роки / за ред. Б. В. Рубльова. Харків : Гімназія, 2011. 192 с.
10. Федак І. В. Олімпіади з математики: 1987-2016 роки. Завдання, відповіді. Харків : Основа, 2016. 239 с.
11. Федак І. В. Розв’язування задач підвищеної складності з математики. Спеціальний курс. Івано-Франківськ : Голіней, 2010. 100 с.
12. Ясінський В. А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв’язування. Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2005. 208 с.
13. Лейфура В. М.Змагання юних математиків України. 2003 рік. Хаарків :Основа, 2004. 80 с.
14. Математичні олімпіади школярів України: 1991–2000 рр. / В.М. Лейфура, І.М. Мітельман, В.М. Радченко, В.А. Ясінський. Київ : Техніка, 2003. 541 с.
15. Поліхун Н. Ш. Як стати дослідником : навчально-методичний посібник для учнів. Київ : ТОВ «Праймдрук».2012. 224 с.

ДОДАТОК А

Приклад мотиваційного листа учасника конкурсу-захисту дослідницьких робіт учнів-членів МАН

Мотиваційний лист

Шановні члени журі,

Тема мого дослідницького проєкту: «Вимірювання відстані за допомогою смартфону».

З самого дитинства мене цікавила математика. Особливо я полюбляв геометрію і все, що було пов'язано з нею. Будучи дитиною часто задавав собі питання: «Як дізнатися розміри дерева, довжину паркана, як точно знайти розміри стін та відстань між ними». На всі ці питання мені відповідали батьки. Вони говорили, що є пристрої та інструменти, які дозволяють вимірювати висоту, довжину, ширину та інші величини.

Протягом років я ріс і дитяче сприйняття світу зникало разом із вільним часом, який я присвячував навчанню. Зрештою в десятому класі я перейшов в іншу школу, де навчаюсь і зараз, де зустрів багато цікавих людей, які стали моїми товаришами. З ними мені було цікаво спілкуватися і працювати, тому коли мені запропонували навчатися у Малій академії наук учнівської молоді, я з радістю погодився. Над темою своєї наукової роботи я думав досить довго, адже ніяк не міг знайти тему, яка була б мені до вподоби і з якою мені було б цікаво працювати. І тут я пригадав, яке питання непокоїло мене в дитинстві. Після недовгих обговорень з моїм науковим керівником секції КМАНУМ було прийнято рішення взяти мою дитячу цікавість за основу моєї роботи, але перед цим трохи вдосконалити її, тому я вирішив шукати відстань, за допомогою тої речі, яка завжди зі мною так як і у багатьох людей, за допомогою смартфону. Ця робота стала справжньою мрією для мене, адже окрім реалізації моїх дитячих інтересів я також зміг паралельно пізнавати світ технологій та програмування.

Приступаючи до досліджень я вже знав, що програми-аналоги існують, але мені хотілося подивитися на цю проблему іншої сторони, тим більш я також знав, що не всі програми аналоги працюють коректно. Як виявилося до мене ніхто так не розглядав цю проблему і це стало причиною написання цієї роботи, але також саме через це мені було дуже важко збирати інформацію, щоб здогадатися як це можна реалізувати.

Я ще не знаю якій праці хотів би присвятити себе, але точно впевнений, що ця робота над проєктом, дала мені можливість трохи освоїтись у новій сфері та розширила мій кругозір.

З повагою Володимир Савченко

ДОДАТОК Б

Приклад постера учасника конкурсу-захисту дослідницьких робіт учнів-членів МАН

МИКОЛАЇВСЬКЕ ТЕРИТОРІАЛЬНЕ ВІДДІЛЕННЯ
МАН УКРАЇНИ

Задачі на знаходження найменшого та найбільшого значення в геометрії



Роботу виконала: Шапіна Анастасія Олександрівна, учениця 11 класу Миколаївського ліцею імені професора М. Аласкандрова Миколаївської міської ради Миколаївської області

Науковий керівник: Сорочан Оксана Олександрівна, вчитель математики Миколаївського ліцею імені професора М. Александрова Миколаївської міської ради Миколаївської області

Науковий консультант: Воробйова Алла Іванівна, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри інтелектуальних інформаційних систем ЧНУ ім. Петра Могили

Мета роботи: зробити класифікацію задач на знаходження найбільшого та найменшого значення, розглянути способи їх розв'язування, систематизувати різні методи і підходи до їх розв'язування, проаналізувати переваги та недоліки кожного з них.

Об'єкт: екстремальні задачі в геометрії.

Предмет: задачі з курсу геометрії на знаходження найбільшого та найменшого значення величини як і з застосуванням диференціального числення, так і без нього.

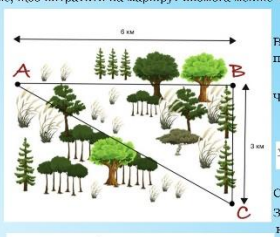
- Зібрати інформацію про задачі з теми.
- Проаналізувати взаємодію умови задачі зі способом її розв'язування.
- Вивчити основні типи задач.

Завдання

- Систематизувати задачі на знаходження найбільшого та найменшого значення по способу їх розв'язування.
- Зробити аналіз методів і прийомів розв'язування задач, зокрема їх переваг та недоліків.
- Скласти власні авторські задачі з даної теми.

Задачі, що розв'язуються із застосуванням похідної

Турист стартує з пункту А і йде до пункту С. Якщо він йде вказаним шляхом (суцільна лінія), його середня швидкість 5 км/год, а якщо він йде через ліс, його середня швидкість 4 км/год. Якщо ми знаємо, що відстань від А до В дорівнює 6 км і відстань від В до С дорівнює 3 км, в якому місці потрібно звернути з дороги та йти через ліс, щоб витратити на маршрут якомога менше часу?



