МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра фундаментальної та прикладної математики

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА

на тему: **«Розв'язання крайової задачі на основі двовимірного методу скінченних елементів»**

Виконав: студент 2 курсу, групи 8.1114

спеціальності 111 Математика
(шифр і назва спеціальності)

освітньої програми Математика
(назва освітньої програми)

Я.В. Ткач
(ініціали та прізвище)

Керівник Доцент кафедри загальної математики, доцент, к.ф.-м.н. Спиця О.Г.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Рецензент Декан математичного факультету, професор, д.т.н. Гоменюк С.І.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Запоріжжя – 2025

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет Математичний

Кафедра фундаментальної та прикладної математики

Рівень вищої освіти Магістр

Спеціальність 111 Математика

(шифр і назва)

Освітня програма Математика

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри
фундаментальної та прикладної
математики, професор, д.т.н.

_____ Гребенюк С.М.

(підпис)

« ____ » _____ 2025 р.

ЗАВДАННЯ
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТУ

Ткачу Ярославу Володимировичу

(прізвище, ім'я та по-батькові)

1. Тема роботи (проєкту) Розв'язання крайової задачі на основі двовимірного методу скінченних елементів

керівник роботи (проекту) Спиця Оксана Геннадіївна, к.ф.-м.н., доцент

(прізвище, ім'я та по-батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом ЗНУ від « 28 » лютого 2025 року № 326-с

2. Строк подання студентом роботи 20.11.2025

3. Вихідні дані до роботи 1. Постановка задачі.
2. Перелік літератури.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень)
Презентація

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання 7.04.2025

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів кваліфікаційної роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	Розробка плану роботи.	25.04.2025	
2.	Збір вихідних даних.	28.05.2025	
3.	Розробка першого розділу.	30.05.2025	
4.	Розробка другого розділу.	26.09.2025	
5.	Розробка третього розділу.	30.10.2025	
6.	Оформлення та нормоконтроль	20.11.2025	
	кваліфікаційної роботи.		
7.	Захист кваліфікаційної роботи.	15.12.2025	

Студент _____ Я. В. Ткач
(підпис) (ініціали та прізвище)

Керівник роботи _____ О. Г. Спиця
(підпис) (ініціали та прізвище)

Нормоконтроль пройдено

Нормоконтролер _____ О. Г. Спиця

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота магістра «Розв’язання крайової задачі на основі двовимірного методу скінченних елементів»: 46 с., 16 рис., 2 табл., 18 джерел.

МЕТОД СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ, АПРОКСИМУЮЧІ ФУНКЦІЇ, МАТРИЦЯ ЖОРСТКОСТІ, КРАЙОВА ЗАДАЧА, ЗБІЖНІСТЬ РЕЗУЛЬТАТІВ, МНОГОЧЛЕНИ

Об’єкт дослідження – застосування різних апроксимуючих функцій у методі скінченних елементів та його застосування до розв’язання двовимірних крайових задач.

Мета роботи: на основі використання многочленів різного ступеня як апроксимуючих функцій побудувати матриці жорсткості скінченних елементів та розв’язати за їх допомогою двовимірні крайові задачі.

Метод дослідження – аналітичний, чисельний, порівняльний.

У кваліфікаційній роботі надаються основні теоретичні відомості про вибір апроксимуючих функцій у методі скінченних елементів. Розглядається застосування лінійних та квадратичних многочленів для отримання співвідношень для функцій форми плоских скінченних елементів. Для різних варіантів апроксимуючих многочленів побудовано матриці жорсткості чотирикутних скінченних елементів.

Із застосуванням отриманих матриць жорсткості скінченних елементів для двох двовимірних крайових задач побудовано системи розв’язувальних рівнянь й отримано розв’язки при різних сітках розбиття на чотирикутні скінченні елементи. Досліджено збіжність результатів чисельних розрахунків для різних варіантів використаних апроксимуючих функцій.

SUMMARY

Master's qualifying paper "Solution of the Boundary Value Problem Based on the Two-Dimensional Finite Element Method": 46 p., 16 figures, 2 tables, 18 references.

FINITE ELEMENT METHOD, APPROXIMATING FUNCTIONS, STIFFNESS MATRIX, BOUNDARY PROBLEM, CONVERGENCE OF RESULTS, POLYNOMIALS

The object of the study is the use of various approximating functions in the finite element method and its application to the solution of two-dimensional boundary value problems.

The purpose of the work: based on the use of polynomials of various degrees as approximating functions, to construct stiffness matrices of finite elements and solve two-dimensional boundary value problems with their help.

The research method is analytical, numerical, comparative.

The qualification work provides basic theoretical information on the choice of approximating functions in the finite element method. The application of linear and quadratic polynomials to obtain relations for the shape functions of plane finite elements is considered. For different variants of approximating polynomials, stiffness matrices of quadrilateral finite elements were constructed.

Using the obtained stiffness matrices of finite elements, systems of solution equations were constructed for two two-dimensional boundary value problems and solutions were obtained for different grids of division into quadrilateral finite elements. The convergence of the results of numerical calculations for different variants of the used approximating functions was investigated.

ЗМІСТ

ЗАВДАННЯ НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТУ 2
РЕФЕРАТ 4
SUMMARY 5
ВСТУП 7
1 ОСОБЛИВОСТІ ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ 9
1.1 Поняття про чисельні методи розв'язання крайових задач 9
1.2 Застосування методу скінченних елементів до розв'язання крайових задач 11
1.3 Висновки до розділу 1 14
2 ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗУВАЛЬНИХ РІВНЯНЬ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ПРИ ВИБОРІ РІЗНИХ АПРОКСИМУЮЧИХ ФУНКЦІЙ 16
2.1 Апроксимуючі функції у двовимірному методі скінченних елементів 16
2.2 Процедура побудови глобальної матриці жорсткості та формування системи розв'язувальних рівнянь 25
2.3 Висновок до розділу 2 32
3 ЗАСТОСУВАННЯ ДВОВИМІРНОГО МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОЇ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ 34
3.1 Розв'язання задачі теорії пружності про згин консольної балки 34
3.2 Скінченно-елементний розв'язок крайової задачі для прямокутної пластини 38
3.3 Висновки до розділу 3 42
ВИСНОВКИ 43
ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ 45

ВСТУП

При дослідженні оточуючого середовища виникає потреба в описанні процесів і явищ, що відбуваються навколо. Для цього потрібно спочатку виокремити явище (процес, об’єкт) і потім з’ясувати фундаментальні закономірності, яким він підкорюється. Як правило, ці закономірності сформульовані у виді природних (економічних, соціальних) законів, які описують зміну одних величин залежно від зміни інших. З математичної точки зору ці зміни можна описати у приростах величин і потім перейти до похідних і далі до диференціальних залежностей. Тобто багато природних законів сформульовано саме за допомогою диференціальних залежностей, у тому числі у виді диференціальних рівнянь.

При дослідженні природних процесів диференціальні рівняння описують його у деякій області простору, площини, відрізка, тобто у обмеженій області. Диференціальне рівняння має задовольнятись у всіх точках області, це є умовою правильного розв’язку для шуканої функції. Крім того, на межі області або її частині задаються крайові умови, тобто ця функція відома (або відома певна математична комбінація, куди входить ця функція). Таким чином крайова задача складається із диференціального рівняння та крайових умов.

Альтернативним є представлення описаної крайової задачі у варіаційній постановці, яка полягає у переформулюванні задачі. На основі диференціального рівняння та крайових умов формулюється задача пошуку функції, яка мінімізує (максимізує) певний функціонал. Для знаходження екстремуму функціоналу застосовується варіаційне числення, яке перетворює задачу знаходження функції на задачу знаходження екстремумів функціоналу.

Математична складність законів, що описують досліджуваний процес або явище, та складна геометрія досліджуваної області в загальному випадку не дозволяють використати аналітичні(точні) методи для знаходження шуканої функції. Ці методи дають розв’язки для дуже обмеженої кількості досліджуваних

задач.

Для розв’язання більшості вказаних задач використовують наближені прийоми та методи, які дають результат із певними похибками. До наближених аналітичних методів розв’язання крайових задач, які дають розв’язки у вигляді наближених математичних виразів, можна віднести метод Гальоркіна, Рітца, інтегральний метод найменших квадратів тощо. Ці методи дають можливість розширити коло розв’язуваних задач, але все ж мають певну межу їх застосування.

І зовсім універсальними з точки зору складності диференціальних співвідношень та геометрії конструкції є чисельні методи. Найбільш поширеними для розв’язання крайових задач є метод скінченних різниць (МСР), метод скінченних елементів (МСЕ), метод граничних елементів (МГЕ), метод колокацій тощо.

1 ОСОБЛИВОСТІ ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

1.1 Поняття про чисельні методи розв'язання крайових задач

Переважну більшість наближених методів розв'язання крайових задач можна розбити на дві великі групи: наближені аналітичні методи та чисельні методи.

Перша група методів дає розв'язок крайової задачі у вигляді аналітичного виразу, який представляє собою лінійну комбінацію базисних функцій. Як базисні функції використовуються многочлени невисоких ступенів, тригонометричні функції тощо. До цього класу методів можна віднести метод колокацій, метод Рітца, метод Гальоркіна, інтегральний метод найменших квадратів та інші.

Друга група методів базується на дискретизації математичних моделей задач, що розв'язуються. В процесі дискретизації суцільна система із нескінченною кількістю ступенів свободи представляється системою із скінченною кількістю степенів свободи. Тобто початкові рівняння крайової задачі, що описуються за допомогою неперервних функцій, спочатку замінюються їх дискретними аналогами, а потім, як правило, системою алгебраїчних рівнянь, невідомими змінними якої є сіткові значення шуканої функції. До таких методів можна віднести варіаційно-різницевий метод, метод скінченних різниць, метод скінченних елементів, метод граничних елементів та інші.

Для одного із таких методів, варіаційно-різницевого методу (ВРМ), характерна заміна неперервної варіаційної задачі дискретною варіаційною задачею із подальшим переходом до системи лінійних алгебраїчних рівнянь. У цьому методі похідні у варіаційній задачі замінюються відомі різницевими

формулами, а інтеграли – скінченними сумами із вузловими значеннями шуканої функції.

