МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

М. О. Гречнєва

ОСНОВИ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Навчальний посібник
для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра
спеціальності «Лісове господарство» освітньо-професійної програми
«Мисливське господарство та рослинні ресурси»

Затверджено
вченою радою ЗНУ
Протокол №2 від 22.10.2024

Запоріжжя
2024

УДК: 51(075.8)
Г815

Гречнєва М. О. Основи вищої математики : навчальний посібник для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра спеціальності «Лісове господарство» освітньо-професійної програми «Мисливське господарство та рослинні ресурси». Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2024. 106 с.

Навчальний посібник укладено відповідно до силабусу навчальної дисципліни «Основи вищої математики». Він містить матеріал, необхідний для розуміння і свідомого засвоєння основних понять, теорем, конструкцій інших загальнонаукових та спеціальних дисциплін. Викладення теоретичного матеріалу та прикладів розв’язання задач супроводжується методичними рекомендаціями, корисними зауваженнями. В посібнику наведено достатню кількість задач із детальними та обґрунтованими розв’язаннями, що дозволить студентам набути навичок застосовування загальних методів. До кожної теми подано задачі, які можуть бути корисними для самостійного опанування курсу.

Видання призначене для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра спеціальності «Лісове господарство» освітньо-професійної програми «Мисливське господарство та рослинні ресурси» денної та заочної форм навчання.

Рецензент

І.Г. Ткаченко, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри фундаментальної та прикладної математики

Відповідальний за випуск

І. В. Зіновєєв, кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри загальної математики

ЗМІСТ

ВСТУП 5
Змістовий модуль 1 Лінійна алгебра 7
Тема 1. Матриці. Дії над матрицями 7
Тема 2. Визначники та їх властивості 9
Приклади розв'язування задач до тем 1-2 15
Завдання для самостійного розв'язання 16
Тема 3. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) 18
Тема 4. Метод Гаусса розв'язання СЛАР 21
Приклади розв'язання задач до тем 3-4 23
Завдання для самостійного розв'язання 27
Питання для самоконтролю до змістового модулю 1 28
Змістовий модуль 2. Векторна алгебра та аналітична геометрія 29
Тема 5. Вектори. Операції над векторами 29
Тема 6. Нелінійні операції над векторами 32
Приклади розв'язання задач до тем 5-6 36
Завдання для самостійного розв'язання 38
Тема 7. Пряма на площині 39
Приклади розв'язання задач до теми 7 41
Завдання для самостійного розв'язання 43
Тема 8. Криві другого порядку 43
Приклади розв'язання задач до теми 8 47
Завдання для самостійного розв'язання 50
Тема 9. Площина та пряма у просторі 50
Завдання для самостійного розв'язання 56
Питання для самоконтролю до змістового модулю 2 57
Змістовий модуль 3. Диференціальне числення функцій 59
Тема 10. Функції. Границя функції 59
Тема 11. Методи знаходження границь функції 63
Завдання для самостійного розв'язання 68
Тема 12. Диференціювання функцій однієї змінної 69
Приклади розв'язання задач до теми 12 77
Завдання для самостійного розв'язання 78
Тема 13. Диференціювання функцій багатьох змінних 79
Приклади розв'язання задач до теми 13 82
Завдання для самостійного розв'язання 84
Питання для самоконтролю до змістового модулю 3 85
Змістовий модуль 4 Інтегральне числення 86
Тема 14. Невизначений інтеграл 86
Приклади розв'язання задач до теми 14 89
Завдання для самостійного розв'язання 91
Тема 15. Визначений інтеграл 91

Приклади розв’язання задач до теми 15 96
Завдання для самостійного розв’язання 98
Тема 16. Невласні інтеграли..... 98
Приклади розв’язання задач до теми 16 100
Завдання для самостійного розв’язання 102
Питання для самоконтролю до змістового модулю 4 103
ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА 104
РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА 105

ВСТУП

Дисципліна «Основи вищої математики» викладається студентам спеціальності 205 Лісове господарство на першому курсі. В рамках цієї дисципліни студенти отримують базові знання для розв'язування задач у професійній діяльності, відбувається подальший розвиток логічного та алгоритмічного мислення студентів, оволодіння основними методами дослідження та розв'язування практичних задач, вивчення математичного апарату, необхідного для засвоєння інших загальнонаукових та спеціальних дисциплін.

Зміст і структура курсу дозволяють ознайомити студентів з максимально широким колом понять вищої математики, сформувати достатній термінологічний запас, необхідний для самостійного вивчення спеціальної математичної літератури.

Математика з її логічним і обчислювальним апаратом є не тільки потужним засобом розв'язання прикладних задач, інструментом кількісних розрахунків, а й універсальною мовою науки, базою для набуття досвіду проведення досліджень чітко окреслених проблем. Програма навчального курсу «Основи вищої математики» містить необхідний мінімум знань з таких розділів математики, як лінійна алгебра, аналітична геометрія, диференціальне та інтегральне числення.

Метою вивчення навчальної дисципліни «Основи вищої математики» є: засвоєння студентами основ математичного апарату, необхідного для розв'язання теоретичних і практичних задач, що виникатимуть в їх майбутній професійній діяльності; набуття вмінь та навичок з простого моделювання реальних природних процесів; оволодіння прийомами дослідження і розв'язання математично формалізованих задач.

Основними **завданнями** вивчення дисципліни «Основи вищої математики» є:

– засвоєння теоретичних знань з теорії матриць;

– оволодіння методами розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь;

– набуття умінь застосовувати елементи аналітичної геометрії на площині та у просторі при розв'язанні прикладних задач;

– оволодіння методами знаходження границь послідовностей, диференціального числення функції однієї та багатьох змінних;

– навчання застосовувати методи інтегрування;

Згідно з вимогами освітньої-професійної програми здобувачі освіти мають досягти наступних компетентностей та програмних результатів навчання:

– здатність розв'язувати складні спеціалізовані задачі та практичні проблеми у галузі лісового і мисливського господарства або у процесі навчання, що передбачає застосування певних теорій та методів лісівничої науки і бактеризується комплексністю та відповідністю природних зональних умов;

– здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях;

– здатність проводити лісівничі вимірювання та дослідження;

– здатність використовувати знання й практичні навички для аналізу біологічних явищ і процесів, біометричної обробки дослідних даних та їх математичного моделювання;

– прагнення до самоорганізації та самоосвіти;

– володіння базовими гуманітарними, природничо-науковими та професійними знаннями для вирішення завдань з організації та ведення лісового господарства.

Структура та вміст навчального посібника відповідають змісту силабусу дисципліни «Основи вищої математики».

Для формування компетентностей і програмних результатів навчання до посібника включені такі змістові модулі:

– Лінійна алгебра.

– Векторна алгебра та аналітична геометрія.

– Диференціальне числення.

– Інтегральне числення.

Отримані в результаті вивчення дисципліни «Вища математика» знання можуть бути використані для подальшого опанування таких дисциплін, як «Загальна екологія», «Геодезія», «Фізика з основами біофізики», «Економіка лісового господарства», «Лісова таксація», «Лісове товарознавство», «Лісова селекція», «Біометрія».

Навчальний посібник містить 16 тем, під час опанування яких здобувачі ознайомляться з важливими теоретичними відомостями дисципліни, прикладами розв’язання задач та завданнями для самостійної роботи. Наприкінці кожної модуля знаходяться питання для самоконтролю.

Змістовий модуль 1 Лінійна алгебра

Тема 1. Матриці. Дії над матрицями

Матрицею розмірів $m \times n$ називається сукупність $m \cdot n$ чисел, розташованих у вигляді таблиці, яка складається з m рядків і n стовпців.

Позначають матриці великими латинськими літерами $A, B, C...$ і записують у вигляді

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

або $A = (a_{ij}),\ i = 1,2,...,m,\ j = 1,2,...,n$.

Матриця, у якої кількість рядків не дорівнює кількості стовпців (тобто $m \neq n$), називається *прямокутною*. Якщо $m = n$, то матриця називається *квадратною*.

$$A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 8 \end{pmatrix}, \quad B_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -5 & 0 & 6 \\ 3 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

Елементи $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ квадратної матриці утворюють *головну діагональ*. Інша діагональ матриці називається побічною.

Квадратна матриця, у якої всі елементи, окрім елементів головної діагоналі, дорівнюють нулю, називається *діагональною* матрицею. Діагональна матриця, у якої всі діагональні елементи дорівнюють одиниці, називається *одиничною*

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}.$$

Матриця, всі елементи якої дорівнюють нулю, називається *нульовою*.

Матриця, яка складається з одного рядка називається матрицею-рядком, а з одного стовпця – матрицею-стовпцем.

$$A_{1\times 4} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B_{3\times 1} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Дві матриці називаються *рівними*, якщо вони мають однакові розміри та рівні відповідні елементи.

Дії над матрицями

1. Додавання (віднімання) матриць.

Операції додавання (віднімання) матриць виконуються тільки для матриць однакових розмірів.

Сумою (різницею) матриць A і B буде матриця таких самих розмірів, елементи якої є сумами (різницями) відповідних елементів матриць A і B

$$A \pm B = C$$

$$a_{ij} \pm b_{ij} = c_{ij}$$

Приклад 1.1. Знайти суму та різницю матриць $A = \begin{pmatrix} 9 & -1 & 2 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -5 & 8 \end{pmatrix}$.

$$A + B = \begin{pmatrix} 11 & -2 & 2 \\ 10 & -5 & 9 \end{pmatrix}, \qquad A - B = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & -7 \end{pmatrix}.$$

2. Множення матриці на число.

Добутком матриці $A = (a_{ij})$ і числа α буде матриця $B = (b_{ij})$ з елементами $b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$.

Приклад 1.2. Для матриці $A = \begin{pmatrix} 9 & -1 & 2 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ знайти $3A$.

$$3A = \begin{pmatrix} 27 & -3 & 6 \\ 18 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Транспонування матриць

Матриця A^t називається *транспонованою* до матриці A, якщо вона отримана з матриці A заміною рядків на стовпці з відповідними номерами.

Приклад 1.3 $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ і $A^t = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Множення матриць.

Множення матриць можливе лише в тому випадку, якщо кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої матриці.

$$A_{m \times \underline{n}} \cdot B_{\underline{n} \times p} = C_{m \times p}$$

Добутком матриць A і B буде матриця C, елементи c_{ij} якої дорівнюють сумі добутків відповідних елементів $i-го$ рядка матриці A і $j-го$ стовпця матриці B.

Приклад 1.4. Знайти $A \cdot B$, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

$$A_{2\times\underline{2}}\cdot B_{\underline{2}\times 3}=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & -4 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 1+(-3)\cdot 2 & 2\cdot 0+(-3)\cdot(-4) & 2\cdot 3+(-3)\cdot 5\\ 1\cdot 1+5\cdot 2 & 1\cdot 0+5\cdot(-4) & 1\cdot 3+5\cdot 5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-4 & 12 & -9\\ 11 & -20 & 28\end{pmatrix}$$

Зауваження. Добуток $B_{2\times\underline{3}}\cdot A_{\underline{2}\times 2}$ неможливий, оскільки кількість стовпців матриці B не дорівнює кількості рядків матриці A.

Приклад 1.5. Знайти $A\cdot B$ та $B\cdot A$, якщо $A=\begin{pmatrix}4 & -1 & 2\\ 1 & 3 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & 0\\ 6 & 4\end{pmatrix}$

$$A_{2\times\underline{3}}\cdot B_{\underline{3}\times 2}=\begin{pmatrix}4 & -1 & 2\\ 1 & 3 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & 0\\ 6 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\cdot 3+(-1)\cdot(-2)+2\cdot 6 & 4\cdot 1+(-1)\cdot 0+2\cdot 4\\ 1\cdot 3+3\cdot(-2)+5\cdot 6 & 1\cdot 1+3\cdot 0+5\cdot 4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}26 & 12\\ 27 & 21\end{pmatrix}$$

$$B_{3\times\underline{2}}\cdot A_{\underline{2}\times 3}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & 0\\ 6 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & -1 & 2\\ 1 & 3 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 4+1\cdot 1 & 3\cdot(-1)+1\cdot 3 & 3\cdot 2+1\cdot 5\\ -2\cdot 4+0\cdot 1 & -2\cdot(-1)+0\cdot 3 & -2\cdot 2+0\cdot 5\\ 6\cdot 4+4\cdot 1 & 6\cdot(-1)+4\cdot 3 & 6\cdot 2+4\cdot 5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}13 & 0 & 11\\ -8 & 2 & -4\\ 28 & 6 & 32\end{pmatrix}$$

Тема 2. Визначники та їх властивості

Визначником n-го порядку, що відповідає квадратній матриці $A_{n\times n}$, називається число, яке позначається наступним чином

$$|A|=\det A=\begin{vmatrix}a_{11} & \dots & a_{1n}\\ \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}.$$

Правила обчислення визначників.

1. Якщо $n=1$, то $|A|=|a_{11}|=a_{11}$.
2. Якщо $n=2$, то $|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}$

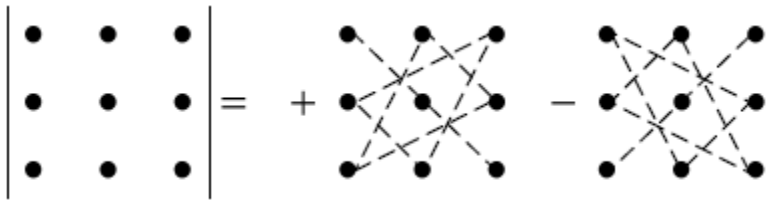
Приклад 2.1. а) $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot 2 - (-1)\cdot 5 = 11$

3. Якщо $n = 3$

а) правило трикутника

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} -$$

$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}.$$

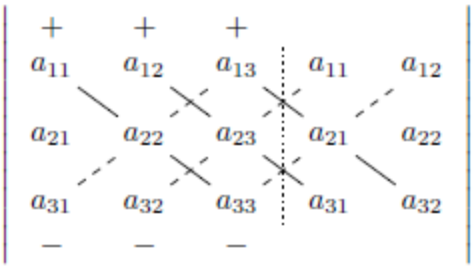


Приклад 2.2. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 6 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 6 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 5\cdot 0\cdot 3 + (-3)\cdot 2\cdot 4 + (-1)\cdot 1\cdot 6 - (-3)\cdot 0\cdot (-1) - 5\cdot 6\cdot 4 - 3\cdot 1\cdot 2 =$$

$$= 0 - 24 - 6 - 0 - 120 - 6 = -156$$

б) правило прямих (Саррюса)



$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 6 & -4 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \\ 6 & -4 \end{matrix} = 4\cdot 1\cdot (-3) + (-1)\cdot 5\cdot 6 + 2\cdot 3\cdot (-4) - 2\cdot 1\cdot 6 - 4\cdot 5\cdot (-4) -$$

$$- (-1)\cdot 3\cdot (-3) = -12 - 30 - 24 - 12 + 80 - 9 = -7$$

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника називається визначник, отриманий з вихідного визначника викреслюванням $i-го$ рядка та $j-го$ стовпця.

