Міністерство освіти і науки України
Запорізький національний університет

О. Г. Спиця, І. В. Зіновєєв, Н. І.-В. Манько

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Навчальний посібник
для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра
спеціальності «Інформаційні системи і технології»
освітньо-професійної програми «Інформаційні системи і технології»

Затверджено
вченою радою ЗНУ
Протокол № 6 від 21.12.2021

Запоріжжя
2022

УДК 512.64+514.12](075.8)
С727

Спиця О. Г., Зіновєєв І. В., Манько Н. І.-В. Лінійна алгебра та аналітична геометрія : навчальний посібник для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра спеціальності «Інформаційні системи і технології» освітньо-професійної програми «Інформаційні системи і технології». Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2021. 96 с.

Навчальний посібник містить теоретичні відомості про множини матриці, визначники, системи лінійних алгебраїчних рівнянь, вектори, криві та поверхні першого та другого порядків. Він допоможе ознайомитись з основними методами аналітичної геометрії та лінійної алгебри, зокрема координатним та векторним, буде сприяти засвоєнню основних алгоритмів: обчислення визначників, знаходження рангів матриць, розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь тощо. У посібнику наведено приклади розв’язання основних типів задач та задачі для самостійної роботи студентів.

Для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра спеціальності «Інформаційні системи і технології» освітньо-професійної програми «Інформаційні системи і технології».

Рецензент
С. М. Гребенюк, доктор технічних наук, доцент, завідувач кафедри фундаментальної та прикладної математики

Відповідальний за випуск
І. В. Зіновєєв, кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри загальної математики

ЗМІСТ

Вступ…… 4
Тема 1 Матриці й дії над ними…….. 6
Тема 2 Визначники та їх властивості……... 15
Тема 3 Обернена матриця. Ранг матриці. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь…….. 22
Тема 4 Означення вектора. Лінійні операції над векторами. Ділення відрізка в даному відношенні…… 37
Тема 5 Лінійна залежність векторів. Поняття векторного простору, базису й координат вектора…… 44
Тема 6 Загальна декартова й полярна системи координат…… 51
Тема 7 Добутки векторів…… 58
Тема 8 Пряма на площині, площина й пряма в просторі…… 67
Тема 9 Елементи теорії кривих другого порядку…… 79
Тема 10 Елементи теорії поверхонь другого порядку…… 89
Використана література……. 95
Рекомендована література…….. 96

ВСТУП

Курс «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» належить до циклу нормативних дисциплін.

Метою вивчення навчальної дисципліни «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» є оволодіння основними теоретичними відомостями з аналітичної геометрії та вищої алгебри, засвоєння базових понять алгебри та геометрії, оволодіння уміннями розв'язання практичних задач.

Основними *завданнями* вивчення дисципліни «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» є:

- засвоєння понять матриця, визначник, вектор, лінійний простір, крива та поверхня;
- засвоєння основних властивостей матриць та лінійних просторів;
- набуття умінь із застосування матриць та визначників до розв'язання задач лінійної алгебри;
- оволодіння уміннями із застосування векторів та їх добутків до розв'язування задач аналітичної геометрії.

Міждисциплінарні зв'язки. Курс «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» дає можливість закласти основну базу для подальшого вивчення дисциплін «Комп'ютерна алгебра» та «Теорія ймовірностей та математична статистика, в яких використовується апарат лінійної алгебри та аналітичної геометрії.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен

знати:

- основні поняття, факти та теореми лінійної алгебри;
- основні поняття, факти та теореми аналітичної геометрії;
- сфери застосування матриць та визначників;
- сфери застосування векторів, їх добутків, кривих та поверхонь I та II порядків.

Вміти:

- застосовувати основні поняття, твердження та теореми до розв'язку задач;
- наводити приклади, які демонструють суттєвість теоретичних понять чи фактів, або спростовують хибні ствердження;
- застосовувати елементи алгебри до розв'язання задач геометрії, та використовувати матеріал попередніх тем при вивченні наступних;
- розв'язувати типові задачі кожної з вивчених тем.

Змістове наповнення курсу, що викладається на лекційних і практичних заняттях та засвоюється студентом під час самостійної роботи, забезпечує набуття компетентностей:

- здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу;
- здатність до аналізу, синтезу і оптимізації інформаційних систем та технологій з використанням математичних моделей і методів.

Згідно з робочою програмою дисципліни «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» посібник охоплює теоретичний матеріал до наступних тем:

- Матриці й дії над ними.
- Визначники та їх властивості.
- Обернена матриця. Ранг матриці. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь.
- Означення вектора. Лінійні операції над векторами. Ділення відрізка в даному відношенні.
- Лінійна залежність векторів. Поняття векторного простору, базису й координат вектора.
- Загальна декартова й полярна системи координат.
- Добутки векторів.
- Пряма на площині, площина й пряма в просторі.
- Елементи теорії кривих другого порядку.
- Елементи теорії поверхонь другого порядку.

В кожні темі окрім теоретичного матеріалу представлена велика кількість прикладів розв’язання задач з детальними коментарями, тести для самоперевірки рівня засвоєння теоретичних знань та сукупність задач і вправ для відпрацювання й закріплення умінь і навичок.

ТЕМА 1 МАТРИЦІ ТА ДІЇ НАД НИМИ

Теоретичні відомості

Матрицею розміру $m \times n$, де m – число рядків, n – число стовпців, називається прямокутна таблиця чисел, розташованих у певному порядку. Ці числа називаються *елементами матриці*. Місце кожного елемента однозначно визначається номерами рядка й стовпця, на перетині яких він знаходиться. Елементи матриці позначаються a_{ij}, де i – номер рядка, а j – номер стовпця. Позначення:

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ або } A_{m\times n} = \left(a_{ij}\right)_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}.$$

Матриця, у якої число рядків дорівнює числу стовпців, називається *квадратною* (квадратну матрицю розміру $n \times n$ називають матрицею n-го порядку).

Елементи квадратної матриці, у яких співпадають номери рядка й стовпця, на перетині яких він знаходиться, утворюють *головну діагональ*. Інша діагональ квадратної матриці називається *побічною*.

Квадратна матриця, у якої всі елементи, окрім елементів головної діагоналі, дорівнюють нулю, називається *діагональною*.

Діагональна матриця, у якої всі елементи головної діагоналі дорівнюють 1, називається *одиничною*. Позначення:

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Квадратна матриця називається *трикутною*, якщо всі елементи, розташовані по одну сторону від головної діагоналі, рівні 0.

Матриця, всі елементи якої дорівнюють 0, називається *нульовою*. Позначення:

$$\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Матриці називаються *рівними*, якщо вони мають однаковий розмір і всі їх відповідні елементи рівні, тобто

$$A = B, \text{ якщо } a_{ij} = b_{ij}, \text{ де } i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

Якщо $a_{mn} = a_{nm}$, то матриця називається *симетричною*. Наприклад:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Матриця, що містить один рядок або один стовпець, називається *вектором* (або *матрицею-рядком* або *матрицею-стовпцем* відповідно). Їх вид:

$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ – матриця-стовпець, $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}$ – матриця-рядок.

Матриця розміру 1×1, що складається з одного числа, ототожнюється із цим числом, тобто матриця $(5)_{1\times 1}$ є числом 5.

Транспонування

Матриця, отримана з даної заміною кожного її рядка стовпцем з тим же номером, називається матрицею, *транспонованою* до даної. Позначення: A^T або A^t.

Наприклад, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Транспонована матриця має властивість: $\left(A^T\right)^T = A$.

Додавання матриць

Сумою двох матриць однакового розміру називається матриця того ж розміру, кожний елемент якої є сумою відповідних елементів матриць-доданків, тобто, якщо $A_{m\times n} = (a_{ij})$ й $B_{m\times n} = (b_{ij})$, то

$$C_{m\times n} = A_{m\times n} + B_{m\times n} = (a_{ij} + b_{ij}),$$

де $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

Наприклад, $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 10 \end{pmatrix}$.

Розглянемо застосування додавання матриць. Усі зображення, які можна побачити в мережі Інтернет, створені або опрацьовані за допомогою комп'ютера (одержані, приміром, з цифрового фотоапарата або відскановані) і збережені в цифровому форматі, мають тисячі або й, навіть, мільйони маленьких квадратиків, які називають пікселями. Пікселі одержують поділянням будь-якого зображення сіткою. Комп'ютер може змінювати яскравість кожного пікселя сітки.

Приміром, літеру Г на рис. 1.1 зображено за допомогою 9 пікселів у сітці 3×3. Розгляньмо чотири відтінки: білий, світло-сірий, темно-сірий та чорний і занумеруймо їх як 0, 1, 2, 3 відповідно (рис. 1.2).

Запишемо матрицю, яка відповідає цифровій фотографії літери Г, кожний елемент якої відповідає використаному відтінку:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Щоб збільшити контрастність фотографії (темно-сірий відтінок літери перетворити на чорний (тобто збільшити на 1), а світло-сірий відтінок тла на білий (тобто зменшити на 1)) (рис. 2.3), до матриці фотографії А треба додати матрицю $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$:

$$A+B=\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 3 & 0\\ 3 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$



Рисунок 1.1

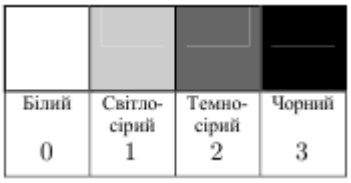


Рисунок 1.2

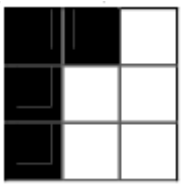


Рисунок 1.3

Множення матриці на число

Добутком матриці $A_{m\times n}=(a_{ij})$ *на число* $k\in R$ називається матриця $B_{m\times n}=(b_{ij})$, кожний елемент якої отриманий множенням відповідного елемента матриці A на число k, тобто $b_{ij}=k\cdot a_{ij}$, де $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$.

Наприклад, $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}$, $k=2$: $A\cdot k=\begin{pmatrix}0 & -2 & 4\\ 6 & 8 & 10\end{pmatrix}$.

Матриця $-A=(-1)\cdot A$ називається *протилежною* до матриці A.

Різницю матриць $A-B$ можна визначити так: $A-B=A+(-B)$.

Властивості операцій додавання матриць і множення матриці на число

(A,B,C – матриці, $\alpha,\beta\in R$):

1. $A+B=B+A$;
2. $A+(B+C)=(A+B)+C$;
3. $A+\theta=A$;
4. $A+(-A)=\theta$;
5. $1\cdot A=A$;
6. $\alpha\cdot(A+B)=\alpha A+\alpha B$;
7. $(\alpha+\beta)\cdot A=\alpha A+\beta A$;
8. $\alpha\cdot(\beta A)=(\alpha\beta)\cdot A$.

Елементарні перетворення матриць

Елементарними перетвореннями матриць є:

- перестановка місцями двох рядків матриці;
- множення всіх елементів рядка матриці на ненульове число;
- додавання до всіх елементів рядка матриці відповідних елементів іншого рядка матриці, помножених на одне й теж ненульове число.

Дві матриці A й B називаються *еквівалентними*, якщо одну з них можна отримати з іншої за допомогою елементарних перетворень. Позначення: $A \sim B$.

За допомогою елементарних перетворень будь-яку матрицю можна звести до так званого *ступінчастого* виду цієї матриці, у якої:

- після нульового рядка йде тільки нульовий рядок;
- якщо перші ненульові елементи двох будь-яких сусідніх рядків мають номери k й m, то $k < m$.

Наприклад, $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Добуток матриць

Добутком матриці $A_{m\times n} = (a_{ij})$ на матрицю $B_{n\times p} = (b_{jk})$ називається така матриця $C_{m\times p} = (c_{ik})$, елемент i-го рядка й k-го стовпця якої дорівнює сумі добутків елементів i-го рядка матриці A й відповідних елементів k-го стовпця матриці B, тобто

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nk},$$

де $i = \overline{1,m}$, $k = \overline{1,p}$.

Наприклад, знайдемо добуток матриць $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ і $B = (2 \quad 4 \quad 1)$:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot (2 \quad 4 \quad 1) = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 & 1\cdot 4 & 1\cdot 1 \\ 4\cdot 2 & 4\cdot 4 & 4\cdot 1 \\ 3\cdot 2 & 3\cdot 4 & 3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 8 & 16 & 4 \\ 6 & 12 & 3 \end{pmatrix};$$

$$BA = (2 \quad 4 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = (2\cdot 1 + 4\cdot 4 + 1\cdot 3) = (21) = 21.$$

Для прямокутних матриць A і B добуток визначений, якщо число стовпців матриці A дорівнює числу рядків матриці B.

Зауваження. При перестановці матриць результат може вийти різним або один з них взагалі не існує. В загальному випадку, властивість комутативності при множенні матриць не має місця.

Матриці A й B, для яких $AB = BA$, називаються *переставними*.

Щоб матриці були переставними, необхідно, щоб вони були квадратними однакового порядку, однак, ця умова не є достатньою.

Властивості операцій над матрицями (A, B, C – матриці, $\alpha, \beta \in R$), якщо записані операції мають сенс:

1. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$;
2. $A \cdot E = E \cdot A = A$;
3. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$;
4. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$;
5. $\alpha \cdot (A \cdot B) = (\alpha A) B$;
6. $(A + B)^T = A^T + B^T$;
7. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$;
8. $(AB)^t = B^t A^t$.

Питання для самоконтролю

1. Визначити розмір матриці, отриманої в результаті транспонування матриці 4×3.
2. Яка головна умова визначення добутку двох матриць?
3. За допомогою яких операцій з довільної квадратної матриці можна отримати нульову матрицю?
4. Чи можна перемножити квадратну матрицю на неквадратну?

Тест для самоперевірки

1. Встановіть відповідність між матрицями (1 – 4) та їх розмірами (А – Д).

1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	**3**	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	**А**	2×2
				Б	2×3
2	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	**4**	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	**В**	3×2
				Г	1×3
				Д	3×1

2. Встановіть відповідність між симетричними матрицями (1 – 4) та їх невідомими елементами (А – Д).

1	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \square & 1 \end{pmatrix}$	**3**	$\begin{pmatrix} 2 & \square \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	**А**	0
				Б	1
2	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & \square & 2 \end{pmatrix}$	**4**	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ \square & 4 & 2 \end{pmatrix}$	**В**	2
				Г	3
				Д	4

3. Знайдіть значення m і n, для яких здійсненна операція: $A_{m \times n} \cdot B_{3 \times 4} = C_{2 \times 4}$.

А $m = 2,\ n = 4$; **Б** $m = 2,\ n = 3$;
В $m = 4,\ n = 3$; **Г** $m = 3,\ n = 4$.

4. Знайдіть значення m і n, для яких здійсненна операція: $3A_{m \times n} = C_{3 \times 4}$.

А $m = 2,\ n = 4$; **Б** $m = 2,\ n = 3$;
В $m = 4,\ n = 3$; **Г** $m = 3,\ n = 4$.

5. Знайдіть значення m і n, для яких здійсненна операція: $A_{m \times 3} + B_{2 \times n}$.

А $m = 2,\ n = 4$; **Б** $m = 2,\ n = 3$;
В $m = 4,\ n = 3$; **Г** $m = 3,\ n = 4$.

6. Знайдіть значення m і n, для яких здійсненна операція: $(A_{2 \times n})^T = A_{4 \times m}$.

А $m = 2,\ n = 4$; **Б** $m = 2,\ n = 3$;
В $m = 4,\ n = 3$; **Г** $m = 3,\ n = 4$.

7. *Результатом обчислення* $A+B$, *якщо* $A=\begin{pmatrix}1&2\\-4&2\\0&1\end{pmatrix}$ *і* $B=\begin{pmatrix}-2&1\\3&-2\\2&0\end{pmatrix}$ *буде:*

А $\begin{pmatrix}-1&3\\-1&0\\2&1\end{pmatrix}$; **Б** $\begin{pmatrix}-1&1\\-7&-4\\-2&1\end{pmatrix}$; **В** $\begin{pmatrix}-3&1\\-1&4\\-2&1\end{pmatrix}$; **Г** $\begin{pmatrix}-3&1\\-7&-4\\-2&1\end{pmatrix}$.

8. *Якщо матриця* $A=\begin{pmatrix}2&-1\\3&-2\end{pmatrix}$, *то матриця* $4A$ *має вид:*

А $\begin{pmatrix}2&-4\\3&-8\end{pmatrix}$; **Б** $\begin{pmatrix}8&-4\\12&-8\end{pmatrix}$; **В** $\begin{pmatrix}8&-1\\12&-2\end{pmatrix}$; **Г** $\begin{pmatrix}2&-1\\12&-8\end{pmatrix}$.

9. *Якщо матриця* $B=\begin{pmatrix}-3&0\\-1&2\\0&1\end{pmatrix}$, *то матриця* B^T *має вид:*

А $\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-1&-3\end{pmatrix}$; **Б** $\begin{pmatrix}0&-1&-3\\1&2&0\end{pmatrix}$;

В $\begin{pmatrix}0&2&1\\-3&-1&0\end{pmatrix}$; **Г** $\begin{pmatrix}-3&-1&0\\0&2&1\end{pmatrix}$.

10. *Результатом обчислення* $3A^T-2B$, *якщо* $A=\begin{pmatrix}2&-3\\-5&8\end{pmatrix}$ *і* $B=\begin{pmatrix}-1&3\\5&-7\end{pmatrix}$ *буде:*

А $\begin{pmatrix}4&-3\\-5&10\end{pmatrix}$; **Б** $\begin{pmatrix}8&-15\\-25&38\end{pmatrix}$;

В $\begin{pmatrix}8&-21\\-19&38\end{pmatrix}$; **Г** $\begin{pmatrix}4&-9\\1&10\end{pmatrix}$.

11. *Встановіть відповідність між матрицями* $A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\3&0&-2\\0&2&-2\end{pmatrix}$ *і* $B=\begin{pmatrix}1&-5&3\\0&-2&1\\2&-3&0\end{pmatrix}$ *(1 – 4) та елементами їх добутку* $C=AB$ *(А – Д).*

1	c_{11}	**3**	c_{13}	**А**	1
				Б	–4
				В	5
2	c_{22}	**4**	c_{32}	**Г**	–9
				Д	2

12. Встановіть відповідність між парою матриць А, В (1 – 4) та їх добутком АВ (А – Д).

Матриці А і В		*Добуток АВ*	
1	$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}$	**А**	$\begin{pmatrix}-12 & -2\end{pmatrix}$
2	$A=\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-2 & 3\end{pmatrix}$	**Б**	$\begin{pmatrix}-4 & 6\\ 2 & -3\end{pmatrix}$
3	$A=\begin{pmatrix}-4 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$	**В**	$\begin{pmatrix}-3\\ -7\end{pmatrix}$
4	$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 3\\ -2 & 1\end{pmatrix}$	**Г**	$\begin{pmatrix}-2 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$
		Д	$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 0\\ -3 & 2 & -4\end{pmatrix}$

Відповіді: 1. 1Б; 2Г; 3А; 4В. 2. 1Б; 2Д; 3В; 4А. 3.Б. 4.Г. 5.Б. 6.А. 7.А. 8.Б. 9.Г. 10.Б. 11. 1В; 2Г; 3А; 4Д. 12. 1В; 2Б; 3А; 4Г.

Приклади розв'язання задач

Приклад 1 Знайти добуток матриць $A=\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}$.

Розв'язання.

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+10 & 4+12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & 16\end{pmatrix};$$

$BA=\varnothing$ – не існує.

Приклад 2 Дано матриці $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & 4 & 1\\ 1 & -4 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1\\ 3\\ 2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$. Знайти $A^T\cdot B+2C$.

Розв'язання.

$$A^T=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 4 & -4\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix};\qquad A^TB=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 4 & -4\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 3\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot3+1\cdot2\\ 0\cdot1+4\cdot3-4\cdot2\\ 3\cdot1+1\cdot3+2\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\ 4\\ 10\end{pmatrix};$$

$$2C=\begin{pmatrix}-2\\ 4\\ 2\end{pmatrix};\qquad A^T\cdot B+2C=\begin{pmatrix}9\\ 4\\ 10\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\ 4\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\ 8\\ 12\end{pmatrix}.$$

Приклад 3 Дана матриця $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$. Знайти A^3.

Розв'язання.

$$A^2 = A\cdot A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & 14\\ 7 & 18\end{pmatrix};$$

$$A^3 =\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}11 & 14\\ 7 & 18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}47 & 78\\ 39 & 86\end{pmatrix}.$$

Відзначимо, що матриці $\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix}11 & 14\\ 7 & 18\end{pmatrix}$ є переставними.

Приклад 4 Звести до ступінчастого виду матрицю $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1 & 2\\ 0 & 2 & -1 & 1\\ 4 & 0 & 5 & 1\end{pmatrix}$.

Розв'язання.

Виконуючи елементарні перетворення, одержимо:

$$\begin{pmatrix}2 & 3 & 1 & 2\\ 0 & 2 & -1 & 1\\ 4 & 0 & 5 & 1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ -2\cdot \text{I}\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}2 & 3 & 1 & 2\\ 0 & 2 & -1 & 1\\ 0 & -6 & 3 & -3\end{pmatrix}\begin{matrix}\cdot 2-3\cdot \text{II}\\ \\ +3\cdot \text{II}\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}4 & 0 & 5 & 1\\ 0 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Задачі для самостійного розв'язування

№ 1.1. Для заданих матриць обчислити AB й BA, якщо це можливо:

1) $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 1 & -5 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 5 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$; 2) $A=\begin{pmatrix}6\\ 3\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 4\end{pmatrix}$;

3) $A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & -1 & 0\\ 1 & 5 & 2\end{pmatrix}$; 4) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}$.

№ 1.2. Для заданих матриць виконати зазначені дії:

1) для матриць $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -6\\ 2 & -3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7 & 4\\ 8 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 3 & -1 & 2\\ 0 & 2 & -3\end{pmatrix}$ обчислити

$2A^T-3B$, $AB+E$, $BA-C^2$, $(AB)^T$, B^TA^T, $AC+(CB)^T$, CA^T, CA^T+B;

2) для матриць $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -7 \end{pmatrix}$ обчислити $2B-3C$, $A(B+C)$, BC^T+A^2, $AC-BC^T$, CB^T-2A^2;

3) для матриць $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ обчислити $4A-3B+C$, A^T+B^T, $AB-BA$, $BC+A^2$;

ТЕМА 2 ВИЗНАЧНИКИ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

Теоретичні відомості

Квадратній матриці A порядку n можна поставити у відповідність число $\det A$ (або $|A|$, або Δ), яке називають її *визначником*, у такий спосіб:

$n=1$, $A=(a_1)$, $\det A = a_1$;

$n=2$, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$;

$n=3$, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$;

…

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Визначник матриці A також називають її *детермінантом*.

Правило обчислення детермінанта для матриці порядку n є досить складним для сприйняття й застосування. Однак відомі методи, що дозволяють реалізувати обчислення визначників високих порядків на основі визначників нижчих порядків.

Обчислення визначника матриці 2-го порядку ілюструється схемою:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Наприклад, $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot 6 - 5\cdot(-3) = 27$.

При обчисленні визначника матриці 3-го порядку зручно користуватися:

– *правилом трикутників*, яке ілюструється схемою:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

– *правилом прямих*, яке ілюструється схемою:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} \text{«+»} \\ \\ \\ \text{«–»} \\ \\ \end{matrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Властивості визначників

1. Визначник матриці не змінюється при її транспонуванні, тобто $\det A = \det A^t$.

2. При перестановці двох рядків (стовпців) матриці її визначник змінює знак.

3. Визначник матриці, що має два однакових рядки (стовпці), дорівнює нулю.

4. При множенні рядка (стовпця) матриці на число її визначник множиться на це число.

5. Якщо елементи деякого рядка (стовпця) матриці пропорційні відповідним елементам іншого її рядка (стовпця), то визначник такої матриці дорівнює нулю.

6. Якщо елементи якого-небудь рядка визначника матриці є сумою двох доданків, то визначник може бути розкладено на суму двох відповідних визначників. Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+b \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+c \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b \\ a_{21} & a_{22} & c \\ a_{31} & a_{32} & d \end{vmatrix}.$$

7. Визначник матриці не зміниться, якщо до елементів одного рядка (стовпця) матриці додати відповідні елементи іншого її рядка (стовпця), помножені на будь-яке ненульове число.

Мінором M_{ij} деякого елемента a_{ij} визначника n-го порядку називається визначник $(n-1)$-го порядку, отриманий з вихідного шляхом викреслювання рядка й стовпця, на перетині яких знаходиться обраний елемент. Наприклад, для визначника $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix}$:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 24 = 15,\ M_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 8 - 1 = 7.$$

Алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} визначника називається його мінор, узятий зі знаком $(-1)^{i+j}$, тобто $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$. Наприклад, для визначника $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix}$: $A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -15,\ A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = 7$.

8. (*Розкладання визначника за елементами деякого рядка або стовпця*). Визначник дорівнює сумі добутків елементів деякого рядка (стовпця) та їх відповідних алгебраїчних доповнень, тобто $\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$ (за елементами i-го рядка) або $\det A = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \ldots + a_{nk}A_{nk}$ (за елементами k-го стовпця).

Наприклад, $\to \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$

$$= (-2 \cdot 1 - 1 \cdot 3) - 2(0 \cdot 1 - 3 \cdot 3) + (0 \cdot 1 + 3 \cdot 2) = 19.$$

9. Сума добутків елементів якого-небудь рядка (стовпця) визначника на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю, наприклад, $a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + \ldots + a_{1n}A_{2n} = 0$.

10. Визначник трикутної матриці дорівнює добутку елементів головної діагоналі.

11. Визначник добутку матриць дорівнює добутку визначників цих матриць.

Питання для самоконтролю

1. Яка головна умова можливості обчислення визначника матриці?
2. Чи може матриця розміру 2 ×3 мати визначник?
3. Що буде з визначником, якщо поміняти місцями два стовпця?
4. Чим відрізняється мінор M_{ij} від алгебраїчного доповнення A_{ij}?

Тест для самоперевірки

1. Для яких матриць існує визначник?

А тільки для квадратної матриці;
Б для будь-якої матриці;
В тільки для трикутної матриці;
Г тільки для прямокутної матриці.

2. Як зміниться визначник 8 порядку, якщо її сьомий рядок помножити на 2?

А не зміниться; **Б** зміниться тільки знак;
В зменшиться вдвічі; **Г** збільшиться вдвічі.

3. Як зміниться визначник 7 порядку, якщо поміняти місцями його другий та сьомий рядки?

А не зміниться; **Б** зміниться тільки знак;
В зменшиться вдвічі; **Г** збільшиться вдвічі.

4. Як зміниться визначник 9 порядку, якщо до його першого стовпця додати п'ятий стовпець, помножений на 3?

А не зміниться; **Б** зміниться тільки знак;
В зменшиться втричі; **Г** збільшиться втричі.

5. Нехай визначник матриці A третього порядку дорівнює (–5). Чому дорівнює визначник матриці $0{,}2A^2$ *?*

А 1; **Б** 25; **В** 2; **Г** 5.

6. У визначнику третього порядку всі елементи парні числа. Знайти найбільше число з наступних, на яке ділиться цей визначник.

А 2; **Б** 6; **В** 12; **Г** 8.

7. Коренем рівняння $\begin{vmatrix} 2 & x-4 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 0$ *буде число*

А –12; **Б** –4; **В** 12; **Г** 4.

8. Розв'язком нерівності $\begin{vmatrix} x-2 & -8 \\ -1 & x-4 \end{vmatrix} \le 0$ *буде*

А $(0;\ 6)$; **Б** $[0;\ 6]$;

В $(-\infty;\ 0] \cup [6;\ +\infty)$; **Г** $(-\infty;\ 0) \cup (6;\ +\infty)$.

9. Яке з вказаних правил є правилом обчислення визначників?

А трикутників; **Б** Крамера;

В оберненої матриці; **Г** Гаусса.

10. Яке з вказаних правил НЕ Є правилом обчислення визначників?

А трикутників;

Б прямих;

В розкладання по елементах рядка;

Г Гаусса.