У іншому із цієї групи методів – МСР – неперервна крайова задача, представлена у виді системи диференціальних рівнянь, замінюється її дискретним аналогом із подальшим переходом до системи лінійних алгебраїчних рівнянь шляхом заміни похідних скінченно-різницевими формулами.

У МСЕ як і у інших методів передбачається поділ усієї області на підобласті малих але скінченних розмірів – скінченні елементи. Кожен скінченний елемент характеризується набором дискретних точок – вузлів, або вузлових точок – ці точки прив'язані до геометричної форми скінченного елементу і, як правило, є характерними точками (кутові точки, середини ребер тощо). У кожному скінченному елементі задаються апроксимуючі функції, які описують шукану функцію через її вузлові значення. А далі отримані апроксимації використовуються або у варіаційній постановці крайової задачі, або у диференціальному рівнянні (системі диференціальних рівнянь).

Традиційно у МСЕ як апроксимуючі функції використовуються многочлени невисокого ступеня (першого, другого, третього степеня). При чому при практичних розрахунках степені апроксимуючих поліномів можна знижувати за рахунок збільшення кількості скінченних елементів без втрати точності отриманих результатів розрахунку.

Для моделювання специфічних процесів і явищ, наприклад таких, як напружено-деформований стан навколо вершини тріщини можуть бути використані й інші типи апроксимуючих функцій, наприклад, раціональні функції.

Традиційна схема застосування МСЕ при розв'язанні класичних крайових задач механіки для певної області полягає у наступному:

- будується сітка розрахункових вузлів, які згруповані у скінченні елементи і які повністю покривають досліджувану область;
- встановлюється зв'язок між зусиллями та переміщеннями у вузлах скінченних елементів, ця процедура в методі скінченних елементів

називається побудовою матриці жорсткості або податливості скінченного елементу;

- формується розв'язувальна система лінійних алгебраїчних рівнянь, що описують кінематичну сумісність деформацій для досліджуваної області;
- розв'язується отримана система лінійних алгебраїчних рівнянь й знаходяться вузлові значення шуканої функції – значення вузлових переміщень;
- на основі обчислених значень вузлових переміщень за відомими законами отримують інші компоненти напружено-деформованого стану досліджуваної області.

Така модифікація методу носить назву МСЕ у формі методу переміщень. Якщо шуканими вузловими величинами виступають напруження, то метод називають МСЕ у формі методу сил.

Якщо ж для однієї частини області невідомими величинами є вузлові переміщення, а для іншої частини – вузлові напруження, то такий метод називається змішаним методом скінченних елементів.

1.2 Застосування методу скінченних елементів до розв'язання крайових задач

Універсальність методу скінченних елементів обумовлює його широке застосування до розв'язання різноманітних як теоретичних, так і прикладних задач. Від моменту виникнення методу скінченних елементів і до теперішнього часу сфера використання методу постійно розширюється на нові класи задач, метод адаптується до нових постановок, нових математичних моделей. Це можна побачити у останніх наукових публікаціях, які стосуються застосування МСЕ.

На основі МСЕ створено значну кількість систем автоматизованого

проєктування для розробки нових та вдосконалення існуючих виробів у машинобудівній, транспортній, електротехнічній, аерокосмічній, будівельній та багатьох інших галузях. Так, як приклад реалізації таких САПР, можна зазначити такі системи як Abaqus [3], ANSYS [7] та інші. У роботі [3] показано застосування методу скінченних елементів до розв'язання різних задач механіки композиційних матеріалів у системі автоматизованого проєктування Abaqus. У [7] викладено довідковий та навчальний матеріал щодо застосування програмних додатків ANSYS до розв'язання практичних задач.

Також досить часто у сучасних математичних додатках для обчислювальних пристроїв створюються окремі блоки для застосування методу скінченних елементів, можна навести, як приклад, систему обчислювального програмного забезпечення MATLAB [6, 7, 8, 13] або система комп'ютерної алгебри «Maxima» [12].

Монографія [6] присвячена опису математичного апарата та програмній реалізації у MATLAB методу скінченних елементів до розв'язання крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними.

У роботі [7] акцент зроблено на практичному застосуванні методу скінченних елементів, а саме на переході від математичних постановок до математичних моделей та розв'язання прикладних задач.

Робота [8] присвячена використанню MATLAB до розв'язання методом скінченних елементів задач механіки деформівного твердого тіла, теплопровідності, динаміки рідин та інші, розглядаються одно-, дво- та тривимірні випадки.

У монографії [13] описано використання MATLAB до застосування удосконаленої версії методу скінченних елементів – розширеного методу скінченних елементів – для розв'язання задач механіки руйнування, взаємодії рідини та твердого тіла та інші.

У роботі [12] показано використання системи комп'ютерної алгебри «Maxima» до розв'язання одновимірних конструктивних елементів типу плоских фермових та рамних конструкцій, що складаються з стрижнів, балок

Ейлера-Бернуллі, балок Тимошенка та інших методом скінченних елементів.

Застосування методу скінченних елементів до розв'язання різноманітних прикладних задач можна прослідити у таких роботах. Монографія [4] зосереджена на фундаментальних ідеях щодо побудови скінченних елементів та їх апроксимаційних властивостей. У монографії [5] застосування методу скінченних елементів показано до розв'язання задач механіки рідин, теплопровідності, механіки деформівного твердого тіла, розглянуті як варіаційні постановки задач, так і на основі формулювань Гальоркіна. Використання методу скінченних елементів до аналізу механічної поведінки композиційних матеріалів на мікрорівні описано у статті [9]. Застосування МСЕ до розв'язання деяких задач механіки неоднорідних матеріалів викладено у [10]. Загальні проблеми використання методу скінченних елементів до аналізу та прогнозування поведінки інженерних задач – опис області аналізу, генерацію сітки скінченних елементів та формування глобальної матриці жорсткості, моделювання крайових умов – наведено у роботі [11]. Монографія [14] присвячена застосуванню метода скінченних елементів до розв'язання прикладних задач лінійної та нелінійної теорії пружності, в'язкопружності, пластичності, в'язкопластичності, які виникають у машинобудуванні, будівництві, біомеханіці та інших сучасних галузях. У роботі [15] описано використання МСЕ до розв'язання нелінійних задач при дослідженні скінченних деформацій нестисливих, ізотропних та анізотропних матеріалів. Розв'язання методом скінченних елементів задач механіки деформівного твердого тіла, механіки рідин та теплопровідності, що виникають у будівництві, машинобудуванні та авіабудуванні, показано у монографії [16]. В роботі [18] показано застосування МСЕ термопружних, п'єзоелектричних задач для однорідних і неоднорідних матеріалів.

У всіх описаних роботах у більшому або меншому ступені піднімається питання вибору апроксимуючих функцій для скінченних елементів, це питання є одним із основних у МСЕ, від правильного вибору залежить швидкість збіжності до точних розв'язків та точність отриманих чисельних результатів.

Більш значну увагу цьому питанню приділено у чисельних наукових роботах, таких, наприклад, як [1, 2, 4, 13, 17].

У монографії [17] наведено загальні принципи підбору базисних функцій, у тому числі для двовимірних скінченних елементів, як апроксимуючі функції використано многочлени різних ступенів, першого, другого і т.д.

Монографія [1] присвячена викладенню основ напіваналітичного методу скінченних елементів, який дозволяє по одному із напрямків зробити гіпотезу про характер залежності шуканої функції. Це в свою чергу дозволяє зменшити розмірність обчислювальної задачі на одиницю, тобто по одному із напрямків маємо аналітичний розв'язок, а по двох інших – чисельні.

У роботі [2] для розв'язання просторових задач механіки використано модифікацію методу скінченних елементів – моментну схему скінченного елементу, яка полягає у розкладанні компонент вектору переміщень та тензору деформацій у ряд Тейлора із подальшим утриманням деяких членів розкладання за певними правилами. Така схема дозволяє підвищити швидкість збіжності результатів розрахунків, особливо для випадків згинних деформацій.

У монографії [13] розглянуто іншу модифікацію методу скінченних елементів – розширений метод скінченних елементів – у ньому апроксимуючі функції підбираються з огляду на особливості процесу, що моделюється, наприклад, при моделюванні задач механіки тріщин.

1.3 Висновки до розділу 1

У цьому розділі проаналізовані основні наближені методи розв'язання крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь, особлива увага приділена сітковим чисельним методам, в тому числі методу скінченних елементів.

Проаналізовано сфери застосування методу скінченних елементів, основні сучасні тенденції розвитку цього методу, виокремлено проблему вибору

апроксимуючих функцій з точки зору пришвидшення збіжності результатів розрахунків та покращення точності отриманих розв’язків.

2 ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗУВАЛЬНИХ РІВНЯНЬ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ПРИ ВИБОРІ РІЗНИХ АПРОКСИМУЮЧИХ ФУНКЦІЙ

2.1 Апроксимуючі функції у двовимірному методі скінченних елементів

Вибір апроксимуючих функцій у методі скінченних елементів є однією із основних задач, яка потім безпосередньо впливає на точність отриманих розв'язків. Ця процедура є неоднозначною і залежить від багатьох факторів, починаючи від передбачуваного виду шуканої функції і закінчуючи обчислювальними можливостями комп'ютерної техніки. Як правило, як апроксимуючі функції у методі скінченних елементів використовуються многочлени невеликих ступенів – лінійні, квадратичні кубічні. Можливо і використання інших типів апроксимуючих функцій.

Тобто неперервні шукані функції замінюються апроксимуючими функціями, які у межах скінченного елементу є неперервними (гладкими), а у межах усієї досліджуваної області будемо мати кусково-неперервну апроксимацію. А чисельний розв'язок у межах кожного скінченного елементу представляється за допомогою вказаних апроксимуючих функцій та невідомих вузлових параметрів.

Розглянемо як відбувається апроксимація шуканої функції для окремих типів скінченних елементів.