Приклад 2.3. Для визначника $\begin{vmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 6 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ мінори

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 6 \cdot (-1) = 6 + 6 = 12$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 20 - (-1) = 21 \quad M_{33} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2$$

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} визначника називається число

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

тобто його мінор, взятий зі знаком «+», якщо $i + j$ – парне число, та зі знаком « – », якщо $i + j$ – непарне число.

Для попереднього прикладу $A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -12$, $A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -21$, $A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = -2$.

Розклад визначника за елементами рядка або стовпця

Визначник матриці дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на алгебраїчні доповнення цих елементів:

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$$

Приклад 2.4. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 6 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$, розкладаючи його по елементах: а) першого рядка; б) другого стовпця.

а) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 6 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{12} + (-3) \cdot A_{13} = 5 \cdot (-24) + 1 \cdot (-12) + (-3) \cdot 8 =$

$$= -120 - 12 - 24 = -156$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 0 - 24 = -24, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -(6 - (-6)) = -12$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 0 = 8$$

б) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 6 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{22} + 4 \cdot A_{32} = 1 \cdot (-12) + 0 + 4 \cdot (-36) =$

$$= -12 - 144 = -156$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -(30-(-6)) = -36$$

Властивості визначників

1. Визначник матриці не змінюється при її транспонуванні.
2. Якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) визначника дорівнюють нулю, то визначник дорівнює нулю.
3. При перестановці двох рядків (стовпчиків) визначник змінює знак на протилежний.
4. Якщо визначник має два пропорційні рядки (стовпчики), то він дорівнює нулю.
5. Якщо елементи деякого рядка (стовпчика) визначника мають спільний множник, то його можна винести за знак визначника.

Обернена матриця

Квадратна матриця A^{-1} називається ***оберненою*** до квадратної матриці A, якщо добуток цих двох матриць (в будь-якому порядку) дорівнює одиничній матриці

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Матриця має обернену матрицю тільки в тому випадку, коли вона не вироджена, тобто $|A| \neq 0$.

Алгоритм знаходження оберненої матриці

1. Обчислити визначник вихідної матриці A.
2. Обчислити алгебраїчні доповнення до всіх елементів матриці A.
3. Записати матрицю A^*, яка складається з алгебраїчних доповнень до елементів рядків, записаних в стовпчики з відповідними номерами

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

4. Записати обернену матрицю у вигляді $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$.

5. Робимо перевірку: перевіряємо, чи виконуються рівності $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Приклад 2.5. Знайти матрицю A^{-1}, обернену до матриці $A=\begin{pmatrix}2 & 5 & -1\\ 3 & -3 & 4\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$.

Розв'язання.

1.Обчислимо визначник матриці

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & 5 & -1\\ 3 & -3 & 4\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=-18-6+20-3-16-45=-68.$$

2. Обчислимо алгебраїчні доповнення до всіх елементів матриці A

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-3 & 4\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-9-8=-17,\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3 & 4\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-(9-4)=-5,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3 & -3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=6-(-3)=9,\quad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}5 & -1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-(15-(-2))=-17,$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=6-(-1)=7,\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2 & 5\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-(4-5)=1,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}5 & -1\\ -3 & 4\end{vmatrix}=20-3=17,\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{vmatrix}=-(8-(-3))=-11,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2 & 5\\ 3 & -3\end{vmatrix}=-6-15=-21.$$

3. Запишемо обернену матрицю у вигляді $A^{-1}=\frac{1}{-68}\begin{pmatrix}-17 & -17 & 17\\ -5 & 7 & -11\\ 9 & 1 & -21\end{pmatrix}$.

Застосування матриць в біології

Нехай в експериментах спостерігаються значення певних показників, наприклад, фізичних чи хімічних характеристик середовища $x_1, x_2, ..., x_n$ (незалежні вхідні впливи) і пов'язане з ними значення : біологічного показника y (залежна вихідна величина), що в сукупності дає матрицю

$$\begin{pmatrix}y_1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n}\\ y_2 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n}\\ y_4 & x_{31} & x_{32} & \dots & x_{3n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ y_k & x_{k1} & x_{k2} & \dots & x_{kn}\end{pmatrix}$$

x_{ij} і y_i – значення відповідних змінних в i-му експерименті $i=1,2,...k$, $j=1,2,...n$

Приклад 2.6. Нехай у лабораторії п'ять тварин годують трьома різним

видами їжі. Якщо позначити c_{ij} – добове споживання i-го виду їжі j-ю твариною, тоді матриця розміру 3×5

$$C=(c_{ij})=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} \\ c_{31} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & c_{35} \end{pmatrix}$$

відображає добове споживання.

Приклад 2.7. Контакти першого та другого порядку в епідеміології. Припустимо, що три особи захворіли заразною хворобою і становлять першу групу. Другу групу з шести осіб опитують, хто з них мав контакт з трьома інфікованими хворими. Потім опитують третю трупу з семи осіб, щоб з'ясувати контакти з ким-небудь з шести осіб другої групи. Визначимо матрицю $A=(a_{ij})$ розміру 3×6, прийнявши $a_{ij}=1$, якщо j-та особа другої групи була в контакті з i-м хворим першої групи, і $a_{ij}=0$, j-та особа другої групи не була в контакті з i-м хворим першої групи. Аналогічно визначимо матрицю $B=(b_{ij})$ розміру 6×7, прийнявши $b_{ij}=1$, j-та особа третьої групи була в контакті з i- м хворим другої групи, і $b_{ij}=0$, j-та особа третьої групи не була в контакті з i-м хворим другої групи. Ці дві матриці описують схему контактів першого порядку між трупами. Нехай

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

У цьому випадку $a_{24}=1$ означає, що четверта особа з другої групи була в контакті з другим хворим з першої групи, а $b_{32}=0$ означає, що друга особа з третьої групи не контактувала з третьою особою з другої групи. Зауважимо, що п'ятий стовпець матриці B нульовий, це означає, що п'ята особа третьої групи не була в контакті з жодною особою з другої групи.

Якщо розглядати непрямі контакти або контакти другого порядку між особами третьої групи та хворими першої групи, то треба застосувати добуток матриць $C=A\cdot B$, елемент $c_{ij}=\sum_{k=1}^{6}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{i6}b_{6j}$ дає кількість контактів другого порядку між j-ю особою третьої групи і i-м хворим першої групи.

Для зазначених матриць A і B отримаємо

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Елемент $c_{31} = 2$ свідчить про те, що є два контакти другого порядку між першою особою з третьої групи і третім інфікованим з першої групи. Зауважимо, що у шостої особи з третьої групи загалом є $1+1+2=4$ непрямих контакти з зараженою першою групою, а от в п'ятої особи з третьої групи таких контактів взагалі немає.

Приклади розв'язування задач до тем 1-2

Приклад 1. Знайти $2A-3B^t$, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Спочатку знайдемо матрицю B^t помінявши місцями в матриці B відповідні рядки і стовпці $B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 7 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. Далі

$$2A-3B^t = 2\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} - 3\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 7 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 0 & -2 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 21 & -9 \\ 12 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -21 & 7 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Приклад 2. Виконати множення матриць $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$ та $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & -5 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Порівнюючи розміри матриць, робимо висновок про можливість знайти лише добуток матриці A на матрицю B, отримаємо

$$A_{1\times 2}\cdot B_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot(-3)+1\cdot 0 & 2\cdot 1+1\cdot 8 & 2\cdot 2+1\cdot(-5) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & 10 & -1 \end{pmatrix}_{1\times 3}$$

Приклад 3. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. Застосуємо правило трикутника

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot 6 + 9\cdot 0\cdot 4 + (-2)\cdot 3\cdot 2 - 9\cdot(-1)\cdot(-2) - 1\cdot 4\cdot 2 - 6\cdot 3\cdot 0 =$$

$$= -6+0-12-18-8-0 = -44$$

Приклад 4. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. Обчислимо заданий визначник, розкладаючи його по елементах першого стовпця.

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{21} + 3 \cdot A_{31} + 0 \cdot A_{41} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} + 0 +$$

$$+ 3 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 7 & 3 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} + 0 = 1 \cdot 12 + 3 \cdot (-18) = -42$$

Приклад 5. Знайти таку матрицю X, що задовольняє рівняння $X \cdot A = B$, де $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -4 \\ 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Помножимо рівняння $X \cdot A = B$ справа на A^{-1}, що є оберненою до матриці A. Отримаємо $X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1}$, звідки $X = B \cdot A^{-1}$. Для знаходження матриці A^{-1} обчислимо

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - (-6) = 8,\ A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 2 = 2,\ A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 3 = -3,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot (-2) = 2,\ A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1.$$

Запишемо обернену матрицю $A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$. Тоді

$$X = B \cdot A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -4 \\ 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 16 & 0 \\ -6 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Завдання для самостійного розв'язання

1. Для заданих матриць $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ обчислити $2B - 3C$, $A(B + C)$, $BC^T + A^2$.

2. Для заданих матриць $A=\begin{pmatrix}3&4&5\\-1&1&0\\2&-1&6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&-3&4\\0&1&2\\1&1&-1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&-1&3\\2&-4&6\\4&2&-2\end{pmatrix}$ обчислити $4A-3B+C$, A^T+B^T, $BC+A^2$.

3. Знайти добутки $A\cdot B$ та $B\cdot A$, якщо

а) $A=\begin{pmatrix}1&-3\\-1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&-1&0\\1&5&2\end{pmatrix}$, б) $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}$.

4. Знайти матрицю, обернену до матриці A, якщо

а) $A=\begin{pmatrix}1&3&2\\2&0&2\\0&4&-1\end{pmatrix}$, б) $A=\begin{pmatrix}2&3&1\\2&1&0\\0&1&-3\end{pmatrix}$, в) $A=\begin{pmatrix}0&3&4\\2&1&2\\-2&1&0\end{pmatrix}$.

5. Обчислити визначники

а) $\begin{vmatrix}1&3&2\\2&0&2\\0&4&-1\end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix}1&-6&2\\0&2&1\\5&4&-1\end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix}7&0&1\\1&5&-3\\0&4&2\end{vmatrix}$.

4. Розв’язати рівняння

а) $\begin{vmatrix}3x&-1\\x&2x-3\end{vmatrix}=\frac{3}{2}$, б) $\begin{vmatrix}3&x&-4\\2&-1&3\\x+10&1&1\end{vmatrix}=0$.

7. Розв’язати нерівності

а) $\begin{vmatrix}1&x+5\\2&x\end{vmatrix}<0$, б) $\begin{vmatrix}3&-2&1\\1&x&-2\\-1&2&-1\end{vmatrix}<1$.

8. Обчислити визначники

а) $\begin{vmatrix}1&1&-1&0\\0&1&-2&1\\-2&1&4&6\\4&0&5&0\end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix}8&7&2&0\\-8&2&7&10\\4&4&4&5\\0&4&-3&2\end{vmatrix}$.

Тема 3. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)

Рівняння виду $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$, де $a_1, a_2, ..., a_n, b$ – довільні дійсні числа, називається лінійним алгебраїчним рівнянням з n невідомими $x_1, x_2, ..., x_n$. Число b називається вільним членом рівняння. Розв'язком такого рівняння буде упорядкований набір дійсних чисел $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, який перетворює його у вірну рівність. Система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (3.1)$$

називається системою лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими.

Система (3.1) складається з m рівнянь. Якщо кількість рівнянь не дорівнює кількості невідомих ($m \neq n$), то таку систему називають прямокутною. Якщо $m = n$, то система називається квадратною.

Наприклад, система $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = -4 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 10 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 7 \end{cases}$ є прямокутною системою трьох рівнянь з чотирма невідомими.

Розв'язком системи (3.1) будемо називати такий упорядкований набір дійсних чисел $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, який задовольняє кожне рівняння цієї системи.

Якщо система (3.1) має хоча б один розв'язок, то вона називається *сумісною*. В противному випадку (коли система не має розв'язків) вона називається *несумісною*.

Якщо система (3.1) має єдиний розв'язок, то вона називається *визначеною*. Якщо ж ця система має більше одного розв'язку, то вона називається *невизначеною*.

Система (3.1), всі вільні члени якої дорівнюють нулю, називається *однорідною*.

Однорідна система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

завжди сумісна, оскільки вона завжди має принаймні один розв'язок – нульовий набір $(0,0,...,0)$.

Далі розглянемо системи n рівнянь з n невідомими.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .....\\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad (3.2)$$

Матриця $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$ називається матрицею системи, матриця $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$ - стовпцем вільних членів, матриця $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ – стовпцем невідомих.

1. Метод Крамера

Якщо у системі (3.2) головний визначник $\Delta = \det A \neq 0$*, то система сумісна і має єдиний розв'язок, який знаходиться за формулами*

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ ...,\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

де $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n$ *- допоміжні визначники, одержані з визначника* Δ *заміною 1-го, 2-го,..., n-го стовпця на стовпець вільних членів.*

Якщо в системі (3.2) $\Delta = 0$*, але хоча б один з визначників* $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n$ *не дорівнює нулю, то система не має розв'язків, тобто є несумісною.*

Якщо у системі (3.2) $\Delta = 0$ *і усі допоміжні визначники дорівнюють нулю, то система сумісна і має безліч розв'язків.*

Приклад 3.1. Розв'язати задану систему рівнянь методом Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -6 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 20 \\ 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = -12 \end{cases}$$

Знаходимо визначник системи за правилом трикутника

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & -6 & 4 \end{vmatrix} = 32 + (-18) + 30 - 20 - 24 - (-36) = 36$$

Знаходимо допоміжні визначники системи

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -6 & -3 & 1 \\ 20 & 4 & -2 \\ -12 & -6 & 4 \end{vmatrix} = -96 + (-120) + (-72) - (-48) - (-72) - (-240) = 72$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -6 & 1 \\ 3 & 20 & -2 \\ 5 & -12 & 4 \end{vmatrix} = 160 + (-36) + 60 - 100 - 48 - (-72) = 108$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -6 \\ 3 & 4 & 20 \\ 5 & -6 & -12 \end{vmatrix} = -96 + 108 + (-300) - (-120) - (-240) - 108 = -36$$

Тоді $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{72}{36} = 2$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{108}{36} = 3$, $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-36}{36} = -1$.