11. Чому дорівнює визначник $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix}$*?*

А $-2 \cdot 3 \cdot 5$; **Б** $2 \cdot 3 \cdot 5$;

В $2-3+5$; **Г** $-(2-3+5)$.

12. Сума добутків елементів четвертого рядка визначника п'ятого порядку на їх відповідні алгебраїчні доповнення дорівнює:

А 0; **Б** визначнику;

В модулю визначника; **Г** $4 \cdot 5$.

13. Сума добутків елементів четвертого рядка визначника п'ятого порядку на алгебраїчні доповнення третього рядка дорівнює:

А 0; **Б** визначнику;

В модулю визначника; **Г** $4 \cdot 5$.

14. Чому дорівнює визначник Δ *7 порядку, якщо всі елементи його сьомого рядка в 2 два рази більше відповідних елементів 2 рядка:*

А Δ; **Б** $0{,}5\Delta$; **В** 2Δ; **Г** 0.

15. Встановіть відповідність між деякими числами матриці $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

(1 – 4) й величиною цих чисел (А – Д).

1	A_{12}	**3**	$\det A$	**А**	–6	**В**	–4
2	M_{12}	**4**	$A_{11} + M_{22}$	**Б**	8	**Г**	–8
						Д	4

16. Закінчіть речення так, щоб утворилося правильне твердження. «Якщо визначник містить два рівних рядки, то він …»

А не зміниться;

Б змінить знак;
В дорівнює нулю;
Г може як змінитися так й ні (це залежить від самого визначника).

17. Закінчіть речення так, щоб утворилося правильне твердження. «Якщо один з рядків визначника є лінійною комбінацією його інших рядків, то він …»

А не зміниться;
Б змінить знак;
В дорівнює нулю;
Г може як змінитися так й ні (це залежить від самого визначника).

Відповіді: 1.А. 2.Г. 3.Б. 4.А. 5.Г. 6.Г. 7.Б. 8.Б. 9.А. 10.Г. 11.Б. 12.Б. 13.А. 14.Г. 15. 1Б; 2Г; 3Д; 4А. 16.В. 17.В.

Приклади розв'язання задач

Приклад 1 Для заданих матриць $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 1 & -5 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 5 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, обчислити $\det(AB)$.

Розв'язання.

Знайдемо добуток заданих матриць:

$$AB=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 1 & -5 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 5 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 0\\ -18 & 15\end{pmatrix}.$$

Тоді визначник отриманої матриці буде: $\det(AB)=\begin{vmatrix}10 & 0\\ -18 & 15\end{vmatrix}=150$.

Приклад 2 Обчислити визначники:

1) $\begin{vmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -2 & 3\\ 3 & 1 & 1\end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix}3 & 5 & 7 & 8\\ -1 & 7 & 0 & 1\\ 0 & 5 & 3 & 2\\ 1 & -1 & 7 & 4\end{vmatrix}$.

Розв'язання.

1) $\begin{vmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{vmatrix}=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$;

2) $\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -2 & 3\\ 3 & 1 & 1\end{vmatrix}=-2+0+18-(-6+3+0)=19$;

$$\downarrow$$

3) $$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} -\text{III} \\ \\ \\ +\text{II} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 6 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 7 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} +\text{II}\cdot 3 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & 21 & 4 & 9 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 7 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= -1\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 21 & 4 & 9 \\ 5 & 3 & 2 \\ 6 & 7 & 5 \end{vmatrix} = 122\,.$$

Задачі для самостійного розв'язування

№ 2.1. Обчислити визначники:

1) $\begin{vmatrix} 10 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$;

2) $\begin{vmatrix} a & a-b \\ a+b & a-1 \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} 1/2 & 1/2\cos\alpha \\ \cos\alpha & 1 \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$;

5) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}$;

6) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 10 \\ 2 & -1 & 6 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$;

7) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$;

8) $\begin{vmatrix} 8 & 7 & 2 & 0 \\ 8 & 7 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$;

9) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$;

10) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$;

11) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$;

12) $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$;

13) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$;

14) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$;

15) $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$;

16) $\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$;

17) $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}$;

18) $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}$; 19) $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$;

20) $\begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 & 2 \\ -4 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & -9 & -3 & 7 \\ 2 & -6 & -3 & 2 \end{vmatrix}$; 21) $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}$.

№ 2.2. Розв'язати рівняння:

1) $\begin{vmatrix} 3x & -1 \\ x & 2x-3 \end{vmatrix} = 0$; 2) $\begin{vmatrix} \sin 2x & \cos 3x \\ -\cos 2x & \sin 3x \end{vmatrix} = 0$; 3) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0$.

№ 2.3. Обчислити визначник матриці, яка є добутком двох заданих матриць:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$.

ТЕМА 3 ОБЕРНЕНА МАТРИЦЯ. РАНГ МАТРИЦІ. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

Теоретичні відомості

Квадратна матриця називається *невиродженою*, якщо її визначник відмінний від нуля. В противному випадку матриця називається *виродженою*.

Матриця A^{-1} називається *оберненою* матриці A, якщо виконується умова $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, де E – одинична матриця того ж порядку, що й матриця A. Матриця A^{-1} має той же порядок, що й матриця A.

Властивості оберненої матриці:

1. $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det A}$;
2. $\left(A \cdot B\right)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$;
3. $\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1}$.

Будь-яка невироджена матриця має обернену, яку можна обчислити двома методами:

1. *Метод алгебраїчних доповнень*:

– обчислити визначник даної матриці: $\det A$;

– обчислити алгебраїчні доповнення всіх елементів даної матриці: A_{ij};

– записати обернену матрицю у вигляді:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

2. *Метод приєднання одиничної матриці*:

– приєднати до даної матриці одиничну того ж порядку, тобто записати матрицю виду: $\left(A \mid E\right)$;

– привести записану матрицю до виду $\left(E \mid A^{-1}\right)$ за допомогою елементарних перетворень матриць.

Мінором M_k порядку k матриці $A_{m\times n}$ $(k \le \min(m, n))$ називається визначник k-го, складений з елементів цієї матриці, що знаходяться на перетині будь-яких її k рядків і k стовпців.

Базисним мінором матриці $A_{m\times n}$ називається будь-який її мінор порядку r $(r \le \min(m, n))$, якщо він відмінний від нуля, а всі мінори порядку $(r+1)$ або дорівнюють нулю, або не існують. Порядок r базисного мінору називається *рангом матриці* A, а її рядки й стовпці, що входять у базисний мінор, називаються *базисними*.

Для рангу матриці A прийняті позначення: $\operatorname{rang} A$, $r(A)$.

Ранг нульової матриці вважається рівним нулю.

Властивості рангу матриці

1. При транспонуванні матриці її ранг не змінюється.
2. Якщо викреслити з матриці нульовий рядок, то ранг матриці не зміниться.
3. Ранг матриці не змінюється при елементарних перетвореннях рядків матриці.

Способи обчислення рангу матриці

1. Метод обвідних мінорів: пошук базисного мінору.
2. Метод елементарних перетворень матриці: ранг матриці дорівнює кількості ненульових рядків у її ступінчастому виді.

Наприклад,

1) $A=\begin{pmatrix}1&0&0&0&5\\0&0&0&0&0\\2&0&0&0&11\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0&5\\2&0&0&0&11\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0&5\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow \operatorname{rang}A=2$

або $\begin{vmatrix}1&5\\2&11\end{vmatrix}=11-10=1\neq 0\Rightarrow \operatorname{rang}A=2.$

2) $\begin{pmatrix}3&5&7\\1&2&3\\1&3&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}4&8&12\\1&2&3\\1&3&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\\1&3&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\end{pmatrix}\Rightarrow \operatorname{rang}A=2.$

3) $\begin{pmatrix}1&2&1&3&4\\3&4&2&6&8\\1&2&1&3&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1&3&4\\3&4&2&6&8\end{pmatrix},\ \begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}=4-6=-2\neq 0\Rightarrow \operatorname{rang}A=2.$

Розглянемо систему m лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) із n невідомими:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2,\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m.\end{cases}\qquad(3.1)$$

Ця система рівнянь характеризується матрицею

$$\widetilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c}a_{11}&a_{12}&\ldots&a_{1n}&b_1\\a_{21}&a_{22}&\ldots&a_{2n}&b_2\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\a_{m1}&a_{m2}&\ldots&a_{mn}&b_m\end{array}\right),$$

яка називається *розширеною матрицею системи*. Її розмір – $m\times(n+1)$. Матриця, що стоїть ліворуч вертикальної риски, називається *матрицею системи*. *Елементами матриці системи* (3.1) є коефіцієнти при невідомих. Матриця, що стоїть праворуч від вертикальної риски, називається *стовпцем вільних членів*.

Система лінійних рівнянь (3.1) називається *однорідною*, якщо права частина всіх рівнянь дорівнює нулю.

Розв'язком системи рівнянь (3.1) називають будь-яку впорядковану сукупність дійсних чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, яка має таку властивість: кожне рівняння системи перетворюється в тотожність, якщо покласти в ньому $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \ldots, x_n = \alpha_n$.

Система (3.1) називається *сумісною*, якщо вона має хоча б один розв'язок. Якщо система не має розв'язків, вона називається *несумісною*.

Якщо система (3.1) має більше одного розв'язку, вона називається *невизначеною*, а якщо має єдиний, то називається *визначеною*.

Розв'язки $(\alpha_1; \alpha_2; \ldots; \alpha_n)$, $(\beta_1; \beta_2; \ldots; \beta_n)$, ..., $(\gamma_1; \gamma_2; \ldots; \gamma_n)$ назвемо *лінійно залежними*, якщо знайдуться такі числа $\lambda, \delta, \ldots, \mu$, не всі рівні нулю, що справедливі рівності

$$\lambda\alpha_i + \delta\beta_i + \ldots + \mu\gamma_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Розв'язки, що не є лінійно залежними, називаються *лінійно незалежними*, або інакше, розв'язки $(\alpha_1; \alpha_2; \ldots; \alpha_n)$, $(\beta_1; \beta_2; \ldots; \beta_n)$, ..., $(\gamma_1; \gamma_2; \ldots; \gamma_n)$ називаються *лінійно незалежними*, якщо остання рівність можлива лише у випадку, коли всі числа $\lambda, \delta, \ldots, \mu$ дорівнюють нулю.

Дві системи лінійних алгебраїчних рівнянь називаються *еквівалентними* (*рівносильними*), якщо кожний розв'язок першої системи є розв'язком другої й навпаки або вони обидві несумісні.

Теорема 3.1 Якщо від матриці $\widetilde{A}$ до матриці $\widetilde{B}$ можна перейти скінченим числом елементарних перетворень рядків, то всякий розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь, відповідний матриці $\widetilde{A}$, є розв'язком системи з матрицею $\widetilde{B}$ й навпаки, тобто розглянуті системи рівнянь еквівалентні.

Теорема 3.2 (*теорема Кронекера-Капеллі*) Система лінійних алгебраїчних рівнянь (3.1) сумісна тоді й тільки тоді, коли ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці цієї системи, тобто $\operatorname{rang} \widetilde{A} = \operatorname{rang} A$.

Наслідок. 1) Якщо ранг матриці сумісної СЛАР дорівнює числу невідомих, то система має єдиний розв'язок, тобто є визначеною. 2) Якщо ранг матриці сумісної СЛАР менше числа невідомих, то система має нескінченну множину розв'язків, тобто є невизначеною.

Методи розв'язання СЛАР

Алгоритм розв'язання системи рівнянь (3.1) ***методом Гаусса***:

1. Записати розширену матрицю $\widetilde{A}$ вихідної системи рівнянь.
2. Звести матрицю $\widetilde{A}$ до ступінчастого виду за допомогою елементарних перетворень рядків. Якщо в отриманій ступінчастій матриці $\widetilde{B}$ є рядок, у якому перший ненульовий елемент перебуває на останньому місці, то вихідна система розв'язків не має (є несумісною).

3. Якщо система рівнянь сумісна, то в системі рівнянь із матрицею $\widetilde{B}$ необхідно відкинути рівняння, які відповідають нульовим рядкам матриці $\widetilde{B}$. У решти рівнянь виділяємо головні невідомі (визначник, складений з коефіцієнтів при них, не дорівнює нулю), а члени з вільними невідомими переносимо в праві частини.

4. Послідовно виражаємо головні невідомі через вільні, рухаючись від останнього рівняння до першого. Отримаємо загальний розв'язок системи.

5. Надаючи вільним невідомим різні числові значення й обчислюючи відповідні значення головних невідомих будемо одержувати різні розв'язки вихідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, які називають *частинними розв'язками* системи.

Метод Крамера

Розглянемо тепер систему *n* лінійних алгебраїчних рівнянь із *n* невідомими ($n \geq 2$)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{3.2}$$

Одержимо явні вирази для розв'язку системи (3.2) через коефіцієнти a_{ij} цієї системи й вільні члени b_i в припущенні, що визначник матриці системи не дорівнює нулю.

Теорема 3.3 (*Теорема Крамера*) Якщо визначник матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь (4.2)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

відмінний від нуля, то система має єдиний розв'язок, тобто є сумісною й визначеною. Цей розв'язок обчислюється за правилом Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ \ldots,\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

де Δ_i – визначник, який отримано з визначника Δ заміною *i*-го стовпця стовпцем вільних членів.

Зауваження. Система (3.2) може:

1) мати єдиний розв'язок, коли $\Delta \neq 0$;
2) мати нескінченну множину розв'язків, коли $\Delta = \Delta_i = 0$, $i = \overline{1,n}$;
3) не мати жодного розв'язку, коли $\Delta = 0$ й хоча б один з визначників Δ_i, $i = \overline{1,n}$, відмінний від нуля.

Матричний спосіб

Систему n лінійних алгебраїчних рівнянь із n невідомими (4.2) можна записати в матричному вигляді: $A \cdot X = B$, де A – матриця системи, X – матриця-стовпець невідомих $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а B – матриця-стовпець вільних членів. Якщо A – невироджена матриця, то після множення зліва на A^{-1} обох частин матричного рівняння $A \cdot X = B$, одержимо $A \cdot \left(A^{-1} \cdot X\right) = A^{-1} \cdot B$. Оскільки $A \cdot \left(A^{-1} \cdot X\right) = \left(A \cdot A^{-1}\right) \cdot X = EX = X$, то

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Однорідні СЛАР

Однорідна система є завжди сумісною, тому що має нульовий (*тривіальний*) розв'язок: $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$. Крім нульового розв'язку, в однорідної системи можуть бути й ненульові розв'язки.

Теорема 3.4 Якщо число рівнянь однорідної системи менше числа невідомих, то система має нетривіальні розв'язки.

З теореми Крамера випливає, що якщо система n однорідних лінійних рівнянь із n невідомими має хоча б один нетривіальний розв'язок, то її визначник дорівнює нулю.

Фундаментальною системою розв'язків (ФСР) однорідної системи рівнянь називається сукупність будь-яких $n - \text{rang}A$ частинних, лінійно незалежних розв'язків однорідної системи, де n – число невідомих у системі, а A – матриця системи.

Для відшукання фундаментальної системи розв'язків однорідної системи користуємося алгоритмом для розв'язання довільних систем алгебраїчних рівнянь. Єдина відмінність полягає в тому, що при знаходженні частинного розв'язку вільним невідомим надаються значення у вигляді одиничної або діагональної матриці (для задоволення умови лінійної незалежності частинних розв'язків).

Питання для самоконтролю

1. Яка матриця називається невиродженою?
2. Яким умовам має задовольняти матриця А, щоб мати обернену матрицю?
3. Сформулюйте алгоритм знаходження оберненої матриці.
4. На чому ґрунтується матричний спосіб розв'язання системи лінійних рівнянь?

Тест для самоперевірки

1. *Чому дорівнює* $\det\left(4A^{-1}\right)$*, якщо А – матриця третього порядку та її визначник дорівнює 3?*

А 12; **Б** 3; **В** $\frac{4}{3}$; **Г** $\frac{1}{12}$;

2. *Матриця вироджена, якщо її визначник*

А додатний; **Б** дорівнює нулю;
В від'ємний; **Г** не дорівнює нулю.

3. Нехай А деяка матриця. Для того, щоб вона була оборотною необхідно й достатньо, щоб виконувалось одна з наступних умов:

А матриця *А* повинна бути прямокутною;
Б матриця *А* повинна бути квадратною;
В матриця *А* повинна бути квадратною виродженою;
Г матриця *А* повинна бути квадратною невиродженою.

4. Ранг матриці $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ *дорівнює:*

А 1; **Б** 2; **В** 3; **Г** 4.

5. При яких перетвореннях з наступних ранг матриці не змінюється?

А при множенні рядка на число;
Б перестановка елементів матриці місцями;
В додавання до стовпця деякого числа;
Г піднесення елементів деякого рядка в квадрат.

6. Система лінійних алгебраїчних рівнянь називається однорідною, якщо

А всі вільні члени дорівнюють нулю;
Б всі вільні члени не дорівнюють нулю;
В деякі вільні члени дорівнюють нулю;
Г деякі вільні члени не дорівнюють нулю.

7. Нехай деяка система лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР$_1$) має єдиний розв'язок $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, ..., \beta_n)$ *й помінявши місцями у всіх рівняннях СЛАР$_1$ коефіцієнти при* x_1 *й* x_2 *отримали СЛАР$_2$. Якій умові задовольняє розв'язок СЛАР$_2$?*

А має єдиний розв'язок $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, ..., \beta_n)$;
Б вона буде несумісною;
В вона буде сумісною невизначеною;
Г має єдиний розв'язок $(\beta_2, \beta_1, \beta_3, ..., \beta_n)$.

8. Дві системи лінійних рівнянь називаються еквівалентними, якщо вони обидві

А сумісні й кожний розв'язок однієї системи є розв'язком другої і навпаки та вони обидві несумісні;
Б сумісні й кожний розв'язок однієї системи є розв'язком другої і навпаки або вони обидві несумісні;
В сумісні й кожний розв'язок однієї системи є розв'язком другої і навпаки;
Г несумісні.

9. Нехай $r(A)$ *– ранг матриці системи, а* $r(B)$ *– ранг розширеної матриці системи лінійних рівнянь. Необхідною та достатньою умовою сумісності системи є:*

А $r(B) = r(A)$;
Б $r(B) = r(A)$ + число ненульових вільних членів;
В $r(A)$ дорівнює числу невідомих;

Г $r(B)$ дорівнює числу рівнянь.

10. Який метод розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь оснований на приведенні розширеної матриці системи до ступінчастого виду?

А метод Крамера; **Б** матричний метод;
В метод трикутника; **Г** метод Гаусса.

11. Матрицею системи лінійних алгебраїчних рівнянь називається матриця, яка складається з

А коефіцієнтів при невідомих;
Б вільних членів;
В коефіцієнтів при невідомих і вільних членів;
Г коефіцієнтів при невідомих або вільних членів.

12. Розширеною матрицею системи лінійних алгебраїчних рівнянь називається матриця, яка складається з

А коефіцієнтів при невідомих;
Б вільних членів;
В коефіцієнтів при невідомих і вільних членів;
Г коефіцієнтів при невідомих або вільних членів.

13. Яку кількість розв'язків має система рівнянь $\begin{cases} 2x - y = 1, \\ 4x - 2y = 2? \end{cases}$

А 0; **Б** 1; **В** 2; **Г** безліч.

14. Яку кількість розв'язків має система рівнянь $\begin{cases} 2x - y = -1, \\ 4x - 2y = 2? \end{cases}$

А 0; **Б** 1; **В** 2; **Г** безліч.

15. Яку кількість розв'язків має система рівнянь $\begin{cases} 2x + y = 1, \\ 4x - 2y = 2? \end{cases}$

А 0; **Б** 1; **В** 2; **Г** безліч.

16. Відомо, що ранг матриці системи однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь від 7 невідомих дорівнює 5, тоді число розв'язків в фундаментальній системі розв'язків цієї системи дорівнює

А 0; **Б** 1; **В** 2; **Г** 5.

17. Для яких систем лінійних алгебраїчних рівнянь можна застосовувати метод Крамера?

А для будь-яких;
Б квадратних;
В однорідних;
Г квадратних, у яких визначник матриці системи відмінний від нуля.

18. При розв'язанні системи по правилу Крамера використовують формули (тут Δ *– визначник матриці системи,* Δ_i *– визначник, отриманий з визначника* Δ *заміною* i*-го стовпця стовпцем вільних членів)*

А $x_i = \dfrac{\Delta}{\Delta_i}$; **Б** $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$;

В $x_i = \Delta - \Delta_i$; **Г** $x_i = \Delta_i \cdot \Delta$.

19. Розв'язком матричного рівняння $BY = D$ буде:

А $Y = B^{-1}D$; **Б** $Y = DB^{-1}$;

В $Y = B : D$; **Г** $X = D : B$.

20. Фундаментальною системою розв'язків однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь називається

А будь-який набір частинних розв'язків цієї системи;

Б будь-який ненульовий набір частинних розв'язків цієї системи;

В будь-який лінійно незалежний набір частинних розв'язків цієї системи;

Г будь-який лінійно залежний набір частинних розв'язків цієї системи.

Відповіді: 1.В. 2.Б. 3.Г. 4.А. 5.А. 6.А. 7.Г. 8.Б. 9.А. 10.Г. 11.А. 12.В. 13.Г. 14.А. 15.Б. 16.В. 17.Г. 18.Б. 19.А. 20.В.

Приклади розв'язання задач

Приклад 1 При яких значеннях λ для матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ \lambda & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ не існує оберненої матриці.

Розв'язання.

Оберненої матриці не існує, якщо вихідна матриця вироджена, тобто її визначник дорівнює нулю. Будемо мати:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ \lambda & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 2\lambda - 12 + 2\lambda = 4\lambda - 9, \qquad |A| = 0 \Rightarrow 4\lambda - 9 = 0,\ \lambda = \frac{9}{4}.$$

Приклад 2 Знайти матрицю, обернену до $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ двома способами.

Розв'язання.

І спосіб.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5; \qquad A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 1 = 1,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot (-1) = 1, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 3 = -3, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 2 = 2;$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

ІІ спосіб.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot 2 + \text{I} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \end{array}\right) \cdot 5 - \text{II} \cdot 3 \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 10 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \end{array}\right) \cdot 1/10 \cdot 1/10 \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/5 & -3/5 \\ 0 & 1 & 1/5 & 2/5 \end{array}\right);$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Приклад 2 Розгляньмо простий спосіб закодувати повідомлення. Кожній літері латинки зіставляють її номер: A=1, B=2, ..., Z=26, прогалину кодують як 0. Приміром, числовий еквівалент слова МАТН є 13, 1, 20, 8. Числовий еквівалент повідомлення потім перетворюють на матрицю, записуючи числа у стовпці. Нарешті, помножуючи матрицю повідомлення на невироджену (отже, й оборотну) матрицю A, кодують повідомлення. За допомогою оберненої матриці A^{-1} можна розкодувати повідомлення. Закодуймо повідомлення МАТН:

1. Записуємо повідомлення за допомогою чисел 13, 1, 20, 8.
2. Записуємо матрицю по стовпцях і формуємо квадратну матрицю (у разі, якщо не вистачає чисел для формування квадратної матриці, заповнюють числове повідомлення наприкінці нулями):

$$P=\begin{pmatrix}13 & 20\\ 1 & 8\end{pmatrix}.$$

3. Помножуємо будь-яку невироджену матрицю, скажімо матрицю $A=\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, на матрицю P. Дістаємо криптограму

$$C=AP=\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}13 & 20\\ 1 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-29 & -64\\ 43 & 92\end{pmatrix}.$$

4. Отже, закодоване повідомлення має вигляд: –29, 43, –64, 92.

Розкодуємо одержане повідомлення:

1. Обертаючи кодувальну матрицю $A=\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, дістаємо розкодувальну матрицю $A^{-1}=\begin{pmatrix}4 & 3\\ -3 & -2\end{pmatrix}$.

2. Множачи розкодувальну матрицю A^{-1} на закодовану матрицю C, дістаємо матрицю повідомлення:

$$P=A^{-1}C=\begin{pmatrix}4 & 3\\ -3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-29 & -64\\ 43 & 92\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & 20\\ 1 & 8\end{pmatrix}.$$

3. Записуємо початкове числове повідомлення 13, 1, 20, 8 і його літерний оригінал МАТН.

Приклад 3 Знайти ранг матриці $A=\begin{pmatrix}0 & 3 & 2\\ 2 & 4 & 6\\ 1 & 7 & 4\end{pmatrix}$.

Розв'язання.

$$A=\begin{pmatrix}0 & 3 & 2\\ 2 & 4 & 6\\ 1 & 7 & 4\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{I}\leftrightarrow\text{II}}\begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\ 0 & 3 & 2\\ 1 & 7 & 4\end{pmatrix}\xleftrightarrow{\text{III}\cdot 2-\text{I}}$$

$$\leftrightarrow\begin{pmatrix}2&4&6\\0&3&2\\0&10&2\end{pmatrix}\xleftrightarrow{\text{III}\cdot 3-\text{II}\cdot 10}\begin{pmatrix}2&4&6\\0&3&2\\0&0&-14\end{pmatrix}\Rightarrow \operatorname{rang}A=3.$$

Приклад 4 Розв'язати системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гаусса:

1) $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=10,\\ x_2-x_4=-2,\\ x_1+x_4=5,\\ 2x_1+2x_2+x_3+x_4=13;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}3x_1-5x_2+2x_3+4x_4=2,\\ 7x_1-4x_2+x_3+3x_4=5,\\ 5x_1+7x_2-4x_3-6x_4=3;\end{cases}$

3) $\begin{cases}2x_1-x_2+x_3+2x_4+3x_5=2,\\ 6x_1-3x_2+2x_3+4x_4+5x_5=3,\\ 6x_1-3x_2+4x_3+8x_3+13x_5=9,\\ 4x_1-2x_2+x_3+x_4+2x_5=1.\end{cases}$

Розв'язання.

1) Розширена матриця $\widetilde{A}$ системи рівнянь має вигляд:

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&10\\0&1&0&-1&-2\\1&0&0&1&5\\2&2&1&1&13\end{pmatrix}.$$

Виконавши елементарні перетворення рядків, зведемо матрицю A до ступінчастого виду

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&10\\0&1&0&-1&-2\\1&0&0&1&5\\2&2&1&1&13\end{array}\right)\begin{matrix}\\ \\ -\text{I}\\ \text{IV}-2\cdot\text{I}\end{matrix}\leftrightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&10\\0&1&0&-1&-2\\0&-1&-1&0&-5\\0&0&-1&-1&-7\end{array}\right)\begin{matrix}\\ \\ +\text{II}\\ \\ \end{matrix}\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&10\\0&1&0&-1&-2\\0&0&-1&-1&-7\\0&0&-1&-1&-7\end{array}\right)\begin{matrix}\\ \\ \\ -\text{III}\end{matrix}\leftrightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&10\\0&1&0&-1&-2\\0&0&-1&-1&-7\\0&0&0&0&0\end{array}\right)=\widetilde{B}.$$

З виду матриці $\widetilde{B}$ випливає, що вихідна система рівнянь сумісна й що головними невідомими є x_1, x_2, x_3, а вільною невідомою – x_4. Виразимо головні невідомі x_1, x_2, x_3, через вільну невідому x_4, розв'язуючи систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10 - x_4, \\ x_2 = -2 + x_4, \\ -x_3 = -7 + x_4. \end{cases}$$

Рухаючись від останнього рівняння до першого, будемо мати $\begin{cases} x_1 = 5 - x_4, \\ x_2 = -2 + x_4, \\ x_3 = 7 - x_4. \end{cases}$

Поклавши $x_4 = c$, де c – довільне число, одержимо загальний розв'язок:

$$\begin{cases} x_1 = 5 - c, \\ x_2 = -2 + c, \\ x_3 = 7 - c, \\ x_4 = c. \end{cases}$$

2) $$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 7 & -4 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & -4 & -6 & 3 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \cdot 3 - \text{I} \cdot 7 \\ \cdot 3 - \text{I} \cdot 5 \end{matrix} \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 23 & -11 & -19 & 1 \\ 5 & 46 & -22 & -38 & -1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ -\text{II} \cdot 2 \end{matrix} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & -3 & -5 & 1 \\ 0 & 23 & -11 & -19 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right).$$

В останньому рядку отриманої ступінчастої матриці перший ненульовий елемент стоїть на останньому місці. Отже, система несумісна.