Нехай при розв'язанні двовимірної задачі шуканою функцією є функція $\varphi = \varphi(x, y)$. Функції, що задають апроксимацію невідомої функції всередині скінченного елементу, в методі скінченних елементів називаються функціями форми. До них висуваються певні вимоги, частина яких задовольняється якщо функції форми обираються так, щоб при підстановці у функцію форми *i*-го вузла відповідних координат *i*-го вузла вона дорівнювала одиниці, а при підстановці

координат усіх інших вузлів скінченного елементу функція форми дорівнювати нулю. Тоді апроксимація шуканої функції в середині скінченного елементу прийме вид:

$$\varphi^e(x,y) = [N]^e\{\Phi\}^e, \tag{2.1}$$

або

$$\varphi^e(x,y) = \sum_{i=1}^{n} N_i(x,y)\,\Phi_i, \tag{2.2}$$

де $[N]^e$ – матриця функцій форми скінченного елементу e,

$\{\Phi\}^e$ – вектор вузлових значень шуканої функції,

$N_i(x,y)$ – функція форми i-го вузла,

Φ_i – значення шуканої функції у i-му вузлу.

Одними із найбільш популярних апроксимуючих функцій у методі скінченних елементів є інтерполяційні многочлени Лагранжа, а скінченні елементі, що базуються на таких апроксимуючих функціях, називаються скінченними елементами Лагранжева сімейства. Опишемо деякі двовимірні скінченні елементи цього сімейства.

Розглянемо тепер чотиривузловий прямокутний скінченний елемент із лінійною апроксимацією шуканої функції (рис. 2.1).

Апроксимуюча функція у цьому випадку прийме вид:

$$\varphi^e(x,y) = N_1(x,y)\Phi_1 + N_2(x,y)\Phi_2 + N_3(x,y)\Phi_3 + N_4(x,y)\Phi_4, \tag{2.3}$$

де функції форми для скінченного елементу, показаного на рисунку 2.1, мають наступний вид:

$$N_1(x,y) = \frac{1}{4}(1 + xx_1)(1 + yy_1),$$

$$N_2(x,y) = \frac{1}{4}(1 + xx_2)(1 + yy_2),$$

$$N_3(x,y) = \frac{1}{4}(1 + xx_3)(1 + yy_3),$$

$$N_4(x,y) = \frac{1}{4}(1 + xx_4)(1 + yy_4),$$

тут x_i, y_i $(i = 1,2,3,4)$ – координати вузлів $(x_i = \pm 1, y = \pm 1)$, x, y – поточні координати точки в середині скінченного елементу. Вирази для $N_1(x,y), N_2(x,y), N_3(x,y), N_4(x,y)$ можуть бути об'єднані разом у загальну формулу:

$$N_i(x,y) = \frac{1}{4}(1 + xx_i)(1 + yy_i).\,(i = 1,2,3,4) \qquad (2.4)$$

Тобто для такого чотиривузлового прямокутного скінченного елементу маємо лінійний закон апроксимації переміщень в кожному із двох координатних напрямків.

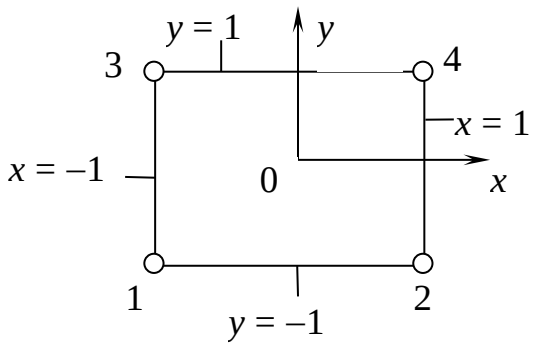


Рисунок 2.1 – Чотиривузловий прямокутний скінченний елемент

Для наочності подивимось як буде виглядати, наприклад, функція форми $N_1(x,y)$ (рис. 2.2).

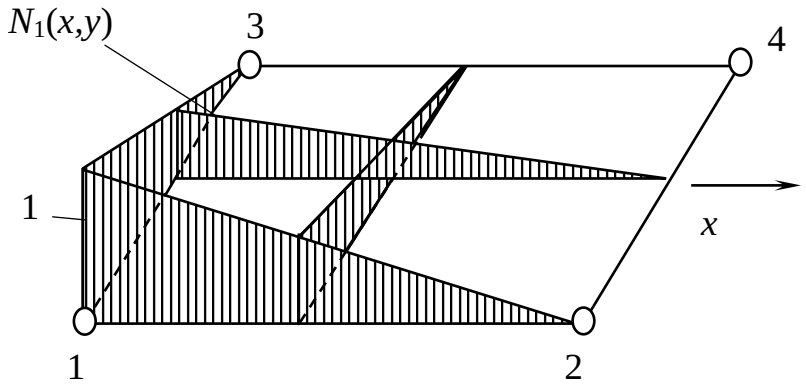


Рисунок 2.2 – Геометрична інтерпретація функції форми $N_1(x, y)$ чотиривузлового прямокутного скінченного елементу

При розв’язанні реальних задач вказані координатні напрямки можуть бути не рівноправні, наприклад, в напрямку одного з них шукана функція змінюється повільно, а в іншому – швидко змінюється.

В таких випадках для економії обчислювальних ресурсів та підвищення точності розрахунків доцільно підвищити кількість вузлів (а, відповідно, і степінь апроксимуючих функцій) у одному із координатних напрямків.

Якщо взяти квадратичну апроксимацію в напрямку осі x, тобто додати ще один вузол у цьому напрямку, отримаємо шестивузловий прямокутний скінченний елемент (рис. 2.3).

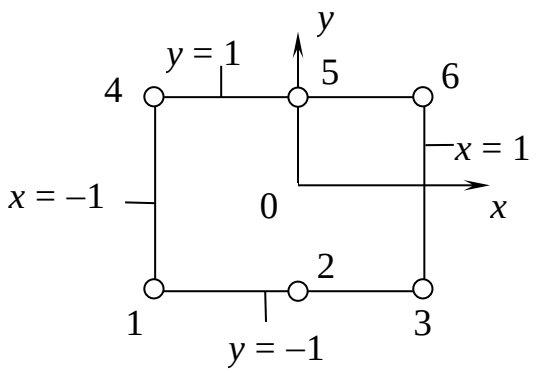


Рисунок 2.3 – Шестивузловий прямокутний скінченний елемент

Для такого скінченного елементу апроксимуюча функція прийме такий вид:

$$\varphi^e(x,y) = N_1(x,y)\Phi_1 + N_2(x,y)\Phi_2 + N_3(x,y)\Phi_3 + \\ + N_4(x,y)\Phi_4 + N_5(x,y)\Phi_5 + N_6(x,y)\Phi_6. \quad (2.5)$$

А функції форми можна представити такими виразами:

$$N_1(x,y) = \frac{1}{4}(1-y)(x-1)x;$$
$$N_2(x,y) = \frac{1}{2}(1-y)(1-x^2);$$
$$N_3(x,y) = \frac{1}{4}(1-y)(1+x)x;$$
$$N_4(x,y) = \frac{1}{4}(1+y)(x-1)x;$$
$$N_5(x,y) = \frac{1}{2}(1+y)(1-x^2);$$
$$N_6(x,y) = \frac{1}{4}(1+y)(1+x)x. \quad (2.6)$$

Таким саме чином, можна збільшити кількість вузлів в іншому координатному напрямку, тобто по осі y. Можна збільшити кількість вузлів в обох координатних напрямках, тобто по осях x та y. У цьому випадку будемо мати дев'ятивузловий прямокутний скінченний елемент (рис. 2.4). Для такого скінченного елементу будемо мати квадратичну апроксимацію переміщень у обох координатних напрямках, і по осі x, і по осі y.

Чим більше вузлів у скінченному елементі, тим більше обчислювальна складність математичних перетворень при визначенні функцій форми такого елементу. Тому опишемо векторно-матричну процедуру отримання функцій форми.

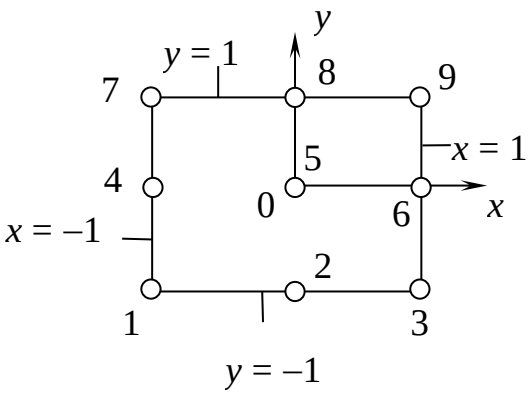


Рисунок 2.4 – Дев’ятивузловий прямокутний скінченний елемент

Тоді у самому загальному випадку апроксимацію шуканої функції для дев’ятивузлового прямокутного скінченного елементу, зображеного на рисунку 2.4, можна записати у вигляді комбінації степеневих функцій двох змінних таким чином:

$$\varphi^e(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy + \alpha_5 x^2 + \alpha_6 y^2 + \\ + \alpha_7 x^2 y + \alpha_8 x y^2 + \alpha_9 x^2 y^2, \qquad (2.7)$$

або

$$\varphi^e(x,y) = [M]^e \{\mathrm{A}\}^e, \qquad (2.8)$$

де вектор степеневих функцій має вид:

$$[M]^e = [1, x, y, xy, x^2, y^2, x^2 y, x y^2, x^2 y^2], \qquad (2.9)$$

$\{\mathrm{A}\}^e$ – вектор невідомих сталих α_i $(i = 1, \dots, 9)$.