2. Матричний метод

Систему (3.2) можна записати в матричній формі

$$AX = B.$$

Помножимо цю рівність зліва на A^{-1}

$$A^{-1}AX = A^{-1}B.$$

Оскільки $A^{-1}A = E$, то

$$X = A^{-1}B.$$

Щоб знайти розв'язок системи (3.2) , потрібно знайти обернену матрицю A^{-1} і помножити її зліва на матрицю B.

Приклад 3.2. Розв'язати задану систему рівнянь матричним методом

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -6 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 20 \\ 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = -12 \end{cases}$$

Матриця системи $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & -6 & 4 \end{pmatrix}$, стовпець вільних членів $B = \begin{pmatrix} -6 \\ 20 \\ -12 \end{pmatrix}$.

Знайдемо алгебраїчні доповнення до кожного елемента матриці A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = 4,\ A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -22,\ A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = -38,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = 6,\quad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 3,\quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 2,\ A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 7,\ A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 17.$$

Обернена матриця до матриці A запишеться у вигляді

$$A^{-1} = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ -22 & 3 & 7 \\ -38 & -3 & 17 \end{pmatrix}$$

Знайдемо розв'язок системи

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=A^{-1}B=\frac{1}{36}\begin{pmatrix}4&6&2\\-22&3&7\\-38&-3&17\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-6\\20\\-12\end{pmatrix}=\frac{1}{36}\begin{pmatrix}4\cdot(-6)+6\cdot 20+2\cdot(-12)\\-22\cdot(-6)+3\cdot 20+7\cdot(-12)\\-38\cdot(-6)-3\cdot 20+17\cdot(-12)\end{pmatrix}=$$

$$\frac{1}{36}\begin{pmatrix}72\\108\\-36\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$$

Отже, $x_1=2$, $x_2=3, x_3=-1$.

Тема 4. Метод Гаусса розв'язання СЛАР

Розглянемо матрицю $A_{m\times n}$ і позначимо рядки цієї матриці $A_1, A_2,..., A_m$.

Під *елементарними перетвореннями* рядків матриці розуміють наступні перетворення:

1. Перестановка місцями двох будь-яких рядків матриці.
2. Додавання до одного рядка матриці іншого її рядка, попередньо помноженого на довільне відмінне від нуля число.

Лінійною комбінацією рядків матриці називається вираз $c_1A_1+c_2A_2+...+c_mA_m$, $c_1,c_2,...,c_m=const$. Лінійна комбінація рядків називається *тривіальною*, якщо всі коефіцієнти дорівнюють нулю. Лінійна комбінація рядків називається *нетривіальною*, якщо хоча б один з коефіцієнтів c_i не дорівнює нулю.

Рядки матриці називаються *лінійно залежними*, якщо деякий з цих рядків є лінійною комбінацією інших. В противному випадку рядки матриці A називаються *лінійно незалежними*.

Рангом матриці A ($rangA$) називається максимальна кількість її лінійно незалежних рядків.

Матриця називається *східчастою*, якщо всі ненульові рядки розташовані над усіма нульовими рядками та перший ненульовий елемент у кожному наступному рядку розташований строго правіше ніж у попередньому. Наприклад, $A=\begin{pmatrix}2&-3&0&1\\0&4&5&-1\\0&0&7&6\end{pmatrix}$.

Щоб визначити ранг матриці, необхідно за допомогою елементарних перетворень рядків звести матрицю до східчастого виду. Рангом матриці буде кількість ненульових рядків в східчастому вигляді матриці.

Приклад 4.1. Знайти ранг матриці $A=\begin{pmatrix}1&2&3&-4\\0&3&1&-2\\1&5&4&-6\end{pmatrix}$

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&-4\\0&3&1&-2\\1&5&4&-6\end{pmatrix}\begin{matrix}\\\\III-I\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&-4\\0&3&1&-2\\0&3&1&-2\end{pmatrix}\begin{matrix}\\\\III-II\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&-4\\0&3&1&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$rangA=2.$$

Приклад 4.2. Знайти ранг матриці $A=\begin{pmatrix}6&-2&2&5&7\\9&-3&4&8&9\\-6&2&-6&-7&1\end{pmatrix}$

$$A=\begin{pmatrix}6&-2&2&5&7\\9&-3&4&8&9\\-6&2&-6&-7&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\II\cdot 2-I\cdot 3\\III+I\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}6&-2&2&5&7\\0&0&2&1&-3\\0&0&-4&-2&8\end{pmatrix}\begin{matrix}\\\\III+II\cdot 2\end{matrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}6&-2&2&5&7\\0&0&2&1&-2\\0&0&0&0&2\end{pmatrix}\quad rangA=3$$

За допомогою рангу матриці можна дослідити на сумісність будь-яку систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Додамо до матриці системи ще один стовпець – стовпець вільних членів і будемо називати отриману матрицю розширеною матрицею системи.

Теорема Кронекера-Капеллі (критерій сумісності системи). *Система лінійних алгебраїчних рівнянь сумісна (має розв'язки) тоді і тільки тоді, коли ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці системи.*

Якщо ранги співпадають і дорівнюють кількості змінних, то система має єдиний розв'язок.

Якщо ранги співпадають, але отримане число менше кількості змінних – система має безліч розв'язків.

Алгоритм метода Гаусса.

1. Записати розширену матрицю вихідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь з *n* невідомими.
2. За допомогою елементарних перетворень рядків звести записану матрицю до східчастого виду.
3. Дослідити систему на сумісність за допомогою теореми Кронекера-Капеллі.
4. Записати систему рівнянь, що відповідає отриманій східчастій матриці.
5. Виділити в системі залежні та незалежні змінні. Кількість незалежних змінних дорівнює рангу r матриці. Кількість залежних змінних дорівнює $n-r$.
6. Починаючи з останнього рівняння, виражаємо залежні змінні через незалежні (*Зворотний хід метода Гаусса*).

Приклад 4.3. Дослідити СЛАР на сумісність і знайти її розв'язки.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 3x_1 + x_2 + 6x_3 = 23 \end{cases}$$

Запишемо розширену матрицю системи та зведемо її до східчастого виду:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 6 & 23 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ II + I \\ III - I \cdot 3 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 9 & 23 \end{array}\right) III - II \cdot 4 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Ранг матриці системи дорівнює рангу її розширеної матриці і дорівнює числу невідомих. Отже, система має єдиний розв'язок. Запишемо систему рівнянь, що відповідає отриманій східчастій матриці

$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2 - 1 \cdot x_3 = 0 \\ 1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 5 \\ 1 \cdot x_3 = 3 \end{cases}$$

З останнього рівняння $x_3 = 3$. Підставляючи знайдене $x_3 = 3$ в передостаннє рівняння $x_2 + 2 \cdot 3 = 5$, отримаємо, що $x_2 = -1$. Знайдені значення змінних підставляємо в перше рівняння $x_1 - (-1) - 3 = 0$ і отримаємо $x_1 = 2$.

Приклади розв'язання задач до тем 3-4

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь методом Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 6 \\ 5x_1 + 4x_2 = 28 \end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо головний визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 8 - (-5) = 13 \neq 0.$$

Знайдемо допоміжні визначники Δ_i шляхом заміни i-го стовпця на стовпець вільних членів

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 28 & 4 \end{vmatrix} = 24 - (-28) = 52, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 28 \end{vmatrix} = 56 - 30 = 26.$$

Отже, за формулами Крамера отримаємо

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{52}{13} = 4, \ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{26}{13} = 2.$$

Приклад 2. Розв'язати систему рівнянь методом Крамера

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 6x_3 = 0, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = 10. \end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо головний визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -6 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -6 + (-4) + 12 - (-4) - (-6) - 12 = 0 .$$

Знайдемо допоміжні визначники системи

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -6 \\ 10 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -160, \ \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -6 \\ -1 & 10 & 3 \end{vmatrix} = 20, \ \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 10 \end{vmatrix} = -60 .$$

Оскільки головний визначник системи дорівнює нулю, а серед допоміжних визначників є ненульові, то система розв'язків немає, тобто є несумісною.

Приклад 3. Розв'язати систему рівнянь матричним методом

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 = 11, \\ -7x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ 6x_1 - 6x_2 - 3x_3 = -15. \end{cases}$$

Розв'язання. Для заданої системи

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ -7 & 1 & 1 \\ 6 & -6 & -3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ -15 \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо визначник матриці системи

$$|A| = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 0 \\ -7 & 1 & 1 \\ 6 & -6 & -3 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$$

та алгебраїчні доповнення до елементів матриці A

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -6 & -3 \end{vmatrix} = 3, \ A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -7 & 1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = -15, \ A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -7 & 1 \\ 6 & -6 \end{vmatrix} = 36,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -6 & -3 \end{vmatrix} = 6, \ A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = -21, \ A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 6 & -6 \end{vmatrix} = 54,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \ A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ -7 & 1 \end{vmatrix} = -7, \ A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -7 & 1 \end{vmatrix} = 21.$$

Обернена матриця запишеться у вигляді

$$A^{-1} = \frac{1}{-9}\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ -15 & -21 & -7 \\ 36 & 54 & 21 \end{pmatrix}$$

Застосувавши формулу $X = A^{-1}B$, дістанемо

$$X = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ -15 & -21 & -7 \\ 36 & 54 & 21 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ -15 \end{pmatrix} = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3\cdot 11 + 6\cdot(-2) + 2\cdot(15) \\ -15\cdot 11 + (-21)\cdot(-2) + (-7)\cdot(15) \\ 36\cdot 11 + 54\cdot(-2) + 21\cdot(15) \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -9 \\ -18 \\ -27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Отже, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок системи рівнянь $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases}$

Розв'язання. Запишемо розширену матрицю системи та зведемо її до східчастого виду:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -5 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & -6 & 3 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ II + I \\ III \cdot 2 + I \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & -7 & 2 \\ 0 & 7 & 9 & -14 & 8 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ III \cdot 4 - II \cdot 7 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & -7 & 18 \end{array}\right)$$

Ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці системи і дорівнює 3, а кількість змінних системи дорівнює 4. Отже, система має безліч розв'язків.

Запишемо систему рівнянь, що відповідає отриманій «східчастій» матриці $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 2 \\ 4x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 2 \\ 8x_3 - 7x_4 = 18 \end{cases}$

У якості незалежної змінної можна обрати або x_3, або x_4. Оберемо x_4 незалежною змінною, тоді x_1, x_2, x_3 - залежні.

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{2 - x_2 - 3x_3 + 2x_4}{-2} = -1 + \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{7}{4} - \dfrac{1}{8}x_4\right) + \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{9}{4} + \dfrac{7}{8}x_4\right) - x_4 = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{4}x_4 \\ x_2 = \dfrac{2 - 4x_3 + 3x_4}{4} = \dfrac{1}{2} - \left(\dfrac{9}{4} + \dfrac{7}{8}x_4\right) + \dfrac{3}{4}x_4 = -\dfrac{7}{4} - \dfrac{1}{8}x_4 \\ x_3 = \dfrac{18 + 7x_4}{8} = \dfrac{9}{4} + \dfrac{7}{8}x_4 \end{cases}$$

Знайдені значення x_1, x_2, x_3 представимо у вигляді матриці

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{4}x_4 \\ -\dfrac{7}{4} - \dfrac{1}{8}x_4 \\ \dfrac{9}{4} + \dfrac{7}{8}x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{2} \\ -\dfrac{7}{4} \\ \dfrac{9}{4} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{8} \\ \dfrac{7}{8} \\ 1 \end{pmatrix} x_4 .$$

Замінюючи x_4 на довільну сталу C, загальний розв'язок системи запишемо у вигляді

$$X = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{2} \\ -\dfrac{7}{4} \\ \dfrac{9}{4} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{8} \\ \dfrac{7}{8} \\ 1 \end{pmatrix} C .$$

Приклад 6. *Співіснування бактерій*. Три види бактерій співіснують у пробірці та споживають три субстрати. Припустимо, що бактерія i-го виду споживає в день c_{ij} кількості j-го субстрату. Визначимо $\overline{C}_i^T = (c_{i1}, c_{i2}, c_{i3})$, як вектор споживання для i-го виду.

Нехай $\overline{C}_1^T = (1,1,1)$, $\overline{C}_2^T = (1,2,3)$, $\overline{C}_3^T = (1,3,5)$. Щодня в пробірку вносять 15000 одиниць першого субстрату, 30000 одиниць другого і 45000 одиниць третього. Які кількості особин популяцій трьох видів бактерій зможуть співіснувати в такому середовищі, якщо бактерії споживають весь денний запас субстрату?

Розв'язання. Позначимо через x_1, x_2, x_3 відповідні кількості особин трьох видів, які можуть бути забезпечені субстратом. Враховуючи задані вектори споживання, отримаємо, що:

x_1 особина першого виду споживає по x_1 одиниць кожного субстрату;

x_2 особини другого виду споживають по x_2 одиниці першого субстрату, $2x_2$ одиниці другого субстрату і $3x_2$ одиниці третього субстрату;

x_3 особини третього виду споживають x_3 одиниці першого субстрату, $3x_3$ одиниці другого субстрату і $5x_3$ одиниці третього субстрату.

Загальне добове споживання субстрату з його доступним запасом описується системою

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 15000, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 30000, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 45000. \end{cases}$$

Обчислимо визначник системи $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$. Формули Крамера не можна застосовувати. Спростимо систему, віднявши третій і другий рядки

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 15000, \\ x_2 + 2x_3 = 15000, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x_1 = x_3, \\ x_3 = (15000 - x_2)/2. \end{cases}$$

Система має безліч розв'язків. Кількість особин популяцій бактерій бути невід'ємною, тому $0 \le x_2 \le 15000$ і $0 \le x_1 = x_3 \le 7500$.