3) $$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 6 & -3 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 6 & -3 & 4 & 8 & 13 & 9 \\ 4 & -2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -3 \cdot \text{I} \\ -3 \cdot \text{I} \\ -2 \cdot \text{I} \end{matrix} \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -4 & -3 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ + \text{II} \\ + \text{III} \end{matrix} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \cdot (-1) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Матриця ступінчаста, система сумісна, невизначена. x_3, x_4, x_5 – головні невідомі, x_1, x_2 – вільні невідомі.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 3, \\ x_4 = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = x_1, \\ x_2 = x_2, \\ x_3 = -1 - 8x_1 + 4x_2, \\ x_4 = 0, \\ x_5 = 1 + 2x_1 - x_2. \end{cases}$$

Приклад 5 Розв'язати систему рівнянь методом Крамера $\begin{cases} 3x+2y+z=5, \\ x+y-z=-2, \\ 4x-y+5z=3. \end{cases}$

Розв'язання.

Обчислимо визначник системи Δ й визначники Δ_x, Δ_y, Δ_z:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -11 \neq 0, \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 33,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -55, \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -44.$$

За формулами Крамера одержуємо єдиний розв'язок системи:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{33}{-11} = -3, \; y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-55}{-11} = 5, \; z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-44}{-11} = 4.$$

Приклад 6 Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 3x+2y+z=5, \\ x+y-z=-2, \\ 4x-y+5z=3 \end{cases}$ матричним методом.

Розв'язання.

Перепишемо вихідну систему у вигляді $A \cdot X = B$, де $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$,

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Обчислимо визначник матриці системи: $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -11 \neq 0$.

Обчислимо алгебраїчні доповнення до всіх елементів матриці системи й потім складемо обернену матрицю:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 4, \; A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -9, \; A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -5,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -11, \; A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 11, \; A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 11,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3, \; A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4, \; A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 4 & -11 & -3 \\ -9 & 11 & 4 \\ -5 & 11 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо розв'язок:

$$X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 4 & -11 & -3 \\ -9 & 11 & 4 \\ -5 & 11 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 33 \\ -55 \\ -44 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Приклад 7 Знайти загальний розв'язок та ФСР однорідної СЛАР:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 \quad\quad + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання.

Зведемо матрицю системи до ступінчастого виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & -1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -\mathrm{I} \\ +\mathrm{I} \\ -\mathrm{I}\cdot 3 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 6 & -1 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 13 & -2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \cdot 6 - \mathrm{II} \\ -\mathrm{III}\cdot 13 \end{matrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 6 & -1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & -22 & -22 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ +\mathrm{III}\cdot 2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 6 & -1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -8 \end{pmatrix}.$$

Будемо мати, що $\operatorname{rang} A = 4 < n = 5 \Rightarrow$ система має безліч розв'язків. Запишемо систему, що відповідає отриманій ступінчастій матриці й розв'яжемо її:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 = 0, \\ 6x_2 - x_3 + 5x_4 + 5x_5 = 0, \\ x_3 + 7x_4 + 7x_5 = 0, \\ 8x_4 + 8x_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2(-x_5) + x_5 = -x_5, \\ x_2 = -5(-x_5) - 5x_5 = 0, \\ x_3 = -7 \cdot (-x_5) - 7x_5 = 0, \\ x_4 = -x_5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -x_5, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = -x_5 \end{cases} \text{ – загальний розв'язок системи;}$$

$(-1;\ 0;\ 0;\ -1;\ 1)$ – фундаментальна система розв'язків.

Задачі для самостійного розв'язування

№ 3.1. Для заданих матриць знайти обернені й зробити перевірку:

1) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 4 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

№ 3.2. Знайти ранг матриць:

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}$;

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

№ 3.3. Дослідити на сумісність і знайти розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь у випадку сумісності:

1) $\begin{cases} 2x + y - z = 0, \\ x + 2y + z = 0, \\ 2x - y + 3z = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + 2y - 4z - 1 = 0, \\ 2x + y - 5z + 1 = 0, \\ x - y - z + 2 = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x - y + 2z = 5, \\ 2x - y - z = 2, \\ 4x - 2y - 2z = -3. \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22. \end{cases}$

5) $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 - 7 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 1 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 + 7 = 0. \end{cases}$

6) $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_4 + 3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 + 6 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 - 2 = 0. \end{cases}$

7) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 = -7. \end{cases}$

8) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 3 = 0, \\ 6x_1 + 9x_2 - 2x_3 - x_4 + 4 = 0, \\ 10x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 - 3 = 0, \\ 8x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 7 = 0. \end{cases}$

9) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 9x_4 = 79, \\ 3x_1 + 13x_2 + 18x_3 + 30x_4 = 263, \\ 2x_1 + 4x_2 + 11x_3 + 16x_4 = 146, \\ x_1 + 9x_2 + 9x_3 + 9x_4 = 92. \end{cases}$

10) $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 1, \\ 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 12. \end{cases}$

№ 3.4. Знайти розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь трьома способами, якщо це можливо:

1) $\begin{cases} 2x+y-z=0, \\ x-y-3z=13, \\ 3x-2y+4z=-15; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+y-2z=4, \\ 2x-3y+z=3, \\ 3x-2y+6z=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x+2y+z=1, \\ 3x+y+2z=-2, \\ 4x-y-z=7; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 5x-3y+6z=6, \\ 2x-y-3z=8, \\ x+4y-2z=9; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x-y+z=3, \\ 2x+y+z=11, \\ x+y+2z=8; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 3x-y-4z=-2, \\ 6x+2y+z=9, \\ 2x+4y-3z=3; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 5x+y+z=3, \\ 2x-6y-z=8, \\ x+y+z=1; \end{cases}$

8) $\begin{cases} 2x+4y+z=4, \\ 3x+6y+2z=4, \\ 4x-y-3z=1; \end{cases}$

9) $\begin{cases} x-3y+z=-2, \\ 4x+y-z=3, \\ 5x+2y-3z=0; \end{cases}$

10) $\begin{cases} 3x+y-2z=1, \\ x-2y+3z=5, \\ 2x+3y-z=-4; \end{cases}$

11) $\begin{cases} x+2y-z=2, \\ -3x+y+z=9, \\ 2x-3y+2z=9; \end{cases}$

12) $\begin{cases} 2x+y+z=-7, \\ 2x-y-3z=5, \\ x-3y-z=1. \end{cases}$

№ 3.5 Знайти загальний розв'язок та фундаментальну систему розв'язків однорідної системи рівнянь:

1) $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3-3x_4=0, \\ 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=0, \\ 4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=0, \\ 3x_1+8x_2+24x_3-19x_4=0. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x_1-4x_2+5x_3+3x_4=0, \\ 3x_1-6x_2+4x_3+2x_4=0, \\ 4x_1-8x_2+17x_3+11x_4=0. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3+3x_4+5x_5=0, \\ 6x_1+4x_2+3x_3+5x_4+7x_5=0, \\ 9x_1+6x_2+5x_3+7x_4+9x_5=0, \\ 3x_1+2x_2+4x_3+8x_5=0. \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x_1+5x_2+2x_3=0, \\ 4x_1+7x_2+5x_3=0, \\ x_1+x_2-4x_3=0, \\ 2x_1+9x_2+6x_3=0. \end{cases}$

5) $\begin{cases} 6x_1-2x_2+2x_3+5x_4+7x_5=0, \\ 9x_1-3x_2+4x_3+8x_4+9x_5=0, \\ 6x_1-2x_2+6x_3+7x_4+x_5=0, \\ 3x_1-x_2+4x_3+4x_4-x_5=0. \end{cases}$

6) $\begin{cases} 5x_1+6x_2-2x_3+7x_4+4x_5=0, \\ 2x_1+3x_2-x_3+8x_4+2x_5=0, \\ 7x_1+9x_2-3x_3+5x_4+6x_5=0, \\ 5x_1+9x_2-3x_3+x_4+6x_5=0. \end{cases}$

ТЕМА 4 ОЗНАЧЕННЯ ВЕКТОРА. ЛІНІЙНІ ОПЕРАЦІЇ НАД ВЕКТОРАМИ. ДІЛЕННЯ ВІДРІЗКА В ДАНОМУ ВІДНОШЕННІ

Теоретичні відомості

Вектор – напрямлений відрізок прямої. Позначення: $\bar{a}$ або $\vec{a}$. Якщо A – початок вектора, а B – кінець, то тоді вектор можна позначити так: $\overline{AB}$ або $\overrightarrow{AB}$.

Відстань між кінцем і початком вектора $\bar{a}$ будемо називати *довжиною* або *модулем вектора* й позначати одним із символів: $|\bar{a}|$ або a.

Два або більше векторів називають *колінеарними*, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих. Три або більше векторів називають *компланарними*, якщо всі вони паралельні деякій площині або лежать в одній площині.

Якщо довжина вектора $\bar{a}$ дорівнює нулю, то вектор $\bar{a}$ називають *нульовим* і пишуть $\bar{a} = \bar{0}$.

Якщо положення початкової точки вектора в просторі значення не має, такі вектори називають *вільними*. Два вільні вектори називають *однаково спрямованими* ($\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$), якщо вони колінеарні та їх кінці лежать по одну сторону від прямої, що проходить через їх початки. В противному випадку вектори називають *протилежно спрямованими* ($\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{b}$). Два вільних вектори вважаються *рівними*, якщо вони мають однакові довжини й однакові напрямки.

З останнього означення випливає, що рівні вектори можна переносити паралельно самим собі (таке перенесення не змінює їхніх довжин і напрямів). Однак, не завжди такі перенесення допустимі.

Приміром, $\bar{v}$ – швидкість частинки води гірського водоспаду в який-небудь момент. Навряд чи можна стверджувати, що швидкість потоку в будь-якій іншій точці буде така сама. За фізичним змістом цей вектор не можна переносити в іншу точку простору. Такі вектори називають *зв'язаними*.

Якщо ж $\bar{v}$ – швидкість тросу, що рівномірно підіймає вантаж (рис. 4.1), то перенесення цього вектора вздовж прямої дії сили натягу цілком можливе. Такі вектори називають *ковзними*.

Якщо, нарешті, $\bar{v}$ – швидкість кабіни ліфта (рис. 4.2), то вектор можна перенести в будь-яку її точку. Такі вектори називають *вільними*.

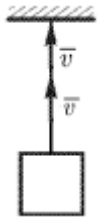


Рисунок 4.1

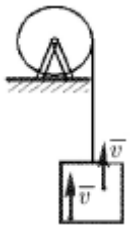


Рисунок 4.2

Під *лінійними операціями* над векторами розуміють операції додавання векторів і множення вектора на число. *Сумою* векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називають вектор $\bar{c}$, який можна отримати в результаті таких дій: з довільної точки A простору відкладаємо вектор $\bar{a}$, а з кінця B цього вектора відкладаємо вектор $\bar{b}$, будемо вважати при цьому, що кінець вектора $\bar{b}$ розташовано в точці C, тоді вектор $\overline{AC}$ і є сума векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ (рис 4.3а). У деяких випадках зручніше користуватися правилом паралелограма (рис. 4.3б): якщо вектори відкласти від однієї точки, то вектор суми – це та діагональ паралелограма, початок якої знаходиться в тій самій точці,

що й початки векторів-доданків.



а) правило трикутника *б) правило паралелограма*

Рисунок 4.3 – Правила суми двох векторів

За правилом трикутника поняття суми легко узагальнюється на випадок будь-якого скінченого числа векторів.

Вектор $\bar{b}$ будемо називати *протилежним* вектору $\bar{a}$, якщо $\bar{a} = -\bar{b}$. Вектор, протилежний вектору $\bar{a}$, позначають так: $-\bar{a}$. Напрямки $\bar{a}$ й $-\bar{a}$ протилежні, а модулі однакові.

Під *різницею* векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ розуміють вектор $\bar{a} + (-\bar{b})$. Різницю векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ будемо позначати так: $\bar{a} - \bar{b}$.

Добутком вектора $\bar{a}$ на число α називають вектор, який має довжину $|\alpha| \cdot |\bar{a}|$. Напрямок вектора $\alpha\bar{a}$ збігається з напрямком вектора $\bar{a}$, якщо $\alpha > 0$, і протилежний йому, якщо $\alpha < 0$. Якщо $\alpha = 0$, то $0 \cdot \bar{a} = \bar{0}$.

Властивості операцій додавання векторів і множення їх на числа

(для будь-яких векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ та будь-яких дійсних чисел α і β)

1. Додавання векторів *комутативне*: $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$.
2. Додавання векторів *асоціативне*: $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$.
3. Додавання нульового вектора до будь-якого вектора $\bar{a}$ не змінює останнього: $\bar{a} + \bar{0} = \bar{a}$.
4. Множення вектора на число *асоціативне*: $(\alpha\beta)\bar{a} = \alpha(\beta\bar{a})$.
5. Множення вектора на число *дистрибутивне стосовно додавання чисел*: $(\alpha + \beta)\bar{a} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{a}$.
6. Множення вектора на число *дистрибутивне стосовно додавання векторів*: $\alpha(\bar{a} + \bar{b}) = \alpha\bar{a} + \alpha\bar{b}$.
7. Множення вектора на одиницю не змінює останнього $1 \cdot \bar{a} = \bar{a}$, $1 \in R$.

Використовуючи лінійні операції над векторами, можна формувати суми такого виду $\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \ldots + \alpha_n\bar{a}_n$, які називаються *лінійними комбінаціями векторів* $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$.

Нехай на площині або в просторі зафіксована точка O (*полюс*). Вектор $\overline{OM}$ з початком у точці O та кінцем у деякій точці M площини або простору називається *радіус-вектором* точки M: $\bar{r}_M$.

Нехай дано три точки A, B, C, що лежать на одній прямій. Говорять, що точка C ділить напрямлений відрізок AB у відношенні λ, якщо $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \lambda$ (або $\overline{AC} = \lambda\overline{CB}$).

Теорема 4.1 Якщо точка C ділить відрізок AB у відношенні $\lambda \neq -1$, то радіус вектор $\bar{r}_C$ точки C виражається через радіус-вектори $\bar{r}_A$ і $\bar{r}_B$ точок A й B наступним чином: $\bar{r}_C = \dfrac{\bar{r}_A + \lambda \bar{r}_B}{1+\lambda}$, $\lambda \neq -1$ – формула ділення відрізка в даному відношенні.

Питання для самоконтролю

1. За якої умови вектори можуть бути колінеарними?
2. Що таке вільні вектори?
3. Чому буде дорівнювати сума двох протилежно спрямованих векторів однакової довжини?
4. Що станеться з вектором, якщо його помножити на число 1? Число –1?
5. Що таке лінійна комбінація векторів?

Тест для самоперевірки

1. $ABCD$ – квадрат. Сума яких із зазначених векторів є нульовим вектором?

А $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$; **Б** $\overline{DC}$ і $\overline{AB}$;
В $\overline{AC}$ і $\overline{DA}$; **Г** $\overline{BC}$ і $\overline{AD}$.

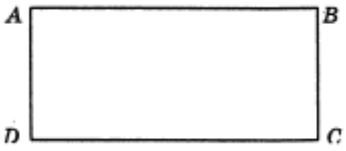
2. $ABCD$ – паралелограм. Точки M і N – середини AB і BC відповідно. Скільки з представлених пар векторів колінеарні: $\{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}\}$, $\{\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AC}\}$, $\{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}\}$, $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\}$?

А 1; **Б** 2; **В** 3; **Г** 4.

3. Векторною величиною є:

А маса тіла; **Б** швидкість тіла;
В час; **Г** площа.

4. На рисунку $ABCD$ – прямокутник. Тоді вектор $\overrightarrow{BC}$ буде дорівнювати вектору:



А $\overrightarrow{AD}$; **Б** $\overrightarrow{DA}$;
В $\overrightarrow{CB}$; **Г** $\overrightarrow{AB}$.

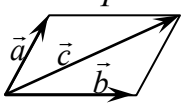
5. Рівність $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ називається:

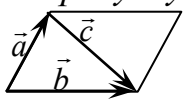
А переставна властивість; **Б** сполучна властивість;
В правилом трикутника; **Г** правилом паралелограма.

6. В ΔABC відрізок MN $(MN \| BC)$ – середня лінія. Число k, для якого $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{MA}$, дорівнює:

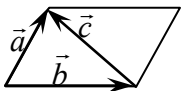
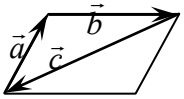
А 2; **Б** –2; **В** 0,5; **Г** –0,5.

7. Вектор $\vec{c}$ є різницею векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ на рисунку:

А 

; **Б** 

;

В  ; **Г**  .

8. $ABCD$ – паралелограм, O – точка перетину його діагоналей. Знайдіть $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OA}$:

А $\overrightarrow{OC}$; **Б** $\overrightarrow{BO}$; **В** $\overrightarrow{OB}$; **Г** $\overrightarrow{CO}$.

9. O – точка перетину діагоналей паралелограма $ABCD$, $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{c}$. Виразіть вектор $\vec{c}$ через вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

А $\vec{c}=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b})$; **Б** $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$;

В $\vec{c}=\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})$; **Г** $\vec{c}=\vec{b}-\vec{a}$.

10. Оберіть правильне твердження:

А якщо точка M ділить відрізок AB у відношенні λ, то $\frac{BM}{MA}=\lambda$;

Б точка M, що належить прямій M_1M_2, може ділити відрізок M_1M_2 у відношенні $\lambda<0$;

В якщо точка M – середина відрізка AB, то точка M ділить відрізок AB у відношенні $\lambda=\frac{1}{2}$;

Г якщо точка M ділить відрізок AB у відношенні λ, то точка M ділить відрізок BA у відношенні $(-\lambda)$.

11. $ABCD$ – квадрат. Укажіть пари рівних векторів.

А $\overline{AB}$ і $\overline{DC}$; **Б** $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$;

В $\overline{BC}$ і $\overline{DA}$; **Г** $\overline{BC}$ і $\overline{AC}$.

12. Точка M – середина відрізка AB, тоді точка M ділить відрізок AB у відношенні:

А $\lambda=-0{,}5$; **Б** $\lambda=0{,}5$; **В** $\lambda=1$; **Г** $\lambda=2$.

13. $ABCD$ – паралелограм. Укажіть пари колінеарних векторів.

А $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$; **Б** $\overline{AC}$ і $\overline{BD}$;

В $\overline{AB}$ і $\overline{BC}$; **Г** $\overline{DA}$ і $\overline{BD}$.

14. Точка M – середина відрізка AB. Укажіть вірну векторну рівність.

А $\bar{r}_M=0{,}5(\bar{r}_A-\bar{r}_B)$; **Б** $\bar{r}_M=0{,}5(\bar{r}_A+\bar{r}_B)$;

В $\bar{r}_M=\bar{r}_A-\bar{r}_B$; **Г** $\bar{r}_M=\bar{r}_A+\bar{r}_B$.

15. $ABCD$ – паралелограм. Укажіть пари неколінеарних векторів.

А $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$; **Б** $\overline{AC}$ і $\overline{BD}$;

В $\overline{AB}$ і $\overline{BA}$; **Г** $\overline{DA}$ і $\overline{BC}$.

16. Точка M ділить відрізок AB у відношенні $\lambda=-0{,}5$. Вкажіть вірну векторну рівність.

А $\bar{r}_M=0{,}5(\bar{r}_A-\bar{r}_B)$; **Б** $\bar{r}_M=0{,}5(\bar{r}_A+\bar{r}_B)$;

В $\bar{r}_M=2\bar{r}_A-\bar{r}_B$; **Г** $\bar{r}_M=2\bar{r}_A+\bar{r}_B$.

17. Точка M ділить відрізок AB у відношенні $\lambda = 1{,}5$. *Укажіть вірну векторну рівність.*

А $\bar{r}_M = 0{,}2(2\bar{r}_A - 3\bar{r}_B)$; **Б** $\bar{r}_M = 0{,}2(2\bar{r}_A + 3\bar{r}_B)$;

В $\bar{r}_M = 1{,}5(\bar{r}_A - \bar{r}_B)$; **Г** $\bar{r}_M = 1{,}5(\bar{r}_A + \bar{r}_B)$.

18. Оберіть неправильне твердження:

А якщо точка *M* ділить відрізок *AB* у відношенні λ, то $\frac{BM}{MA} = \lambda$;

Б точка *M*, що лежить на прямій M_1M_2, може ділити відрізок M_1M_2 у відношенні $\lambda < 0$;

В якщо точка *M* – середина відрізка *AB*, то точка *M* ділить відрізок *AB* у відношенні $\lambda = 1$;

Г якщо точка *M* ділить відрізок *AB* у відношенні λ, то відрізок *BA* точка *M* ділить у відношенні $\frac{1}{\lambda}$.

19. Відомо, що $\bar{r}_M = -2\bar{r}_A + 3\bar{r}_B$. *У якому відношенні точка M ділить відрізок AB?*

А $\frac{3}{2}$; **Б** $-\frac{2}{3}$; **В** $-\frac{3}{2}$; **Г** $\frac{2}{3}$.

20. Відомо, що точка M ділить відрізок AB у відношенні λ. *У якому відношенні ця точка ділить відрізок BA?*

А $-\lambda$; **Б** $\lambda + 1$; **В** $\frac{1}{\lambda}$; **Г** $1 - \lambda$.

Відповіді: 1.А. 2.Б. 3.Б. 4.А. 5.А. 6.Б. 7.В. 8.Б. 9.А. 10.Б. 11.А. 12.В. 13.А. 14.Б. 15.Б. 16.В. 17.Б. 18.А. 19.В. 20.В.

Приклади розв'язання задач

Приклад 1 У трикутнику *ABC* пряма *AM* – бісектриса кута *BAC*, причому точка *M* належить стороні *BC*. Виразити вектор $\overline{AM}$ через $\overline{AB} = \bar{b}$, $\overline{AC} = \bar{c}$.

Розв'язання.

$\overline{BC} = \bar{c} - \bar{b}$. За властивістю бісектриси внутрішнього кута трикутника маємо $\left|\overline{BM}\right| : \left|\overline{MC}\right| = \left|\bar{b}\right| : \left|\bar{c}\right|$, $\left|\overline{BM}\right| : \left|\overline{BC}\right| = \left|\bar{b}\right| : \left(\left|\bar{b}\right| + \left|\bar{c}\right|\right)$.

Отже, $\overline{BM} = \frac{\left|\bar{b}\right|}{\left|\bar{b}\right| + \left|\bar{c}\right|}\left(\bar{c} - \bar{b}\right)$. Оскільки $\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{BM}$, то

$$\overline{AM} = \bar{b} + \frac{\left|\bar{b}\right|}{\left|\bar{b}\right| + \left|\bar{c}\right|}\left(\bar{c} - \bar{b}\right) = \frac{\bar{b}\left|\bar{c}\right| + \bar{c}\left|\bar{b}\right|}{\left|\bar{b}\right| + \left|\bar{c}\right|}.$$

Приклад 2 Радіус-векторами вершин *A*, *B*, C трикутника *ABC* є $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$, $\bar{r}_3$ відповідно. Знайти радіус-вектор точки *M* перетину медіан трикутника.

Розв'язання.

Оскільки $\overline{BC}=\bar{r}_3-\bar{r}_2$, $\overline{BD}=\dfrac{\bar{r}_3-\bar{r}_2}{2}$ (D – середина BC), $\overline{AB}=\bar{r}_2-\bar{r}_1$, $\overline{AD}=\overline{BD}+\overline{AB}=\dfrac{\bar{r}_3-\bar{r}_2}{2}+\bar{r}_2-\bar{r}_1=\dfrac{\bar{r}_3+\bar{r}_2-2\bar{r}_1}{2}$, $\overline{AM}=\dfrac{2}{3}\overline{AD}$, тому $\overline{AM}=\dfrac{\bar{r}_3+\bar{r}_2-2\bar{r}_1}{3}$. Отже, $\bar{r}_M=\bar{r}_1+\overline{AM}=\dfrac{\bar{r}_1+\bar{r}_2+\bar{r}_3}{3}$.

Приклад 3 У трикутнику ABC сторона AB точками M і N поділена на три рівні частини: $\left|\overline{AM}\right|=\left|\overline{MN}\right|=\left|\overline{NB}\right|$. Виразити вектор $\overline{CM}$ через $\overline{CA}=\bar{a}$, $\overline{CB}=\bar{b}$.

Розв'язання.

Оскільки $\overline{AB}=\bar{b}-\bar{a}$, то $\overline{AM}=\dfrac{\bar{b}-\bar{a}}{3}$. Враховуючи, що $\overline{CM}=\overline{CA}+\overline{AM}$, маємо

$$\overline{CM}=\bar{a}+\frac{\bar{b}-\bar{a}}{3}=\frac{2\bar{a}+\bar{b}}{3}.$$

Задачі для самостійного розв'язування

№ 4.1. Спростити вирази:

1) $\overline{AB}-\overline{CB}-\overline{DC}-\overline{AK}-\overline{KC}-\overline{CD}$;
2) $\overline{AB}+\overline{MN}+\overline{BC}+\overline{CA}+\overline{PQ}+\overline{NM}$;
3) $\overline{AD}+\overline{MP}+\overline{EK}-\overline{EP}-\overline{MD}$;
4) $2\bar{x}-\bar{a}+3\bar{b}-\bar{x}+3\bar{a}-\bar{b}$.

№ 4.2. Для довільних векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ побудувати:

1) $2\bar{a}-\dfrac{1}{3}\bar{b}$, $\dfrac{1}{2}\bar{a}+3\bar{b}$, $-2\bar{a}-3\bar{b}$, $-3\bar{a}+2\bar{b}$;
2) $4\bar{a}-\dfrac{1}{2}\bar{b}$, $\dfrac{1}{4}\bar{a}+\dfrac{1}{3}\bar{b}$, $-3\bar{a}-4\bar{b}$, $-\dfrac{2}{3}\bar{a}+\dfrac{3}{4}\bar{b}$.

№ 4.3. Побудувати суму та різницю векторів $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$, $\overline{AB}$ і $\overline{DC}$ трапеції $ABCD$, що є її основами.

№ 4.4. У правильному п'ятикутнику $ABCDE$ задані вектори, що збігаються з його сторонами: $\overline{AB}=\bar{m}$, $\overline{BC}=\bar{n}$, $\overline{CD}=\bar{p}$, $\overline{DE}=\bar{q}$, $\overline{EA}=\bar{r}$. Побудувати вектори:

1) $\bar{m}-\bar{n}+\bar{p}-\bar{q}+2\bar{r}$;
2) $\bar{m}+2\bar{p}+\dfrac{1}{2}\bar{r}$;
3) $2\bar{m}+\dfrac{1}{2}\bar{n}-3\bar{p}-\bar{q}+2\bar{r}$.

№ 4.5. Задано $\overline{AB}=\bar{a}+2\bar{b}$, $\overline{BC}=-4\bar{a}-\bar{b}$, $\overline{CD}=-5\bar{a}-3\bar{b}$. Довести, що $ABCD$ – трапеція.

№ 4.6. У трикутнику ABC вектори $\overline{AB}=\bar{a}$, $\overline{BC}=\bar{b}$. Знайти вектори, що збігаються з медіанами цього трикутника.

№ 4.7. Визначити будь-який вектор, що ділить навпіл кут між векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$.

№ 4.8. Нехай $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$, $\bar{r}_3$ – радіус-вектори трьох послідовних вершин паралелограма *ABCD*. Знайти радіус-вектор вершини *D*.

№ 4.9. Дано правильний шестикутник $ABCDEF$, точка O – його центр. Виразити вектори $\overline{OC}$, $\overline{OD}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{DA}$, $\overline{CA}$ через вектори $\overline{OA} = \bar{a}$, $\overline{OB} = \bar{b}$.

№ 4.10. Точка *O* – центр ваги трикутника *ABC*. Виразити вектори $\overline{AC}$, $\overline{CB}$, $-\frac{1}{2}\overline{AB}$, $\overline{AO}$ через вектори $\overline{AB} = \bar{a}$, $\overline{BC} = \bar{b}$.