Підставляючи послідовно у праві частини співвідношення (2.7) координати вузлів скінченного елементу та прирівнюючи отримані вирази до

відповідних вузлових значень шуканої функції Φ_i, отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення невідомих сталих α_i $(i = 1, \dots, 9)$, тобто матимемо:

$$\begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \\ \Phi_6 \\ \Phi_7 \\ \Phi_8 \\ \Phi_9 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1y_1 & x_1^2 & y_1^2 & x_1^2y_1 & x_1y_1^2 & x_1^2y_1^2 \\ 1 & x_1 & y_1 & x_1y_1 & x_1^2 & y_1^2 & x_1^2y_1 & x_1y_1^2 & x_1^2y_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & x_1 & y_1 & x_1y_1 & x_1^2 & y_1^2 & x_1^2y_1 & x_1y_1^2 & x_1^2y_1^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \\ \alpha_9 \end{Bmatrix}, \quad (2.10)$$

або

$$\{\Phi\}^e = [H]\{\mathrm{A}\}^e, \quad (2.11)$$

де $\{\Phi\}^e$ – вектор вузлових значень шуканої функції,

$[H]$ – матриця вузлових координатних функцій.

Розв’язуючі систему алгебраїчних рівнянь (2.11) методом зворотної матриці, знаходимо вектор невідомих сталих:

$$\{\mathrm{A}\}^e = [H]^{-1}\{\Phi\}^e. \quad (2.12)$$

Тоді співвідношення (2.8) з урахуванням (2.12) можна записати в такому виді:

$$\varphi^e(x, y) = [M]^e[H]^{-1}\{\Phi\}^e. \quad (2.13)$$

Аналізуючи вираз (2.13), можна з’ясувати, що добуток двох перших матриць у правій частині представляють собою вектор функцій форми $[N]$:

$$\varphi^e(x,y) = [N]\{\Phi\}^e, \tag{2.14}$$

тобто вектор функцій форми скінченного елементу має вид:

$$[N] = [M]^e[H]^{-1}. \tag{2.15}$$

Знаходження вектору функцій форми методом зворотної матриці може мати певні проблеми, пов’язані із неможливістю отримати зворотну матрицю для заданої.

Для дев’ятивузлового прямокутного скінченного елементу, представленого на рисунку 2.4, функції форми можна записати у наступному виді:

$$N_1(x,y) = \frac{1}{4}xy(y-1)(x-1);$$
$$N_2(x,y) = \frac{1}{4}y(y-1)(1-x^2);$$
$$N_3(x,y) = \frac{1}{4}xy(y-1)(x+1);$$
$$N_4(x,y) = \frac{1}{4}x(1-y^2)(x-1);$$
$$N_5(x,y) = \frac{1}{4}y(1-y^2)(1-x^2);$$
$$N_6(x,y) = \frac{1}{4}x(1-y^2)(x+1);$$
$$N_7(x,y) = \frac{1}{4}xy(y+1)(x-1);$$
$$N_8(x,y) = \frac{1}{4}y(y+1)(1-x^2);$$
$$N_9(x,y) = \frac{1}{4}xy(y+1)(x+1). \tag{2.16}$$

Окрім многочленів Лагранжа, як апроксимуючі функції можуть бути використані й інші види многочленів, такі як многочлени Міхліна, Якобі, Чебишева, Лежандра Ньютона, Ерміта, Гауса, Стірлінга, Бесселя та інші. При моделюванні деяких процесів, наприклад, процесів, що носять періодичний характер, доцільно застосовувати періодичні функції, наприклад, тригонометричні функції.

При розв'язанні прикладних задач найбільш поширеними є скінченні елементи Лагранжева сімейства, до цього сімейства відносяться усі раніше розглянуті у цьому розділі двовимірні прямокутні скінченні елементи, зображені на рисунках 2.1, 2.3 та 2.4.

Але при збільшенні кількості вузлів застосування скінченних елементів Лагранжева сімейства стримується великою кількістю внутрішніх вузлів (зовнішні вузли знаходяться на межі скінченного елементу) та незадовільною апроксимацією шуканою функції многочленами високих порядків.

Тому досить популярними також є скінченні елементи Серендипова сімейства, які можна отримати видаленням внутрішніх вузлів у відповідних скінченних елементах Лагранжева сімейства і відповідним корегуванням апроксимуючих функцій.

Зрозуміло, що, наприклад, для скінченних елементів, зображених на рис. 2.1 та 2.3 скінченні елементи Лагранжева та Серендипова сімейства будуть співпадати, тому що в них немає внутрішніх вузлів. А із дев'ятивузлового прямокутного елемента Лагранжева сімейства, зображеного на рис. 2.4, скінчений елемент Серендипова сімейства можна створити видаленням внутрішнього вузла 5 і отримати восьмивузловий прямокутний скінченний елемент (рис. 2.5).

Така модифікація скінченних елементів на точність розрахунків впливає незначним чином, а обчислювальні ресурси економляться значною мірою, особливо у багатовимірних випадках.

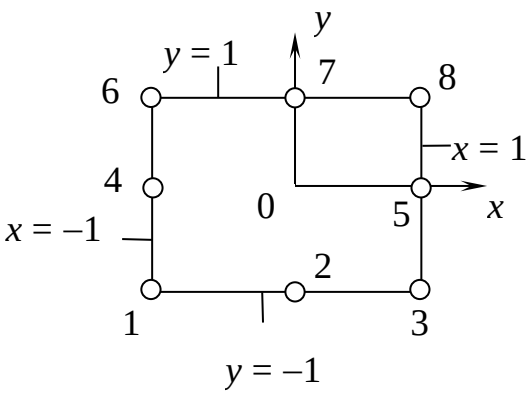


Рисунок 2.5 – Восьмивузловий прямокутний скінченний елемент Серендипова сімейства

2.2 Процедура побудови глобальної матриці жорсткості та формування системи розв’язувальних рівнянь

Для отримання глобальної матриці жорсткості досліджуваної області й формування системи розв’язувальних рівнянь спочатку область дискретизується на певну кількість скінченних елементів заданої форми. А потім послідовно для кожного скінченного елементу будується локальна матриця жорсткості. Після цього шляхом підсумовування за певними правилами коефіцієнтів усіх локальних матриць жорсткості визначається глобальна матриця жорсткості усієї області. А далі формується система розв’язувальних рівнянь методу скінченних елементів відносно невідомих вузлових значень шуканої функції, при цьому враховуються крайові умови, які дають змогу врахувати вже відомі вузлові значення та сформувати праву частину системи.

Основною операцією методу скінченних елементів є побудова матриці жорсткості окремого скінченного елементу. Тут існує декілька підходів.

Один із них полягає в отриманні матриці жорсткості кожного скінченного елементу у локальній, пов’язаній із скінченним елементом, системі координат. У цій локальній системі, як правило, кожен СЕ має стандартну форму і розміри

зручні для математичних перетворень (наприклад, розміри по координатним осям від -1 до 1, як показано у підрозділі 2.1, що зручно для чисельного інтегрування за допомогою квадратурних формул Гауса). А потім шляхом перетворення систем локальних координат до глобальної системи координат і підсумовування коефіцієнтів матриць жорсткості елементів отримуємо загальну матрицю жорсткості досліджуваної області (глобальну матрицю жорсткості).

Інший підхід полягає утому, що матриці жорсткості окремих скінченних елементів відразу визначаються у глобальній системі координат і шляхом підсумовування за певними правилами отримуємо загальну матрицю жорсткості.

У обох випадках загальна послідовність операцій однакова, тому розглянемо її на прикладі розв'язання двовимірних крайових задач лінійної теорії пружності.

Розглянемо процес виводу системи розв'язувальних рівнянь МСЕ у матричній формі. Центральною процедурою у МСЕ є побудова матриці жорсткості окремого скінченного елементу e, для цього задаються апроксимуючі функції для шуканої функції, які дають можливість знайти значення шуканої функції $\{q\}^e$ для будь-якої точки в середині скінченного елементу за значеннями функції $\{U\}^e$ у вузлових точках СЕ. Для двовимірного випадку будемо мати:

$$\{q\}^e = [N]^e\{U\}^e, \tag{2.17}$$

де

$$\{q\}^e = \{u(x,y), v(x,y)\}^T, \tag{2.18}$$

$$\{U\}^e = \{U_1, V_1, U_2, V_2, \dots, U_m, V_m\}, \tag{2.19}$$

де m – кількість вузлів скінченного елементу;

$u(x,y), v(x,y)$ – компоненти функції переміщень, відповідно, по осі x та по осі y;

U_i, V_i $(i = 1, \dots, m)$ – вузлові значення функції переміщень, відповідно, по осі x та по осі y;

$[N]^e$ – матриця апроксимуючих функцій (функцій форми), яка формується залежно від форми скінченного елементу розмірності задачі та кількості вузлових точок скінченного елементу.

Деформації $\{\varepsilon\}$ всередині скінченного елементу можна визначити через функцію переміщень точок скінченного елементу так:

$$\{\varepsilon\}^e = [D]\{q\}^e, \tag{2.20}$$

де $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}\}^T$ – компоненти вектору деформацій; $[D]$ – матриця диференціювання.

Із урахуванням виразу (2.17) співвідношення (2.20), прийме наступний вигляд:

$$\{\varepsilon\}^e = [D][N]^e\{U\}^e = [B]^e\{U\}^e, \tag{2.21}$$

де

$$[B]^e = [D][N]^e. \tag{2.22}$$

Матриця $[B]^e$ представляє собою результат дії диференціального оператора на матрицю функцій форми $[N]$.

Зв’язок між пружними деформаціями та пружними напруженнями у разі відсутності початкових напружень та деформацій визначається законом Гука, який у зворотній формі для окремого скінченного елементу можна записати у наступному вигляді:

$$\{\sigma\}^e = [C]\{\varepsilon\}^e, \tag{2.23}$$

де $\{\sigma\} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}\}^T$ – вектор напружень;

$[C]$ – матриця пружних констант, яка для двовимірних задач може описувати або плоскодеформований стан:

$$[C] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix},$$

або плосконапружений стан:

$$[C] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix},$$

У задачах статики, як правило, об'ємні сили за величиною на декілька порядків менше, ніж зовнішні розподілені сили, тому при розв'язанні крайових задач теорії пружності об'ємними силами нехтують.