Завдання для самостійного розв'язання

1. Розв'язати системи рівнянь

а) $\begin{cases} x - 3y + z = -2, \\ 4x + y - z = 3, \\ 5x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y - z = 1, \\ 2x + 2y - 2z = 3, \\ -3x - 3y + 3z = -5 \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x + y - 2z = 1, \\ x - 2y + 3z = 5, \\ 2x + 3y - z = -4. \end{cases}$

г) $\begin{cases} 4x - 2y + z = 5, \\ x + 3y + z = 5, \\ 2x - y + 3z = 4 \end{cases}$ д) $\begin{cases} 4x - y + z = 5, \\ x + 2y - z = 2, \\ x - 2y + 2z = 3 \end{cases}$ е) $\begin{cases} 3x + y - 2z = 6, \\ x + 4y + 3z = 2, \\ 2x + y + 2z = 1 \end{cases}$

2. Знайти фундаментальну систему розв'язків

а) $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases}$, б) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 2 \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$

в) $\begin{cases} -4x_1 + 5x_2 - 6x_3 - 6x_4 - 4x_5 = -9 \\ 5x_1 - 6x_2 - 4x_3 + 5x_4 - 2x_5 = 11 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 6x_4 6x_5 = -2 \\ 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 5x_5 = -1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$

д) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - 5x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$ е) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 6x_3 + 7x_4 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 0 \\ -5x_1 - 10x_3 + 19x_4 = 0 \end{cases}$

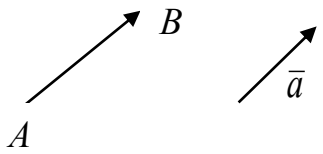
Питання для самоконтролю до змістового модулю 1

1. Поясніть, що таке матриця.
2. Як позначають матриці?
3. Що таке елемент матриці? На що вказують індекси елементів матриці?
4. Яку матрицю називають нульовою, одиничною, матрицею-рядком, матрицею-стовпцем?
5. В чому полягає операція транспонування матриці?
6. Якими є основні операції над матрицями?
7. Які існують елементарні перетворення матриць?
8. Що називають визначником першого, другого та третього порядку?
9. Сформулюйте правило Саррюса та правило трикутників.
10. Які основні властивості визначників?
11. Що називають мінором? Як його позначають?
12. Що таке алгебраїчне доповнення?
13. Яку матрицю називають невиродженою?
14. Алгоритм знаходження оберненої матриці.
15. Що називають рангом матриці?
16. Поясніть сутність методу обчислення рангу матриці за допомогою елементарних перетворень.
17. Що таке система лінійних алгебраїчних рівнянь?
18. Яку матрицю називають основною матрицею системи, розширеною матрицею системи?
19. Яку систему називають однорідною?
20. Що таке розв’язок системи?
21. Яку систему називають сумісною, несумісною?
22. Яка система є визначеною, невизначеною?
23. У чому сутність матричного методу розв’язання системи лінійних рівнянь?
24. У чому полягає сутність методу Крамера?
25. Алгоритм розв’язання систем лінійних рівнянь методом Гаусса.
26. Сформулюйте теорему Кронекера-Капеллі.

Змістовий модуль 2. Векторна алгебра та аналітична геометрія

Тема 5. Вектори. Операції над векторами

Вектором називається напрямлений відрізок. Позначається: $\overline{AB}$ або $\bar{a}$.



Довжина відрізка називається *довжиною вектора* (або *модулем вектора*) і позначається $\left|\overline{AB}\right|$ або $|\bar{a}|$.

Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називається *одиничним*.

Вектор, початок і кінець якого співпадають, називається *нульовим*, він не має направлення, його довжина дорівнює нулю.

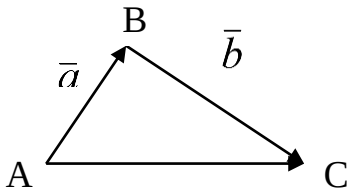
Два або більше векторів називаються *колінеарними*, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих: $\bar{a} \parallel \bar{b}$.

Три або більше векторів називаються *компланарними*, якщо вони лежать в одній площині або в паралельних площинах.

Лінійні операції над векторами

1. Додавання і віднімання векторів.

а) правило трикутника (застосовується в тому випадку, коли початок другого вектора співпадає з кінцем першого вектора): *сумою векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називається такий вектор $\bar{c}$, який з'єднує початок першого вектора $\bar{a}$ з кінцем другого вектора $\bar{b}$.*



$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{c}$$
$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$$

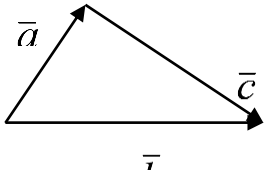
б) правило паралелограма (застосовується в тому випадку, коли два вектори мають спільний початок): *сумою векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ є діагональ паралелограма, побудованого на цих векторах, яка виходить зі спільного початку векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$.*



$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{c}$$

Різницею двох векторів $\bar{b}$ і $\bar{b}$ називають такий вектор $\bar{c}$, який в сумі з вектором $\bar{b}$ дає вектор $\bar{a}$. Звідси випливає правило побудови різниці: *якщо*

вектори $\bar{a}$ *і* $\bar{b}$ *мають спільний початок, тоді різницею цих векторів буде вектор, який з'єднує їх кінці і напрямлений в бік вектора, від якого віднімають.*

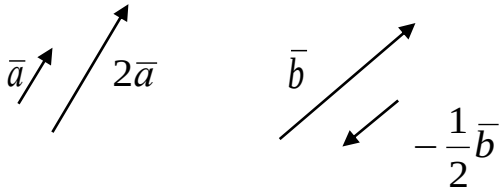


$$\bar{b} - \bar{a} = \bar{c}$$

2) Добуток вектора на число (або числа на вектор)

Добутком вектора $\bar{a}$ та дійсного числа k (або дійсного числа k на вектор $\bar{a}$) називають вектор $k\bar{a}$, який

- колінеарний до вектора $\bar{a}$,
- співнапрямлений з вектором $\bar{a}$, якщо $k > 0$, протилежнонапрямлений з $\bar{a}$, якщо $k < 0$, нульовий, якщо $k = 0$,
- має довжину $|k| \cdot |\bar{a}|$.



Два вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ колінеарні тоді і тільки тоді, коли існує таке дійсне число k, що має місце рівність $\bar{b} = k \cdot \bar{a}$.

Поняття базису та координат вектора

Розглянемо систему векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n$. Якщо існують числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, серед яких хоча б одне відмінне від нуля і виконується рівність $\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_1\bar{a}_2 + ... + \alpha_n\bar{a}_n = 0$, то розглянута система векторів називається *лінійно залежною*. Якщо остання рівність можлива тільки тоді, коли всі числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ дорівнюють нулю, то система векторів називається *лінійно незалежною*.

Вектори будуть *лінійно залежними*, якщо хоча б один з них можна представити у вигляді лінійної комбінації

$$\bar{a}_i = \alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_1\bar{a}_2 + ... + \alpha_n\bar{a}_n.$$

1. Один вектор в системі завжди лінійно незалежний, якщо є ненульовим.
2. Два вектори лінійно залежні, якщо вони колінеарні, і незалежні, якщо не колінеарні.
3. Три вектори лінійно залежні, якщо вони компланарні, і лінійно незалежні, якщо не компланарні.

Базисом називається така впорядкована сукупність векторів, яка задовольняє умовам:

1. система повинна бути лінійно незалежною.

2. будь-який інший вектор можна представити у вигляді лінійної комбінації векторів даної сукупності.

Базис площини складається з будь-яких двох не колінеарних векторів.

Базис простору складається з будь-яких трьох не компланарних векторів.

Розглянемо базис $\{\bar{a},\bar{b},\bar{c}\}$. За означенням базису, будь-який вектор можна представити у вигляді лінійної комбінації

$$\bar{d}=\alpha\bar{a}+\beta\bar{b}+\gamma\bar{c}\ .$$

Остання рівність називається розкладом вектора $\bar{d}$ по базису $\{\bar{a},\bar{b},\bar{c}\}$, числа α,β,γ називаються координатами вектора $\bar{d}$ в цьому базисі.

Базис називається *ортонормованим*, якщо вектори базису – орти (попарно ортогональні (лежать на перпендикулярних прямих) та довжина кожного з них дорівнює одиниці). Для ортонормованого базису прийняте позначення $\{\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}$.

Ортонормований базис $\{\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}$ називається *правим* або додатно-орієнтованим, якщо з кінця третього вектора найкоротший поворот від першого до другого вектора видно проти годинникової стрілки. Якщо цей поворот здійснюється за годинниковою стрілкою, то базис називається *лівим*.

Ортонормований базис визначає декартову систему координат. Нехай точка O – початок декартової системи координат. Будь-який вектор з початком в точці O і кінцем M називається *радіус-вектором точки M*. Координати точки M відносно декартової системи координат дорівнюють координатам її радіус-вектора в базисі $\{\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}$, тобто якщо $\overline{OM}=x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$, то $M(x,y,z)$.

Якщо відомі координати початку $A(x_1,y_1,z_1)$ і кінця $B(x_2,y_2,z_2)$ вектора, то для знаходження координат самого вектора $\overline{AB}$ треба від координат кінця відняти відповідні координати початку, тобто

$$\overline{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)\ .$$

Якщо існує таке дійсне число k, що має місце рівність $\bar{b}=k\cdot\bar{a}$, то вектори $\bar{a}$ та $\bar{b}$ колінеарні. Нехай відомі координати цих векторів: $\bar{a}=(a_1,a_2,a_3)$ і $\bar{b}=(b_1,b_2,b_3)$. Тоді *умовою колінеарності* векторів $\bar{a}$ та $\bar{b}$ буде пропорційність їх відповідних координат:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}\ .$$

Приклад 5.1. Перевірити, чи є колінеарними вектори $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$, якщо $A(1,-3,2)$, $B(2,-5,6)$, $C(4,0,7)$, $D(1,6,19)$.

Знайдемо координати векторів

$$\overline{AB}=(2-1,-5-(-3),6-2)=(1,-2,4),\quad \overline{CD}=(1-4,6-0,19-7)=(-3,6,12)\ .$$

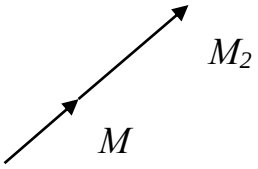
Запишемо відношення відповідних координат

$$\frac{1}{-3}=\frac{-2}{6}\neq\frac{4}{12}\ \Leftrightarrow\ -\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}\neq\frac{1}{3}\ .$$

Координати непропорційні, отже вектори $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ не є колінеарними.

Ділення відрізка в даному відношенні

Нехай маємо дві точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ та $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Знайти таку точку $M(x, y, z)$, яка належить прямій M_1M_2 та ділить його в даному відношенні α.



$$\frac{M_1M}{MM_2} = \alpha.$$

Формули для координат точки M мають вигляд

$$x = \frac{x_1 + \alpha x_2}{1+\alpha},\ y = \frac{y_1 + \alpha y_2}{1+\alpha},\ z = \frac{z_1 + \alpha z_2}{1+\alpha},$$

якщо $\alpha \neq -1$.

Приклад 5.2. Знайти координати точки M, яка ділить відрізок M_1M_2 у відношенні 2:3, якщо $M_1 = (-1,0,5)$, $M_2 = (-1,-5,0)$.

$$x = \frac{-1 + \frac{2}{3}\cdot(-1)}{1+\frac{2}{3}} = -1,\quad y = \frac{0 + \frac{2}{3}\cdot(-5)}{1+\frac{2}{3}} = -2,\quad z = \frac{5 + \frac{2}{3}\cdot 0}{1+\frac{2}{3}} = 3.$$

Отримали точку $M(-1,-2,3)$.

Тема 6. Нелінійні операції над векторами

Скалярний добуток векторів

Скалярним добутком двох векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називається число, що дорівнює добутку довжин цих векторів та косинуса кута між ними

$$(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\varphi, \qquad (6.1)$$

$\varphi = \angle(\bar{a}, \bar{b})$.

Властивості скалярного добутку

1. Комутативна властивість множення:
$$(\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{b}, \bar{a}).$$
2. Асоціативна властивість відносно множення на число:
$$(\lambda\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{a}, \lambda\bar{b}) = \lambda(\bar{a}, \bar{b}).$$
3. Дистрибутивна властивість відносно додавання векторів:
$$(\bar{a} + \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{a}, \bar{c}) + (\bar{b}, \bar{c}).$$
4. Скалярний добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли ці вектори ортогональні
$$(\bar{a}, \bar{b}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{a} \perp \bar{b}.$$
5. Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його довжини
$$\bar{a}^2 = |\bar{a}|^2.$$

Якщо задано два вектори $\bar{a}=(a_1,a_2,a_3)$ і $\bar{b}=(b_1,b_2,b_3)$, то їх скалярний добуток обчислюється за формулою:

$$(\bar{a},\bar{b})=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3. \qquad (6.2)$$

Тоді:

1. Необхідною і достатньою умовою ортогональності векторів $\bar{a}=(a_1,a_2,a_3)$ і $\bar{b}=(b_1,b_2,b_3)$ є рівність

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0.$$

2. Довжина вектора $\bar{a}=(a_1,a_2,a_3)$ визначається за формулою

$$|\bar{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.$$

3. Кут між векторами $\bar{a}=(a_1,a_2,a_3)$ і $\bar{b}=(b_1,b_2,b_3)$ визначається за формулою

$$\cos\varphi=\frac{(\bar{a},\bar{b})}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}. \qquad (6.3)$$

Векторний добуток векторів

Векторним добутком векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називається вектор $\bar{c}$, який має властивості :

1. довжина вектора $\bar{c}$ дорівнює $|\bar{c}|=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\sin\varphi$;
2. вектор $\bar{c}$ перпендикулярний до кожного з векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$;
3. вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ утворюють праву трійку.

Позначають векторний добуток одним із символів $\bar{a}\times\bar{b}$ або $[\bar{a},\bar{b}]$.

Властивості векторного добутку.

1. Антикомутативність:

$$[\bar{a},\bar{b}]=-[\bar{b},\bar{a}].$$

2. Асоціативність відносно множення на число:

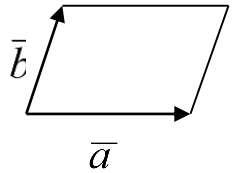
$$[\lambda\bar{a},\bar{b}]=[\bar{a},\lambda\bar{b}]=\lambda[\bar{a},\bar{b}].$$

3. Дистрибутивність відносно додавання векторів:

$$[\bar{a}+\bar{b},\bar{c}]=[\bar{a},\bar{c}]+[\bar{b},\bar{c}].$$

4. Векторний добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли ці вектори колінеарні.