№ 4.11. У тетраедрі $ABCD$ точки *M* і *N* є серединами ребер *DA* і *BC* відповідно. Виразити вектор $\overline{MN}$ через вектори $\overline{DA}$, $\overline{DB}$, $\overline{DC}$.

№ 4.12. У паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ задані вектори, що збігаються з його ребрами: $\overline{AB} = \overline{m}$, $\overline{AD} = \overline{n}$, $\overline{AA_1} = \overline{p}$. Побудувати вектори:

1) $\overline{m} + \overline{n} + \overline{p}$; 2) $\overline{m} + \overline{n} + \frac{1}{2}\overline{p}$; 3) $\frac{1}{2}\overline{m} + \frac{1}{2}\overline{n} + \overline{p}$;

4) $\overline{m} + \overline{n} - \overline{p}$; 5) $-\overline{m} - \overline{n} + \frac{1}{2}\overline{p}$.

№ 4.13. Точка *O* – центр ваги трикутника *ABC*. Довести, що $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \overline{0}$.

№ 4.14. Точка M_1 – середина відрізка A_1B_1, точка M_2 – середина відрізка A_2B_2. Довести векторну рівність $\overline{M_1M_2} = \frac{1}{2}\left(\overline{A_1A_2} + \overline{B_1B_2}\right)$.

№ 4.15. Побудувати точку *M*, що ділить відрізок *AB* у відношенні:

1) $\pm 2, \pm\frac{1}{2}$; 2) $\pm\frac{3}{4}, \pm\frac{4}{3}$; 3) $3, -4, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$.

№ 4.16. Точка *M* ділить відрізок *AB* у відношенні $\lambda = -\frac{2}{3}$. Виразити радіус-вектор точки *B* через радіус вектори точок *A* і *M*.

ТЕМА 5 ЛІНІЙНА ЗАЛЕЖНІСТЬ ВЕКТОРІВ. ПОНЯТТЯ ВЕКТОРНОГО ПРОСТОРУ, БАЗИСУ Й КООРДИНАТ ВЕКТОРА

Теоретичні відомості

Вектори $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n$ називаються *лінійно залежними*, якщо існують дійсні числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, серед яких хоча б одне відмінне від нуля, такі, що $\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + ... + \alpha_n\bar{a}_n = \bar{0}$. Якщо остання рівність можлива тільки при тривіальному наборі чисел $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, тобто $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$, то вектори $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n$ називаються *лінійно незалежними*.

Вектор $\bar{b} = \alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + ... + \alpha_n\bar{a}_n$ називають лінійною комбінацією векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n$. В цій рівності $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ – дійсні числа.

Теорема 5.1 Для того, щоб система векторів була лінійно залежною, необхідно й достатньо, щоб один з векторів був лінійною комбінацією інших.

Теорема 5.2 Два вектори лінійно залежні тоді й тільки тоді, коли вони колінеарні.

Наслідок. Два неколінеарних вектори лінійно незалежні.

Теорема 5.3 Три вектори лінійно залежні тоді й тільки тоді, коли вони компланарні.

Наслідок. Три некомпланарних вектори лінійно незалежні.

Теорема 5.4 Будь-які чотири вектори у просторі геометричних векторів лінійно залежні.

Множину векторів будемо називати *векторним простором*, якщо лінійні операції над будь-якими векторами цієї множини, тобто додавання двох векторів і множення вектора на число, дають вектори тієї ж множини.

Базисом векторного простору називається така впорядкована сукупність векторів цього простору, яка є лінійно незалежною і додавання до цієї системи хоча б одного вектора робить її лінійно залежною (умова максимальності). З максимальності системи базисних векторів випливає, що будь-який вектор $\bar{d}$ простору є лінійною комбінацією базисних векторів: $\bar{d} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{b} + \gamma\bar{c}$, де $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – вектори базису. Числа α, β, γ називаються *координатами вектора* $\bar{d}$ в базисі $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$. Позначення: $\bar{d}(\alpha, \beta, \gamma)$.

Теорема 5.5 Будь-які два базиси одного векторного простору мають однакову кількість векторів.

Теорема 5.6 Координати вектора в заданому базисі єдині.

Число векторів базису називається *розмірністю* даного векторного простору. Позначення: $\dim V$.

Теорема 5.7 Будь-яка координата суми скінченого числа векторів дорівнює сумі відповідних координат доданків:

$$\bar{d}_1 + \bar{d}_2 + ... + \bar{d}_n = (\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n, \beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_n, \gamma_1 + \gamma_2 + ... + \gamma_n).$$

При множенні вектора на число, його координати множаться на це число, тобто

$$\lambda\bar{d}_1 = (\lambda\alpha_1, \lambda\beta_1, \lambda\gamma_1),\ \lambda \in R.$$

Теорема 5.8 Якщо точка C ділить відрізок AB у відношенні $\lambda \neq -1$ і $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, то координати точки C можна знайти за формулами:

$$x_C = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda},\ y_C = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda},\ z_C = \frac{z_A + \lambda z_B}{1+\lambda}.$$

Питання для самоконтролю

1. Що таке базис векторного простору?
2. За якої умови вектори утворюють базис?
3. Яким чином визначити розмірність векторного простору?
4. Чи може існувати декілька базисів у векторному просторі?
5. Що таке координати вектору?

Тест для самоперевірки

1. ABCD – паралелограм. Точки M і N ділять навпіл сторони AB і BC відповідно. Скільки із зазначених систем векторів є лінійно залежними: $\{\overline{AM}, \overline{AN}\}$, $\{\overline{AN}, \overline{AC}\}$, $\{\overline{AM}, \overline{AB}\}$, $\{\overline{AB}, \overline{CD}\}$?

А 1; **Б** 2; **В** 3; **Г** 4.

2. Відомо, що $\alpha\bar{a} + \beta\bar{b} + \gamma\bar{c} = \bar{0}$. Вектори $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ будуть ЛІНІЙНО ЗАЛЕЖНИМИ, якщо

А $\alpha \neq 0 \vee \beta \neq 0 \vee \gamma \neq 0$; **Б** $\alpha \neq 0 \wedge \beta \neq 0 \wedge \gamma \neq 0$;

В $\alpha = \beta = \gamma = 0$; **Г** $\alpha = 0 \vee \beta = 0 \vee \gamma = 0$.

3. ABCD – паралелограм. Точки M і N ділять навпіл сторони AB і BC відповідно. Скільки із зазначених систем векторів є лінійно незалежними: $\{\overline{AM}, \overline{AN}\}$, $\{\overline{AN}, \overline{AC}\}$, $\{\overline{AM}, \overline{AB}\}$, $\{\overline{AB}, \overline{CD}\}$?

А 1; **Б** 2; **В** 3; **Г** 4.

4. Лінійно незалежною є система векторів ($\bar{a} \neq \bar{0}$)

А $\{\bar{d}_1 = \bar{a}, \bar{d}_2 = \bar{0}\}$; **Б** $\{\bar{d}_1 = \bar{a}, \bar{d}_2 = -\bar{a}\}$;

В $\{\bar{d}_1 = \bar{a}\}$; **Г** $\{\bar{d}_1 = \bar{0}, \bar{d}_2 = -\bar{a}\}$.

5. Скільки з представлених систем векторів є ЛІНІЙНО ЗАЛЕЖНИМИ ($\bar{a}, \bar{b} \neq \bar{0}, \bar{a} \| \bar{b}$): $\{\bar{d}_1 = \bar{a}, \bar{d}_2 = \bar{b}\}$; $\{\bar{d}_1 = \bar{a}, \bar{d}_2 = -\bar{a}\}$; $\{\bar{d}_1 = \bar{a}\}$; $\{\bar{d}_1 = \bar{0}, \bar{d}_2 = -\bar{a}\}$?

А 1; **Б** 2; **В** 3; **Г** 4.

6. Відомо, що $\bar{a} = 2\bar{b} + 3\bar{c}$. Що можна сказати про систему векторів $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$?

А утворює базис; **Б** вона лінійно незалежна;

В вона лінійно залежна; **Г** неможливо визначити.

7. Що можна сказати про систему чотирьох векторів?

А вона може бути лінійно незалежною;

Б вона завжди лінійно незалежна;

В вона завжди лінійно залежна;

Г вона може бути лінійно залежною.

8. Відомий розклад $\bar{x} = \overline{e_2} + 3\overline{e_1} + 2\overline{e_3}$ по базису $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$. Тоді координати вектора $\bar{x}$ мають вигляд

А $(3; 2; 1)$; **Б** $(1; 3; 2)$; **В** $(3; 1; 2)$; **Г** $(2; 3; 1)$.

9. $ABCD$ – паралелограм, $\{\overline{AB}, \overline{AC}\}$ – базис. Координати вектора $\overline{BC}$ в цьому базисі мають вигляд

А $(1; -1)$; **Б** $(-1; 1)$; **В** $(1; 1)$; **Г** $(-1; -1)$.

10. $ABCD$ – паралелограм, $\{\overline{AB}, \overline{AD}\}$ – базис. Координати вектора $\overline{DB}$ в цьому базисі мають вигляд

А $(1; -1)$; **Б** $(-1; 1)$; **В** $(1; 1)$; **Г** $(-1; -1)$.

11. $ABCD$ – ромб. Координатами вектора $\overline{OC}$ (O – точка перетину діагоналей) в базисі $\{\overline{AB}, \overline{AD}\}$ будуть

А $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; **Б** $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$; **В** $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$; **Г** $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

12. $ABCD$ – паралелограм. Координатами вектора $\overline{AB}$ в базисі $\{\overline{AD}, \overline{DC}\}$ будуть:

А $(1,0)$; **Б** $(-1,0)$; **В** $(0,-1)$; **Г** $(0,1)$.

13. Вершина A тетраедра $OABC$ прийнята за полюс, вектори $\overline{AO}$, $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ – за базис. Координатами радіус-вектора центру ваги грані OAB тетраедра будуть:

А $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$; **Б** $\left(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)$; **В** $\left(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$; **Г** $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

14. При яких значеннях λ і μ вектори $\bar{a}(-1, 2\mu, 3)$ і $\bar{b}(\lambda, 3, -2)$ будуть колінеарні?

А $\lambda = \frac{3}{2}$, $\mu = -\frac{9}{4}$; **Б** $\lambda = -\frac{2}{3}$, $\mu = -\frac{9}{4}$;

В $\lambda = \frac{2}{3}$, $\mu = -\frac{9}{4}$; **Г** $\lambda = \frac{2}{3}$, $\mu = -\frac{9}{4}$.

15. Точка M ділить відрізок AB у відношенні $\lambda = -0{,}5$. Вкажіть координати точки M, якщо $A(1; 2; 3)$, $B(-1; -2; -3)$.

А $(0; 0; 0)$; **Б** $(3; 6; 9)$; **В** $(1; 2; 3)$; **Г** $(-3; -6; -9)$.

16. Точка M ділить відрізок AB у відношенні $\lambda = 1{,}5$. Вкажіть координати точки A, якщо $M(1; 2; 3)$, $B(-1; -2; -3)$.

А $(-4; -8; -12)$; **Б** $(1; 2; 3)$; **В** $(4; 8; 12)$; **Г** $(-2; -4; -6)$.

17. Точка M ділить відрізок AB у відношенні $\lambda = -\frac{2}{3}$. Вкажіть координати точки B, якщо $A(1; 2; 3)$, $M(-1; -2; -3)$.

А $(-2; -4; -6)$; **Б** $(1; 2; 3)$; **В** $(4; 8; 12)$; **Г** $(2; 4; 6)$.

18. На матеріальну точку діють дві сили $\bar{F}_1 = -2\bar{a}$ *і* $\bar{F}_2 = 3\bar{b}$, *де* $\bar{a}(5;-2;3)$, $\bar{b}(1;0;-4)$. *Координатами їх рівнодійної будуть*

А $(-7;7;-18)$; **Б** $(-7;4;6)$; **В** $(-13;4;6)$; **Г** $(-7;4;-18)$.

19. Дано вектори $\bar{a}(-1;3;2)$, $\bar{b}(0;1;4)$. *Координатами вектора* $\dfrac{3\bar{a}-2\bar{b}}{4}$ *будуть*

А $\left(-\frac{3}{4};\frac{7}{4};-\frac{1}{2}\right)$; **Б** $\left(-\frac{3}{4};2;-\frac{1}{2}\right)$;

В $\left(\frac{3}{4};\frac{7}{4};-\frac{1}{2}\right)$; **Г** $\left(-\frac{3}{4};\frac{7}{4};-\frac{1}{4}\right)$.

20. Відомо, що $\dim V = 3$. *Яку максимальну кількість лінійно незалежних векторів можна вказати в цьому просторі?*

А 0; **Б** 1; **В** 2; **Г** 3.

Відповіді: 1.Б. 2.А. 3.Б. 4.В. 5.Б. 6.В. 7.В. 8.В. 9.Б. 10.А. 11.А. 12.Г. 13.А. 14.Г. 15.Б. 16.В 17.Г. 18.Г. 19.А. 20.Г.

Приклади розв'язання задач

Приклад 1 Система векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n$ містить нульовий вектор. Дослідити цю систему векторів на лінійну залежність.

Розв'язання.

Без обмеження загальності міркувань можна припустити, що $\bar{a}_1 = \bar{0}$, тоді, $1\cdot\bar{a}_1 + 0\cdot\bar{a}_2 + ... + 0\cdot\bar{a}_n = \bar{0}$. У цій лінійній комбінації векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n$ коефіцієнт при першому векторі відмінний від нуля. Отже, розглянута система векторів лінійно залежна.

Приклад 2 В паралелограмі $ABCD$ точка M – середина DC, N – середина BC. Знайти лінійну залежність векторів $\overline{AM}$, $\overline{AN}$, $\overline{CB}$.

Розв'язання.

Виходячи з геометричного змісту лінійної залежності трьох векторів, одразу маємо, що вектори $\overline{AM}$, $\overline{AN}$, $\overline{CB}$ лінійно залежні. Знайдемо яку-небудь нульову, але нетривіальну лінійну комбінацію цих векторів.

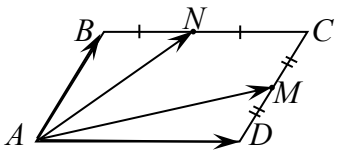


Рисунок 5.1 – Рисунок до прикладу 2

Виберемо базис $\{\overline{AB}, \overline{AD}\}$. Розкладемо вектори $\overline{AM}$, $\overline{AN}$, $\overline{CB}$ за базисом, отримаємо

$$\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AB} + \overline{AD},\ \overline{AN} = \frac{1}{2}\overline{AD} + \overline{AB},\ \overline{CB} = -\overline{AD}.$$

Складемо нульову лінійну комбінацію векторів $\overline{AM}$, $\overline{AN}$, $\overline{CB}$ з коефіцієнтами α, β, γ: $\alpha\overline{AM} + \beta\overline{AN} + \gamma\overline{CB} = \bar{0}$.

Підставимо в цю комбінацію знайдені розклади цих векторів за базисом та зберемо коефіцієнти при базисних векторах, отримаємо

$$\left(\frac{1}{2}\alpha+\beta\right)\overline{AB}+\left(\alpha+\frac{1}{2}\beta-\gamma\right)\overline{AD}=\bar{0}.$$

Так як вектори $\overline{AB}$ і $\overline{AD}$ лінійно незалежні, то будь-яка їх нульова лінійна комбінація повинна бути тривіальною. Тому маємо

$$\begin{cases}\frac{1}{2}\alpha+\beta=0,\\ \alpha+\frac{1}{2}\beta-\gamma=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-2\beta,\\ \alpha=\gamma-\frac{1}{2}\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-2\beta,\\ \gamma=-\frac{3}{2}\beta.\end{cases}$$

Нас цікавить який-небудь ненульовий набір чисел α,β,γ, тому покладемо $\beta=-2$. Тоді $\alpha=4$, $\gamma=3$. Таким чином, знайдена шукана нетривіальна нульова комбінація векторів $\overline{AM}$, $\overline{AN}$, $\overline{CB}$ у вигляді $4\overline{AM}-2\overline{AN}+3\overline{CB}=\bar{0}$.

Приклад 3 Вектори $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ некомпланарні. Чи будуть компланарними вектори $\bar{l},\bar{m},\bar{n}$: $\bar{l}=\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$, $\bar{m}=\bar{a}-\bar{b}$, $\bar{n}=3\bar{a}-\bar{b}+\bar{c}$. Якщо так, то знайти їх лінійну залежність.

Розв'язання.

Виходячи з геометричного змісту лінійної залежності трьох векторів, одразу маємо, що вектори $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ лінійно незалежні. Складемо нульову лінійну комбінацію векторів $\bar{l},\bar{m},\bar{n}$ з коефіцієнтами α,β,γ

$$\alpha\bar{l}+\beta\bar{m}+\gamma\bar{n}=\bar{0}.$$

Підставимо в цю комбінацію їх розклади і зберемо коефіцієнти при векторах $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$, отримаємо

$$(\alpha+\beta+3\gamma)\bar{a}+(\alpha-\beta-\gamma)\bar{b}+(\alpha+\gamma)\bar{c}=\bar{0}.$$

Так як вектори $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ лінійно незалежні, то будь-яка їх нульова лінійна комбінація повинна бути тривіальною. Тому маємо

$$\begin{cases}\alpha+\beta+3\gamma=0,\\ \alpha-\beta-\gamma=0,\\ \alpha+\gamma=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=2\alpha,\\ \gamma=-\alpha.\end{cases}$$

Нас цікавить який-небудь ненульовий набір чисел α,β,γ, тому покладемо $\alpha=1$. Тоді $\beta=2$, $\gamma=-1$. Таким чином, вектори $\bar{l},\bar{m},\bar{n}$ компланарні та їх лінійну залежність можна записати у вигляді $\bar{l}+2\bar{m}-\bar{n}=\bar{0}$.

Приклад 4 Знайти вектор $\bar{a}=\overline{AB}$, якщо $A(1;3;2)$ і $B(5;8;-1)$.

Розв'язання.

Координати точки співпадають з координатами її радіус-вектора, тому можемо записати: $\bar{r}_A(1;3;2)$, $\bar{r}_B(5;8;-1)$. Знайдемо координати шуканого вектора: $\bar{a}=\overline{AB}=\bar{r}_B-\bar{r}_A=(4;5;-3)$.

Приклад 5 Знайти координати P – центру ваги трикутника ABC, якщо відомі координати його вершин: $A(-4;2)$, $B(2;0)$, $C(1;3)$.

Розв'язання.

Центр ваги трикутника – це точка перетину його медіан. Тому спочатку знайдемо координати другого кінця однієї з медіан, наприклад *CD*:

$$x_D = \frac{x_A + x_B}{2} = -1,\ y_D = \frac{y_A + y_B}{2} = 1,\ D(-1;\ 1).$$

Центр ваги P ділить кожну медіану у відношенні 2:1, рахуючись від вершини трикутника, тобто

$$x_P = \frac{x_C + 2x_D}{1+2} = \frac{1+2\cdot(-1)}{3} = -\frac{1}{3};\qquad y_P = \frac{y_C + 2y_D}{1+2} = \frac{3+2\cdot 1}{3} = \frac{5}{3}.$$

Отже, $P\left(-\frac{1}{3};\ \frac{5}{3}\right)$.

Задачі для самостійного розв'язування

№ 5.1. Дано трикутник ABC. Точка B_1 – середина сторони *AC*, точки A_1, A_2 ділять сторону *CB* на три рівні частини, точки C_1, C_2, C_3 ділять сторону *AB* на чотири рівні частини. Знайти лінійну залежність векторів $\overline{C_1A_2}$, $\overline{A_1B_1}$, $\overline{C_2C}$.

№ 5.2. Паралелограм $ABCD$: B_1 – середина AB; A_1 – середина AD; C_1, C_2 ділять DC на три рівні частини. Знайти лінійну залежність векторів $\overline{A_1B_1}$, $\overline{DA_1}$, $\overline{BC_1}$.

№ 5.3. Дана трапеція $ABCD$ ($AB \parallel CD$), у якої $AB = 3DC$. Точки M і N – середини бічних сторін, точка P – середина основи *AB*. Знайти лінійну залежність векторів $\overline{MN}$, $\overline{PC}$, $\overline{DA}$.

№ 5.4. У трикутнику ABC точка D – середина сторони *AC*, Точки E і F – ділять BC на три рівні частини. Знайти лінійну залежність векторів $\overline{DF}$, $\overline{EA}$, $\overline{FE}$.

№ 5.5. Знайти, якщо вона існує, лінійну залежність векторів $\bar{l} = 2\bar{a} - \bar{b} - \bar{c}$, $\bar{m} = 2\bar{b} - \bar{a} - \bar{c}$, $\bar{n} = 2\bar{c} - \bar{b} - \bar{a}$, де вектори $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ некомпланарні.

№ 5.6. Дано вектори $\bar{a}(-1;\ 3;\ 2)$, $\bar{b}(0;\ 1;\ 4)$. Обчислити координати векторів $\bar{a} + \bar{b}$, $\bar{a} - \bar{b}$, $\frac{\bar{a} + 2\bar{b}}{3}$, $\frac{\bar{a} - 2\bar{b}}{2}$, $2\bar{a} + 3\bar{b}$.

№ 5.7. На матеріальну точку діють дві сили $\bar{F}_1 = 2\bar{a}$ і $\bar{F}_2 = 3\bar{b}$, де $\bar{a}(5;-2;\ 3)$, $\bar{b}(1;\ 0;\ -4)$. Знайти їх рівнодійну.

№ 5.8. Знайти лінійну залежність векторів $\bar{a}(1;3;5)$, $\bar{b}(0;\ 4;\ 5)$, $\bar{c}(7;\ -8;\ 4)$, $\bar{d}(2;\ -1;\ 3)$.

№ 5.9. Чи будуть вектори $\bar{l} = 2\bar{a} - \bar{b} + \bar{c}$, $\bar{m} = \bar{a} + \bar{b} - 2\bar{c}$, $\bar{n} = \bar{a} - 2\bar{b} + 3\bar{c}$ лінійно залежні, якщо вектори $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ лінійно незалежні?

№ 5.10. Чи колінеарні точки $A(4;-1)$, $B(6;-7)$, $C(3;2)$?

№ 5.11. Довести, що вектори $\bar{a}(1;-1;2)$, $\bar{b}(2;2;-1)$, $\bar{c}(3;7;-7)$ утворюють базис. Знайти координати вектора $\bar{d}(2;1;0)$ в цьому базисі.

№ 5.12. Дано три вектори $\bar{a}(3;-1)$, $\bar{b}(1;-2)$, $\bar{c}(-1;7)$. Знайти розклад вектора $\bar{p}=\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$ за базисом $\{\bar{a},\bar{b}\}$.

№ 5.13. Знайти розклад вектора $\bar{c}(11;6;-5)$ за базисом $\bar{p}(3;-2;1)$, $\bar{q}(-1;1;-2)$, $\bar{r}(2;1;-3)$.

№ 5.14. Дано вектори $\bar{a}(2;3)$, $\bar{b}(1;-3)$, $\bar{c}(-1;3)$. При якому значенні α вектори $\bar{p}=\bar{a}+\alpha\bar{b}$ і $\bar{q}=\bar{a}+2\bar{c}$ колінеарні?

№ 5.15. Знайти числа α, β, γ, для яких $\alpha\bar{a}, \beta\bar{b}, \gamma\bar{c}, \bar{d}$ утворюють замкнену ламану лінію, де $\bar{a}(3;-2;1)$, $\bar{b}(-1;1;-2)$, $\bar{c}(2;1;-3)$, $\bar{d}(11;6;-5)$.

№ 5.16. Визначити, при яких значеннях x і y вектори $\bar{a}$ та $\bar{b}$, зв'язані співвідношенням $(3x-y+2)\bar{a}+(x+2y+3)\bar{b}=\bar{0}$, неколінеарні?

№ 5.17. Визначити, при яких значеннях x, y та z вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$, зв'язані співвідношенням $(x+y-z-2)\bar{a}+(2x-2y+z-1)\bar{b}+(x-1)\bar{c}=\bar{0}$, некомпланарні?

ТЕМА 6 ЗАГАЛЬНА ДЕКАРТОВА Й ПОЛЯРНА СИСТЕМИ КООРДИНАТ. ПРОЕКЦІЯ ВЕКТОРА НА ВІСЬ

Теоретичні відомості

Пряма з заданим на ній напрямком, прийнятим за додатний, називається *віссю*.

Нехай $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ – трійка некомпланарних векторів у просторі. Виберемо в просторі яку-небудь точку O і проведемо через неї три осі Ox, Oy, Oz, які зіставимо з векторами $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$. Побудована конструкція з точки й трьох осей з напрямними векторами $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ називається *загальною декартовою* (або *афінною*) *системою координат*.

Якщо базис $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ є ортонормованим (вектори базису одиничні та попарно ортогональні), то загальна декартова система координат називається *прямокутною декартовою системою координат* або просто *декартовою системою координат*.

Наприклад, систему глобального позиціонування (GPS) – сукупність супутників, обладнаних радіочастотними приймально-передавальним обладнанням, використовують для визначення розташування об'єкта на поверхні Землі під час наведення ракет на ціль та координації пересування підрозділів авіаційного, морського і наземного базування. Натепер, окрім приймачів спеціального призначення випускаються прилади, вмонтовані в наручні годинники, мобільні телефони, руні радіостанції, за допомогою яких можна орієнтуватись на місцевості. Їх використовують альпіністи, рятівники, туристи.

Основою системи є навігаційні супутники, які рухаються навколо Землі. Приймач GPS обчислює власне положення, вимірюючи час, коли було послано сигнал з GPS супутників. Кожен супутник постійно надсилає повідомлення, у якому міститься інформація про час відправлення повідомлення, точку орбіти супутника, з якої було надіслано повідомлення, та загальний стан системи і наближені дані орбіт усіх інших супутників угрупування системи GPS. Ці сигнали поширюються зі швидкістю світла. Приймач використовує час одержання повідомлення для обчислення віддалі до супутника, виходячи з якої шляхом застосування геометричних і тригонометричних рівнянь обчислюється положення приймача. Одержані координати набувають більш наочної форми, такої як широта та довгота, або положення на карті, та відображається користувачеві. Оскільки обчислення положення супутника потребує знати час з високою точністю, необхідно одержувати інформацію з чотирьох або більше супутників. Інакше кажучи, приймач GPS використовує чотири параметри для обчислення чотирьох невідомих: трьох координат x, y, z і t.

Базис у тривимірному векторному просторі може бути правим або лівим. Відкладемо вектори $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ базису з однієї точки O простору. Якщо для спостерігача, який дивиться з кінця вектора $\bar{e}_3$ на площину векторів $\bar{e}_1$ і $\bar{e}_2$,

найкоротший поворот навколо точки O від вектора $\bar{e}_1$ до вектора $\bar{e}_2$ відбувається проти ходу годинникової стрілки, то базис $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ вважається *правим*. А якщо ні, то базис $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ – *лівий*.

Надалі, говорячи про ортонормований базис тривимірного векторного простору, будемо завжди вважати, що базис є правим.

Полярна система координат на площині визначається точкою O – полюсом, променем Ox – полярною віссю та одиничним відрізком.

Положення довільної точки M площини в полярній системі координат визначається відстанню $\rho = OM$ і кутом φ, відлічуваним від полярної осі до променя OM в заданому напрямку. Числа ρ і φ називаються *полярними координатами* точки M (ρ – полярний радіус, φ – полярний кут, $0 \le \varphi < 2\pi$). Позначення: $M(\rho; \varphi)$.

Зв'язок між декартовими та полярними координатами однієї й тієї ж точки (початок декартової системи координат збігається з полюсом полярної системи координат, а вісь Ox декартової системи координат збігається з полярною віссю, такі системи координат називаються *узгодженими*) визначаються формулами:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \ \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \ 0 \le \varphi < 2\pi, \ \rho \ge 0; \qquad (6.1)$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases} \qquad (6.2)$$

Проекцією вектора $\bar{a}$ на вісь l називається число, яке позначається $\text{пр}_l\bar{a}$ і дорівнює $|\bar{a}|\cos\varphi$, де φ $(0 \le \varphi \le \pi)$ – кут між додатним напрямком осі l й напрямком вектора $\bar{a}$, тобто за означенням $\text{пр}_l\bar{a} = |\bar{a}|\cos\varphi$.