Зовнішні поверхневі сили діють лише на ті скінченні елементи, які знаходяться на межі досліджуваної області, а внутрішні елементи позбавлені дії зовнішніх навантажень, отже вектор поверхневих навантажень можна задати таким чином:

$$\{P\}^e = \begin{Bmatrix} X(x,y) \\ Y(x,y) \end{Bmatrix}^e,$$

де $X(x,y)$, $Y(x,y)$ – складові розподілених сил, що діють на скінченний елемент.

На основі варіаційних принципів у методі скінченних елементів визначаємо умови рівноваги між діючими зовнішніми навантаженнями та внутрішніми силами – напруженнями, що виникають в середині досліджуваної області.

Використаємо варіаційний принцип Лагранжа, згідно з яким досліджуються можливі віртуальні переміщення із подальшим прирівнюванням робіт зовнішніх та внутрішніх сил, обумовлених цими віртуальними переміщеннями. Такий підхід забезпечую виконання умов рівноваги для скінченних елементів.

Математична формалізація цього принципу полягає у дослідженні варіації повної потенціальної енергії досліджуваної області, яка складається із потенціальних енергій окремих скінченних елементів. Тому розглянемо повну потенціальну енергію скінченного елементу Π^e:

$$\Pi^e = W^e - A^e,$$

де W^e – робота внутрішніх сил (енергія пружної деформації),

A^e – робота зовнішніх сил.

Робота внутрішніх сил визначається співвідношенням:

$$W^e = \frac{1}{2}\iiint_V (\{\varepsilon\}^e)^T \{\sigma\}^e dV, \tag{2.24}$$

де V – об’єм скінченного елементу.

Робота зовнішніх сил описується виразом:

$$A^e = \iint_S (\{q\}^e)^T \{P\}^e dS, \tag{2.25}$$

де S – площа поверхні скінченного елементу, де прикладені зовнішні розподілені сили.

З урахуванням співвідношень (2.24) та (2.25) можемо для повної потенціальної енергії скінченного елементу Π^e записати:

$$\Pi^e = \frac{1}{2}\iiint\limits_V (\{\varepsilon\}^e)^T\{\sigma\}^e dV - \iint\limits_S (\{q\}^e)^T\{P\}^e dS. \quad (2.26)$$

Згідно варіаційному принципу Лагранжа із усіх можливих варіацій переміщень, а відповідно, і деформацій та напружень, що задовольняють крайові умови, насправді має місце такий стан скінченного елементу, для якого варіація повної потенціальної енергії приймає мінімальне значення, тобто

$$\delta\Pi^e = \delta W^e - \delta A^e = 0,$$

або

$$\delta\Pi^e = \iiint\limits_V \delta(\{\varepsilon\}^e)^T\{\sigma\}^e dV - \iint\limits_S (\{q\}^e)^T\{P\}^e dS. \quad (2.27)$$

Враховуючи у останньому виразі (2.27) скінченноелементні апроксимації (2.17), (2.21) та (2.23), будемо мати

$$\iiint\limits_V \delta([B]^e\{U\}^e)^T([C][B]^e\{U\}^e)dV - \iint\limits_S \delta([N]^e\{U\}^e)^T\{P\}^e dS = 0, \quad (2.28)$$

або

$$\iiint\limits_V \delta(\{U\}^e)^T([B]^e)^T[C][B]^e\{U\}^e dV - \iint\limits_S \delta(\{U\}^e)^T([N]^e)^T\{P\}^e dS = 0. \quad (2.29)$$

Враховуючи, що вузлові значення переміщень є сталими величинами винесемо їх за знак інтегралу, будемо мати:

$$\delta(\{U\}^e)^T\left[\iiint\limits_V([B]^e)^T[C][B]^e dV\cdot\{U\}^e-\iint\limits_S([N]^e)^T\{P\}^e dS\right]=0. \quad (2.30)$$

Беручі до уваги, що варіація вузлових переміщень не може дорівнювати нулю, то у рівнянні (2.30) має буди рівним нулю вираз у дужках:

$$\iiint\limits_V([B]^e)^T[C][B]^e dV\cdot\{U\}^e-\iint\limits_S([N]^e)^T\{P\}^e dS=0. \quad (2.31)$$

Введемо позначення. Перший інтеграл представляє собою матрицю жорсткості скінченного елементу:

$$[K]^e=\iiint\limits_V([B]^e)^T[C][B]^e dV. \quad (2.32)$$

Другий інтеграл у рівнянні (2.31) є еквівалентним вектором вузлового навантаження:

$$\{R\}^e=\iint\limits_S([N]^e)^T\{P\}^e dS. \quad (2.33)$$

Тепер рівняння (2.31) із урахуванням (2.32) та (2.33) можна переписати наступним чином:

$$[K]^e\{U\}^e=\{R\}^e. \quad (2.34)$$

Для побудови системи розв’язувальних рівнянь для всієї досліджуваної області необхідно просумувати для усіх скінченних елементів за певними правилами матриці жорсткості, вектор вузлових навантажень та сформувати

глобальний вектор невідомих вузлових переміщень.

Тоді для глобальної матриці жорсткості $[K]$ будемо мати:

$$[K] = \sum_{e=1}^{L} [K]^e, \tag{2.35}$$

де L – кількість скінченних елементів.

Для глобального вектору вузлових навантажень $\{R\}$ будемо мати:

$$\{R\} = \sum_{e=1}^{L} \{R\}^e. \tag{2.36}$$

Тоді система розв'язувальних рівнянь методу скінченних елементів для досліджуваної області буде мати такий вигляд:

$$[K]\{U\} = \{R\}, \tag{2.37}$$

де $\{U\}$ – глобальний вектор вузлових значень шуканих переміщень.

Отримана система розв'язувальних рівнянь (2.37) представляє собою систему лінійних алгебраїчних рівнянь і може бути розв'язана будь яким чисельним методом, що добре себе зарекомендував при розв'язанні лінійних систем великої розмірності.

2.3 Висновок до розділу 2

У цьому розділі одним із основних питань було питання знаходження апроксимуючих функцій для скінченних елементів, а саме вибір виду функцій, вимоги до функцій тощо. Для двовимірних прямокутних скінченних елементів із

різною апроксимацією по координатним напрямках представлені співвідношення для функції форми.

Другим питанням, розглянутим у цьому розділі, була процедура отримання глобальної матриці жорсткості досліджуваної області на основі матриць жорсткості окремих скінченних елементів за допомогою варіаційного принципу Лагранжа і подальшого отримання системи розв’язувальних рівнянь для крайової задачі лінійної теорії пружності.

3 ЗАСТОСУВАННЯ ДВОВИМІРНОГО МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОЇ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

Описана у другому розділі процедура виводу системи розв'язувальних рівнянь, що включає побудову матриць жорсткості окремих скінченних елементів, формування глобальної матриці жорсткості та глобального вектору зовнішніх навантажень, реалізована у виді пакету прикладних програм, за допомогою якого розв'язана низка задач, досліджено швидкість збіжності чисельних результатів. Реалізовано двовимірні скінченні елементи з різними апроксимуючими функціями, а саме чотири-, шести- та дев'ятивузловий елементи.

3.1 Розв'язання задачі теорії пружності про згин консольної балки

Розглянемо консольну балку, защемлену з одного краю, із зосередженою силую, що діє на іншому краю (рис. 3.1)

Розміри консольної балки: довжина $L = 10$ м, висота $H = 2$ м. Зосереджена сила, що діє на кінці балки, дорівнює $P = 5 \cdot 10^7$ Н, модуль пружності матеріалу балки $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0{,}3$.

Прогін середньої лінії на кінці балки визначається формулою

$$v(L) = \frac{4PL^3}{EH^3} = 0{,}125\ м.$$

Розрахункова схема консольної балки представлена на рисунку 3.1. Розрахунок проводився для умов плоскодеформованого стану.

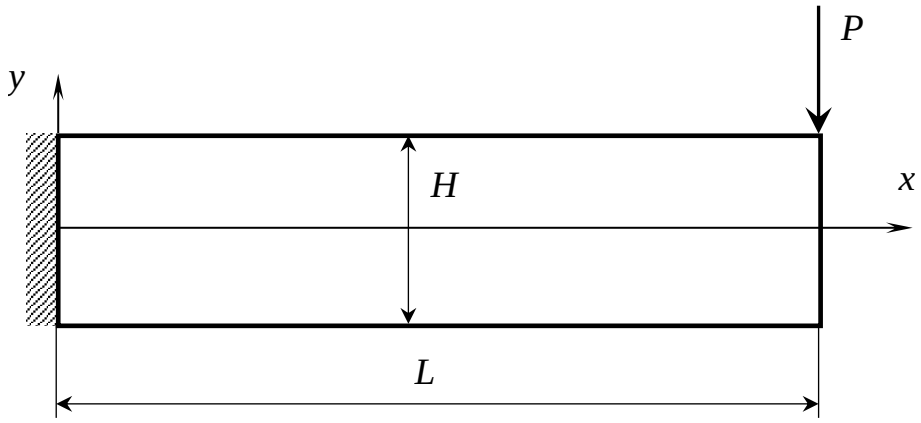
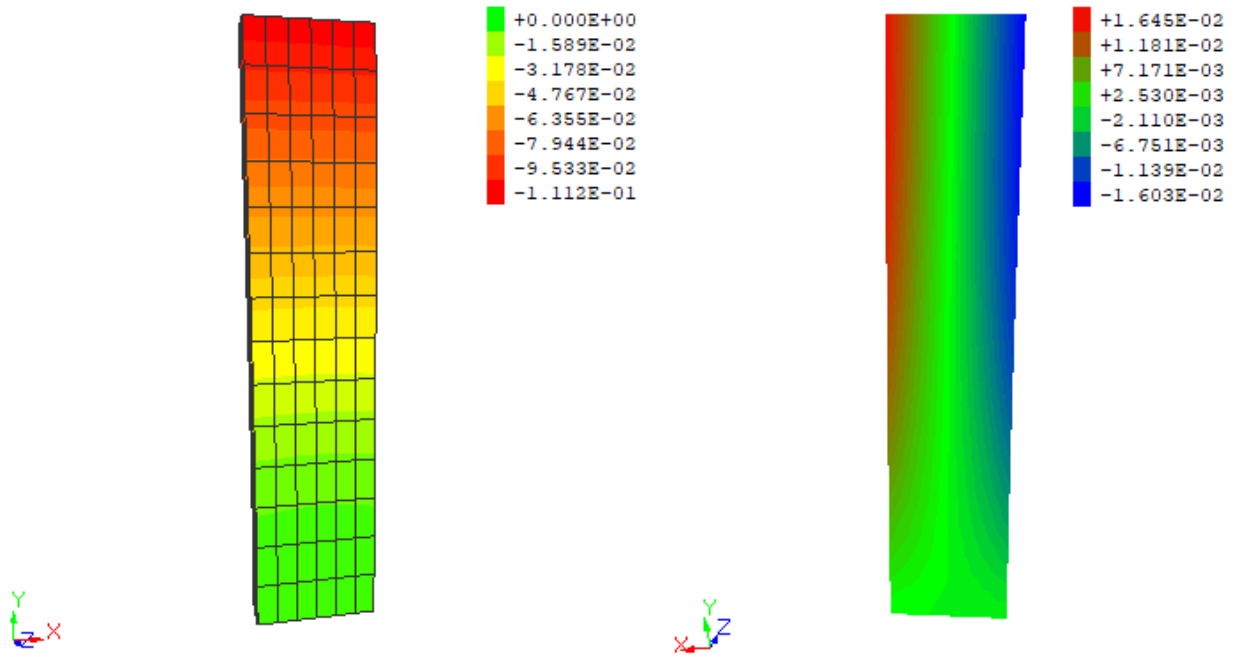