5. Модуль векторного добутку не колінеарних векторів дорівнює площі паралелограма, побудованого на цих векторах



$$S=|[\bar{a},\bar{b}]| \qquad (6.4)$$

Якщо задано два вектори $\bar{a}=(a_1,a_2,a_3)$ і $\bar{b}=(b_1,b_2,b_3)$, то їх векторний добуток визначається за формулою:

$$[\bar{a},\bar{b}]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}. \qquad (6.5)$$

Приклад 6.1. Знайти площу трикутника, заданого вершинами $A(1,2,0)$, $B(0,-2,1)$, $C(-1,0,2)$.

Площа трикутника ABC дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$. Отже,

$$[\overline{AB},\overline{AC}]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -1 & -4 & 1\\ -2 & -2 & 2\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}-4 & 1\\ -2 & 2\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -2 & 2\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}-1 & -4\\ -2 & -2\end{vmatrix}=-6\bar{i}-0\,\bar{j}-6\bar{k}=$$

$$=(-6,0,-6)$$

Тоді $S_{\Delta}=\frac{1}{2}|[\overline{AB},\overline{AC}]|=\frac{1}{2}\sqrt{(-6)^2+0^2+(-6)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{72}=\frac{6\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$.

Мішаний добуток векторів

Мішаним добутком трьох векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ називається скалярний добуток векторного добутку векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ на вектор $\bar{c}$:

$$(\bar{a},\bar{b},\bar{c})=([\bar{a},\bar{b}],\bar{c}).$$

Властивості мішаного добутку

1. Якщо в мішаному добутку поміняти місцями два вектори, то мішаний добуток змінить знак:

$$(\bar{a},\bar{b},\bar{c})=-(\bar{b},\bar{a},\bar{c})=-(\bar{a},\bar{c},\bar{b})=-(\bar{c},\bar{b},\bar{a}).$$

2. При циклічній перестановці векторів мішаний добуток не змінюється:

$$(\bar{a},\bar{b},\bar{c})=(\bar{b},\bar{c},\bar{a})=(\bar{c},\bar{a},\bar{b}).$$

3. Асоціативність відносно множення на число:

$$(\lambda\bar{a},\bar{b},\bar{c})=(\bar{a},\lambda\bar{b},\bar{c})=(\bar{a},\bar{b},\lambda\bar{c})=\lambda(\bar{a},\bar{b},\bar{c}).$$

4. Дистрибутивність відносно додавання векторів:

$$(\bar{a}+\bar{b},\bar{c},\bar{d})=(\bar{a},\bar{c},\bar{d})+(\bar{b},\bar{c},\bar{d}).$$

5. Об’єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ дорівнює модулю мішаного добутку цих векторів:

$$V_{пар}=|(\bar{a},\bar{b},\bar{c})|. \qquad (6.6)$$

Об’єм тетраедра (трикутної піраміди), побудованого на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$, дорівнює $\frac{1}{6}$ модуля мішаного добутку цих векторів:

$$V_{тетр} = \frac{1}{6}|(\bar{a},\bar{b},\bar{c})|. \qquad (6.7)$$

6. Необхідною і достатньою умовою компланарності трьох векторів є рівність нулю їх мішаного добутку.

Якщо вектори $\bar{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\bar{b}=(b_1,b_2,b_3)$, $\bar{c}=(c_1,c_2,c_3)$ задані своїми координатами, то мішаний добуток обчислюється за формулою

$$(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \qquad (6.8)$$

Приклад 6.2. Обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\bar{a}=(2,4,-1)$, $\bar{b}=(3,0,5)$, $\bar{c}=(-4,1,3)$.

$$(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 5 \\ -4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0-3-80-0-10-36 = -129.$$

$V = 129$ *куб.од.*

Застосування векторів у біології

Розглянемо популяцію, яка складається з n вікових груп. Тоді кількість особин популяції в кожний окремий момент часу t можна охарактеризувати вектором $\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ - кількість особин популяції віком i в момент часу t.

Популяційний вектор екосистеми, яка утворена n співіснуючими видами, визначають як n-мірний вектор $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}|$, де i-та компонента x_i характеризує кількість особин i-го виду.

Якщо кількість особин кожного виду подвоюється, то новий популяційний вектор набуде вигляду $\bar{x} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ \vdots \\ 2x_n \end{pmatrix}$. Якщо усі види, за винятком

першого, вимруть, то новий популяційний вектор набуде вигляду $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Якщо в екосистему додають по три особини кожного виду, то новий популяційний вектор набуде вигляду $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 + 3 \\ x_2 + 3 \\ \vdots \\ x_n + 3 \end{pmatrix}$.

Розглянемо дві ізольовані екосистеми з популяційними векторами $\bar{x}$ і $\bar{y}$ відповідно, якщо їх об'єднати в одну, то популяційний вектор нової екосистеми дорівнюватиме $\bar{x} + \bar{y}$.

Приклади розв'язання задач до тем 5-6

Приклад 1. Знайти $(\bar{a}, \bar{b})$, якщо $|\bar{a}| = 2, |\bar{b}| = 3, \varphi = \angle(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{\pi}{3}$.

Розв'язання. За формулою (6.1) маємо

$$(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\varphi = 2 \cdot 3 \cdot \cos\frac{\pi}{3} = 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 3.$$

Приклад 2. Знайти $(\bar{a}, \bar{b})$, якщо $\bar{a} = (4,-3,1), \bar{b} = (5,2,-1)$

Розв'язання. За формулою (6.2)

$$(\bar{a}, \bar{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 4 \cdot 5 + (-3) \cdot 2 + 1 \cdot (-1) = 13.$$

Приклад 3. Показати, що вектори $\bar{a} = (4,-3,1), \bar{b} = (2,1,-5)$ ортогональні.

Розв'язання. Знайдемо скалярний добуток векторів

$$(\bar{a}, \bar{b}) = 4 \cdot 2 + (-3) \cdot 1 + 1 \cdot (-5) = 0.$$

Оскільки $(\bar{a}, \bar{b}) = 0$, то за властивістю 4 скалярного добутку вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ ортогональні.

Приклад 4. Знайти кут φ між векторами $\bar{a} = (4,-3,0), \bar{b} = (2,1,2)$.

Розв'язання . Знайдемо з формули (6.3)

$$\cos\varphi = \frac{(\bar{a}, \bar{b})}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} = \frac{4 \cdot 2 + (-3) \cdot 1 + 0 \cdot 2}{\sqrt{4^2 + (-3)^2 + 0^2}\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} =$$

$$= \frac{5}{\sqrt{25}\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$$

Приклад 5. Визначити кут при вершині A в трикутнику ABC, якщо $A(5,1,-4)$, $B(9,-8,-3)$, $C(16,-6,-11)$.

Розв'язання. Знайдемо $\overline{AB}=(4,-9,1)$ і $\overline{AC}=(11,-7,-7)$. Тоді за формулою (6.3)

$$\cos\angle A=\frac{(\overline{AB},\overline{AC})}{|\overline{AB}|\cdot|\overline{AC}|}=\frac{4\cdot 11+(-9)\cdot(-7)+1\cdot(-7)}{\sqrt{4^2+(-9)^2+1^2}\sqrt{11^2+(-7)^2+(-7)^2}}=\frac{100}{\sqrt{98}\sqrt{219}}\approx 0{,}682,$$

звідки $\angle A\approx 47^0$.

Приклад 6. Знайти векторний добуток $[\bar{a},\bar{b}]$, якщо $\bar{a}=(2,-3,1)$, $\bar{b}=(1,-4,2)$.

Розв'язання . За формулою (6.5) маємо

$$[\bar{a},\bar{b}]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & -3 & 1\\ 1 & -4 & 2\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}-3 & 1\\ -4 & 2\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & -4\end{vmatrix}=-2\bar{i}-3\bar{j}-5\bar{k}.$$

Отже, $[\bar{a},\bar{b}]=(-2,-3,-5)$.

Приклад 7. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}=(3,-1,2)$ і $\bar{b}=(1,2,-1)$.

Розв'язання. За формулою (6.4) шукана площа паралелограма дорівнює $S=|[\bar{a},\bar{b}]|$. Знайдемо

$$[\bar{a},\bar{b}]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 3 & -1 & -2\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 2 & -1\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}3 & -2\\ 1 & -1\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=5\bar{i}+\bar{j}+7\bar{k}.$$

Тоді $S=|[\bar{a},\bar{b}]|=\sqrt{5^2+1^2+7^2}=\sqrt{75}=5\sqrt{3}$ (кв.од.)

Приклад 8. Знайти площу трикутника, заданого вершинами $A(1,2,0)$, $B(0,-2,1)$, $C(-1,0,2)$. Обчислити довжину висоти CD.

Розв'язання. Площа трикутника ABC дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$. Знаходимо $\overline{AB}=(-1,-4,1)$, $\overline{AC}=(-2,-2,2)$ та їх векторний добуток

$$[\overline{AB},\overline{AC}]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -1 & -4 & 1\\ -2 & -2 & 2\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}-4 & 1\\ -2 & 2\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -2 & 2\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}-1 & -4\\ -2 & -2\end{vmatrix}=-6\bar{i}+0\bar{j}-6\bar{k}.$$

Тоді $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|[\overline{AB},\overline{AC}]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(-6)^2+(-6)^2}=3\sqrt{2}$ (кв.од.)

З іншого боку $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\right|\cdot\left|\overline{CD}\right|$. Звідси

$$CD=\left|\overline{CD}\right|==\frac{2S_{ABC}}{\left|\overline{AB}\right|}=\frac{2\cdot 3\sqrt{2}}{\sqrt{(-1)^2+(-4)^2+1^2}}=\frac{6\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}=2.$$

Приклад 9. Знайти мішаний добуток векторів $\bar{a}=(2,-3,1)$, $\bar{b}=(1,-4,2)$ і $\bar{c}=(4,0,5)$.

Розв'язання. Мішаний добуток знайдемо за формулою (6.8)

$$(\bar{a},\bar{b},\bar{c})=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}=-40+(-24)-(-16)-(-15)=-33.$$

Приклад 10. Довести, що точки $A(0,1,2)$, $B(-2,0,1)$, $C(-1,5,8)$, $D(1,6,11)$ лежать в одній площині.

Розв'язання. Точки A,B,C,D лежать в одній площині, якщо вектори $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ і $\overline{AD}$ компланарні. За властивістю 6 мішаного добутку вектори компланарні, якщо їх мішаний добуток дорівнює нулю. Знайдемо координати векторів $\overline{AB}=(-2,-1,-1)$, $\overline{AC}=(-1,4,6)$ і $\overline{AD}=(1,5,9)$ та їх мішаний добуток

$$(\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD})=\begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 9 \end{vmatrix}=0.$$

Отже, точки A,B,C,D лежать в одній площині.

Завдання для самостійного розв'язання

1. Для векторів $\bar{a}=(3,-4,1)$ і $\bar{b}=(-1,2,6)$ визначити $2\bar{a}-3\bar{b}$, $(\bar{a},\bar{b})$, $(3\bar{a}+\bar{b})^2$, $[\bar{a},\bar{b}]$.

2. Дано точки $A(1,2,-3)$, $B(-1,5,-3)$, $C(2,1,-7)$, $D(5,-5,1)$. Знайти проекції вектора $\bar{a}=\overline{AB}+\overline{CD}$ на вектори $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$.

3. Показати, що чотирикутник з вершинами $A(1,3)$, $B(4,7)$, $C(2,8)$, $D(-1,4)$ є паралелограмом та знайти точку перетину його діагоналей.

4. Знайти довжин сторін трикутника та його внутрішні кути, якщо $A(1,-1,4)$, $B(-2,-1,-1)$, $C(4,3,1)$.

5. Визначити координати кінців A і B відрізка, поділеного на три рівні частини точками $M(3,1,2)$ і $N(6,-1,1)$.

6. Визначити центр мас трикутника з вершинами $A(1,2,-3)$, $B(-1,5,-3)$, $C(2,1,-7)$.

7. Обчислити довжини діагоналей і площу паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}=\bar{k}-\bar{j}$ і $\bar{b}=\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}$, де $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ – орти.

8. Знайти площу трикутника ABC, якщо $A(2,1,-7)$, $B(2,4,-6)$, $C(6,4,-5)$.

9. Обчислити об'єм тетраедра з вершинами в точках $A_1(3,0,-1)$, $A_2(6,-2,1)$, $A_3(5,1,-3)$, $A_4(-1,3,8)$ та його висоту, проведену з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

10. Перевірити, чи лежать чотири точки $A(1,-2,-6)$, $B(2,7,-1)$, $C(2,5,9)$, $D(1,-4,4)$ в одній площині.

11. Дослідити вектори $\bar{a}=(5,4,-1)$, $\bar{b}=(2,0,1)$ і $\bar{c}=(-1,2,3)$ на лінійну залежність.

Тема 7. Пряма на площині

Пряма на площині може бути задана різними способами: точкою і вектором, паралельним даній прямій; двома точками; точкою і вектором, перпендикулярним до даної прямої; тощо. Різним способам задання прямої відповідають у прямокутній системі координат різні види її рівнянь.

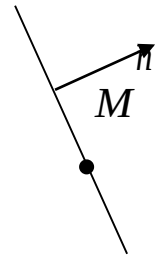
1) Загальне рівняння прямої на площині

$$Ax+By+C=0. \qquad (7.1)$$

Коефіцієнти при невідомих є координатами вектора $\bar{n}=(A,B)$, перпендикулярного прямій, який називають *нормальним вектором* прямої.

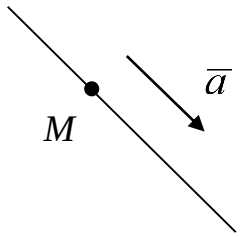
2) Рівняння прямої за точкою $M(x_0,y_0)$ та нормальним вектором $\bar{n}=(A,B)$

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0. \qquad (7.2)$$



3) Рівняння прямої за точкою $M(x_0,y_0)$ та напрямним вектором $\bar{a}=(m,p)$

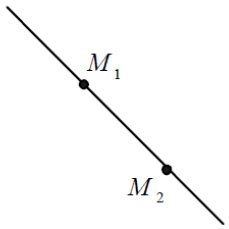
(Вектор, паралельний прямій, називається її *напрямним* вектором).