При використанні векторів у фізиці складові вектора на осях координат називають *векторними проекціями на осі координат.* Координати складових на осях, тобто координати вектора, називають *скалярними проекціями,* або, коротко, *проекціями вектора на осі координат,* і позначають $\text{пр}_x\bar{a}$, $\text{пр}_y\bar{a}$, $\text{пр}_z\bar{a}$.

У прикладних питаннях вектор нерідко задають модулем і кутами, які цей вектор утворює з осями координат (точніше з ортами на цих осях). У цьому випадку координати (проекції) вектора $\bar{a}$ на площині обчислюються за формулами:

$$x = \text{пр}_x\bar{a} = |\bar{a}|\cos\alpha; \ y = \text{пр}_y\bar{a} = |\bar{a}|\sin\alpha,$$

де α – кут між вектором $\bar{a}$ і віссю Ox.

У просторі мають місце аналогічні формули:

$$x = \text{пр}_x\bar{a} = |\bar{a}|\cos\alpha; \ y = \text{пр}_y\bar{a} = |\bar{a}|\cos\beta; \ z = \text{пр}_z\bar{a} = |\bar{a}|\cos\gamma,$$

де α, β, γ – кути між вектором $\bar{a}$ і відповідними осями координат; x, y, z – координати вектора $\bar{a}$. Величини $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ називають *напрямними косинусами* векторів, для них має місце співвідношення:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Питання для самоконтролю

1. Що таке ортонормований базис?
2. Яким чином обчислити координати вектора?
3. Знайти координати точки A(3, 7) в полярній системі координат.
4. Відомі координати точки B(2, π/6) в полярній системі координат. Знайти координати цієї точки в декартовій системі координат.
5. Дана точка A(1, 1, 0). Продемонструвати, що $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

Тест для самоперевірки

1. Оберіть правильне твердження:

А довільна точка площини визначається двома координатами;
Б кожна точка простору визначається хоча б трьома координатами;
В кожна точка площини визначається хоча б двома координатами;
Г кожна точка простору визначається не більше ніж трьома координатами.

2. В загальній декартовій системі координат вектори базису повинні бути

А довільними колінеарними; **Б** довільними неколінеарними;
В довільними компланарними; **Г** довільними некомпланарними.

3. В декартовій системі координат вектори базису повинні бути

А одиничні та попарно ортогональні; **Б** попарно ортогональні;
В одиничні; **Г** довільними некомпланарними.

4. Полярна система координат на площині визначається

А полюсом;
Б одиничним відрізком;
В полюсом, полярною віссю та одиничним відрізком;
Г полярною віссю.

5. $ABCD$ – паралелограм. Координатами вершини B в системі координат $\{A, \overline{AD}, \overline{AB}\}$ будуть:

А $(1,0)$; **Б** $(-1,0)$; **В** $(0,-1)$; **Г** $(0,1)$.

6. Вершина A тетраедра $OABC$ прийнята за початок координат, вектори $\overline{AO}$, $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ – за базис. Координатами центру ваги грані OAB тетраедра будуть:

А $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},0\right)$; **Б** $\left(\frac{1}{3},0,\frac{1}{3}\right)$; **В** $\left(0,\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$; **Г** $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

7. Укажіть полярні координати точки, симетричної з точкою $\left(\frac{1}{2};-\frac{\pi}{4}\right)$ відносно полюса.

А $\left(-\frac{1}{2};-\frac{\pi}{4}\right)$; **Б** $\left(\frac{1}{2};\frac{\pi}{4}\right)$; **В** $\left(\frac{1}{2};\frac{3\pi}{4}\right)$; **Г** $\left(\frac{1}{2};\frac{5\pi}{4}\right)$.

8. Укажіть полярні координати точки, симетричної з точкою $\left(\frac{1}{2};-\frac{\pi}{4}\right)$ відносно полярної осі.

А $\left(-\frac{1}{2};-\frac{\pi}{4}\right)$; **Б** $\left(\frac{1}{2};\frac{\pi}{4}\right)$; **В** $\left(\frac{1}{2};\frac{3\pi}{4}\right)$; **Г** $\left(\frac{1}{2};\frac{5\pi}{4}\right)$.

9. Дана точка, полярні координати якої мають наступні значення: $\left(\frac{3\sqrt{2}}{4};-\frac{\pi}{4}\right)$. *Декартовими координатами цієї точки в узгодженій декартовій системі координат будуть:*

А $\left(-\frac{3}{4};\frac{3}{4}\right)$; **Б** $\left(\frac{3}{4};-\frac{3}{4}\right)$; **В** $\left(-\frac{3}{4};-\frac{3}{4}\right)$; **Г** $\left(\frac{3}{4};\frac{3}{4}\right)$.

10. Дана точка, полярні координати якої мають наступні значення: $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{4};\frac{3\pi}{4}\right)$. *Декартовими координатами цієї точки в узгодженій декартовій системі координат будуть:*

А $\left(-\frac{3}{4};\frac{3}{4}\right)$; **Б** $\left(\frac{3}{4};-\frac{3}{4}\right)$; **В** $\left(-\frac{3}{4};-\frac{3}{4}\right)$; **Г** $\left(\frac{3}{4};\frac{3}{4}\right)$.

11. Дана точка, декартові координати якої мають наступні значення: $(-1;1)$. *Полярними координатами цієї точки в узгодженій полярній системі координат будуть:*

А $\left(\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right)$; **Б** $\left(\sqrt{2};-\frac{\pi}{4}\right)$; **В** $\left(\sqrt{2};\frac{3\pi}{4}\right)$; **Г** $\left(\sqrt{2};-\frac{3\pi}{4}\right)$.

12. Дана точка, декартові координати якої мають наступні значення: $(0;2)$. *Полярними координатами цієї точки в узгодженій полярній системі будуть:*

А $\left(\sqrt{2};\frac{\pi}{2}\right)$; **Б** $\left(\sqrt{2};-\frac{\pi}{2}\right)$; **В** $\left(2;\frac{\pi}{2}\right)$; **Г** $\left(2;-\frac{\pi}{2}\right)$.

13. Як розташовані точки, полярні координати яких задовольняють рівнянню $\rho=1$*?*

А на колі з центром в полюсі і радіуса 1;
Б на промені, який співпадає з полярною віссю;
В на колі з центром в полюсі і діаметра 1;
Г на промені, який виходить з полюса і утворює з полярною віссю кут 90°.

14. Як розташовані точки, полярні координати яких задовольняють рівнянню $\varphi=\frac{\pi}{2}$*?*

А на колі з центром в полюсі і радіуса 1;
Б на промені, який співпадає з полярною віссю;
В на колі з центром в полюсі і діаметра 1;
Г на промені, який виходить з полюса і утворює з полярною віссю кут 90°.

15. Скільки правих базисів можна скласти з трьох некомпланарних векторів?

А 0; **Б** 1; **В** 2; **Г** 3.

16. Точка B симетрична точці A (x; y; z) відносно точки M (a; b; c). Координати точки B дорівнюють…

А $(2a+x;\ 2b+y;\ 2c+z)$; **Б** $(a+x;\ b+y;\ c+z)$;

В $(a-2x;\ b-2y;\ c-2z)$; **Г** $(2a-x;\ 2b-y;\ 2c-z)$.

17. Вкажіть усі значення параметра m при яких точки $P(1;\ 2;\ m)$ і $Q(m;\ 2;\ -1)$ симетричні відносно площини yz?

А $m=1$; **Б** $m=\pm 1$; **В** $m=-1$; **Г** $m\in\varnothing$.

18. Проекцію вектора $\bar{a}$ на вісь, визначену вектором $\bar{b}$, можна обчислити за формулою

А $|\bar{a}|\cdot\cos\left(\hat{\bar{a}},\ \bar{b}\right)$; **Б** $|\bar{b}|\cdot\cos\left(\hat{\bar{a}},\ \bar{b}\right)$;

В $|\bar{a}|\cdot\sin\left(\hat{\bar{a}},\ \bar{b}\right)$; **Г** $|\bar{b}|\cdot\sin\left(\hat{\bar{a}},\ \bar{b}\right)$.

19. Проекцію вектора $\bar{b}$ на вісь, визначену вектором $\bar{a}$, можна обчислити за формулою

А $|\bar{a}|\cdot\cos\left(\hat{\bar{a}},\ \bar{b}\right)$; **Б** $|\bar{b}|\cdot\cos\left(\hat{\bar{a}},\ \bar{b}\right)$;

В $|\bar{a}|\cdot\sin\left(\hat{\bar{a}},\ \bar{b}\right)$; **Г** $|\bar{b}|\cdot\sin\left(\hat{\bar{a}},\ \bar{b}\right)$.

20. Напрямний косинус вектора $\bar{c}(c_1, c_2, c_3)$ з віссю аплікат визначається за формулою

А $\dfrac{\text{пр}_x\bar{a}}{|\bar{a}|}$; **Б** $\dfrac{\text{пр}_y\bar{a}}{|\bar{a}|}$;

В $\dfrac{\text{пр}_z\bar{a}}{|\bar{a}|}$; **Г** $\dfrac{\text{пр}_x\bar{a}+\text{пр}_y\bar{a}+\text{пр}_z\bar{a}}{|\bar{a}|}$.

Відповіді: 1.А. 2.Г. 3.А. 4.В. 5.Г. 6.А. 7.В. 8.Б. 9.Б. 10.Б. 11.В. 12.В. 13.А. 14.Г. 15.Г. 16.Г. 17.В. 18.А. 19.Б. 20.В.

Приклади розв'язання задач

Приклад 1 Побудувати точки, полярні координати яких мають наступні значення: $A\left(3;\ \dfrac{\pi}{6}\right)$; $B\left(2;\ \dfrac{\pi}{4}\right)$. Визначити декартові координати цих точок в узгодженій декартовій системі координат.

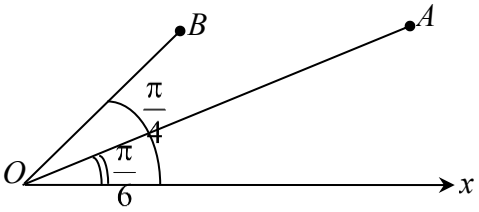


Рисунок 6.1 – Рисунок до прикладу 1

Розв'язання.

Для визначення декартових координат цих точок скористаємося формулами (6.2):

$$A:\begin{cases} x = 3\cos\dfrac{\pi}{6}, \\ y = 3\sin\dfrac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}, \\ y = \dfrac{3}{2}; \end{cases}$$

$$B:\begin{cases} x = 2\cos\dfrac{\pi}{4}, \\ y = 2\sin\dfrac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2}, \\ y = \sqrt{2}. \end{cases}$$

Приклад 2 Побудувати точки, полярні кути яких дорівнюють 0°, 15°, 30°, 45°, 60°, 75°, 90°, а відповідні радіус-вектори обчислюються з рівняння $\rho = a\sin 2\varphi$. Отримані точки з'єднати плавною кривою.

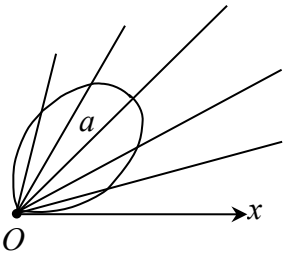


Рисунок 6.2 – Рисунок до прикладу 2

Розв'язання. Для побудови складемо таблицю

Таблиця 6.1 – Таблиця до прикладу 2

φ	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
2φ	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
$\rho = a\sin 2\varphi$	0	$\dfrac{a}{2}$	$\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$	a	$\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{a}{2}$	0

Приклад 3 Вершина O тетраедра $OABC$ прийнята за початок координат, вектори $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ – за базис. Знайти в цій системі координат координати точок L, M, N – середин ребер AC, AB, BC відповідно.

Розв'язання. Координати точок L, M, N співпадають з координатами їх радіус-векторів, тобто з координатами векторів $\overline{OL}$, $\overline{OM}$, $\overline{ON}$. Використовуючи формули ділення відрізка в даному відношенні $\lambda = 1$ (точки є серединами відрізків), будемо мати

$$\overline{OL} = \frac{1}{2}\left(\overline{OA} + \overline{OC}\right), \qquad L\left(\frac{1}{2};\, 0;\, \frac{1}{2}\right);$$

$$\overline{OM} = \frac{1}{2}\left(\overline{OA} + \overline{OB}\right), \qquad M\left(\frac{1}{2};\, \frac{1}{2};\, 0\right);$$

$$\overline{ON} = \frac{1}{2}\left(\overline{OB} + \overline{OC}\right), \qquad N\left(0;\, \frac{1}{2};\, \frac{1}{2}\right).$$

Задачі для самостійного розв'язування

№ 6.1. Побудувати точки, полярні координати яких мають наступні значення: $\left(1;\, \dfrac{5\pi}{3}\right)$, $\left(5;\, \dfrac{7\pi}{6}\right)$, $\left(\dfrac{1}{2};\, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $\left(2{,}5;\, \dfrac{2\pi}{3}\right)$, $(6;\, \pi)$, $\left(3;\, \dfrac{\pi}{3}\right)$, $\left(\sqrt{3};\, -\dfrac{\pi}{6}\right)$. Визначити декартові координати цих точок в узгодженій декартовій системі координат.

№ 6.2. Знайти полярні координати точок, симетричних із точками $\left(1;\frac{\pi}{4}\right)$, $\left(3;\frac{2\pi}{3}\right)$, $\left(\frac{2}{3};-\frac{\pi}{6}\right)$: 1) відносно полюса; 2) відносно полярної осі.

№ 6.3. Дано ромб $ABCD$, O – точка перетину його діагоналей. Приймаючи за початок координат точку A, а за базис – вектори $\overline{AO}$ і $\overline{AB}$, знайти в цій системі координат координати всіх вершин ромба.

№ 6.4. Вершина O тетраедра $OABC$ прийнята за початок координат, вектори $\overline{OM}$, $\overline{ON}$, $\overline{OL}$ – за базис. Знайти в цій системі координат координати всіх вершин тетраедра, де L, M, N – середини ребер AC, AB, BC відповідно.

№ 6.5. Вершина O тетраедра $OABC$ прийнята за початок координат, вектори $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ – за базис. Знайти в цій системі координат координати центрів ваги всіх граней тетраедра.

№ 6.6. Вершина A паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ прийнята за початок координат, вектори $\overline{AC}$, $\overline{AB_1}$, $\overline{AD_1}$ – за базис. Знайти в цій системі координат координати всіх вершин паралелепіпеда.

ТЕМА 7 ДОБУТКИ ВЕКТОРІВ

Теоретичні відомості

Скалярний добуток двох векторів

Скалярним добутком $(\bar{a}, \bar{b})$ двох ненульових векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називається число, яке дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута φ між ними: $(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cos\varphi$. Якщо хоча б один з векторів $\bar{a}$ або $\bar{b}$ є нульовим, тоді вважають $(\bar{a}, \bar{b}) = 0$. Іноді для скалярного добутку $(\bar{a}, \bar{b})$ користуються іншим позначенням: $\bar{a} \cdot \bar{b}$.

Властивості скалярного добутку

1. Для будь-яких векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ скалярний добуток $(\bar{a}, \bar{b})$ комутативний: $(\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{b}, \bar{a})$.

2. Для будь-якого вектора $\bar{a}$ скалярний добуток вектора $\bar{a}$ на себе дорівнює квадрату довжини цього вектора: $(\bar{a}, \bar{a}) = |\bar{a}|^2$. Звідки, $|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a}^2}$.

Помітимо, що скалярний добуток $(\bar{a}, \bar{a})$ прийнято називати *скалярним квадратом* вектора $\bar{a}$ й позначати так: $\bar{a}^2$.

3. Для будь-яких векторів $\bar{a}$ та $\bar{b}$ і будь-якого дійсного числа α вірні рівності: $(\alpha\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{a}, \alpha\bar{b}) = \alpha(\bar{a}, \bar{b})$.

4. Якщо $\bar{a} \neq \bar{0}$ і $\bar{b} \neq \bar{0}$, а $(\bar{a}, \bar{b}) = 0$, то $\bar{a}$ і $\bar{b}$ ортогональні.

5. Для будь-яких векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$

$$(\bar{a} + \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{a}, \bar{c}) + (\bar{b}, \bar{c}).$$

Наслідок Для будь-яких векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ і $\bar{d}$

$$(\bar{a} + \bar{b}, \bar{c} + \bar{d}) = (\bar{a}, \bar{c}) + (\bar{a}, \bar{d}) + (\bar{b}, \bar{c}) + (\bar{b}, \bar{d}).$$

Легко переконатися в тому, що базис $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ є ортонормованим тоді й тільки тоді, коли мають місце рівності:

$$(\bar{i}, \bar{i}) = 1,\ (\bar{j}, \bar{j}) = 1,\ (\bar{k}, \bar{k}) = 1,\ (\bar{i}, \bar{j}) = 0,\ (\bar{i}, \bar{k}) = 0,\ (\bar{j}, \bar{k}) = 0. \qquad (7.1)$$

Нагадаємо, що *ортом* ненульового вектора $\bar{a}$ називають вектор $\bar{a}_0$, який має одиничну довжину. Його напрямок збігається з напрямком вектора $\bar{a}$, тобто $\bar{a}_0 = \dfrac{\bar{a}}{|\bar{a}|}$.

Теорема 7.1 Скалярний добуток двох векторів, заданих в ортонормованому базисі своїми координатами, дорівнює сумі добутків відповідних координат співмножників, тобто для $\bar{a}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ і $\bar{b}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$

$$(\bar{a}, \bar{b}) = \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2. \qquad (7.2)$$

Наслідок 1 Довжина вектора $\bar{a}(\alpha, \beta, \gamma)$ в ортонормованому базисі обчислюється за формулою

$$|\bar{a}| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}. \qquad (7.3)$$

Наслідок 2 Необхідною й достатньою умовою ортогональності ненульових векторів $\bar{a}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ і $\bar{b}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, заданих в ортонормованому базисі своїми координатами є рівність

$$\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0. \qquad (7.4)$$

Наслідок 3 В ортонормованому базисі кут між двома векторами $\bar{a}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ і $\bar{b}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ визначається за формулою:

$$\cos\varphi = \frac{\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2} \cdot \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2}}, \ \bar{a} \neq \bar{0}, \ \bar{b} \neq \bar{0}. \qquad (7.5)$$

Наслідок 4 Декартові координати вектора $\bar{a}(\alpha, \beta, \gamma)$ дорівнюють проекціям цього вектора на осі декартової системи координат:

$$\alpha = \text{пр}_{\bar{i}}\bar{a}, \ \beta = \text{пр}_{\bar{j}}\bar{a}, \ \gamma = \text{пр}_{\bar{k}}\bar{a}.$$

Наслідок 5 Напрямні косинуси вектора $\bar{a}(\alpha, \beta, \gamma)$ в ортонормованому базисі визначаються формулами:

$$\cos\left(\bar{a},\hat{}\ \bar{i}\right) = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}, \qquad \cos\left(\bar{a},\hat{}\ \bar{j}\right) = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}},$$

$$\cos\left(\bar{a},\hat{}\ \bar{k}\right) = \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}.$$

Теорема 7.2 $\left(\bar{a}, \bar{b}\right) = |\bar{a}| \cdot \text{пр}_{\bar{a}}\bar{b} = |\bar{b}| \cdot \text{пр}_{\bar{b}}\bar{a}$.

Векторний добуток векторів

Векторним добутком двох ненульових векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називається вектор $\bar{c}$, який задовольняє умовам:

1) вектор $\bar{c}$ є перпендикулярним до векторів $\bar{a}$ та $\bar{b}$;

2) вектор $\bar{c}$ напрямлений так, щоб трійка векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ виявилася правою;

3) довжина вектора $|\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \sin\varphi$, де φ – кут між векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$.

Векторний добуток векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ позначають так: $\left[\bar{a}, \bar{b}\right]$ або $\bar{a} \times \bar{b}$. Якщо $\bar{a} = \bar{0}$ або $\bar{b} = \bar{0}$, то вважають $\left[\bar{a}, \bar{b}\right] = \bar{0}$.

Нехай $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – ортонормований базис. Визначимо векторні добутки цих векторів:

$$\left[\bar{i},\bar{i}\right] = \bar{0}, \ \left[\bar{i},\bar{j}\right] = \bar{k}, \ \left[\bar{i},\bar{k}\right] = -\bar{j}, \ \left[\bar{j},\bar{i}\right] = -\bar{k}, \ \left[\bar{j},\bar{j}\right] = \bar{0}, \ \left[\bar{j},\bar{k}\right] = \bar{i},$$

$$\left[\bar{k},\bar{i}\right] = \bar{j}, \ \left[\bar{k},\bar{j}\right] = -\bar{i}, \ \left[\bar{k},\bar{k}\right] = \bar{0}. \qquad (7.6)$$

Властивості векторного добутку

1. Векторний добуток $\left[\bar{a}, \bar{b}\right] = \bar{0}$ тоді й тільки тоді, коли один з векторів нульовий або вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ колінеарні.

2. Для будь-яких векторів $\bar{a}$ та $\bar{b}$ векторний добуток $\left[\bar{a}, \bar{b}\right]$ антикомутативний, тобто $\left[\bar{a}, \bar{b}\right] = -\left[\bar{b}, \bar{a}\right]$.

3. Для будь-яких векторів $\bar{a}$ та $\bar{b}$ і будь-якого дійсного числа α :

$$\lambda[\bar{a},\bar{b}]=[\lambda\bar{a},\bar{b}]=[\bar{a},\lambda\bar{b}].$$

4. Для будь-яких векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$

$$[\bar{a}+\bar{b},\bar{c}]=[\bar{a},\bar{c}]+[\bar{b},\bar{c}];\qquad [\bar{a},\bar{b}+\bar{c}]=[\bar{a},\bar{b}]+[\bar{a},\bar{c}].$$

Відзначимо, що модуль векторного добутку $[\bar{a},\bar{b}]$ має простий *геометричний зміст*: він дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}$ і $\bar{b}$ як на сторонах.

Нехай $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ – правий ортонормований базис і нехай в цьому базисі відомі координати двох векторів $\bar{a}(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)$ і $\bar{b}(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)$. Тоді координати вектора $[\bar{a},\bar{b}]$ можна обчислити за формулою:

$$[\bar{a},\bar{b}]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\end{vmatrix}. \qquad (7.7)$$

Мішаний добуток векторів

Мішаним добутком векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ називають число $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})=(\bar{a},[\bar{b},\bar{c}])$

.

Теорема 7.5 Мішаний добуток дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли один з векторів є нульовим, два з векторів колінеарні або всі три вектори компланарні.

Властивості мішаного добутку

1. Мішаний добуток трьох ненульових некомпланарних векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ за абсолютним значенням дорівнює об'єму V паралелепіпеда, побудованого на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$. При цьому, якщо трійка векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ права, то $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})=V$, якщо ж ліва, то $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})=-V$. Вірне й обернене твердження.

2. При циклічній перестановці некомпланарних векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ у мішаному добутку $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$ останній не змінюється, тобто

$$(\bar{a},\bar{b},\bar{c})=(\bar{c},\bar{a},\bar{b})=(\bar{b},\bar{c},\bar{a}).$$

При перестановці будь-яких двох векторів у мішаному добутку $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$ останній змінює знак, тобто

$$(\bar{a},\bar{b},\bar{c})=-(\bar{b},\bar{a},\bar{c})=-(\bar{a},\bar{c},\bar{b})=-(\bar{c},\bar{b},\bar{a}).$$

3. Для будь-яких векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ і $\bar{d}$ та будь-яких дійсних чисел λ і μ

$$(\lambda\bar{a}+\mu\bar{b},\bar{c},\bar{d})=\lambda(\bar{a},\bar{c},\bar{d})+\mu(\bar{b},\bar{c},\bar{d}),\ (\bar{a},\lambda\bar{b}+\mu\bar{c},\bar{d})=\lambda(\bar{a},\bar{b},\bar{d})+\mu(\bar{a},\bar{c},\bar{d}),$$
$$(\bar{a},\bar{b},\lambda\bar{c}+\mu\bar{d})=\lambda(\bar{a},\bar{b},\bar{c})+\mu(\bar{a},\bar{b},\bar{d}).$$

Мішаний добуток векторів $\bar{a}(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)$, $\bar{b}(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)$, $\bar{c}(\alpha_3,\beta_3,\gamma_3)$, заданих своїми координатами в ортонормованому базисі $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$, можна обчислити за формулою

$$\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3\end{vmatrix}. \qquad (7.8)$$

Питання для самоконтролю

1. Які алгебраїчні та геометричні властивості має скалярний добуток?
2. Запишіть скалярний добуток через координати векторів, які множаться.
3. Які алгебраїчні та геометричні властивості має векторний добуток?
4. Запишіть векторний добуток через координати векторів, які множаться.
5. У чому полягає геометричний зміст мішаного добутку?

Тест для самоперевірки

1. При яких значеннях числа k вектор $k\bar{c}+\bar{c}$ $\left(\bar{c}\neq\bar{0}\right)$ протилежно напрямлений до вектора $\bar{c}$?

А $k<0$; **Б** $k>-1$; **В** $k<-1$; **Г** $k>0$.

2. $SABC$ – правильний тетраедр із ребром 1. Скалярний добуток $\overline{SA}\cdot\overline{SB}$ дорівнює:

А 1; **Б** 2; **В** 0,5; **Г** –0,5.

3. З рівності $\bar{a}\cdot\bar{c}=\bar{b}\cdot\bar{c}$ $\left(\bar{c}\neq\bar{0}\right)$ випливає:

А $\bar{a}=\bar{b}$; **Б** $\left(\bar{a}-\bar{b}\right)\perp\bar{c}$, $\bar{a}\neq\bar{b}$;

В $\left(\bar{a}-\bar{b}\right)\|\,\bar{c}$; **Г** $\bar{a}=\bar{b}$ чи $\left(\bar{a}-\bar{b}\right)\perp\bar{c}$.

4. Скільки існує векторів $\bar{a}$ у просторі таких, що $\bar{a}^2=\log_{0,3}2$?

А жодного; **Б** один; **В** два; **Г** безліч.

5. Дано ненульовий вектор $\bar{a}$ простору. Скільки існує векторів $\bar{x}$ таких, що $\bar{a}\cdot\bar{x}=-1$?

А жодного; **Б** один; **В** два; **Г** безліч.

6. Якщо для трьох ненульових векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ у просторі виконується рівність $\bar{a}\times\bar{c}=\bar{b}\times\bar{c}$, то...

А $\bar{a}\,\|\,\bar{b}$; **Б** $\bar{a}=\bar{b}$;

В $\bar{a}\perp\bar{b}$; **Г** $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ – компланарні.

7. Спростіть вираз $\left(\bar{i}\times\left(\bar{j}\times\bar{k}\right)\right)\cdot\bar{i}$, де $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ – ортонормований базис.

А 1; **Б** 0; **В** $\bar{i}^2$; **Г** –1.

8. Дано точки A(–2; –3; –6), B(3; 2; 5), C(1; –1; 2), D(3; –2; 4). Знайдіть $\text{пр}_{\overline{CD}}\overline{AB}$.

А 9; **Б** –3; **В** $\sqrt{3}$; **Г** 3.

9. При яких значеннях p вектор $\bar{a}=\bar{i}+p\bar{j}+\bar{k}$ ортогональний до вектора $\bar{b}(-2;1;0)$?

А –2; **Б** 2; **В** 1; **Г** 0.

10. Якщо $\bar{a}=(1,2,3)$ *і* $\bar{b}=(3,2,1)$*, то* $\bar{a}\cdot\bar{b}$ *буде дорівнювати*

А 10; **Б** 12; **В** –4; **Г** 16.

11. Відомо, що $\bar{a}(7,1)$ *і* $\bar{b}(3,4)$*. Скалярний добуток векторів* $\bar{c}=\bar{a}-\bar{b}$ *і* $\bar{d}=\bar{a}+\bar{b}$ *буде дорівнювати*

А 16; **Б** 25; **В** 38; **Г** 15.