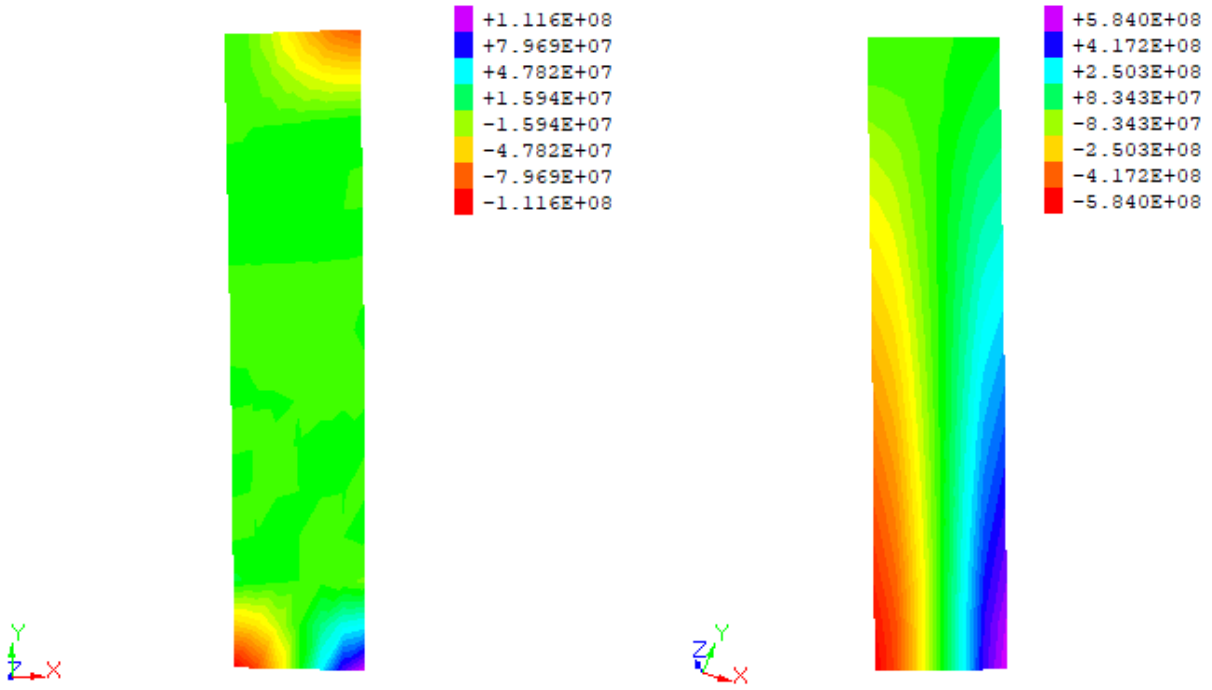
Рисунок 3.1 – Розрахункова схема для консольної балки

Розподіл компонентів напружено-деформованого стану у консольній балці при розрахунку чотиривузловими елементами (сітка 7×15) показаний на рисунках 3.2 – 3.4.



а) б)

Рисунок 3.2 – Розподіл переміщень (а – v, б – u)



а) б)

Рисунок 3.3 – Розподіл нормальних напружень (а – σ_{yy}, б – σ_{xx})

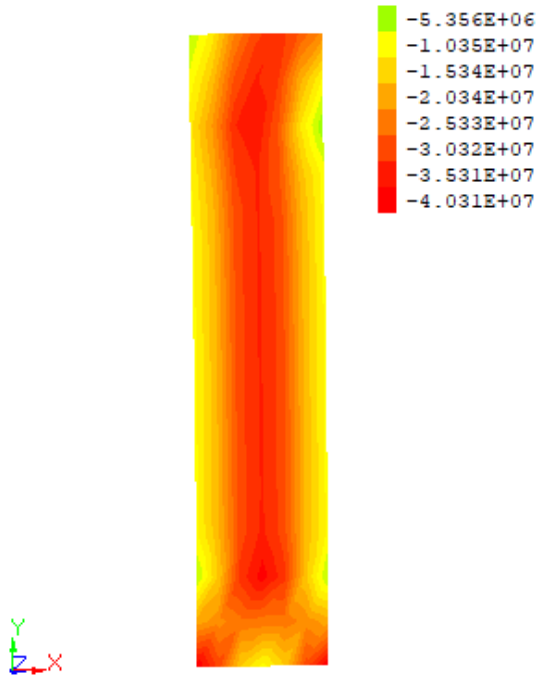
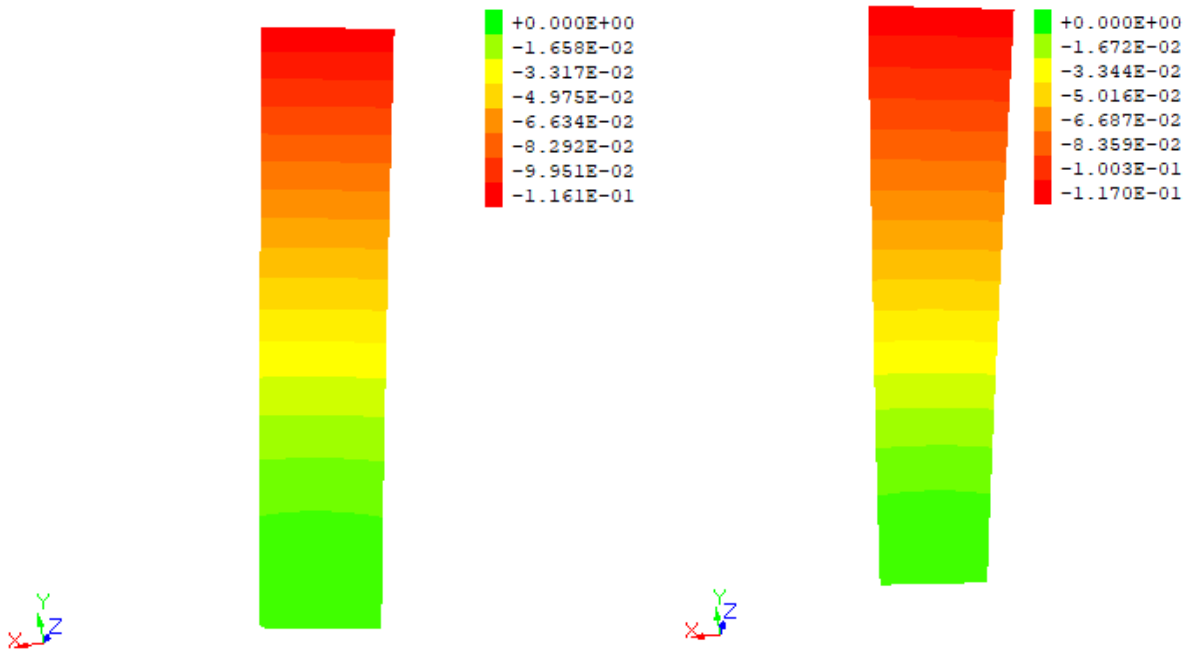


Рисунок 3.4 – Розподіл дотичних напружень σ_{xy}

На рисунку 3.5 показаний розподіл переміщень v у консольній балці при розрахунку шести- та дев'ятивузловими скінченними елементами (сітка 7×15).



а) б)

Рисунок 3.5 – Розподіл переміщень v:

а – шестивузловий скінченний елемент,

б – дев'ятивузловий скінченний елемент

Результати розрахунку для різних сіток розбиття на скінченні елементи представлені у таблиці 3.1.

Таблиця 3.1 – Результати розрахунку консольної балки

Сітка розбиття	Чотири-вузловий СЕ	ε, %	Шести-вузловий СЕ	ε, %	Дев'яти-вузловий СЕ	ε, %
3×9	0,0968	-22,56	0,1090	-12,80	0,1147	-8,24
5×11	0,1049	-16,08	0,1136	-9,12	0,1156	-7,52
7×13	0,1085	-13,20	0,1148	-8,16	0,1159	-7,28
7×15	0,1103	-11,76	0,1150	-8,00	0,1160	-7,20

Похибка обраховується за наступною формулою:

$$\varepsilon = \frac{v_P - v_T}{v_T} 100\ \%.$$

де v_P – розрахункове значення,

v_T – аналітичне значення.

Результати розрахунку (табл. 3.1) показують монотонну збіжність до точного розв'язку для всіх типів скінченних елементів, причому найнижча точність при розрахунку чотиривузловими елементами, а найвища – при розрахунку дев'ятивузловими.