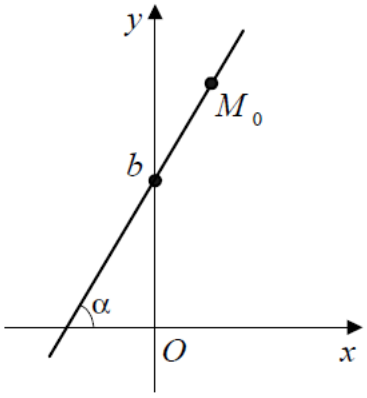
$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{p}. \qquad (7.3)$$

4) Рівняння прямої за двома точками $M_1(x_1,y_1)$ і $M_2(x_2,y_2)$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \qquad (7.4)$$



5) Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом



$$y = kx + b, \qquad (7.5)$$
$$k = tg\alpha$$

Кутовий коефіцієнт k дорівнює тангенсу кута між прямою та додатним напрямом осі Ox, пряма проходить через точку $(0, b)$.

6) Рівняння прямої, що проходить через точку $M(x_0, y_0)$ *та має кутовий коефіцієнт* k

$$y - y_0 = k(x - x_0). \qquad (7.6)$$

Взаємне розташування двох прямих на площині

Нехай дві прямі задані своїми загальними рівняннями

$$l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$
$$l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Нормальні вектори цих прямих будуть мати координати $\bar{n}_1 = (A_1, B_1)$ і $\bar{n}_2 = (A_2, B_2)$ відповідно. Тоді один з кутів між прямими знаходиться за формулою

$$\cos\varphi = \frac{(\bar{n}_1, \bar{n}_2)}{|\bar{n}_1| \cdot |\bar{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^{\,2} + B_1^{\,2}}\sqrt{A_2^{\,2} + B_2^{\,2}}}. \qquad (7.7)$$

Умова перпендикулярності прямих:

якщо прямі l_1 та l_2 перпендикулярні, то їх нормальні вектори також перпендикулярні, отже, $(\bar{n}_1, \bar{n}_2) = 0$, або

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0. \qquad (7.8)$$

Умова паралельності прямих:

якщо прямі l_1 та l_2 паралельні, то їх нормальні вектори також паралельні, а значить їх координати пропорційні. Отже,

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \qquad (7.9)$$

(при $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ прямі паралельні, при $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ прямі співпадають).

Якщо прямі задані рівняннями з кутовими коефіцієнтами $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$, то один з кутів між ними знаходиться за формулою

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}. \qquad (7.10)$$

Умова перпендикулярності прямих:

$$k_1 k_2 = -1. \tag{7.11}$$

Умова паралельності прямих:

$$k_1 = k_2. \tag{7.12}$$

Відстань від точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$ знаходиться за формулою

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{7.13}$$

Приклади розв'язання задач до теми 7

Приклад 1. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(-1,3)$ перпендикулярно вектору $\bar{n} = (3,4)$.

Розв'язання. Шукане рівняння має вигляд (7.2)

$$3(x-(-1)) + 4(y-3) = 0, \text{ або}$$

$$3x + 4y - 9 = 0.$$

Приклад 2. Знайти рівняння прямої. Яка проходить через точку $M_0(2,-5)$ паралельно вектору $\bar{a} = (-3,7)$.

Розв'язання. За рівнянням (7.3)

$$\frac{x-2}{-3} = \frac{y+5}{7},$$

$$7(x-2) = -3(y+5), \text{ або}$$

$$7x + 3y + 1 = 0.$$

Приклад 3. Записати рівняння прямої, яка проходить через точки $M_1(3,-6)$ і $M_2(5,2)$.

Розв'язання. За рівнянням (7.4)

$$\frac{x-3}{5-3} = \frac{y+6}{2+6},$$

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y+6}{8}, \text{ або}$$

$$4x - y - 18 = 0.$$

Приклад 4. Знайти рівняння прямої, яка відтинає від осі Oy відрізок $b = 5$ і утворює кут $\alpha = 60^0$ з додатним напрямом осі Ox.

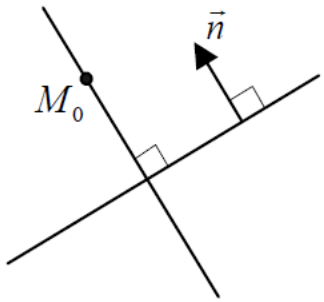
Розв'язання. Скористаємось рівнянням (7.5). Знайдемо кутовий коефіцієнт $k = tg\alpha = tg60^0 = \sqrt{3}$. Тоді $y = \sqrt{3}x + 5$ - рівняння шуканої прямої.

Приклад 5. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(-3,1)$ і утворює кут $\alpha = 30^0$ з додатним напрямом осі Ox.

Розв'язання. Скористаємось рівнянням (7.6). Знайдемо кутовий коефіцієнт $k = tg\alpha = tg30^0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Тоді $y - 1 = \frac{\sqrt{3}}{3}x - (-3)$, або $\sqrt{3}x - 3y + 12 = 0$.

Приклад 6. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(-1,4)$ і: а) перпендикулярна до прямої $2x - 3y + 6 = 0$; б) паралельна прямій $4x - 3y + 5 = 0$.

Розв'язання.

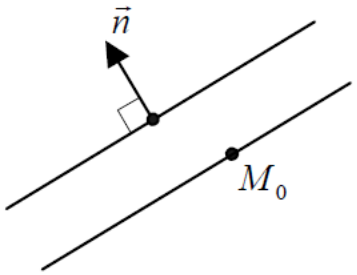


а) Якщо шукана пряма перпендикулярна до заданої прямої, то вона буде паралельною до її нормального вектора $\bar{n} = (2,-3)$, тобто вектор $\bar{n}$ буде напрямним для шуканої прямої. Підставимо координати точки M_0 та вектора $\bar{n}$ в рівняння (7.3)

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-4}{-3} \text{ або}$$

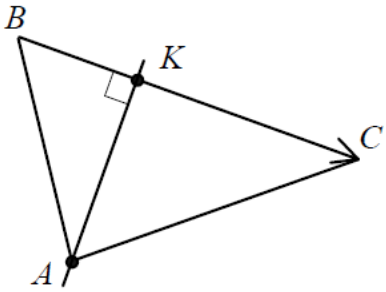
$$-3x - 2y + 5 = 0.$$

б) Якщо шукана пряма паралельна до заданої прямої $4x - 3y + 5 = 0$, то її нормальним вектором може бути вектор $\bar{n} = (4,-3)$. Підставимо координати точки M_0 та вектора $\bar{n}$ в рівняння (7.2)



$$4(x+1) - 3(y-4) = 0 \text{ або } 4x - 3y + 16 = 0.$$

Приклад 7. В трикутнику, заданому вершинами $A(2,-3)$, $B(-5,2)$, $C(1,3)$, знайти рівняння висоти, проведеної з вершини A до сторони BC.



Розв'язання. Висота AK перпендикулярна до вектора $\overline{BC} = (6,1)$ та проходить через точку A. Тому можемо скористатись рівнянням (7.2), отримаємо

$$6 \cdot (x-2) + 1 \cdot (y+3) = 0 \text{ або } 6x + y - 9 = 0.$$

Приклад 8. Знайти кут між прямими

а) $-x + 5y + 4 = 0$ і $2x + 3y - 9 = 0$;

б) $y = \frac{1}{2}x + 5$ і $y = 3x - 8$

Розв'язання.

а) Знайдемо нормальні вектори заданих прямих: $\bar{n}_1 = (-1,5)$ і $\bar{n}_2 = (2,3)$. Тоді за формулою (7.7)

$$\cos\varphi = \frac{-1\cdot 2 + 5\cdot 3}{\sqrt{(-1)^2+5^2}\sqrt{2^2+3^2}} = \frac{13}{\sqrt{26}\sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \varphi = \arccos\frac{1}{\sqrt{2}} = 45^0.$$

б) Випишемо кутові коефіцієнти заданих прямих $k_1 = \frac{1}{2}$, $k_2 = 3$. Тоді за формулою (7.10)

$$tg\varphi = \frac{3-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}\cdot 3} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}} = 1, \qquad \varphi = arctg1 = 45^0.$$

Приклад 10. Знайти відстань від точки $A(4,3)$ до прямої $6x-8y+1=0$.

Розв'язання. За формулою (7.13)

$$d = \frac{|6\cdot 4 - 8\cdot 3 + 1|}{\sqrt{6^2+(-8)^2}} = \frac{1}{\sqrt{100}} = \frac{1}{10}.$$

Завдання для самостійного розв'язання

1. Знайти точку перетину прямих $2x+7y+17=0$ і $3x+y-3=0$.

2. Знайти рівняння прямої, яка відтинає на осі Oy відрізок $b=-2$ і утворює кут $\alpha = 45^0$ з додатним напрямом осі Ox.

3. Відомі координати вершин трикутника $A(2,3)$, $B(8,7)$, $C(-2,9)$. Знайти рівняння середньої лінії цього трикутника, яка паралельна до сторони AC.

4. Знайти точку перетину медіан трикутника, якщо відомі координати його вершин $A(3,5)$, $B(-1,8)$, $C(-5,-4)$.

5. Знайти проекцію точки $P(7,5)$ на пряму $2x+3y-3=0$ і точку, симетричну точці P відносно даної прямої.

6. Визначити кут між прямими

   а) $4x+2y+3=0$ і $x+2y-3=0$;

   б) $y=x+5$ і $y=2x-3$.

7. Знайти відстань між паралельними прямими $x+2y-7=0$ і $x+2y+3=0$.

8. Записати рівняння прямої, що проходить через точку перетину прямих $5x-y+10=0$ та $8x+4y+9=0$ і паралельна прямій $x+3y=0$.

9. Знайти відстань від точки $P(1,-2)$ до прямої $3x-4y+9=0$.

10. Знайти відстань від точки перетину прямих $3x+2y-5=0$ і $3x+2y-7=0$ до прямої $x-y+9=0$.

Тема 8. Криві другого порядку

До кривих другого порядку належать такі лінії: коло, еліпс, гіпербола, парабола, рівняння яких у декартовій системі координат є рівняннями другого степеня відносно x і y. Криві другого порядку називають ще конічними перерізами, оскільки їх можна отримати як лінії перетину прямого кругового конуса площинами. Так, якщо перетнути конус площиною, яка не проходить через вершину конуса і перетинає всі його твірні, то матимемо еліпс (рис. 8.1, а), якщо перетнути конус площиною, паралельною двом твірним конуса, то дістанемо гіперболу (рис. 8.1, б), якщо перетнути конус площиною, паралельною одній твірній конуса, то матимемо параболу (рис. 8.1, в).

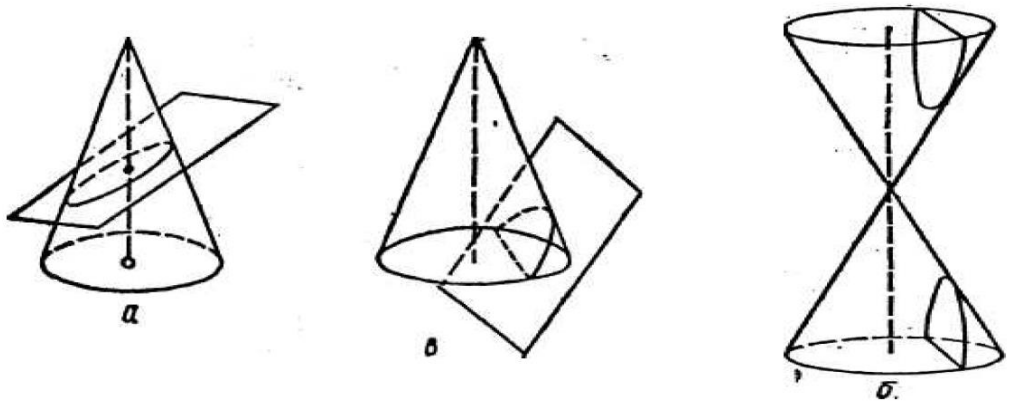


Рисунок 8.1 – Конічні перерізи

Колом називається множина всіх точок площини, рівновіддалених від даної точки цієї площини, яка називається центром.

Рівняння кола з центром в початку координат і радіусом R має вигляд

$$x^2 + y^2 = R^2. \tag{8.1}$$

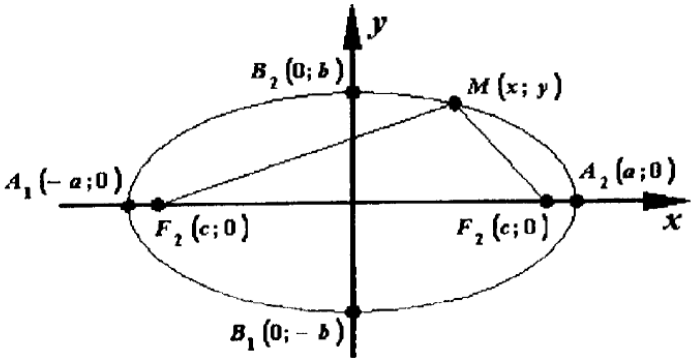
Рівняння кола з центром в точці $O(x_0, y_0)$ і радіусом R має вигляд

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \tag{8.2}$$

Еліпсом називається множина точок площини, сума відстаней від яких до двох заданих точок, що називаються фокусами, є величина постійна, більша за відстань між фокусами.

Рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі Ox, має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (a > b) \tag{8.3}$$



де a - довжина великої півосі, b - довжина малої півосі. Фокуси еліпса знаходяться у точках $F_1(-c,0)$ і $F_2(c,0)$. Залежність між параметрами a,b,c виражається співвідношенням

$$c^2 = a^2 - b^2. \tag{8.4}$$

Ексцентриситетом еліпса називається відношення фокусної відстані $2c$ до великої осі $2a$

$$\varepsilon = \frac{c}{a}. \tag{8.5}$$

Ексцентриситет еліпса $\varepsilon < 1$.

Директрисами еліпса називаються прямі, які перпендикулярні до великої осі еліпса і лежать на відстані $\frac{a}{\varepsilon}$ від центра еліпса. *Рівняння директрис еліпса* мають вигляд:

$$d_1 : x = \frac{a}{\varepsilon},\ d_2 : x = -\frac{a}{\varepsilon}. \tag{8.6}$$

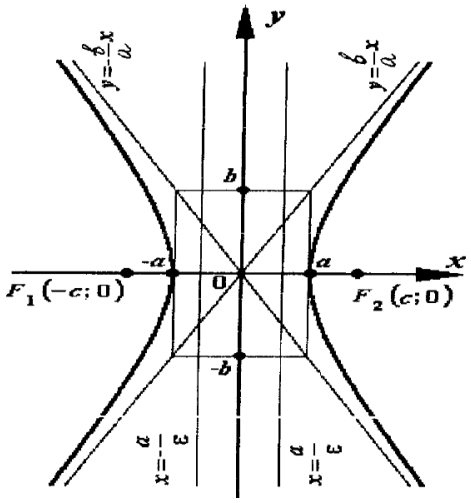
Якщо центр симетрії еліпса знаходиться в точці $M(x_0, y_0)$, а осі симетрії паралельні осям Ox, Oy, то рівняння еліпса має вигляд

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1. \tag{8.7}$$

Гіперболою називається множина точок площини, абсолютна величина різниці відстаней від яких до двох даних точок, що називаються фокусами, є величина постійна, менша за відстань між фокусами.

Рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі Ox, має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{8.8}$$



де a - довжина дійсної півосі, b – довжина уявної півосі. Фокуси гіперболи знаходяться у точках $F_1(-c,0)$ і $F_2(c,0)$. Залежність між параметрами a,b,c виражається співвідношенням

$$c^2 = a^2 + b^2. \tag{8.9}$$

Ексцентриситетом гіперболи називається відношення фокусної відстані $2c$ до дійсної осі $2a$

$$\varepsilon = \frac{c}{a}. \tag{8.10}$$

Ексцентриситет гіперболи $\varepsilon > 1$.

Директрисами гіперболи називаються прямі, які перпендикулярні до дійсної осі гіперболи і лежать на відстані $\frac{a}{\varepsilon}$ від центра гіперболи. *Рівняння директрис гіперболи* мають вигляд:

$$d_1 : x = \frac{a}{\varepsilon},\ d_2 : x = -\frac{a}{\varepsilon}. \tag{8.11}$$

Гіпербола має дві *асимптоти*, рівняння яких

$$y = \frac{b}{a}x \ \text{ і } \ y = -\frac{b}{a}x. \tag{8.12}$$

Якщо центр симетрії гіперболи знаходиться в точці $M(x_0, y_0)$, а осі симетрії паралельні осям Ox, Oy, то рівняння гіперболи має вигляд

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1. \tag{8.13}$$

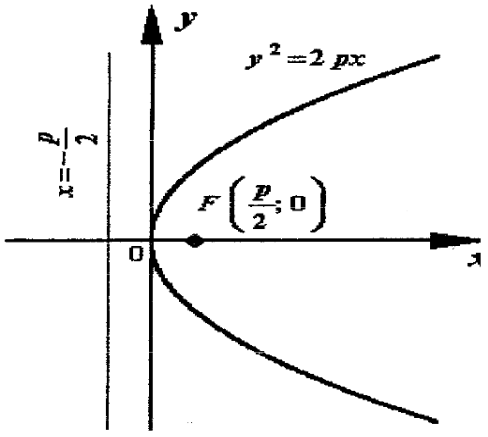
Параболою називають множину точок на площині, рівновіддалених від даної точки (фокуса) і від даної прямої (директриси).

Рівняння параболи з вершиною в початку координат, віссю симетрії якої є вісь Ox, має вигляд

$$y^2 = 2px, \tag{8.14}$$

де p – параметр параболи.

Якщо $p > 0$, то гілки параболи напрямлені вправо, якщо $p < 0$, то гілки параболи напрямлені вліво.



Фокус параболи знаходиться у точці $F(\frac{p}{2},0)$. Рівняння директриси $x = -\frac{p}{2}$.

Рівняння параболи з вершиною в початку координат, віссю симетрії якої є вісь Oy, має вигляд

$$x^2 = 2py. \qquad (8.15)$$

Якщо $p > 0$, то гілки параболи напрямлені вгору, якщо $p < 0$, то гілки параболи напрямлені вниз. Фокусом такої параболи є точка $F(0, \frac{p}{2})$, а рівняння директриси $y = -\frac{p}{2}$.

Приклади розв'язання задач до теми 8

Приклад 1. Складіть рівняння кола з центром у точці $A(-3,1)$ і з радіусом, що дорівнює 4. Побудуйте це коло.

Розв'язання. Підставимо в рівняння (8.2) задані за умовою координати точки A та радіус і отримаємо

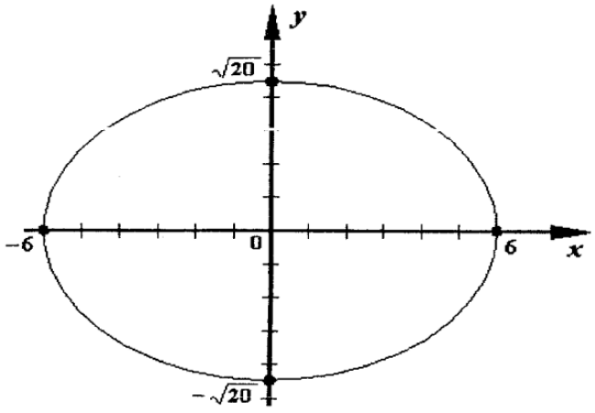
$$(x+3)^2 + (y-1)^2 = 16.$$

Приклад 2. Знайти параметри еліпса $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{36} = 1$, координати його фокусів та відстань між ними.

Розв'язання. З рівняння еліпса велика піввісь $a = 7$, мала піввісь $b = 6$. Із співвідношення (8.4) $c^2 = 49 - 36 = 13$, $c = \sqrt{13}$. Отже, координати фокусів $F_1(-\sqrt{13},0)$ і $F_2(\sqrt{13},0)$, а відстань між ними $2c = 2\sqrt{13}$.

Приклад 3. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі Ox, якщо велика вісь дорівнює 12, а відстань між фокусами дорівнює 8.

Розв'язання. З умови задачі випливає, що $a = 6$ і $c = 4$. Із співвідношення (8.4) знайдемо b



$$b^2 = 6^2 - 4^2 = 36 - 16 = 20,$$

$$b = \sqrt{20}$$

Підставимо значення a, b в рівняння (8.3), отримаємо $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$.

Приклад 4. Скласти рівняння еліпса з фокусами на осі Ox, якщо його велика вісь дорівнює 16, а ексцентриситет $\varepsilon = \frac{2}{3}$.

Розв'язання. За умовою $2a = 16$, отже $a = 8$. Підставимо це значення в формулу (8.10) $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{c}{8}$. За умовою $\varepsilon = \frac{2}{3}$, отже $\frac{c}{8} = \frac{2}{3}$ і $c = \frac{16}{3}$. Із

співвідношення (8.4) знайдемо $b^2 = a^2 - c^2 = 64 - \frac{256}{9} = \frac{320}{9}$. Тоді шукане рівняння еліпса буде мати вигляд $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{320/9} = 1$.

Приклад 5. Скласти рівняння еліпса з фокусами на осі Ox, якщо він проходить через точки $A(\sqrt{3}, \sqrt{6})$ і $B(3, \sqrt{2})$.

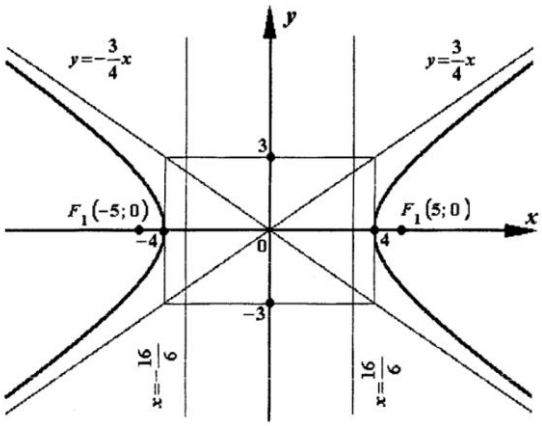
Розв'язання. Щоб скласти рівняння еліпса, треба знайти параметри a і b. Знайдемо їх, підставивши координати точок в рівняння еліпса (8.3)

$$\begin{cases} \frac{3}{a^2} + \frac{6}{b^2} = 1, \\ \frac{9}{a^2} + \frac{2}{b^2} = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a^2} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{6}{b^2}\right), \\ \frac{9}{3}\left(1 - \frac{6}{b^2}\right) + \frac{2}{b^2} = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 12, \\ b^2 = 8. \end{cases}$$

Отже, шукане рівняння має вигляд $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{8} = 1$.

Приклад 6. Побудувати гіперболу $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. Знайти фокуси, ексцентриситет, рівняння асимптот та директрис.

Розв'язання. З рівняння гіперболи знайдемо її півосі $a = 4, b = 3$. Тоді із співвідношення (8.9) знайдемо $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$. Фокуси гіперболи $F_1(-5,0)$ і $F_2(5,0)$. Знайдемо ексцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$. Рівняння асимптот (8.12) мають вигляд $y = \pm\frac{3}{4}x$. Рівняння директрис (8.11) мають вигляд $x = \pm\frac{4}{5/4} = \pm\frac{16}{5}$.



Приклад 7. Скласти рівняння гіперболи з фокусами на осі Ox, якщо її дійсна вісь дорівнює 24, а відстань між фокусами дорівнює 26.

Розв'язання. З умови задачі $2a = 24 \Rightarrow a = 12,\ 2c = 26 \Rightarrow c = 13$. Знайдемо

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{169 - 144} = 5.$$

Підставимо знайдені параметри в рівняння (8.8) і отримаємо

$$\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1.$$

Приклад 8. Скласти рівняння гіперболи за координатами її фокусів $F_1(-20,0)$, $F_2(20,0)$ і ексцентриситетом $\varepsilon = \frac{4}{3}$.

Розв'язання. З умови задачі маємо $c=20$. Підставимо це значення в формулу для ексцентриситету $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{20}{a}$. За умовою $\frac{20}{a}=\frac{4}{3}\Rightarrow a=15$. Далі знайдемо $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{400-225}=\sqrt{175}$. Підставимо знайдені параметри в рівняння (8.8) і отримаємо

$$\frac{x^2}{400}-\frac{y^2}{175}=1.$$

Приклад 9. Скласти рівняння гіперболи з фокусами на осі Ox, якщо довжина її дійсної осі дорівнює 16 і гіпербола проходить через точку $(10,3)$.

Розв'язання. За умовою $2a=16$, тобто $a=8$. Підставивши в рівняння (8.8) значення $a=8$ і координати заданої точки, отримаємо

$$\frac{10^2}{64}-\frac{3^2}{b^2}=1\Rightarrow b^2=16.$$

Підставимо знайдені параметри в рівняння (8.8) і отримаємо

$$\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{16}=1.$$

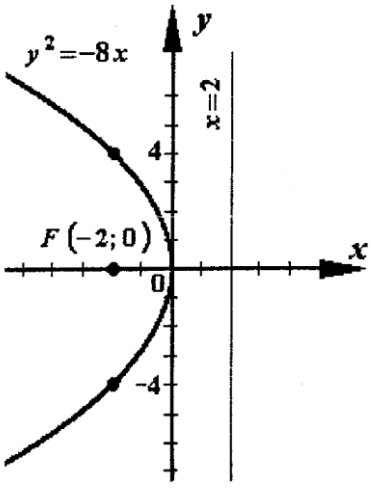
Приклад 10. Скласти рівняння параболи з вершиною у початку координат, якщо її фокус лежить у точці $F(3,0)$.

Розв'язання. Оскільки фокус лежить на осі Ox, то рівняння параболи має вигляд (8.14). Знайдемо параметр параболи. Оскільки координати фокуса $F\left(\frac{p}{2},0\right)$, то $\frac{p}{2}=3\Rightarrow p=6$. Підставивши значення параметра в рівняння параболи, отримаємо $y^2=12x$.

Приклад 11. Скласти рівняння параболи з вершиною у початку координат, яка симетрична відносно осі Oy і проходить через точку $A(2,-4)$.

Розв'язання. Шукана парабола симетрична відносно осі Oy, отже її рівняння має вигляд $x^2=2py$. Підставимо в це рівняння координати точки A $2^2=2p\cdot(-4)$ і знайдемо $p=-\frac{1}{2}$. Тоді рівняння параболи має вигляд $x^2=-y$.

Приклад 12. За заданим рівнянням параболи $y^2=-8x$ обчислити координати її фокуса, одержати рівняння директриси. Побудувати параболу.



Розв'язання. З рівняння параболи маємо $2p=-8\Rightarrow p=-4$. Парабола симетрична відносно осі Ox, її фокус лежить на осі симетрії і має координати $F\left(\frac{p}{2},0\right)$, тобто $F(-2,0)$. Рівняння директриси $x=-\frac{p}{2}$, тобто $x=2$.

Завдання для самостійного розв'язання

1. Знайти точки еліпсу $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$, відстань від яких до правого фокуса F дорівнює 14.

2. Знайти довжини осей, координати фокусів та ексцентриситет еліпса $16x^2+9y^2=144$.

3. Записати рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис симетрично відносно початку координат та схематично його побудувати, якщо а) велика піввісь дорівнює 13, а відстань між фокусами 10; б) мала піввісь дорівнює 4, а ексцентриситет $\varepsilon=\frac{4}{5}$; в) відстань між директрисами дорівнює 32, а ексцентриситет $\varepsilon=\frac{1}{2}$.

4. Скласти рівняння гіперболи та побудувати її. Якщо відстань між її вершинами дорівнює 20, а відстань між фокусами – 30.

5. Дійсна піввісь гіперболи дорівнює 5, ексцентриситет $\varepsilon=1{,}4$. Знайти рівняння гіперболи та побудувати її.

6. Гіпербола проходить через точки $\left(3;\frac{2\sqrt{15}}{5}\right)$ і $\left(-2\sqrt{5};3\right)$. Знайти рівняння гіперболи та побудувати її.

7. Скласти рівняння параболи, якщо її вершина знаходиться в початку координат, а директрисою є пряма $2y-5=0$. Побудувати цю параболу.

8. Скласти рівняння параболи, якщо її вершина знаходиться в початку координат, відстань від фокуса до вершини дорівнює 4, а віссю симетрії є вісь Ox.

Тема 9. Площина та пряма у просторі

Рівняння площини в просторі.

1)Загальне рівняння площини

$$Ax+By+Cz+D=0. \tag{9.1}$$

У прямокутній декартовій системі координат площина (9.1) перпендикулярна вектору $\bar{n}=(A,B,C)$, який називається *нормальним вектором* площини.

2) Рівняння площини за точкою $M_0(x_0,y_0,z_0)$ *та нормальним вектором* $\bar{n}=(A,B,C)$

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)+D=0. \tag{9.2}$$

3) *Рівняння площини за трьома точками* $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ *і* $M_3(x_3, y_3, z_3)$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (9.3)$$

Взаємне розташування двох площин в просторі.