12. При якому значенні параметра λ *вектори* $\bar{i}+4\bar{j}+3\bar{k}$ *і* $7\bar{i}+5\bar{j}-\lambda^2\bar{k}$ *ортогональні?*

А 3; **Б** –3; **В** ±3; **Г** $\lambda\in\varnothing$.

13. Одиничний вектор, протилежний вектору (2; –1; 0)*, дорівнює:*

А (–2; 1; 0); **Б** $\left(\frac{2}{\sqrt{5}};-\frac{1}{\sqrt{5}};0\right)$; **В** $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}};\frac{1}{\sqrt{5}};0\right)$; **Г** (–1; 1; 0).

14. Вкажіть всі значення p і q при яких вектори $\bar{a}(1;0;p)$ *і* $\bar{b}(2;q;1)$ *колінеарні?*

А $p=\frac{1}{2},\ q=2$; **Б** $p=2,\ q=\frac{1}{2}$;

В $p=\frac{1}{2},\ q=0$; **Г** $p=2,\ q=0$.

15. Вектори простору $\bar{a}$ *і* $\bar{b}$ *неколінеарні. Вкажіть усі значення параметрів* λ *і* μ*, при яких компланарні вектори* $\bar{a}$, $\bar{a}+\lambda\bar{b}$, $\mu\bar{a}-\bar{b}$.

А $\lambda>0,\ \mu>0$; **Б** $\lambda=0,\ \mu\in R$; **В** $\lambda\in R,\ \mu=0$; **Г** $\lambda\in R,\ \mu\in R$.

16. Вектори простору $\bar{a}$ *і* $\bar{b}$ *неколінеарні. При якому значенні параметру* α *вектори* $\bar{p}=\alpha\bar{a}+5\bar{b}$ *і* $\bar{q}=3\bar{a}-\bar{b}$ *будуть колінеарні?*

А 0; **Б** –13; **В** –15; **Г** 1.

17. Дано вектори $\overline{AB}(1;0;-2)$ *і* $\overline{AC}(-1;0;1)$*. Площа трикутника ABC дорівнює:*

А 1; **Б** 0,5; **В** $\sqrt{3}$; **Г** 2.

18. Як розміщені прямі AB і AC, якщо виконується рівність $\left(\overline{AB}+\overline{AC}\right)^2=\left(\overline{AB}-\overline{AC}\right)^2$*?*

А паралельні; **Б** перпендикулярні;

В перетинаються ; **Г** визначити неможливо.

19. Мішаним добутком трьох векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$ *і* $\bar{c}$ *називається число, яке позначають* $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ *й дорівнює:*

А $\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})$; **Б** $\bar{a}\times(\bar{b}+\bar{c})$; **В** $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$; **Г** $\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})$.

20. Довжина векторного добутку $\bar{c}\neq\bar{0}$ *і* $\bar{d}\neq\bar{0}$ *численно дорівнює*

А площі трикутника, побудованого на цих векторах;

Б площі паралелограма, побудованого на цих векторах;

В об’єму паралелепіпеда;

Г об’єму тетраедра.

Відповіді: 1.В. 2.В. 3.Г. 4.А. 5.Б. 6.Г. 7.Б. 8.А. 9.Б. 10.А. 11.Б. 12.В. 13.В. 14.В. 15.Г. 16.В. 17.Б. 18.Б. 19.А,Б. 20.Б.

Приклади розв'язання задач

Приклад 1 Задано вектори $\bar{a} = m\bar{i} + 8\bar{j} + 4\bar{k}$ і $\bar{b} = 4\bar{i} + m\bar{j} - 7\bar{k}$, де $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – ортонормований базис. При якому значенні m ці вектори перпендикулярні?

Розв'язання.

Скористаємось формулою (7.4): $4m + 8m - 28 = 0$, $m = \frac{7}{3}$.

Приклад 2 Знайти кут між векторами $\bar{a} = \bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}$ і $\bar{b} = 6\bar{i} + 4\bar{j} - 2\bar{k}$, де $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – ортонормований базис.

Розв'язання.

Скористаємось формулою (7.5):

$$\cos\varphi = \frac{1\cdot 6 + 2\cdot 4 + 3\cdot(-2)}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}\cdot\sqrt{6^2+4^2+(-2)^2}} = \frac{8}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{56}} = \frac{2}{7}, \qquad \varphi = \arccos\frac{2}{7}.$$

Приклад 3 Знайти орт вектора $\bar{a} = 2\bar{i} + 4\bar{j} + 4\bar{k}$.

Розв'язання.

Знаходимо довжину вектора $\bar{a}$: $|\bar{a}| = \sqrt{2^2+4^2+4^2} = 6$. Оскільки $\bar{a}_0 = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}$, то $\bar{a}_0 = \frac{1}{3}\bar{i} + \frac{2}{3}\bar{j} + \frac{2}{3}\bar{k}$.

Приклад 4 До точки прикладені дві сили $\bar{P}$ і $\bar{Q}$, які діють під кутом 120°, причому $|\bar{P}| = 7$, $|\bar{Q}| = 4$. Знайти величину рівнодійної сили $\bar{R}$.

Розв'язання.

Оскільки $\bar{R} = \bar{P} + \bar{Q}$, то

$$|\bar{R}| = \sqrt{\bar{R}^2} = \sqrt{(\bar{P}+\bar{Q})^2} = \sqrt{\bar{P}^2 + 2\bar{P}\bar{Q} + \bar{Q}^2} =$$

$$= \sqrt{|\bar{P}|^2 + 2|\bar{P}|\cdot|\bar{Q}|\cdot\cos 120^\circ + |\bar{Q}|^2} = \sqrt{37}.$$

Приклад 5 Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}(1;1;1)$, $\bar{b}(3;2;1)$, якщо координати векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ задані в правому ортонормованому базисі $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$.

Розв'язання.

У випадку правого ортонормованого базису $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ має місце формула (10.7), згідно з якою:

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}.$$

Таким чином, $[\bar{a}, \bar{b}] = (-1; 2; -1)$. Визначимо модуль вектора $[\bar{a}, \bar{b}]$ або, що теж саме, шукану площу паралелограма

$$S = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6} \text{ (кв. од).}$$

Приклад 6 В ортонормованому базисі $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ задані вектори $\bar{a}(1; 2; 3)$, $\bar{b}(3; 2; 1)$, $\bar{c}(2; 3; 1)$. З'ясувати, чи є трійка векторів $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ правою. Знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на цих векторах.

Розв'язання.

Обчислимо мішаний добуток векторів $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ за формулою (7.8):

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 12.$$

Оскільки $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) > 0$, то за властивістю 1 мішаного добутку векторів, трійка векторів $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – права й об'єм паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, дорівнює $V = 12$ (куб. од.).

Приклад 7 Знайти об'єм трикутної піраміди з вершинами $A(2; 2; 2)$, $B(4;3; 3)$, $C(4; 5; 4)$ і $D(5; 5; 6)$.

Розв'язання.

Знаходимо координати векторів $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ і $\overline{AD}$, які збігаються з ребрами піраміди, що виходять з вершини A: $\overline{AB}(2; 1; 1)$, $\overline{AC}(2; 3; 2)$, $\overline{AD}(3; 3; 4)$. Знайдемо мішаний добуток цих векторів за формулою (7.8):

$$(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 24 + 6 + 6 - 9 - 12 - 8 = 7.$$

Оскільки об'єм піраміди дорівнює $\frac{1}{6}$ частині об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ і $\overline{AD}$, то $V = \frac{7}{6}$ (куб. од.).

Приклад 8 Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a} + 3\bar{b}$ і $3\bar{a} + \bar{b}$, якщо $|\bar{a}| = |\bar{b}| = 1$, $\angle(\bar{a}, \bar{b}) = 30^\circ$.

Розв'язання.

Маємо

$$(\bar{a} + 3\bar{b}) \times (3\bar{a} + \bar{b}) = \bar{a} \times (3\bar{a}) + (3\bar{b}) \times (3\bar{a}) + \bar{a} \times \bar{b} + (3\bar{b}) \times \bar{b} =$$
$$= 3 \cdot \bar{0} - 9\bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{b} + 3 \cdot \bar{0} = -8\bar{a} \times \bar{b}.$$

Отже,

$$S = |-8\bar{a} \times \bar{b}| = 8|\bar{a} \times \bar{b}| = 8 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 30^\circ = 4 \text{ (кв. од.)}.$$

Задачі для самостійного розв'язування

№ 7.1. Спростіть вираз:

1) $(2\bar{i} + 3\bar{j} - \bar{k}) \cdot (\bar{i} - \bar{j} + 4\bar{k})$;
2) $(\bar{a} + \bar{b}) \cdot (\bar{a} - \bar{b})$;
3) $\bar{i} \times \bar{j} + \bar{i} \times \bar{k} - \bar{j} \times \bar{k}$;
4) $\bar{i} \times \bar{j} \times \bar{k}$;
5) $(\bar{a} + \bar{b}) \cdot (\bar{b} + \bar{c}) \cdot (\bar{c} + \bar{a})$;

6) $(\bar{i}-3\bar{j}+\bar{k})\cdot(2\bar{i}+\bar{j}-3\bar{k})\cdot(\bar{i}+2\bar{j}+\bar{k})$;

7) $(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})\cdot(\bar{a}+\bar{b}-\bar{c})\cdot(\bar{a}-\bar{b}+\bar{c})$.

№ 7.2. Дано вектори $\bar{a}(2;3;0)$, $\bar{b}(-1;2;2)$, $\bar{c}(3;1;0)$. Знайдіть:

1) $(3\bar{a}-4\bar{b})+(\bar{b}-3\bar{c})+(2\bar{c}-\bar{a})$;
2) $(\bar{a}+\bar{b}-\bar{c})(-2\bar{a}-3\bar{b})$;
3) $|\bar{a}+\bar{b}-\bar{c}|$;
4) $\angle(\bar{a},\bar{i})$;
5) $\angle(\bar{a}+\bar{b}-\bar{c},-2\bar{a}-3\bar{b})$;
6) $\bar{a}\times\bar{b}$;
7) $\bar{a}\times(17\bar{a}+3\bar{b})$;
8) $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}$;
9) $\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})-(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c}$.

№ 7.3. Обчислити проекцію вектора $\bar{a}=5\bar{i}+2\bar{j}+5\bar{k}$ на вісь, що визначається вектором $\bar{b}=2\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k}$.

№ 7.4. Дано три вектори $\bar{a}(7,-6,1)$, $\bar{b}(2,-3,-6)$ і $\bar{c}(3,-4,12)$. Обчислити $\text{пр}_{\bar{b}}(\bar{a}+\bar{c})$.

№ 7.5. Дано точки $A(3{,}1,\ 2)$, $B(4,\ 0{,}1)$ і $C(5{,}4,\ 7)$. Обчислити площу трикутника ABC.

№ 7.6. Знайти орт вектора, перпендикулярного до векторів $\bar{a}=2\bar{i}+2\bar{j}+\bar{k}$ та $\bar{b}=4\bar{i}+5\bar{j}+3\bar{k}$.

№ 7.7. Дано, що $|\bar{a}|=3$, $|\bar{b}|=5$. Визначити, при якому значенні α вектори $\bar{a}+\alpha\bar{b}$ і $\bar{a}-\alpha\bar{b}$ будуть взаємно перпендикулярні.

№ 7.8. Вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ утворюють кут $\varphi=\dfrac{2\pi}{3}$. Знаючи, що $|\bar{a}|=3$, $|\bar{b}|=4$, обчислити:

1) $\bar{a}\cdot\bar{b}$;
2) $\bar{a}^2$;
3) $\bar{b}^2$;
4) $(\bar{a}+\bar{b})^2$;
5) $(3\bar{a}-2\bar{b})\cdot(\bar{a}+2\bar{b})$;
6) $(\bar{a}-\bar{b})^2$;
7) $(3\bar{a}+2\bar{b})^2$.

№ 7.9. Вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ взаємно перпендикулярні, вектор $\bar{c}$ утворює з ними кути, рівні $\dfrac{\pi}{3}$. Знаючи, що $|\bar{a}|=3$, $|\bar{b}|=5$, $|\bar{c}|=8$, обчислити:

1) $(3\bar{a}-2\bar{b})\cdot(\bar{b}+3\bar{c})$;
2) $(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})^2$;
3) $(\bar{a}+2\bar{b}-3\bar{c})^2$.

№ 7.10. Вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ утворюють кут $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$. Знаючи, що $|\bar{a}|=\sqrt{3}$, $|\bar{b}|=1$, обчислити кут між векторами $\bar{p}=\bar{a}+\bar{b}$ и $\bar{q}=\bar{a}-\bar{b}$.

№ 7.11. Дано вектори $\bar{a}(4;-2;-4)$, $\bar{b}(6;-3;2)$. Обчислити:

1) $\bar{a}\cdot\bar{b}$;
2) $\sqrt{\bar{a}^2}$;
3) $\sqrt{\bar{b}^2}$;
4) $(2\bar{a}-3\bar{b})(\bar{a}+2\bar{b})$;
5) $(\bar{a}+\bar{b})^2$;
6) $(\bar{a}-\bar{b})^2$.

№ 7.12. Дано точки $A(-1;3;-7)$, $B(2\ -1;5)$ і $C(0;1;-5)$. Обчислити:

1) $(2\overline{AB}-\overline{CB})\cdot(2\overline{BC}+\overline{BA})$;
2) $\sqrt{\overline{AB}^2}$;
3) $\sqrt{\overline{AC}^2}$.

№ 7.13. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a} = \bar{m} + \bar{n}$ і $\bar{b} = 3\bar{m} + 2\bar{n}$, якщо $|\bar{m}| = |\bar{n}| = 1$, $\angle(\bar{m}, \bar{n}) = \frac{\pi}{6}$.

№ 7.14. Вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ утворюють кут $\varphi = \frac{2\pi}{3}$. Знаючи, що $|\bar{a}| = 1$, $|\bar{b}| = 2$, обчислити:

1) $(\bar{a} \times \bar{b})^2$;
2) $((2\bar{a} + \bar{b}) \times (\bar{a} + 2\bar{b}))^2$;
3) $((\bar{a} + 3\bar{b}) \times (3\bar{a} - \bar{b}))^2$.

№ 7.15. Вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ взаємно перпендикулярні. Знаючи, що $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 4$, обчислити:

1) $|(\bar{a} + \bar{b}) \times (\bar{a} - \bar{b})|$;
2) $|(3\bar{a} - \bar{b}) \times (\bar{a} - 2\bar{b})|$.

№ 7.16. Дано точки $A(2; -1; 2)$, $B(1\ 2; -1)$ і $C(3; 2; 1)$. Знайти координати векторних добутків:

1) $\overline{AB} \times \overline{BC}$;
2) $(\overline{BC} - 2\overline{CA}) \times \overline{CB}$.

№ 7.17. З'ясувати, праву чи ліву трійку утворюють вектори?

1) $\bar{a}(2, 1, 2)$, $\bar{b}(3, -2, 1)$ і $\bar{c}(3, -1, -2)$;
2) $\bar{a}(2, -2, -3)$, $\bar{b}(2, 0, 3)$ і $\bar{c}(1, 1, 1)$.

№ 7.18. Знайти об'єм тетраедра за вершинами $A(-5; -4; 8)$, $B(2; 3; 1)$, $C(4; 1; -2)$, $D(6; 3; 7)$.

№ 7.19. Обчислити $(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c}$, якщо

1) $\bar{a}(1, 2, -1)$, $\bar{b}(2, 1, -2)$, $\bar{c}(3, 1, -1)$;
2) $\bar{a}(3, 2, 1)$, $\bar{b}(0, 1, -1)$, $\bar{c}(-1, 1, 1)$.

№ 7.20. Обчислити $(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c} - \bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})$, якщо $\bar{a}(1, -1, 3)$, $\bar{b}(-2, 2, 1)$, $\bar{c}(3, -2, 5)$.

ТЕМА 8 ПРЯМА НА ПЛОЩИНІ. ПЛОЩИНА Й ПРЯМА В ПРОСТОРІ

Теоретичні відомості

Пряма на площині

Таблиця 8.1 – Основні види рівнянь прямої на площині

Назва рівняння	Рівняння
Загальне рівняння прямої	$Ax + By + C = 0$
Рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно вектору $\bar{n}(A, B)$ – нормальний вектор прямої	$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$
Канонічне рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ паралельно вектору $\bar{a}(a_x, a_y)$ – напрямний вектор прямої	$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y}$
Параметричні рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ паралельно вектору $\bar{a}(a_x, a_y)$ – напрямний вектор прямої	$\begin{cases} x - x_0 = a_x t, \\ y - y_0 = a_y t \end{cases}$
Канонічне рівняння прямої, що проходить через дві точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$	$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$
Рівняння прямої *у відрізках на осях*	$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$
Нормальне рівняння прямої	$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$
Рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$, та має *кутовий коефіцієнт* k	$y = k(x - x_0) + y_0$

Формула відстані від точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Таблиця 8.2 – Формули для обчислення кута між двома прямими й умов взаємного розташування двох прямих

Назва формули (умови)	**Види рівнянь прямих**		
	Загальний: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2 = 0$	**Канонічний:** $\frac{x - x_1}{a_x} = \frac{y - y_1}{a_y}$ і $\frac{x - x_2}{b_x} = \frac{y - y_2}{b_y}$	**З кутовим коефіцієнтом:** $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$
1	**2**	**3**	**4**
Кут θ між двома прямими	$\cos\theta = \frac{\lvert A_1A_2 + B_1B_2 \rvert}{\sqrt{(A_1^2 + B_1^2)(A_2^2 + B_2^2)}}$	$\cos\theta = \frac{\lvert a_xb_x + a_yb_y \rvert}{\sqrt{(a_x^2 + b_x^2)(a_y^2 + b_y^2)}}$	$\operatorname{tg}\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$

Продовження таблиці 8.2

1	2	3	4
Умова перпендикулярності	$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$	$a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y = 0$	$k_1 \cdot k_2 = -1$
Умова паралельності	$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$ $(C_1 \neq C_2)$	$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y}$	$k_1 = k_2$

Площина в просторі

Таблиця 8.3 – Основні види рівнянь площини

Назва рівняння, необхідні компоненти	**Рівняння**
Загальне рівняння площини	$Ax + By + Cz + D = 0$
Рівняння площини, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\bar{n}(A, B, C)$ – нормальний вектор площини	$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$
Детермінантне рівняння площини, що проходить через три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$	$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$
Нормальне рівняння площини	$\frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$
Рівняння площини *у відрізках на осях*	$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 1$

Формула відстані від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини $Ax + By + Cz + D = 0$: $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Таблиця 8.4 – Формули для обчислення кута між двома площинами $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ та їх взаємного розташування у просторі

Назва формули (умови)	**Формула**
Величина двогранного кута θ між двома площинами	$\cos\theta = \frac{\lvert A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 \rvert}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$
Умова перпендикулярності	$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0$
Умова паралельності	$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$

Пряма в просторі

Таблиця 8.5 – Основні види рівнянь прямої в просторі

Назва рівняння, необхідні компоненти	**Рівняння**
Канонічне рівняння прямої, що проходить через дві точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$	$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$
Загальне рівняння прямої як перетину двох площин, напрямний вектор якої має координати $\bar{a}\left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\right)$	$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$
Канонічне рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ паралельно вектору $\bar{a}(a_x, a_y, a_z)$ – напрямний вектор прямої	$\frac{x-x_0}{a_x}=\frac{y-y_0}{a_y}=\frac{z-z_0}{a_z}$
Параметричні рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ паралельно вектору $\bar{a}(a_x, a_y, a_z)$ – напрямний вектор прямої	$\begin{cases} x-x_0=a_xt, \\ y-y_0=a_yt, \\ z-z_0=a_zt \end{cases}$

Формула відстані від точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до прямої $\frac{x-x_0}{a_x}=\frac{y-y_0}{a_y}=\frac{z-z_0}{a_z}$:

$$d=\frac{\left|\overline{M_0M_1}\times\bar{a}\right|}{\left|\bar{a}\right|}.$$

Таблиця 8.6 – Формули для обчислення відстані й кута між двома прямими $\frac{x-x_1}{a_x}=\frac{y-y_1}{a_y}=\frac{z-z_1}{a_z}$ і $\frac{x-x_2}{b_x}=\frac{y-y_2}{b_y}=\frac{z-z_2}{b_z}$ та їх взаємного розташування у просторі

Назва формули	**Формула**
Відстань між двома прямими	$\rho=\frac{\left\|\left(\overline{M_1M_2}, \bar{a}_1, \bar{a}_2\right)\right\|}{\left\|\bar{a}_1\times\bar{a}_2\right\|}$
Кут θ між двома прямими в просторі	$\cos\theta=\frac{\left\|a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z\right\|}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$
Умова перпендикулярності	$\bar{a}_1\cdot\bar{a}_2=0\Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$
Умова паралельності	$\bar{a}_1\parallel\bar{a}_2\Leftrightarrow\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$

Пряма й площина в просторі

Нехай дана пряма в канонічному виді: $\frac{x-x_1}{a_x}=\frac{y-y_1}{a_y}=\frac{z-z_1}{a_z}$ і площина в загальному виді $Ax+By+Cz+D=0$.

Таблиця 8.7 – Формули для обчислення кута між прямою і площиною в просторі, взаємного розташування прямої і площини в просторі

Назва формули	**Формула**
Кут θ між прямою і площиною в просторі	$\sin\theta=\frac{\left\|A\cdot a_x+B\cdot a_y+C\cdot a_z\right\|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$
Умова перпендикулярності прямої і площини	$\frac{A}{a_x}=\frac{B}{a_y}=\frac{C}{a_z}$
Умова паралельності прямої і площини	$A\cdot a_x+B\cdot a_y+C\cdot a_z=0$

Питання для самоконтролю

1. Які види рівнянь прямої на площині існують?
2. Визначити значення *C* (загальне рівняння прямої), якщо відомі *A*, *B* і координати точки *M*, через яку проходить ця пряма.
3. Знайти відстань від точки M(1, 1) до прямої y=2x+3.
4. На чому ґрунтується перевірка перпендикулярності двох прямих?
5. Яким чином можна перевірити умови перпендикулярності та паралельності двох площин?

Тест для самоперевірки

1. *Рівняння прямої, яка проходить через точку* $A(2;-3)$ *і перпендикулярна до прямої* $x-4y+7=0$*, має вигляд*

А $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{-4}$; **Б** $\frac{x-2}{-4}=\frac{y+3}{1}$;

В $\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{-4}$; **Г** $\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{-4}$.

2. *Рівняння прямої, яка проходить через точку* $A(-1;4;-2)$ *і перпендикулярна до площини* $2x-y+3z-7=0$*, має вигляд*

А $\frac{x+2}{3}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z+1}{2}$; **Б** $\frac{x-1}{2}=\frac{y+4}{-1}=\frac{z-2}{3}$;

В $\frac{x+1}{-3}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z+2}{2}$; **Г** $\frac{x+1}{2}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z+2}{3}$.

3. *Рівняння прямої, симетричної прямій* $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}$ *відносно точки* $(3;-1)$*, має вигляд*

А $\frac{x+5}{2}=\frac{y-1}{1}$; **Б** $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{1}$;

В $\frac{x-5}{2}=\frac{y+1}{1}$; **Г** $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}$.

4. *Яка з наступних площин паралельна векторам* $\bar{a}(-1;0;1)$ *і* $\bar{b}(0;-1;2)$*?*

А $x+3y+z-1=0$; **Б** $x-2y+z-1=0$;

В $x+2y+z-1=0$; **Г** $x-2y-z-1=0$.

5. *Прямі, які задані рівняннями* $\frac{x}{4}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{0}$ *та* $\frac{x}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-4}{0}$

А паралельні; **Б** перетинаються; **В** мимобіжні; **Г** збігаються.

6. *Прямі, які задані рівняннями* $\frac{x}{4}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{0}$ *та* $\frac{x}{2}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-4}{1}$

А паралельні; **Б** перетинаються; **В** мимобіжні; **Г** збігаються.

7. *Встановіть взаємне розташування площин* $2x-y+3z-2=0$ *і* $x+y-z+2=0$.

А паралельні; **Б** співпадають;

В перетинаються; **Г** перпендикулярні.

8. *Встановіть взаємне розташування площин* $2x+3y-z+7=0$ *і* $4x+6y-2z+9=0$.

А паралельні; **Б** співпадають;

В перетинаються; **Г** перпендикулярні.

9. *Вкажіть усі значення параметра p, при яких прямі* $\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{p}=\frac{z+1}{2}$ *і* $\frac{x+2}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{-1}$ *паралельні.*

А 4; **Б** –4; **В** 2; **Г** –2.

10. *Вкажіть усі значення параметра p, при яких прямі* $\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{p}=\frac{z+1}{3}$ *і* $\frac{x+2}{-2}=\frac{y+1}{5}=\frac{z-1}{-6}$ *перпендикулярні.*

А 4; **Б** –4; **В** 3; **Г** –3.

11. *Вкажіть усі значення параметра a, при яких пряма* $\frac{x}{1}=\frac{y}{a}=\frac{z-2}{-1}$ *паралельна площині* $3ax+ay+4z-4=0$.

А 0; **Б** –4, 1; **В** –4; **Г** 1.

12. *Вкажіть усі значення параметра a, при яких пряма* $\frac{x-1}{a}=\frac{y+1}{a^2}=\frac{z}{3}$ *перпендикулярна до площини* $5a^2x-2ay-z+5=0$.

А 0; **Б** –1, 1; **В** –1; **Г** 1.

13. Відстань між точками перетину прямої $\frac{x}{4}-\frac{y}{3}=1$ *з осями координат дорівнює*

А 5; **Б** 25; **В** 12; **Г** $\sqrt{5}$.

14. Відстань між прямими $5(x-2)-12(y-3)=0$ *і* $5x-12y-13=0$ *дорівнює*

А 1; **Б** 3; **В** 4; **Г** $\sqrt{2}$.

15. Кут між прямими $5(x-2)-12(y-3)=0$ *і* $5x-12y-13=0$ *дорівнює*

А 90°; **Б** 0°; **В** $\operatorname{arctg}\frac{5}{12}$; **Г** $\operatorname{arctg}\frac{12}{5}$.

16. Відстань між прямою $\frac{x}{4}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z+5}{0}$ *та площиною* $x+3y-7z+2=0$ *дорівнює*

А $\sqrt{59}$; **Б** $\sqrt{17}$; **В** $\frac{\sqrt{17}}{2}$; **Г** 0.

17. Кут між прямою $\frac{x}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z+2}{2}$ *та площиною* $2x-y+z+3=0$ *дорівнює*

А 0°; **Б** $\arcsin\frac{5}{3\sqrt{6}}$; **В** 90°; **Г** $\arccos\frac{5}{3\sqrt{6}}$.

18. Відстань між прямою $\frac{x-7}{5}=\frac{y-4}{7}=\frac{z-5}{-4}$ *та площиною* $3x-y+2z-5=0$ *дорівнює*

А $\frac{22}{\sqrt{14}}$; **Б** $\frac{27}{\sqrt{14}}$; **В** $\frac{22}{\sqrt{42}}$; **Г** 0.

19. Відстань між площинами $(x-1)+2(y-2)-2(z+1)=0$ *і* $x-2y-2z-6=0$ *дорівнює*

А $\frac{1}{3}$; **Б** 0; **В** 13; **Г** 1.

20. Кут між площинами $(x+1)+3(y-1)-(z+5)=0$ *і* $x+3y-z+3=0$ *дорівнює*

А $\arccos\frac{1}{\sqrt{11}}$; **Б** 90°; **В** 0°; **Г** 60°.

Відповіді: 1.В. 2.Г. 3.В. 4.В. 5.А. 6.В. 7.В. 8.А. 9.Б. 10.А. 11.Б. 12.А. 13.А. 14.Б. 15.Б. 16.Г. 17.Б. 18.А. 19.А. 20.В.

Приклади розв'язання задач

Приклад 1 На площині заданий ΔABC з вершинами $A(-1,0)$, $B(1,-4)$, $C(-8,-2)$. Потрібно знайти:

1) довжину сторони BC;
2) загальні рівняння медіани, висоти та бісектриси кута A;
3) відстань вершини B від медіани;

4) кут між медіаною і висотою (у градусах).