3.2 Скінченно-елементний розв'язок крайової задачі для прямокутної пластини

Розглянемо квадратну пластину, защемлену з одного краю, та навантажену розподіленою стискаючою силою на іншому краю. Розрахункова схема показана на рисунку 3.6.

Розміри прямокутної пластини: довжина $A = 2$ м, ширина $B = 2$ м. Розподілене навантаження дорівнює $Q = 10^5$ Па, модуль пружності матеріалу пластини $E = 2 \cdot 10^6$ Па, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0{,}48$.

Розподіл компонентів напружено-деформованого стану у квадратній пластині при розрахунку чотиривузловими елементами (сітка 11×11) показаний на рисунках 3.7 – 3.9.

На рисунках 3.10 та 3.11 показаний розподіл переміщень v при розрахунку шести- та дев'ятивузловими скінченними елементами (сітка 11×11).

Результати розрахунку для різних сіток розбиття на скінченні елементи представлені у таблиці 3.2.

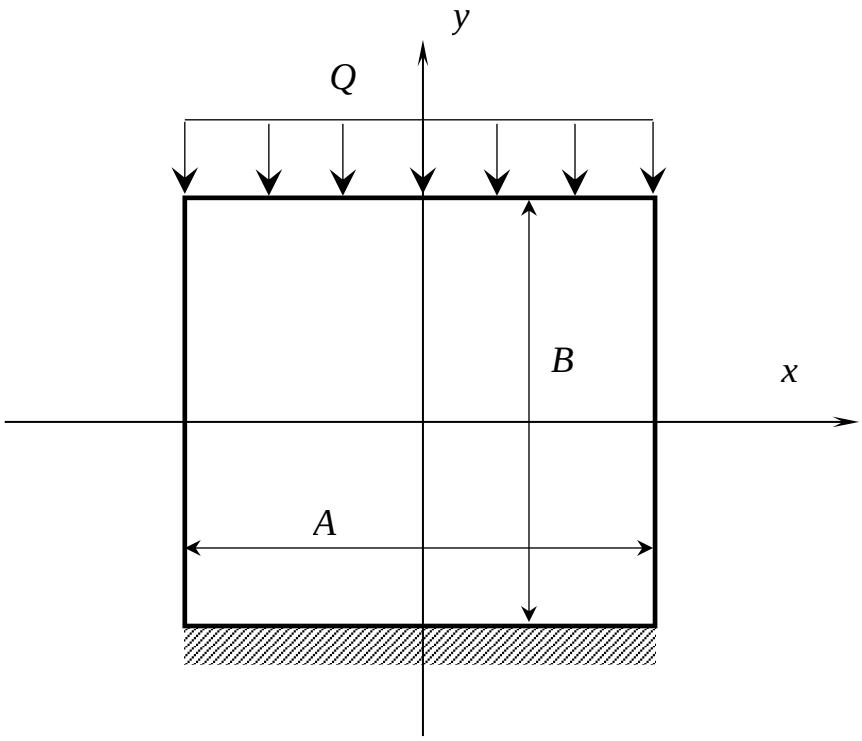


Рисунок 3.6 – Розрахункова схема для квадратної пластини

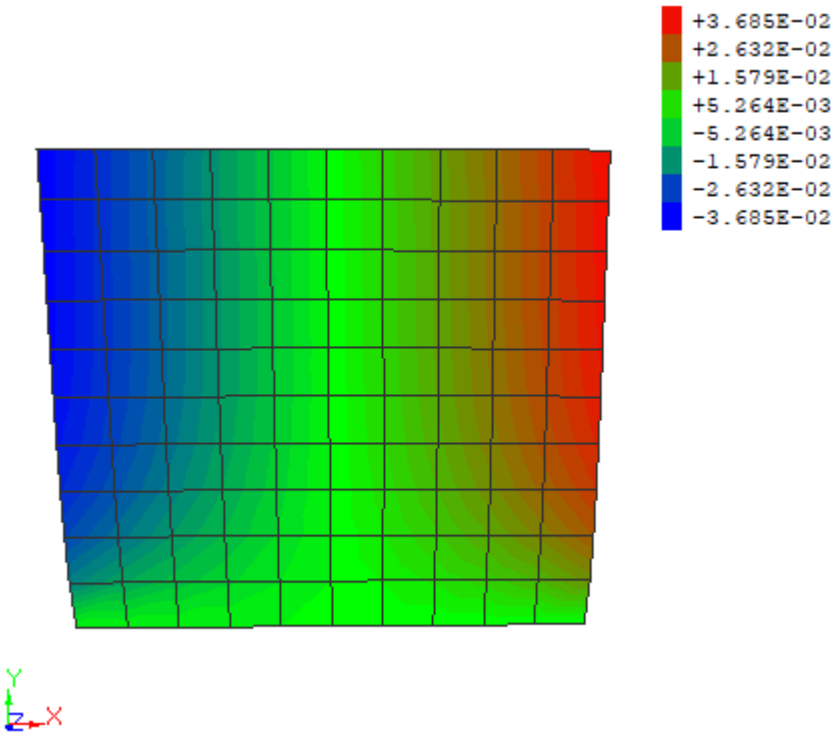


Рисунок 3.7 – Розподіл переміщень u

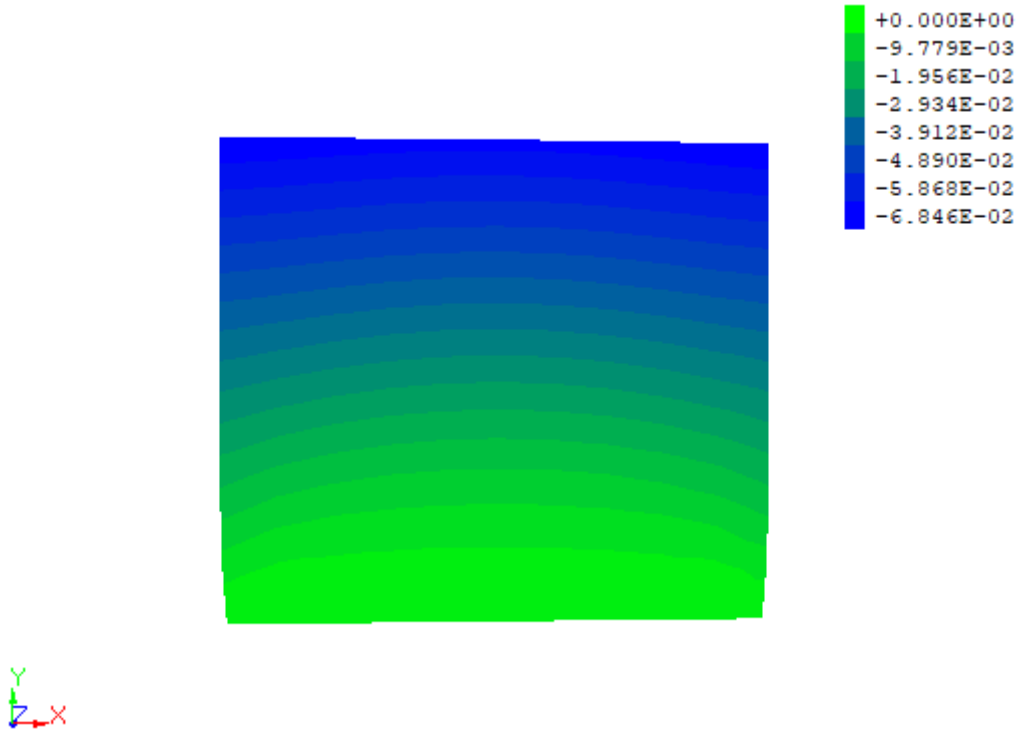


Рисунок 3.8 – Розподіл переміщень v

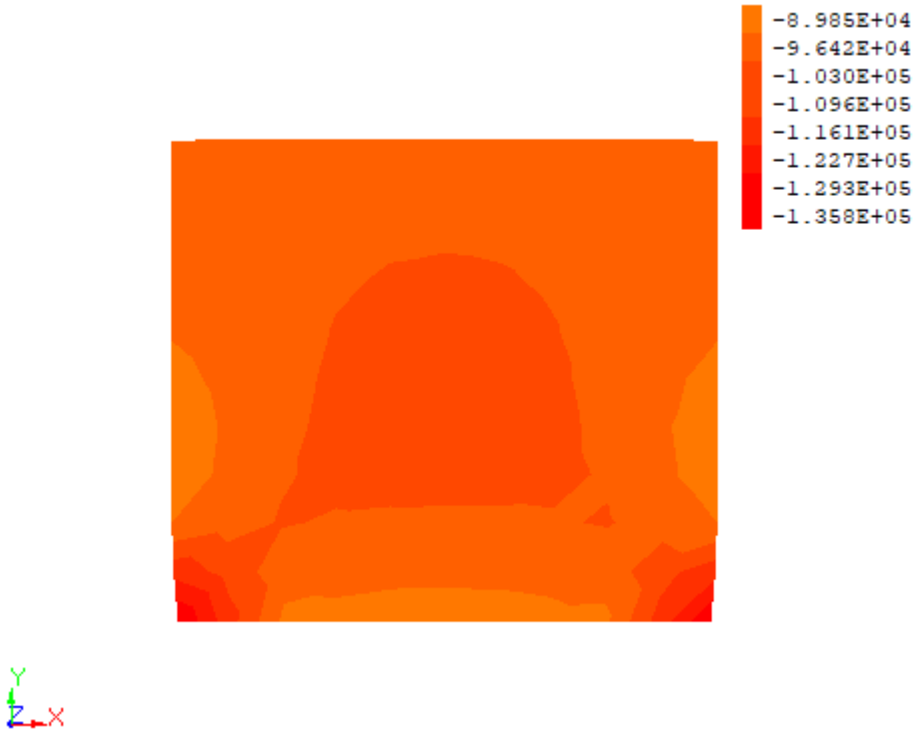


Рисунок 3.9 – Розподіл нормальних напружень σ_{yy}

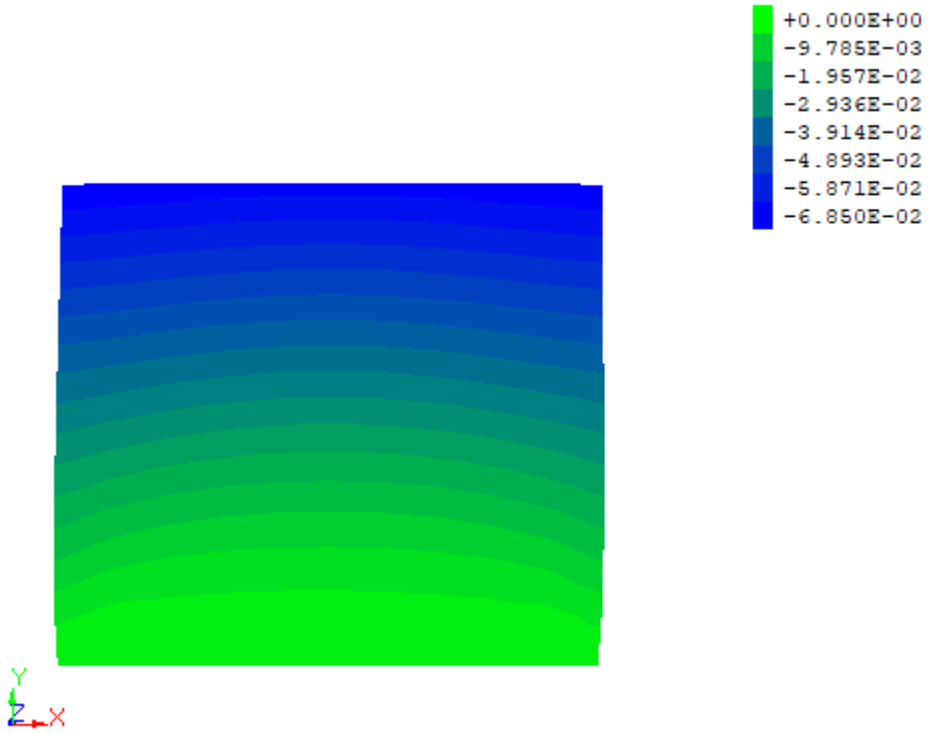


Рисунок 3.10 – Розподіл переміщень v (шестивузловий СЕ)

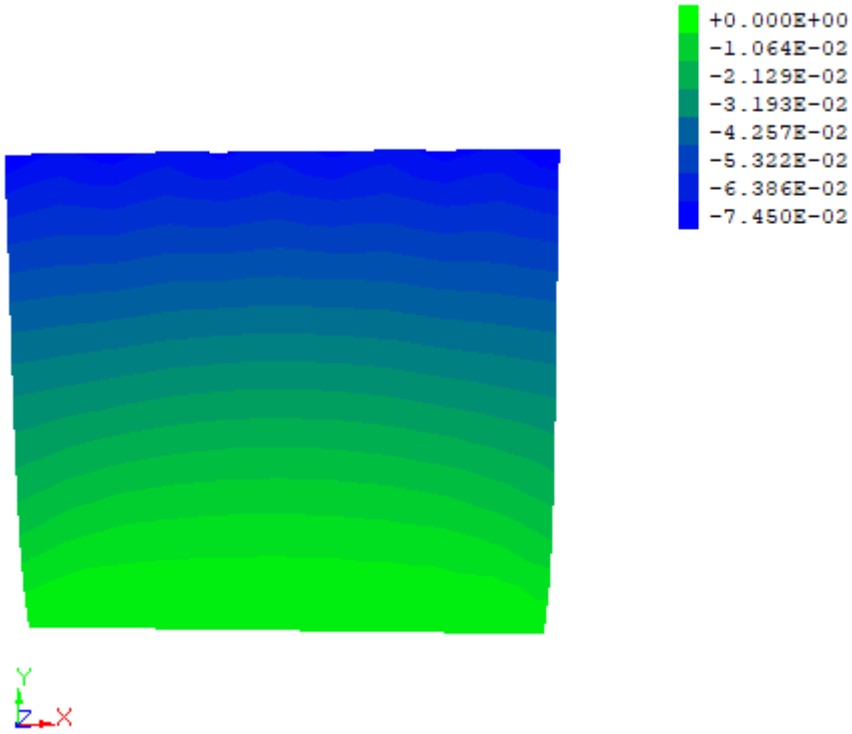


Рисунок 3.11 – Розподіл переміщень v (дев’ятивузловий СЕ)

Таблиця 3.2 – Результати розрахунку квадратної плити

Сітка розбиття	Максимальна осадка, м		
	Чотиривузловий СЕ	Шестивузловий СЕ	Дев’ятивузловий СЕ
5×5	0,0636	0,0638	0,0752
7×7	0,0666	0,0667	0,0749
9×9	0,0678	0,0679	0,0746
11×11	0,0685	0,0685	0,0745

Для всіх скінченних елементів відзначаємо наявність монотонної збіжності, хоча для чотири- та шестивузлових елементів вона спостерігається знизу, а для дев’ятивузлових – зверху.

3.3 Висновки до розділу 3

У цьому розділі показано розв’язання двох двовимірних крайових задач теорії пружності за допомогою методу скінченних елементів із використанням чотири-, шести- та дев’ятивузлових скінченних елементів.

Показано збіжність чисельних результатів розрахунків для зазначених типів двовимірних скінченних елементів при різних сітках розбиття досліджуваних областей.

ВИСНОВКИ

Результатом виконання кваліфікаційної роботи є дослідження доцільності використання двовимірних скінченних елементів Лагранжева сімейства із різними апроксимуючими функціями до розв’язання крайових задач лінійної теорії пружності.

В результаті проведеного дослідження були вивчені наступні питання та розв’язанні такі задачі:

1. В процесі ознайомлення із сучасним станом справ, щодо використання методу скінченних елементів при розв’язанні прикладних задач, з’ясовано основні напрямки поліпшення якості апроксимуючих функцій та нові сфери застосування цього методу.

2. Розглянуто чотири-, шести- та дев’ятивузловий прямокутний скінченний елемент Лагранжева сімейства. Описано процедуру отримання функцій форми для скінченних елементів. Наведено аналітичні співвідношення для функцій форми для чотири-, шести- та дев’ятивузлового прямокутного скінченного елементу, що мають лінійний або квадратичний характер по координатним напрямкам.

3. На основі варіаційного принципу Лагранжа представлена процедура побудови матриці жорсткості окремого скінченного елементу для розв’язання крайових задач лінійної теорії пружності. Описано процес формування глобальної матриці жорсткості всієї області на основі матриць жорсткості окремих елементів та формування глобального вектору вузлових навантажень. Для крайової задачі лінійної теорії пружності отримано систему розв’язувальних рівнянь методу скінченних елементів.