Відомо, що $S = Vt$, $t = \frac{S}{V}$ і загальний час подорожі $t = t_1 + t_2$.

Час на проміжку від А до К дорівнює $\frac{6-x}{5}$ (год), а на проміжку від К до С $\frac{\sqrt{x^2+9}}{4}$ (год).

Складаємо рівняння: $t = \frac{6}{5} - \frac{1}{5}x + \frac{1}{4}(x^2+9)^{\frac{1}{2}}$

Знайдемо похідну рівняння та прирівняємо її до нуля:

$t' = -\frac{1}{5} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}(x^2+9)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x = -\frac{1}{5} + \frac{2x}{8\sqrt{x^2+9}}$; $t' = 0 \Rightarrow -\frac{1}{5} + \frac{2x}{8\sqrt{x^2+9}} = 0$

$2x = 4\sqrt{x^2+9}$

$25x^2 = 16(x^2+9)$

$x = 4$

Зауважимо, що x не може приймати від'ємне значення (x – відстань).

$x = 4$ – відстань від точки К до В, тоді $AK = 6 - 4 = 2$ (км). Робимо висновок, що необхідно звернути на відстані 2 кілометрів від пункту А.

Відповідь: потрібно звернути з дороги на відстані 2 кілометрів від пункту А.

Додаткові твердження, які спрощують вирішення

Нехай функція y = f (x) визначена і безперервна на відрізку [a; b]. Тоді свої найбільші і найменші значення функція досягає в критичних точках, що лежать всередині відрізка [a; b], або на кінцях відрізка.

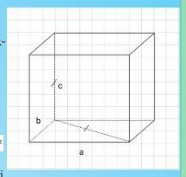
Якщо функція задана на відрізку [a; b], зростає на [a; x0] і спадає на [x0; b], то f (x) є найбільшим значенням функції на відрізку [a; b]. Аналогічне зауваження для найменшого значення.

Задачі, що розв'язуються без застосування похідної

Потрібно вирубати з граніту постамент у формі прямокутного паралелепіпеда, висота якого має бути рівною діагоналі основи, а площа основи повинна дорівнювати 2 $м^2$. Якими мають бути розміри паралелепіпеда, щоб об'єм постаменту виявився найменшим? Знаючи, що ціна граніту за $м^3$ дорівнює 7000 грн, розрахуйте найбільш економічну вартість постамента.

Позначимо довжину, ширину та висоту паралелепіпеда відповідними літерами: a, b, c. За умовою задачі, $c = \sqrt{a^2+b^2}$, $ab = 2$, тоді об'єм паралелепіпеда перепишеться так:

$V = abc = ab\sqrt{a^2+b^2} = 2\sqrt{a^2+b^2}$



Очевидно, що об'єм буде найменшим тоді, коли вираз a^2+b^2 набуває найменшого значення. За нерівністю Коші:

$a^2 + b^2 \geq 2ab$. Рівність досягається при $a^2 = b^2 \Rightarrow a = b = \sqrt{2}$. Тоді $c = 2$.

Отже, постамент буде мати розміри довжина $\sqrt{2}$ м, ширина $\sqrt{2}$ м, та висота 2 м. Розрахуємо найбільш економічну вартість постаменту, так як вона досягається при найменшому об'ємі:

$S = 7000V = 28\,000$ грн.

Відповідь: $\sqrt{2}$ м × $\sqrt{2}$ м × 2 м; 28 000 грн.

Основні методи розв'язання задач на екстремум без похідної

- Метод координат
- Наслідки з нерівності Коші
- Математичне моделювання
- Властивості квадратичних функцій
- Властивості тригонометричних функцій
- Властивості ламаної, що складається з двох відрізків

- Використання диференціювання не завжди є раціональним способом для розв'язання проблеми у даній роботі, було поставлене завдання дослідити інші шляхи вирішення.
- Були виділені ключові методи розв'язання задач без застосування похідної.
- Перевагою цього способу є можливість уникнути застосування похідної. Недолік – для кожної задачі необхідно підбирати властивий саме їй спосіб розв'язання.

Висновки

- Щоб продемонструвати всю різноманітність та складність розв'язків таких задач, були розглянуті, як класичні задачі, задачі шкільного рівня, та задачі, що можуть відповідати олімпіадному рівню
- Для розв'язування були використані різні прийоми знаходження максимальних та мінімальних значень функцій, що базувалися на практичному застосуванні похідної.
- Основною перевагою способу є те, що він універсальний. Його недолік – громіздкість, іноді труднощі при складанні функції та подальшому її дослідженні.

- Задачі в роботі підібрані з різних джерел, проаналізовані та класифіковані в контексті досліджуваної проблеми. Так були опрацьовані європейські підручники для підготовки до A-Level, PSE, математичні періодичні видання, такі як «Квант» та «Математика в школі» тощо.
- В роботі були систематизовані та класифіковані екстремальні задачі, шляхом поділу їх на планіметричні та стереометричні, а також на три групи: ті, що розв'язуються за допомогою похідної, без її застосування та універсальні.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ
(українською мовою)

Красікова Ірина Володимирівна

Д'яченко Наталія Миколаївна

Підготовка до олімпіад, конкурсів і наукової роботи з математики в профільній школі

Навчальний посібник
для здобувачів вищої освіти магістра
спеціальності «Середня освіта»
освітньо-професійної програми «Середня освіта (Математика)»

Рецензент *П.Г. Стєганцева*
Відповідальний за випуск *С.М. Гребенюк*
Коректор *І.В. Красікова*