Розв'язання.

1) Знайдемо координати вектора $\overline{BC}(-9,2)$ та його довжину: $BC=\sqrt{(-9)^2+2^2}=\sqrt{81+4}=\sqrt{85}$.

2) Медіана кута A ділить сторону BC навпіл, тому координати точки M – середини BC будуть: $M\left(\frac{-1-8}{2},\frac{-4-2}{2}\right)$, $M\left(-\frac{9}{2},-3\right)$. Тепер складемо рівняння медіани як рівняння прямої за двома точками:

$$AM:\ \frac{x+1}{-\frac{9}{2}+1}=\frac{y-0}{-3-0},\qquad \frac{x+1}{-\frac{7}{2}}=\frac{y}{-3},$$

$$-3(x+1)=-\frac{7}{2}y,\qquad -3x-3+\frac{7}{2}y=0,$$

$6x-7y+6=0$ – загальне рівняння медіани кута A.

Висота кута A – це перпендикуляр до сторони BC, тому її нормальний вектор колінеарний до напрямного вектора прямої BC, тобто $\bar{n}_h(-9,2)$. Складемо рівняння висоти кута A за точкою та нормальним вектором:

$$-9(x+1)+2(y-0)=0,\qquad -9x-9+2y=0,$$

$9x-2y+9=0$ – загальне рівняння висоти кута A.

Бісектриса кута A ділить сторону BC у відношенні, що дорівнює відношенню прилеглих сторін, тобто $\frac{BN}{NC}=\frac{AB}{AC}$, N – основа бісектриси. Будемо мати: $\frac{BN}{NC}=\frac{\sqrt{2^2+(-4)^2}}{\sqrt{(-7)^2+(-2)^2}}$, $\frac{BN}{NC}=\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{53}}$. Тепер знайдемо координати Точки N, використовуючи формули ділення відрізка в даному відношенні:

$$x_N=\frac{-1+\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{53}}\cdot(-10)}{1+\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{53}}}=\frac{-\sqrt{53}-20\sqrt{5}}{\sqrt{53}+2\sqrt{5}},\qquad y_N=\frac{-6+\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{53}}\cdot(-4)}{1+\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{53}}}=\frac{-6\sqrt{53}-8\sqrt{5}}{\sqrt{53}+2\sqrt{5}}.$$

Складемо рівняння бісектриси кута A за двома точками $A(-1,0)$ та $N\left(\frac{-\sqrt{53}-20\sqrt{5}}{\sqrt{53}+2\sqrt{5}},\frac{-6\sqrt{53}-8\sqrt{5}}{\sqrt{53}+2\sqrt{5}}\right)$:

$$AN:\ \frac{x+1}{\frac{-\sqrt{53}-20\sqrt{5}}{\sqrt{53}+2\sqrt{5}}+1}=\frac{y-0}{\frac{-6\sqrt{53}-8\sqrt{5}}{\sqrt{53}+2\sqrt{5}}-0},$$

$$\frac{x+1}{\frac{-18\sqrt{5}}{\sqrt{53}+2\sqrt{5}}}=\frac{y}{\frac{-6\sqrt{53}-8\sqrt{5}}{\sqrt{53}+2\sqrt{5}}},$$

$$\left(-6\sqrt{53}-8\sqrt{5}\right)(x+1)=\left(-18\sqrt{5}\right)y,$$
$$\left(-6\sqrt{53}-8\sqrt{5}\right)x+18\sqrt{5}y-6\sqrt{53}-8\sqrt{5}=0$$

– загальне рівняння бісектриси кута A.

3) Відстань вершини B від медіани знайдемо за формулою відстані від точки до прямої. Будемо мати:

$$d=\frac{\left|6\cdot 1-7\cdot(-4)+6\right|}{\sqrt{6^2+(-7)^2}}=\frac{40}{\sqrt{36+49}}=\frac{40}{\sqrt{85}}=\frac{8\sqrt{85}}{17}.$$

4) Знайдемо кут між медіаною й висотою за формулою:

$$\cos\left(\hat{AM},h\right)=\cos\left(\hat{\bar{n}_{AM}},\bar{n}_h\right)=\frac{\bar{n}_{AM}\cdot\bar{n}_h}{\left|\bar{n}_{AM}\right|\cdot\left|\bar{n}_h\right|}.$$

Підставимо відповідні значення, отримаємо:

$$\cos\left(\hat{AM},h\right)=\frac{6\cdot 9+(-7)\cdot(-2)}{\sqrt{6^2+(-7)^2}\cdot\sqrt{9^2+(-2)^2}}=\frac{68}{\sqrt{85}\cdot\sqrt{85}}=\frac{68}{85}\approx 0{,}8,\ \ \angle(AM,h)\approx 37^\circ.$$

Приклад 2 Трикутна піраміда задана вершинами $A_1(-1,0,1)$, $A_2(1,-1,1)$, $A_3(-1,-2,0)$, $A_4(5,2,10)$. Потрібно знайти:

1) рівняння грані $A_1A_2A_3$;
2) рівняння висоти піраміди, яка проходить через вершину A_4;
3) довжину цієї висоти;
4) кут між ребром A_1A_4 і гранню $A_1A_2A_3$ в градусах.

Розв'язання.

1) Складемо детермінантне рівняння грані $A_1A_2A_3$:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-0 & z-1 \\ 1+1 & -1-0 & 1-1 \\ -1+1 & -2-0 & 0-1 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} x+1 & y & z-1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix}=0,$$

$x+2y-4z+5=0$ – рівняння грані $A_1A_2A_3$.

2) Висота піраміди, яка проходить через вершину A_4, це перпендикуляр до грані $A_1A_2A_3$, тому її напрямний вектор колінеарний до нормального вектора грані $A_1A_2A_3$, тобто $\bar{a}_{A_4D}(1,2,-4)$. Складемо рівняння висоти A_4D за точкою та напрямним вектором

$A_4D:\ \dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-10}{-4}$ – канонічне рівняння висоти піраміди, яка проходить через вершину A_4.

3) Довжину висоти A_4D знайдемо як відстань вершини A_4 від грані $A_1A_2A_3$ за формулою відстані від точки до площини. Будемо мати:

$$d=\frac{\left|1\cdot 5+2\cdot 2-4\cdot 10+5\right|}{\sqrt{1^2+2^2+(-4)^2}}=\frac{26}{\sqrt{1+4+16}}=\frac{26}{\sqrt{21}}.$$

4) Знайдемо кут між ребром A_1A_4 і гранню $A_1A_2A_3$ за формулою:

$$\sin\left(A_1A_4, \hat{} \; A_1A_2A_3\right) = \sin\left(\bar{a}_{A_1A_4}, \hat{} \; \bar{n}_{A_1A_2A_3}\right) = \frac{\left|\bar{a}_{A_1A_4} \cdot \bar{n}_{A_1A_2A_3}\right|}{\left|\bar{a}_{A_1A_4}\right| \cdot \left|\bar{n}_{A_1A_2A_3}\right|}.$$

Для цього спочатку знайдемо координати напрямного вектора ребра A_1A_4 : $\bar{a}_{A_1A_4}(6,2,9)$.

Підставимо відповідні значення, отримаємо:

$$\sin\left(A_1A_4, \hat{A}_1A_2A_3\right) = \frac{\left|6\cdot 1 + 2\cdot 2 + 9\cdot(-4)\right|}{\sqrt{6^2+2^2+9^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+(-4)^2}} = \frac{26}{\sqrt{121}\cdot\sqrt{21}} = \frac{26}{11\sqrt{21}} \approx 0{,}515,$$

$$\angle\left(A_1A_4, A_1A_2A_3\right) \approx 31^\circ.$$

Приклад 3 Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M(3;-1;-5)$ і перпендикулярна площинам $3x-2y+7=0$ і $5x-4y+3z+1=0$.

Розв'язання.

Оскільки за нормальний вектор $\bar{n}$ шуканої площини можна взяти векторний добуток нормальних векторів $\bar{n}_1(3;-2;2)$ і $\bar{n}_2(5;-4;3)$ заданих площин, то

$$\bar{n} = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 2\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}\,.$$

Скористаємося рівнянням площини, що проходить через задану точку $M(3;-1;-5)$ перпендикулярно вектору $\bar{n}(2,1,-2)$. Отримаємо

$$2(x-3)+(y+1)-2(z+5)=0 \text{ або } 2x+y-2z-15=0.$$

Приклад 4 Скласти рівняння площини, що проходить через початок координат і перпендикулярна до площин $2x-y+3z-1=0$ та $x+2y+z=0$.

Розв'язання.

Нехай рівняння шуканої площини має вигляд $Ax+By+Cz=0$, тоді нормальні вектори площин $\bar{n}_1(2;-1;3)$ і $\bar{n}_2(1;2;1)$ за умовою задачі будуть перпендикулярні до вектора $\bar{n}(A, B, C)$, тобто справедливі рівності

$$\begin{cases} 2A - B + 3C = 0, \\ A + 2B + C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{7}{5}C, \\ B = \dfrac{1}{5}C. \end{cases}$$

Отже, шукане рівняння площини має вигляд

$$-\frac{7}{5}Cx + \frac{1}{5}Cy + Cz = 0\,.$$

Оскільки $C \neq 0$, то рівняння площини $7x - y - 5z = 0$.

Приклад 5 З початку координат опустити перпендикуляр на пряму

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{1}.$$

Розв'язання.

Оскільки напрямний вектор прямої $\bar{a}(2;3;1)$ буде нормальним до площини, що проходить через початок координат, то рівняння такої площини має вигляд

$$2x+3y+z=0.$$

Розв'язавши систему

$$\begin{cases}\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-3}{1},\\ 2x+3y+z=0\end{cases} \text{ або } \begin{cases}x=2t+2,\\ y=3t+1,\\ z=t+3,\\ 2x+3y+z=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}t=-\dfrac{5}{7},\\ x=\dfrac{4}{7},\\ y=\dfrac{6}{7},\\ z=\dfrac{16}{7}.\end{cases}$$

Складемо рівняння прямої, що проходить через точки $O(0,0,0)$ і $M\left(\frac{4}{7};\frac{6}{7};\frac{16}{7}\right)$:

$$\frac{x}{4/7}=\frac{y}{6/7}=\frac{z}{16/7} \text{ або } \frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{8}.$$

Задачі для самостійного розв'язування

№ 8.1. Визначити, які з точок $A_1(1;-2)$, $A_2(1;1)$ та $A_3(3;-4)$ належать прямій $x+2y-3=0$.

№ 8.2. Знайти відрізки, що відтинає пряма $x-3y+6=0$ на осях координат.

№ 8.3. Скласти рівняння прямої, що проходить під кутом $\varphi=150^\circ$ до осі Ox і відтинає на осі Oy відрізок $b=3$.

№ 8.4. Під яким кутом до осі Ox нахилена пряма, що проходить через точки $A(-1;3)$ та $B(4;-2)$?

№ 8.5 Через точку $P(-1;3)$ провести пряму, перпендикулярну до прямої $4x-2y+3=0$.

№ 8.6. Через точку $P(1;2)$ провести пряму, перпендикулярну до прямої $5x+2y-11=0$.

№ 8.7. Знайти проекцію точки $P(1;-2)$ на пряму $3x-y-9=0$.

№ 8.8. Через точку перетину прямих $x+2y-1=0$ і $2x+y-4=0$ провести пряму, яка:

1) проходить через точку $M(-1;3)$;
2) паралельна осі Oy;
3) перпендикулярна до прямої $x-2y+11=0$.

№ 8.9. Звести до нормального вигляду такі рівняння:

1) $4x+3y+11=0$;

2) $x+2y-1=0$;

3) $x+2=0$.

№ 8.10. Обчислити відстань від точки P до прямої:

1) $P(-2;\ 1),\ 4x-3y-2=0$;

2) $P(3;\ -2),\ 12x+5y-3=0$;

3) $P(0;\ 1),\ x-2y+1=0$.

№ 8.11. Знайти довжину перпендикуляра, опущеного з точки $M_0(2;\ 3;\ -5)$ на площину $4x-2y+5z-12=0$.

№ 8.12. Перевірити, які з точок $A(-1;\ 2;\ 3)$, $B(1;\ -2;\ 1)$, $C(0;\ 1;\ 2)$, $D(3;\ 0;\ 3)$ та $E(5;\ -7;\ 11)$ належать площині $2x-3y+z-9=0$.

№ 8.13. Визначити координати нормального вектора площини, яка проходить через точки $A(2;\ -1;\ 1)$, $B(3;\ 1;\ 0)$ і $C(1;\ 5;\ -2)$.

№ 8.14. Площина проходить через точки $A(1;\ 2;\ 1)$ та $B(0;\ 3;\ -1)$ паралельно до осі Oz. Написати її рівняння.

№ 8.15. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $P(-1;\ 2;\ 3)$ і відтинає від осей Ox та Oy відрізки $a=2$, $b=-1$.

№ 8.16. Через точку $P(1;\ 2;\ -1)$ провести площину, що відтинає від осей координат рівні відрізки.

№ 8.17. Знайти відстань між площинами $2x+2y-z-15=0$ і $4x+4y-2z+11=0$.

№ 8.18. Дано точки $A(-3;\ 6)$, $B(4;\ -1)$, $C(-3;\ -5)$, $D(-1;\ 2)$. Скласти рівняння прямої, яка проходить:

1) через точки B і C;

2) через точку D перпендикулярно до прямої BC;

3) через точку A паралельно прямій BC;

4) через точку B і точку, що ділить відрізок AD у відношенні 1:3, рухаючись від точки A.

№ 8.19. Дано прямі $l_1:\ 2x-3y+1=0$, $l_2:\ 3x-y-4=0$. Знайти:

1) відстань від точки $A(2;\ -1)$ до прямої l_1;

2) кут між прямими l_1 і l_2;

3) значення параметра m, при яких пряма $2x+my+4=0$ перпендикулярна до прямої l_2;

4) значення параметра p, при яких пряма $px-y-p=0$ збігається з прямою l_2.

№ 8.20. Дано точки $A(1;\ -1;\ 1)$, $B(1;\ 3;\ 1)$, $C(4;\ 3;\ 1)$, $D(4;\ -1;\ 1)$. Скласти рівняння:

1) площини, що проходить через точки A, B, C;

2) прямої, яка проходить через точку A й паралельна прямій BC;

3) прямої, яка проходить через точки C і D.

№ 8.21. Дано площини $\alpha:\ 2x-y+z+3=0$, $\beta:\ 3x-2y-z-1=0$, $\gamma:\ -4x+2y-2z+1=0$ і прямі $l_1:\ \dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z}{-1}$, $l_2:\ \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$.

1) Знайдіть відстань від точки $A(2;\ -1;\ 1)$ до площини α;

2) Встановіть взаємне розташування площин α і β, β і γ, α і γ, прямої l_1 і площини β, прямих l_1 і l_2;

4) При яких значеннях параметра m площина α паралельна площині $2x - my + z = 0$;

5) Знайдіть кути між площинами α і β, прямими l_1 і l_2;

6) При яких значеннях параметра p площини γ і $px - 2y + pz - 1 = 0$ перпендикулярні.

ТЕМА 9 ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ КРИВИХ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Теоретичні відомості

Еліпс – геометричне місце точок площини, сума відстаней від яких до двох даних точок площини F_1 і F_2 (фокусів) є величина постійна і дорівнює $2a$.

Канонічне рівняння еліпса: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ b^2=a^2-c^2.$

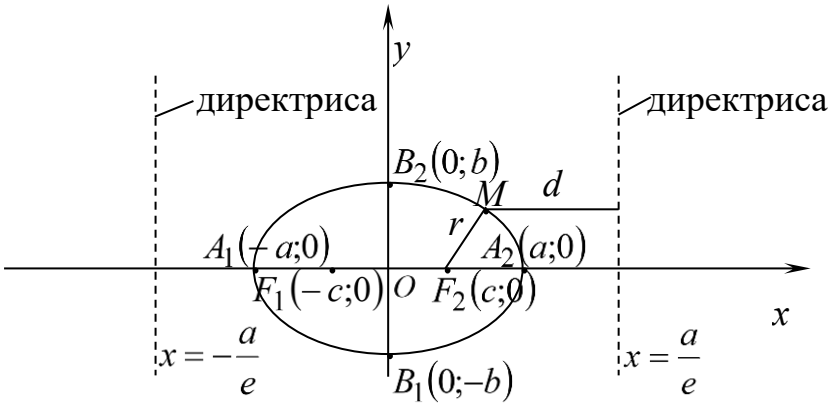


Рисунок 9.1 – Еліпс та його елементи

A_1A_2 – *велика* (*фокальна*) вісь, B_1B_2 – *мала вісь*; A_1, A_2, B_1 і B_2 – вершини (рис. 9.1);

$$0\le e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}<1 \text{ – ексцентриситет.}$$

Директриси еліпса: $x=\frac{a}{e}$ (права), $x=-\frac{a}{e}$ (ліва).

Фокальні радіуси: $F_1M=a+ex$, $F_2M=a-ex$.

Рівняння дотичної в точці $M(x_1,y_1)$ еліпса: $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1.$

Гіпербола – геометричне місце точок площини, різниця відстаней від яких до двох даних точок площини F_1 і F_2 (фокусів) є величина постійна і дорівнює $2a$ (рис. 9.2).

Канонічне рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\ b^2=c^2-a^2.$

A_1A_2 – *дійсна вісь*, B_1B_2 – *уявна вісь*; A_1, A_2 – *вершини*;

$e=\frac{c}{a}<1$ – ексцентриситет; $y=\frac{b}{a}x$, $y=-\frac{b}{a}x$ – асимптоти.

Директриси: $x=\frac{a}{e}$ (права), $x=-\frac{a}{e}$ (ліва).

Фокальні радіуси для правої вітки гіперболи: $F_1M=ex+a$, $F_2M=ex-a$,

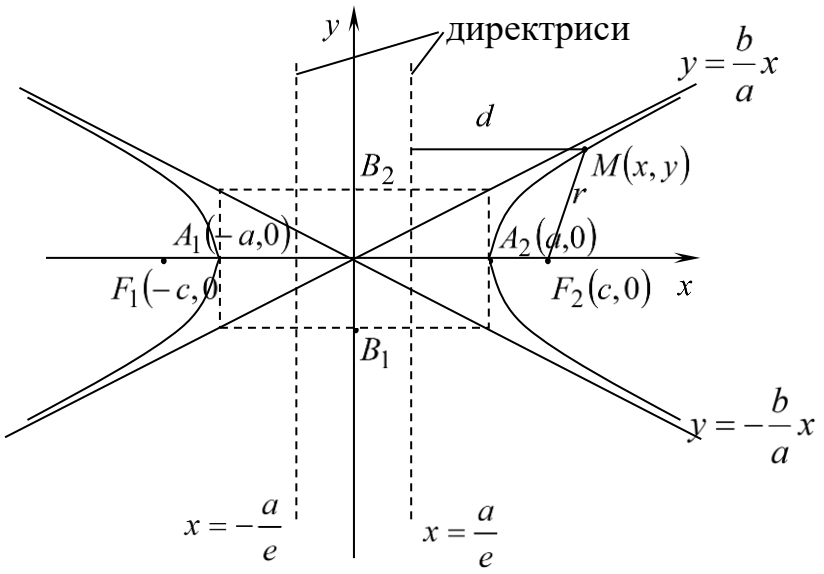


Рисунок 9.2 – Гіпербола та її елементи

для лівої: $F_1M=-(ex+a)$, $F_2M=-(ex-a)$.

Властивість директрис: відношення відстані r від правого фокуса F_2 до точки M правої вітки гіперболи до відстані d від цієї точки до правої директриси дорівнює ексцентриситету гіперболи, тобто $e=\frac{r}{d}$. Аналогічне твердження справедливе й для лівої вітки гіперболи.

Дотична до гіперболи в точці $M(x_1,y_1)$: $\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1$.

Спряжена гіпербола: $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ або $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$.

Парабола – геометричне місце точок площини, рівновіддалених від даної точки F (фокуса) і даної прямої (директриси) (рис. 9.3).

Канонічне рівняння параболи: $y^2=2px$, p – відстань між фокусом і директрисою.

Ексцентриситет: $e=\frac{r}{d}=1$.

Дотична до параболи в точці $M(x_1,y_1)$: $yy_1=p(x+x_1)$.

Фокальний радіус: $FM=x+\frac{p}{2}$.

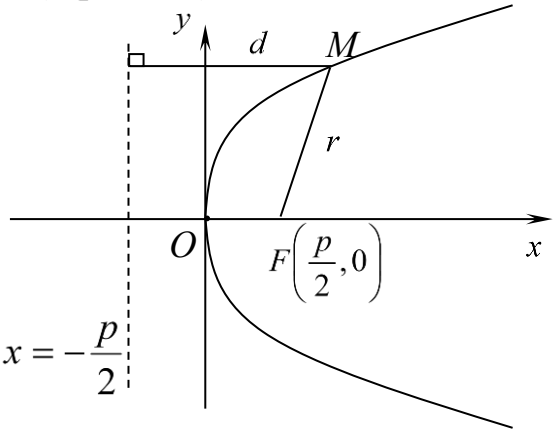


Рисунок 9.3 – Парабола та її елементи

Відомості про загальні рівняння кривих другого порядку та методи зведення їх до канонічного виду

Загальне рівняння кривої другого порядку має вигляд:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \qquad (9.1)$$

$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ – *дискримінант старших членів* кривої,

$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ – *дискримінант кривої.*

Тут $a_{12} = a_{21}$, $a_{23} = a_{32}$, $a_{13} = a_{31}$.

Таблиця 9.1 – Вид кривої другого порядку в залежності від значення дискримінанту старших членів та дискримінанту кривої

	$\Delta = 0$	$\Delta \neq 0$
$\delta > 0$	уявні прямі, що перетинаються в дійсній точці	еліпс (дійсний або уявний)
$\delta = 0$	паралельні прямі (дійсні, уявні, співпадаючі)	парабола
$\delta < 0$	дійсні прямі, що перетинаються	гіпербола

Методи зведення загальних рівнянь кривих другого порядку до канонічного виду:

За допомогою перетворень координат.

а) *паралельне перенесення*: $\begin{cases} x = \bar{x} + a, \\ y = \bar{y} + b, \end{cases}$ де $\bar{a}(a; b)$ – вектор паралельного перенесення, $\bar{x}$ і $\bar{y}$ – нові координати.

За відсутності добутку xy це перетворення рівносильне виділенню повних квадратів відносно змінних x і y.

б) *перетворення повороту* координатних осей на кут φ у додатному напрямку, за допомогою якого можна анулювати коефіцієнт при добуткові змінних xy. Нові координати $\bar{x}$ і $\bar{y}$ пов'язані з координатами x і y рівностями:

$$\begin{cases} x = \bar{x}\cos\varphi - \bar{y}\sin\varphi, \\ y = \bar{x}\sin\varphi + \bar{y}\cos\varphi. \end{cases}$$

Кут повороту φ завжди можна вибрати таким чином: у випадку, коли $a_{22} \neq a_{11}$, то $\operatorname{tg}2\varphi = \dfrac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}$, а коли $a_{22} = a_{11}$ і $a_{12} \neq 0$, то $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

Питання для самоконтролю

1. Яким чином визначити тип кривої другого порядку?
2. На що перетвориться еліпс, якщо ексцентриситет дорівнюватиме 0?
3. На рис. 9.2 побудувати спряжену гіперболу.

4. Як називається множина точок, рівновіддалених від заданої точки і заданої прямої?
5. Яку властивість має дотична, проведена в точці параболи?

Тест для самоконтролю

1. При $a>0$ рівняння $ax^2+4y^2-2x+4y+1=0$ визначає

А еліпс; **Б** гіперболу; **В** параболу; **Г** порожню множину.

2. За яких умов рівняння $x^2+2y^2+2a_1x+2a_2y+a_0=0$ визначає еліпс?

А $a_1^2+a_2^2-a_0>0$; **Б** $2a_1^2+a_2^2-2a_0>0$;

В $a_1^2+a_2^2-a_0<0$; **Г** $2a_1^2+a_2^2-2a_0<0$.

3. Вкажіть всі значення параметра a, при яких крива $ax^2+y^2-6y=0$ є гіперболою.

А $a\le 0$; **Б** $a\ge 0$; **В** $a<0$; **Г** $a>0$.

4. Вкажіть всі значення параметра c, при яких крива $cx^2+y^2+4x-2=0$ є параболою.

А $c>0$; **Б** $c<0$; **В** $c=0$; **Г** $c\neq 0$.

5. Вкажіть всі значення параметра p, при яких крива $y^2=2px+2$ є парою паралельних прямих.

А $p<0$; **Б** $p=0$; **В** $p>0$; **Г** $p\neq 0$.

6. Вкажіть всі значення параметра a, при яких крива $x^2+ay^2-4x+2=0$ є еліпсом.

А $a>0$; **Б** $a<0$; **В** $a\neq 0$; **Г** $a=0$.

7. Вкажіть всі значення параметра b, при яких крива $bx^2+y^2+4x+2=0$ є гіперболою.

А $b>0$; **Б** $b<0$; **В** $b\neq 0$; **Г** $b=0$.

8. Дано еліпс $5x^2+9y^2=45$. Ексцентриситет еліпса дорівнює

А $e=\frac{3}{2}$; **Б** $e=-\frac{3}{2}$; **В** $e=-\frac{2}{3}$; **Г** $e=\frac{2}{3}$.

9. Велика піввісь еліпса $5x^2+9y^2=45$ дорівнює

А $\sqrt{5}$; **Б** $2\sqrt{5}$; **В** 3; **Г** 6.

10. Мала піввісь еліпса $5x^2+9y^2=45$ дорівнює

А $\sqrt{5}$; **Б** $2\sqrt{5}$; **В** 3; **Г** 6.

11. Дана гіпербола $36x^2-64y^2=1$. Відстань між директрисами дорівнює

А $\frac{2}{15}$; **Б** $\frac{15}{4}$; **В** $\frac{15}{2}$; **Г** $\frac{4}{15}$.

12. Парабола $y^2=-9x$ проходить через точку

А $(3,1)$; **Б** $(-1,3)$; **В** $(-3,1)$; **Г** $(1,-3)$.

13. Яка з вказаних точок належить еліпсу $8x^2+5y^2=77$*?*

А $A(3;-2)$; **Б** $B(2;-2)$; **В** $C(-2;3)$; **Г** $D(2;1)$.

14. Відстань між фокусами еліпса $9x^2+25y^2=225$ *дорівнює*

А 8; **Б** 4; **В** 2; **Г** 16.

15. Рівняння директрис еліпса $9x^2+25y^2=225$ *мають вигляд*

А $x=\pm\frac{4}{25}$; **Б** $x=\pm\frac{4}{5}$; **В** $x=\pm\frac{25}{4}$; **Г** $x=\pm\frac{5}{4}$.

16. Ексцентриситет гіперболи $16x^2-9y^2=144$ *дорівнює*

А $\frac{4}{5}$; **Б** $\frac{5}{4}$; **В** $\frac{3}{5}$; **Г** $\frac{5}{3}$.

17. Дійсна піввісь гіперболи $5x^2-4y^2=20$ *дорівнює*

А 2; **Б** 4; **В** $\sqrt{5}$; **Г** $2\sqrt{5}$.

18. Уявна піввісь гіперболи $5x^2-4y^2=20$ *дорівнює*

А 2; **Б** 4; **В** $\sqrt{5}$; **Г** $2\sqrt{5}$.

19. Ексцентриситет спряженої гіперболи до $5x^2-4y^2=20$ *дорівнює*

А $\frac{\sqrt{5}}{3}$; **Б** $\frac{3}{\sqrt{5}}$; **В** $\frac{3}{2}$; **Г** $\frac{2}{3}$.

20. Рівняння асимптот гіперболи $36x^2-64y^2=2304$ *мають вигляд:*

А $y=\pm\frac{9}{16}x$; **Б** $y=\pm\frac{16}{9}x$; **В** $y=\pm\frac{4}{3}x$; **Г** $y=\pm\frac{3}{4}x$.