4. Наведені математичні співвідношення, що описують процедуру розв’язання крайової задачі методом скінченних елементів, були реалізовані у виді пакету прикладних програм, за допомогою якого було розв’язано дві двовимірні задачі лінійної теорії пружності – задачу про згин консольної балки

та задачу про стиснення квадратної пластини.

5. Аналіз чисельних результатів, як і очікувалось, показує, що гірший результат отримуємо при застосуванні чотиривузлових прямокутних скінченних елементів, найкращій – при використанні дев’ятивузлових, проміжний – шестивузлових.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С. Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах руйнування просторових тіл. Київ: КНУБА, 2005. 298 с.
2. Гребенюк С.М., Гоменюк С.І., Клименко М.І. Напружено-деформований стан просторових конструкцій на основі гомогенізації волокнистих композитів. Херсон: Гельветика, 2019. 350 с.
3. Barbero E.J. Finite Element Analysis of Composite Materials using Abaqus (2nd ed.). Boca Raton: CRC Press. 2023. 571 p.
4. Ern A., Guermond J.-L. Finite Elements I: Approximation and Interpolation. Texts in Applied Mathematics, vol. 72. Springer, 2021. 325 p.
5. Eslami M.R. Finite Element Methods in Mechanics. Solid Mechanics and Its Applications, vol. 216. Springer, 2014. 370 p.
6. Larson M.G., Bengzon F. The Finite Element Method: Theory, Implementation, and Applications. Berlin: Springer Heidelberg, 2012. 385 p.
7. Lee S.W., Chung P.W. Finite Element Method for Solids and Structures: A Concise Approach. Cambridge University Press, 2021. 366 p.
8. Li G. Introduction to the Finite Element Method and Implementation with MATLAB (1st ed.). Cambridge University Press, 2020. 522 p.
9. Li S., Hou S. Two-scale concurrent optimization of composites with elliptical inclusions under microstress constraints within the FE^2 framework. *Computers & Structures*. 2023. Vol. 276: 106942.
10. Lohmann C. Physics-Compatible Finite Element Methods for Scalar and Tensorial Advection Problems. Springer Spektrum, 2019. 283 p.
11. Okereke M., Keates S. Finite Element Applications: A Practical Guide to the FEM Process. Springer Tracts in Mechanical Engineering. Springer, 2018. 472 p.

12. Öchsner A., Makvandi R. Finite Elements Using Maxima: Theory and Routines for Rods and Beams. Springer, 2019. 256 p.
13. Rabczuk T., Song J.-H., Zhuang X., Anitescu C. Extended Finite Element and Meshfree Methods. Academic Press, 2020, 617 p.
14. Schröder J., Pimenta Paulo de Mattos (Eds.). Novel Finite Element Technologies for Solids and Structures. CISM International Centre for Mechanical Sciences (vol. 597). Springer, 2020. 197 p.
15. Schröder J., Wriggers P. Advanced Finite Element Technologies. CISM International Centre for Mechanical Sciences (vol. 566). Springer, 2016. 236 p.
16. Zhu B. The Finite Element Method: Fundamentals and Applications in Civil, Hydraulic, Mechanical and Aeronautical Engineering. Wiley, 2018. 843 p.
17. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Fox D.D. The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics. Oxford: Elsevier, 2014. 657 p.
18. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Govindjee S. The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals (8th ed.). Butterworth-Heinemann: Elsevier, 2024. 650 p.