Відповіді: 1.А. 2.Б. 3.В. 4.В. 5.Б. 6.А. 7.Б. 8.Г. 9.В. 10.А. 11.Г. 12.Б. 13.В. 14.А. 15.В. 16.Г. 17.А. 18.В. 19.Б. 20.Г.

Приклади розв'язання задач

Приклад 1 Скласти канонічне рівняння еліпса, що проходить через точки $M\left(\frac{5}{2};\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$ і $N\left(-2;\frac{\sqrt{15}}{5}\right)$.

Розв'язання.

Нехай $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ – шукане рівняння еліпса. Це рівняння повинні задовольняти координати даних точок. Маємо

$$\begin{cases}\frac{25}{4a^2}+\frac{3}{8b^2}=1,\\ \frac{4}{a^2}+\frac{3}{b^2}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2=10,\\ b^2=1.\end{cases}$$

Отже, рівняння еліпса має вид $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{1}=1$.

Приклад 2 Задані точки $A(1;\ 0)$ і $B(2;\ 0)$. Точка M рухається так, що в трикутнику AMB $\angle B$ у два рази більший за $\angle A$. Знайти рівняння кривої, яку описує точка M.

Розв'язання.

Візьмемо точку M з координатами x і y. Виразимо $\operatorname{tg}\angle B$ і $\operatorname{tg}\angle A$ через координати точок A, B і M:

$$\operatorname{tg}\angle B=\frac{y}{2-x},\ \operatorname{tg}\angle A=\frac{y}{x+1}.$$

Згідно з умовою $\angle B=2\angle A$, тобто

$$\operatorname{tg}\angle B=\frac{2\operatorname{tg}\angle A}{1-\operatorname{tg}^2\angle A}\ \text{або}\ \frac{y}{2-x}=\frac{2\dfrac{y}{x+1}}{1-\left(\dfrac{y}{x+1}\right)^2}.$$

Після спрощення дістаємо $x^2-\frac{y^2}{3}=1$. Отже, шукана крива – гіпербола.

Приклад 3 Скласти рівняння параболи, симетричної відносно осі Ox, з вершиною в початку координат, якщо довжина деякої хорди цієї параболи, що перпендикулярна до осі Ox, дорівнює 16, а відстань до цієї хорди від вершини дорівнює 6.

Розв'язання.

Оскільки відома довжина хорди й відстань до неї від вершини, то відомі координати кінця цієї хорди – точки M, що лежить на параболі. У рівнянні параболи $y^2=2px$ покладемо $x=6$, $y=8$. Тоді $2p=\frac{32}{3}$. Отже, рівняння параболи $y^2=\frac{32x}{3}$.

Приклад 4 Звести до канонічного виду рівняння кривої другого порядку, використовуючи перетворення координат, а саме перетворення повороту та паралельного переносу: $5x^2-4\sqrt{2}xy+3y^2-14=0$.

Розв'язання.

У загальному рівнянні кривої присутній член xy, тому виконаємо перетворення повороту. У вихідному рівнянні $a_{22}=3\neq a_{11}=5$, тому $\operatorname{tg}2\varphi=\frac{2\cdot\left(-2\sqrt{2}\right)}{5-3}=-2\sqrt{2}$. Знайдемо $\sin\varphi$ та $\cos\varphi$, використовуючи формули: $\operatorname{tg}2\varphi=\frac{2\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}^2\varphi}$, $\sin\varphi=\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}$, $\cos\varphi=\frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}$. Будемо мати:

$\operatorname{tg}\varphi = \left\{-\frac{1}{\sqrt{2}};\ \sqrt{2}\right\}$, а $\sin\varphi$ і $\cos\varphi$ візьмемо, наприклад, $\sin\varphi = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Запишемо формули перетворення

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\bar{x} - \bar{y}\sqrt{2}\right), \\ y = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\bar{x}\sqrt{2} + \bar{y}\right), \end{cases}$$

за допомогою яких отримаємо рівняння кривої в новій системі координат:

$$3\bar{x}^2 + 21\bar{y}^2 - 42 = 0 \text{ або } \frac{\bar{x}^2}{14} + \frac{\bar{y}^2}{2} = 1.$$

Маємо рівняння еліпса у новій системі координат: $\frac{\bar{x}^2}{14} + \frac{\bar{y}^2}{2} = 1$ з центром в початку координат та осями $\sqrt{14}$ та $\sqrt{2}$, при цьому системи координат зв'язані формулами: $\begin{cases} \bar{x} = \frac{x\sqrt{3}}{3} + \frac{y\sqrt{6}}{3}, \\ \bar{y} = -\frac{x\sqrt{6}}{3} + \frac{y\sqrt{3}}{3}. \end{cases}$

Задачі для самостійного розв'язування

№ 9.1. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, якщо:

1) його півосі дорівнюють 5 і 2;
2) його велика вісь дорівнює 10, а відстань між фокусами $2c = 8$;
3) його мала вісь дорівнює 24, а відстань між фокусами $2c = 10$;
4) відстань між фокусами $2c = 6$ і ексцентриситет $e = \frac{3}{5}$;
5) його велика вісь дорівнює 20, а ексцентриситет $e = \frac{3}{5}$;
6) його мала вісь дорівнює 10, а ексцентриситет $e = \frac{12}{13}$;
7) відстань між директрисами дорівнює 5 і відстань між фокусами $2c = 4$;
8) його велика вісь дорівнює 8, а відстань між директрисами дорівнює 16;
9) його мала вісь дорівнює 6, а відстань між директрисами дорівнює 13;
10) відстань між директрисами дорівнює 32 і $e = \frac{1}{2}$;
11) точка $M\left(-2\sqrt{5};\ 2\right)$ еліпсу і його мала піввісь дорівнює 3;
12) точка $M\left(2;\ -2\right)$ еліпсу і його велика піввісь дорівнює 4;
13) точки $M\left(4;\ -\sqrt{3}\right)$ і $N\left(2\sqrt{2};\ 3\right)$ еліпсу.

№ 9.2. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, якщо:

1) її вісі $2a=10$ і $2b=8$;
2) відстань між фокусами $2c=10$ і вісь $2b=8$;
3) відстань між фокусами $2c=6$ і ексцентриситет $e=\frac{3}{2}$;
4) вісь $2a=16$ і ексцентриситет $e=\frac{5}{4}$;
5) рівняння асимптот $y=\pm\frac{4}{3}x$ і відстань між фокусами $2c=20$;
6) відстань між директрисами $22\frac{2}{13}$ і відстань між фокусами $2c=26$;
7) відстань між директрисами $\frac{32}{5}$ і вісь $2b=6$;
8) відстань між директрисами дорівнює $\frac{8}{3}$ і $e=\frac{3}{2}$;
9) рівняння асимптот $y=\pm\frac{3}{4}x$ і відстань між директрисами $12\frac{4}{5}$;
10) точки $M(6;-1)$ і $N\left(-8;2\sqrt{2}\right)$ гіперболи;
11) точка $M(-5;3)$ гіперболи і ексцентриситет $e=\sqrt{2}$;
12) точка $M\left(\frac{9}{2};-1\right)$ гіперболи і рівняння асимптот $y=\pm\frac{2}{3}x$;
13) точка $M\left(-3;\frac{5}{2}\right)$ гіперболи і рівняння директрис $x=\pm\frac{4}{3}$;
14) рівняння асимптот $y=\pm\frac{3}{4}x$ і рівняння директрис $x=\pm\frac{16}{5}$.

№ 9.3. Скласти рівняння параболи, вершина якої знаходиться в початку координат, якщо парабола розташована
1) в правій півплощині симетрично відносно вісі Ox, і її параметр $p=3$;
2) в лівій півплощині симетрично відносно вісі Ox, і її параметр $p=0{,}5$;
3) в верхній півплощині симетрично відносно вісі Oy, і її параметр $p=\frac{1}{4}$;
4) в нижній півплощині симетрично відносно вісі Oy, і її параметр $p=3$;
5) симетрично відносно вісі Ox і проходить через точку $A(9;6)$;
6) симетрично відносно вісі Ox і проходить через точку $B(-1;3)$;
7) симетрично відносно вісі Oy і проходить через точку $C(1;1)$;
8) симетрично відносно вісі Oy і проходить через точку $D(4;-8)$.

№ 9.4. Скласти рівняння гіперболи, якщо відомо її ексцентриситет $e=\sqrt{5}$, фокус $F(2;-1)$ і рівняння відповідної директриси $3x-y+3=0$.

№ 9.5. Скласти рівняння параболи, якщо заданий її фокус $F(4;3)$ і директриса $y+1=0$.

№ 9.6. Скласти рівняння двох спряжених гіпербол, якщо відстань між директрисами першої з них дорівнює 7,2 і відстань між директрисами другої

дорівнює 12,8.

№ 9.7. Скласти рівняння параболи, якщо:

1) фокус має координати (5, 0), а вісь ординат є директрисою;
2) парабола симетрична відносно осі *Ox*, проходить через початок координат і через точку *M*(1; –4);
3) парабола симетрична відносно осі *Oy*, фокус знаходиться в точці $(0;\ 2)$, а вершина збігається з початком координат;
4) парабола симетрична відносно осі *Oy*, проходить через початок координат і через точку *M*(6; –2).

№ 9.8. Скласти рівняння еліпса, якщо його ексцентриситет 0,5, фокус знаходиться в точці *F*(1; –2), а відповідна директриса визначається рівнянням $x-y+1=0$.

№ 9.9. Точка $M\left(-\frac{5}{2};1\right)$ лежить на гіперболі $4x^2-5y^2=20$. Знайти її фокальні радіуси.

№ 9.10. Знайти точки перетину еліпса $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ з прямою $x-2y+2=0$.

№ 9.11. Знайти точки перетину гіперболи $\frac{x^2}{90}-\frac{y^2}{36}=1$ з прямою $x-y+5=0$.

№ 9.12. Через точку *M*(2; 4) провести дотичні до еліпса $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$.

№ 9.13. Скласти рівняння дотичних, проведених через точку $M\left(0;-\frac{1}{4}\right)$ до гіперболи $9x^2-2y^2=1$.

№ 9.14. Звести до канонічного виду рівняння кривої другого порядку, використовуючи перетворення координат, а саме перетворення повороту та паралельного переносу. Побудувати криву (якщо вона існує):

1) $3x^2+10xy+3y^2-2x-14y-3=0$;
2) $25x^2-14xy+25y^2+64x-64y-224=0$;
3) $7x^2+6xy-y^2+28x+12y+28=0$;
4) $5x^2-2xy+5y^2-4x+20y+20=0$;
5) $9x^2-24xy+16y^2-20x+110y-50=0$;
6) $9x^2+12xy+4y^2-24x-16y+3=0$;
7) $16x^2-24xy+9y^2-160x+120y+425=0$;
8) $4x^2+12xy+9y^2-4x-6y+1=0$;
9) $19x^2+6xy+11y^2+38x+6y+29=0$;
10) $x^2-2xy+y^2-10x-6y+25=0$.

ТЕМА 10 ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОВЕРХОНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Теоретичні відомості

Канонічні рівняння поверхонь другого порядку

Еліпсоїд: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

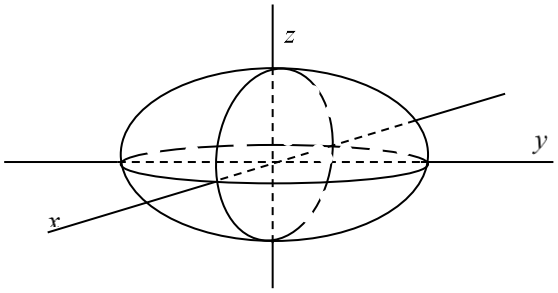


Рисунок 10.1 – Еліпсоїд

Еліптичний параболоїд: $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$

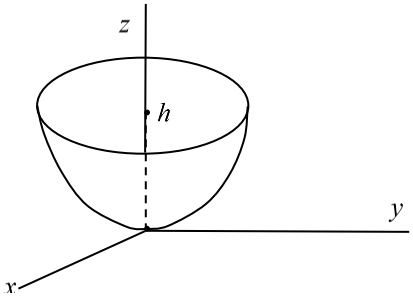


Рисунок 10.2 – Еліптичний параболоїд

Однопорожнинний гіперболоїд:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

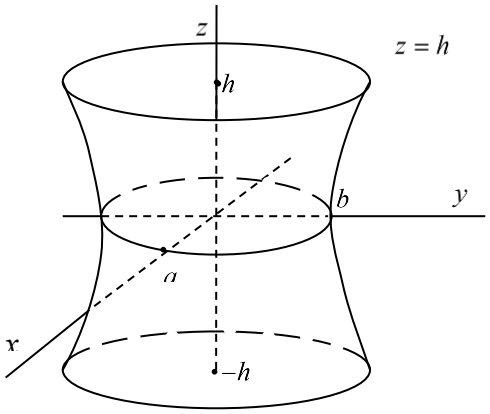


Рисунок 10.3 – Однопорожнинний гіперболоїд

*Двопорожнинний гіперболоїд***:**

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

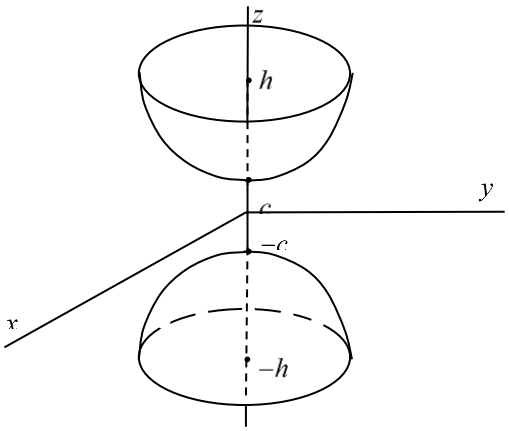


Рисунок 10.4 – Двопорожнинний гіперболоїд

Гіперболічний параболоїд:

$$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$$

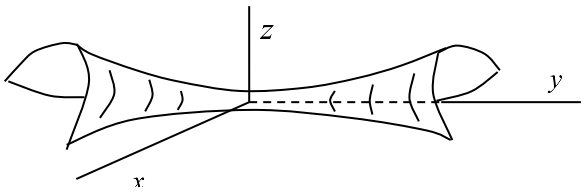


Рисунок 10.5 – Гіперболічний параболоїд

Конус: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$

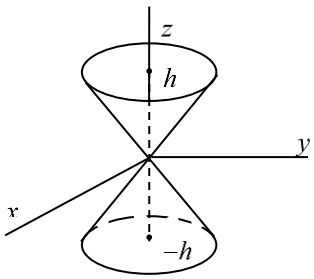
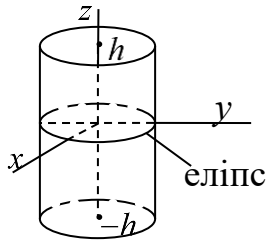
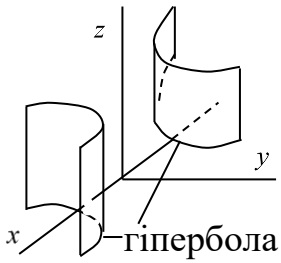


Рисунок 10.6 – Конус

Еліптичний циліндр: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$



Гіперболічний циліндр: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$



Параболічний циліндр: $y^2=2px$

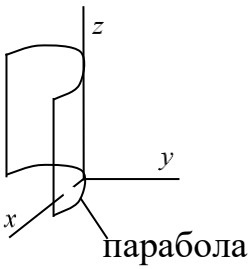


Рисунок 10.7 – Приклади циліндрів

Методи зведення загальних рівнянь поверхонь другого порядку до канонічного виду

Загальне рівняння поверхні другого порядку має вигляд:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+ \\ +2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0. \qquad (10.1)$$

Методи приведення загальних рівнянь поверхонь другого порядку до канонічного виду:

За допомогою перетворень координат.

а) *паралельне перенесення*:

$$\begin{cases} x=\bar{x}+a, \\ y=\bar{y}+b, \\ z=\bar{z}+c, \end{cases}$$

де $\bar{a}(a;b;c)$ – вектор паралельного перенесення, $\bar{x}$, $\bar{y}$ і $\bar{z}$ – нові координати.

За відсутності добутків xy, xz і yz це перетворення рівносильне виділенню повних квадратів відносно змінних x, y і z.

б) *перетворення повороту* на кут φ у додатному напрямку в одній з координатних площин, за допомогою якого можна анулювати коефіцієнт при добуткові змінних xy, xz або yz. Нові координати $\bar{x}$, $\bar{y}$ і $\bar{z}$ пов'язані з координатами x, y і z рівностями при повороті на кут φ у додатному напрямку в одній з координатних площин, наприклад xOy:

$$\begin{cases} x=\bar{x}\cos\varphi-\bar{y}\sin\varphi, \\ y=\bar{x}\sin\varphi+\bar{y}\cos\varphi. \end{cases}$$

Такі перетворення потрібно зробити у всіх координатних площинах.

в) *комбінування* двох вищевказаних перетворень.

Питання для самоконтролю

1. За якої умови еліпсоїд перетвориться га сферу?
2. Яка різниця між однопорожнинним і двопорожнинним гіперболоїдами?

3. Чому в канонічних рівняннях циліндрів відсутня змінна z?

Тест для самоконтролю

1. Яке з наступних співвідношень визначає коло в просторі?

А $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=3, \\ y=3 \end{cases}$ **Б** $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ 2x+3y+4z=0 \end{cases}$

В $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$ **Г** $x^2+y^2=1.$

2. Яке з наступних рівнянь визначає гіперболічний параболоїд?

А $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;$ **Б** $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;$

В $\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=2px;$ **Г** $\frac{x^2+z^2}{a^2}=2py.$

3. Яке з наступних рівнянь визначає еліптичний параболоїд?

А $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;$ **Б** $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;$

В $\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=2px;$ **Г** $\frac{x^2+z^2}{a^2}=2py.$

4. Рівняння $x^2+z^2+4x-2z+1=0$ *визначає в просторі*

А коло; **Б** еліптичний циліндр;

В гіперболічний циліндр; **Г** кулю.

5. Яку фігуру визначає система рівнянь $\begin{cases} \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=4z, \\ y=2 \end{cases}$ *?*

А параболу; **Б** еліпс; **В** гіперболу; **Г** дві прямі.

6. Яку фігуру визначає система рівнянь $\begin{cases} \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=4z^2, \\ y=2 \end{cases}$ *?*

А параболу; **Б** еліпс; **В** гіперболу; **Г** дві прямі.

7. Скільки площин симетрії має фігура в просторі, яка задана рівнянням $xy=1$ *?*

А 2; **Б** 4; **В** ні однієї; **Г** безліч.

8. Маємо три системи рівнянь:

1) $\begin{cases} y^2=0, \\ x^2+y^2+z^2=4; \end{cases}$ ***2)*** $\begin{cases} x^2+z^2=4, \\ x^2+y^2+z^2=4; \end{cases}$ ***3)*** $\begin{cases} x^2+z^2=4, \\ x=0. \end{cases}$

Які з них визначають однакові фігури?

А 1, 2, 3; **Б** 2, 3; **В** 1, 3; **Г** 1, 2.

9. Яка з наступних поверхонь не має центру симетрії?

А $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{5}=0;$ **Б** $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=z;$

В $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}=-1;$ **Г** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1.$

10. Яка з наступних поверхонь має безліч площин симетрії?

А $\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y+2)^2}{9}+\frac{(z-1)^2}{4}=1;$ **Б** $\frac{(x+2)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{16}-\frac{z^2}{4}=1;$

В $\frac{(x+3)^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{16}=2z;$ **Г** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=0.$

11. Вкажіть всі значення параметра a, при яких поверхня $x^2+2y^2+az^2-2x+4y+2z=0$ *є параболоїдом.*

А $a>0;$ **Б** $a<0;$ **В** $a=0;$ **Г** $a\neq 0.$

12. Вкажіть всі значення параметра q, при яких поверхня $2x^2+y^2-4x+2y+qz=0$ *є циліндричною.*

А $q>0;$ **Б** $q<0;$ **В** $q\neq 0;$ **Г** $q=0.$

13. Яке з рівнянь визначає двопорожнинний гіперболоїд?

А $2x^2-3y^2+6z^2=1;$ **Б** $-2x^2-3y^2-6z^2=1;$

В $2x^2-3y^2+6z^2=-1;$ **Г** $2x^2-3y^2-6z^2=-1.$

14. Яке з рівнянь визначає еліптичний параболоїд?

А $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;$ **Б** $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;$

В $\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=2px;$ **Г** $\frac{x^2+z^2}{a^2}=2py.$

15. Яке з рівнянь визначає гіперболічний параболоїд?

А $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;$ **Б** $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;$

В $\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=2px;$ **Г** $\frac{x^2+z^2}{a^2}=2py.$

16. Яке з рівнянь визначає конус?

А $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0;$ **Б** $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0;$

В $\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=0;$ **Г** $\frac{x^2+z^2}{a^2}=0.$

17. Яке з рівнянь визначає еліпсоїд?

А $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;$ **Б** $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;$

В $\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{b^2}=2px$; **Г** $\dfrac{x^2+z^2}{a^2}=2py$.

18. Рівняння $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=4z$ *визначає в просторі*

А еліпс; **Б** еліптичний параболоїд;
В еліптичний циліндр; **Г** конус.

19. Рівняння $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=4z$ *визначає в просторі*

А гіперболу; **Б** гіперболічний циліндр;
В гіперболічний параболоїд; **Г** конус.

20. Рівняння $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=-4$ *визначає в просторі*

А гіперболу; **Б** гіперболічний циліндр;
В гіперболічний параболоїд; **Г** порожню множину.

Відповіді: 1.Б. 2.В. 3.Г. 4.Б. 5.А. 6.В. 7.Г. 8.Г. 9.Б. 10.В. 11.В. 12.Г. 13.В. 14.Г. 15.В. 16.Б. 17.А. 18.Б. 19.В. 20.Б.

Задачі для самостійного розв'язування

№ 10.1. Визначте вид фігури, яка задана рівнянням або системою рівнянь:

1) $x+2y-z=1$;
2) $x^2-z^2=0$;
3) $x^2+y^2=1$;
4) $(x-1)^2+(y-5)^2+(z-2)^2\le a$;
5) $x^2+y^2+z^2+4x-2y+6z+4=0$;
6) $xy=0$;
7) $xyz=0$;
8) $yz+z^2=0$;
9) $\dfrac{y^2}{25}+\dfrac{z^2}{16}=1$;
10) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$;
11) $x^2=6z$;
12) $x^2+y^2=0$;
13) $x^2+z^2=2z$;
14) $(x-3y+z-2)(2x+y-4z+1)=0$;
15) $\left(x^2+y^2-4\right)\left(y^2+z^2-1\right)=0$;
16) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-2}{1}$;
17) $\dfrac{x}{0}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{0}$;
18) $\begin{cases}x=y,\\ y=z;\end{cases}$
19) $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=9,\\ y=0;\end{cases}$
20) $\begin{cases}x^2+z^2=9,\\ x^2+y^2+z^2=9;\end{cases}$
21) $\begin{cases}x^2+y^2=9,\\ y=0;\end{cases}$
22) $\begin{cases}(x-1)^2+(y+4)^2+z^2=25,\\ y+1=0;\end{cases}$

23) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1, \\ x - 2 = 0; \end{cases}$

24) $\begin{cases} x^2 + z^2 = 16, \\ z = 3; \end{cases}$

25) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} + \dfrac{z^2}{25} = 1;$

26) $\dfrac{x^2}{4} - y^2 + \dfrac{z^2}{4} = 0;$

27) $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{6} = 2z;$

28) $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{z^2}{3} = y;$

29) $x^2 + y^2 - z^2 = -1;$

30) $x^2 + y^2 - z^2 = 1.$

№ 10.2. Звести рівняння поверхні до канонічного виду, визначити її тип й схематично побудувати:

1) $9x^2 - 4y^2 - 81z^2 - 36 = 0;$

2) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 6z + 3 = 0;$

3) $x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2x - 4y - 4z = 0;$

4) $x^2 + 2y^2 - z^2 + 2x - 4y + 2z + 1 = 0;$

5) $x^2 + 2y^2 - 4z^2 + 2x - 2y + 2 = 0;$

6) $x^2 + 8z^2 - 4x + 16z + 6 = 0;$

7) $3y^2 + 4z^2 + 24x + 12y - 72z + 360 = 0;$

8) $x^2 - 3y^2 - 2x + 18y - z = 0;$

9) $x^2 - 3y^2 - 2x + 18y - 26 = 0;$

10) $x^2 - 8z^2 - 4x + 16z - 12 = 0;$

11) $y^2 - 10z - 2y - 19 = 0;$

12) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 2 = 0;$

13) $3x^2 + 2y^2 - 6x + 4y - 1 = 0;$

14) $3x^2 + 3y^2 - 3z^2 - 6x + 4y + 4z + 3 = 0;$

15) $4x^2 + y^2 - 4xy - 36 = 0;$

16) $x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 6x + 8y - 36z = 0;$

17) $x^2 - 2x + 4y - z^2 + 10 = 0;$

18) $6y^2 + 6z^2 + 5x + 6y + 30z - 11 = 0;$

19) $2x^2 + 2y^2 - 6x - 2y - z = 0;$

20) $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 8xz - 4yz - 14x - 4y + 14z + 16 = 0.$

ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры Москва : Наука, 1980. 336 с.
2. Булдигін В. В., Алєксєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Коновалова Н. Р., Федорова Л. Б. Лінійна алгебра та аналітична геометрія : навч. посібник / за ред. проф. В. В. Булдигіна. Київ : ТВіМС, 2011. 224 с.
3. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Аналитическая геометрия. Москва : Наука, 1988. 296 с.
4. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии. Москва : Наука, 1986. 244 с.
5. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Практикум / уклад.: І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова. Київ : НТУУ «КПІ», 2013. 180 с.
6. Моденов П. С., Пархоменко А. С. Сборник задач по аналитической геометрии. Москва : Наука, 1976. 384 с.
7. Постников М. М. Лекции по геометрии. Семестр I. Аналитическая геометрия. Москва : Наука, 1986. 416 с.
8. Пытьев Ю. П., Васильева А. Б., Пытьева Г. П. Аналитическая геометрия с элементами высшей алгебры. Москва : Изд-во МГУ, 1986. 216 с.
9. Рублев А. Н. Курс линейной алгебры и аналитической геометрии. Москва : Высшая школа, 1972. 424 с.
10. Рябушко А. П., Бархатов В. В., Державец В. В., Юруть И. Е. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике в трех частях. Ч. 1. Минск : Вышэйшая школа, 1990. 271 с.
11. Цубербиллер О. Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. Москва : Наука, 1970. 326 с.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

Основна

1. Алєксєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Федорова Л. Б. Математика в сучасному технічному університеті. Практикум. У 4-х частинах. Частина 1. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: навчальний посібник. Київ : НТУУ «КПІ». 2015. 180 с.
2. Стороженко І. П. Вища математика : навчальний посібник в 2 частинах. Частина І. Лінійна алгебра і аналітична геометрія : навчальний посібник. Харків : Харківський національний технічний університет сільського господарства (ХНТУСГ) ім. Петра Василенка, 2019. 80 с.
3. Осадча Л. К. Лінійна алгебра та аналітична геометрія : навчальний посібник. Рівне : Національний університет водного господарства та природокористування (НУВГП), 2020. 205 с.

Додаткова

1. Барановська Г. Г., Барановська Л. В. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Збірник задач : навчальний посібник. Київ : НТУУ «КПІ», 2015. 198 с.
2. Красножон О. Б. Аналітична геометрія з комп’ютерною підтримкою : навчальний посібник. Бердянськ : Бердянський державний педагогічний університет (БДПУ), 2016. 155 с.
3. Щоголев С. А., Кореновський А. О. Аналітична геометрія на площині : навчально-методичний посібник. Одеса : Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, 2016. 74 с.

Навчальне видання
(*українською мовою*)

Спиця Оксана Геннадіївна
Зіновєєв Ігор Валерійович
Манько Наталія Іванівна – Володимирівна

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Навчальний посібник
для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра
спеціальності «Інформаційні системи і технології»
освітньо-професійної програми «Інформаційні системи і технології»

Рецензент *С. М. Гребенюк*
Відповідальний за випуск *І. В. Зіновєєв*
Коректор *О. Г. Спиця*