Нехай дві площини задані своїми загальними рівняннями

$$\alpha_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$\alpha_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Нормальні вектори цих площин будуть мати координати $\bar{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ і $\bar{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ відповідно. Тоді один з кутів між векторами знаходиться за формулою

$$\cos\varphi = \frac{(\bar{n}_1, \bar{n}_2)}{|\bar{n}_1| \cdot |\bar{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \qquad (9.4)$$

Умова перпендикулярності площин:

якщо площини α_1 та α_2 перпендикулярні, то їх нормальні вектори також перпендикулярні, отже, $(\bar{n}_1, \bar{n}_2) = 0$, або

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \qquad (9.5)$$

Умова паралельності площин:

якщо площини α_1 та α_2 паралельні, то їх нормальні вектори також паралельні, а значить їх координати пропорційні. Отже,

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \qquad (9.6)$$

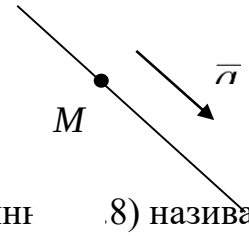
(при $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$ площини паралельні, при $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$ площини співпадають).

Відстань від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини $Ax + By + Cz + D = 0$ знаходиться за формулою

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (9.7)$$

Рівняння прямої в просторі

1) Рівняння прямої за точкою $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *і напрямним вектором* $\bar{a} = (m, n, p)$

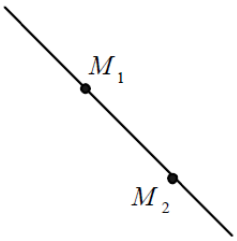


$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \qquad (9.8)$$

Рівнянн .8) називають *канонічними рівняннями* прямої у просторі.
У *парам...ричній формі* ці рівняння мають вигляд

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases} \qquad (9.9)$$

2) Рівняння прямої за двома точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ *і* $M_2(x_2, y_2, z_3)$



$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \qquad (9.10)$$

Пряма в просторі може бути задана як лінія перетину двох площин $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. *Загальними рівняннями* цієї прямої називаються систему рівнянь

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \qquad (9.11)$$

В цьому випадку напрямний вектор прямої дорівнює векторному добутку векторів $\bar{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ і $\bar{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$

$$\bar{a} = [\bar{n}_1, \bar{n}_2] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}. \qquad (9.12)$$

Кут між прямими $l_1 : \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}$ і $l_2 : \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$ знаходиться як кут між їх напрямними векторами $\bar{a}_1 = (m_1, n_1, p_1)$ і $\bar{a}_2 = (m_2, n_2, p_2)$:

$$\cos\varphi = \frac{(\bar{a}_1, \bar{a}_2)}{|\bar{a}_1| \cdot |\bar{a}_2|} = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}. \qquad (9.13)$$

Кут між прямою $l : \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$ та площиною $\alpha : Ax + By + Cz + D = 0$ знаходиться за формулою

$$\sin\phi = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \qquad (9.14)$$

Приклади розв'язання задач до теми 9

Приклад 1. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M(5,2,-1)$ перпендикулярно вектору $\bar{n} = (3,-4,2)$.

Розв'язання. За рівнянням (9.2) отримаємо

$$3(x-5) - 4(y-2) + 2(z+1) = 0,$$
$$3x - 4y + 2z - 5 = 0.$$

Приклад 2. Знайти рівняння площини, яка проходить через три точки $M_1(3,2,-1)$, $M_2(1,0,2)$, $M_3(-1,2,4)$.

Розв'язання. Скористаємось рівнянням (9.3)

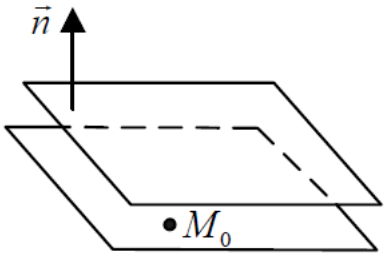
$$\begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z+1 \\ 1-3 & 0-2 & 2+1 \\ -1-3 & 2-2 & 4+1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z+1 \\ -2 & -2 & 3 \\ -4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x-3)\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - (y-2)\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} + (z+1)\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$-10(x-3) - 2(y-2) - 8(z+1) = 0,$$
$$10x + 2y + 8z - 26 = 0.$$

Приклад 3. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M(2,2,-3)$ паралельно площині $5x - 2y + z - 6 = 0$.

Розв'язання. Для заданої площини $5x - 2y + z - 6 = 0$ вектор нормалі $\bar{n} = (5,-2,1)$. Оскільки шукана площина паралельна заданій площині, то вона також буде перпендикулярна до вектора $\bar{n}$. Отже, з рівняння (9.2)



$$5(x-2) - 2(y-2) + 1(z+3) = 0,$$
$$5x - 2y + z - 3 = 0.$$

Приклад 4. Знайти кут між площинами $3x - y + 2z - 5 = 0$ і $3x - 2y + 6z - 1 = 0$.

Розв'язання. Запишемо нормальні вектори заданих площин: $\bar{n}_1 = (3,-1,2)$, $\bar{n}_2 = (3,-2,6)$. Кут знайдемо за формулою (9.4)

$$\cos\varphi = \frac{(\bar{n}_1, \bar{n}_2)}{|\bar{n}_1| \cdot |\bar{n}_2|} = \frac{3 \cdot 3 + (-1) \cdot (-2) + 2 \cdot 6}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2}\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 6^2}} = \frac{23}{\sqrt{14}\sqrt{49}} = \frac{23}{7\sqrt{14}},$$

$$\varphi = \arccos\frac{23}{7\sqrt{14}}.$$

Приклад 5. Знайти відстань від точки $A(4,-1,3)$ до прямої $2x-2y+z+2=0$.

Розв'язання. За формулою (9.7)

$$d = \frac{|2\cdot 4 - 2\cdot(-1) + 1\cdot 3 + 2|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}} = \frac{15}{\sqrt{9}} = 5.$$

Приклад 6. Записати канонічні та параметричні рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(4,-1,3)$ паралельно вектору $\bar{a} = (-2,1,4)$.

Розв'язання. Канонічні рівняння мають вигляд (9.8)

$$\frac{x-4}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{4},$$

а параметричні рівняння запишемо у вигляді (9.9)

$$\begin{cases} x = 4-2t, \\ y = -1+t, \\ z = 3+4t. \end{cases}$$

Приклад 7. Пряма задана загальними рівняннями $\begin{cases} 3x+y-2z+3=0, \\ x+2y+3z-8=0. \end{cases}$ Знайти її канонічні рівняння.

Розв'язання. Знайдемо на прямій довільну точку M_0, наприклад, точку з координатою $x=0$. Підставивши ці значення в загальні рівняння, отримаємо

$$\begin{cases} 3\cdot 0 + y - 2z + 3 = 0, \\ 0 + 2y + 3z - 8 = 0. \end{cases}$$

З цієї системи

$$\begin{cases} y - 2z = -3 \\ 2y + 3z = 8 \end{cases}$$

отримаємо $y=1$ та $z=2$. Отже, отримали точку $M_0(0,1,2)$, яка лежить на заданій прямій. Знайдемо напрямний вектор прямої. Нормальні вектори даних площин $\bar{n}_1 = (3,1,-2)$ і $\bar{n}_2 = (1,2,3)$. Їх векторний добуток

$$\bar{a} = [\bar{n}_1, \bar{n}_2] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7\bar{i} - 11\bar{j} + 5\bar{k}.$$

За знайденою точкою $M_0(0,1,2)$ та напрямним вектором $\bar{a} = (7,-11,5)$ запишемо канонічні рівняння прямої (9.8)

$$\frac{x}{7} = \frac{y-1}{-11} = \frac{z-2}{5}.$$

Приклад 8. Знайти точку перетину прямої та площини $\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{1}$ та площини $2x+4y+3z-8=0.$

Розв'язання. Запишемо рівняння прямої у параметричній формі

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{1}=t,$$

$$\frac{x-2}{3}=t \Rightarrow x=2+3t,$$

$$\frac{y-1}{-2}=t \Rightarrow y=1-2t,$$

$$\frac{z+1}{1}=t \Rightarrow z=-1+t.$$

Знайдені вирази для x, y, z підставимо в рівняння площини і знайдемо параметр точки перетину

$$2(2+3t)+4(1-2t)+3(-1+t)-8=0,$$

$$4+6t+4-8t-3+3t-8=0,$$

$$t=3.$$

Координати точки перетину знайдемо з параметричних рівнянь

$$\begin{cases} x=2+3\cdot 3=11 \\ y=1-2\cdot 3=-5 \\ z=-1+3=2 \end{cases}$$

Отже, точка перетину $M(11,-5,2)$.

Приклад 9. Знайти кут між прямими $\frac{x-4}{-2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{4}$ і $\frac{x-1}{5}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z+4}{3}$.

Розв'язання. За формулою (9.13) знаходимо кут між напрямними векторами $\bar{a}=(-2,1,4)$ і $\bar{a}_2=(5,-2,3)$ прямих

$$\cos\varphi=\frac{(\bar{a}_1,\bar{a}_2)}{|\bar{a}_1|\cdot|\bar{a}_2|}=\frac{-2\cdot 5+1\cdot(-2)+4\cdot 3}{\sqrt{(-2)^2+1^2+4^2}\sqrt{5^2+(-2)^2+3^2}}=\frac{0}{\sqrt{21}\sqrt{38}}=0,$$

$$\varphi=\arccos 0=90^0.$$

Отже, задані прямі перпендикулярні.

Приклад 10. Знайти кут між прямою $\frac{x-4}{5}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{1}$ і площиною $x-y+z+7=0.$

Розв'язання. Випишемо $A=1, B=-1, C=1,\quad m=5, n=1, p=1.$ Тоді за формулою (9.14)

$$\sin\phi=\frac{1\cdot 5+(-1)\cdot 1+1\cdot 1}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}\sqrt{5^2+1^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{3}\sqrt{27}}=\frac{5}{9},$$

$$\phi = \arcsin\frac{5}{9}.$$

Завдання для самостійного розв'язання

1. Знайти рівняння площини, що проходить через три точки $A(-1,2,0)$, $B(4,3,-1), C(2,3,2)$.

2. При яких l і m площини $mx+3y-2z-1=0$ і $2x-5y-lz=0$ будуть паралельними?

3. Знайти відстань від точки $M_0(6,-1,3)$ до площини, що проходить через три точки $M_1(1,-2,0)$, $M_2(-2,0,3)$, $M_3(-1,5,-3)$.

4. Визначити кут між площинами $3x+y-2z+1=0$ і $x-y+z-2=0$.

5. Скласти канонічні рівняння прямої $\begin{cases} x-2y+3z+1=0 \\ 2x+y-4z-8=0 \end{cases}$. Записати параметричні рівняння прямої, що проходить через точку $A(3,-4,5)$ і паралельна заданій прямій.

6. Знайти кут між прямими:

а) $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+4}{3}$ та $\begin{cases} 2x+3y-8z+3=0 \\ 3x+y-5z+1=0 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} 2x+3y-4z+5=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$ та $\begin{cases} x-y+2z-4=0 \\ 2x+y-z-5=0 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} x=7t-2 \\ y=2t+3 \\ z=-8t+1 \end{cases}$ та $\begin{cases} x=11t-1 \\ y=-8t+4 \\ z=-7t+5 \end{cases}$.

7. Знайти точку перетину прямої $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z+1}{4}$ та площини $x+2y+3z-14=0$.

8. Скласти рівняння прямої, що перпендикулярна площині $2x-3y-z+1=0$ та проходить через точку $M(1,2,-1)$.

9. Обчислити кут між прямою $\begin{cases} x=5t+4 \\ y=3t-3 \\ z=-8t+1 \end{cases}$ та площиною $2x-3y-6z-5=0$.

10. Скласти канонічне рівняння прямої, яка: а) проходить через точку $A(1,-2,5)$ паралельно осі Ox; б) проходить через точку $M(-3,2,1)$ паралельно прямій $\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-2}{4}$; в) проходить через дві точки $M_1(-5,2,0)$ і $M_2(1,4,-6)$.

11. Записати рівняння прямої, що проходить через точку $M(-3,2,1)$ та паралельна прямій $\begin{cases} x = -t + 4 \\ y = 2t - 5 \\ z = 3t + 2 \end{cases}$.

Питання для самоконтролю до змістового модулю 2

1. Які величини називають векторними, скалярними? Наведіть приклади.
2. Що таке вектор? Як його позначають?
3. Які вектори називають колінеарними? Компланарними?
4. Що розуміють під сумою, різницею векторів?
5. Що називають добутком вектора на скаляр?
6. Які вектори називають лінійно залежними, лінійно незалежними?
7. Що називають проекцію точки на вісь? Проекцію вектора на вісь?
8. Як можна визначити відстань між двома точками?
9. Як знайти координати точки, що ділить даний відрізок у даному відношенні?
10. Що розуміють під правою трійкою векторів, лівою трійкою векторів?
11. Дайте означення векторного добутку векторів.
12. Назвіть властивості векторного добутку.
13. Як можна виразити векторний добуток через координати векторів-множників?
14. Як дослідити вектори на колінеарність за допомогою векторного добутку?
15. Як знайти площу паралелограма та площу трикутника через векторний добуток?
16. Дайте означення мішаного добутку векторів.
17. Назвіть властивості мішаного добутку.
18. Як можна виразити мішаний добуток через координати векторів-множників?
19. Як дослідити вектори на компланарність за допомогою мішаного добутку?
20. Як знайти об’єм паралелепіпеда та тетраедра через мішаний добуток?
21. Який вигляд має загальне рівняння прямої на площині? Запишіть канонічне рівняння прямої на площині.
22. Запишіть рівняння прямої, що проходить через дві задані точки.
23. Запишіть рівняння прямої «у відрізках» на осях.
24. Запишіть рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.
25. Запишіть рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, що проходить через задану точку.
26. Запишіть рівняння прямої за точкою і нормальним вектором.
27. Як виглядають умови паралельності та перпендикулярності прямих?
28. Як знайти відстань між паралельними прямими?
29. Запишіть канонічне рівняння кола.
30. Що називають еліпсом?

31. Яке канонічне рівняння еліпса?
32. Як можна знайти ексцентриситет еліпса?
33. Запишіть рівняння директрис еліпса.
34. Що називають гіперболою?
35. Запишіть канонічне рівняння гіперболи.
36. Запишіть рівняння асимптот гіперболи.
37. За допомогою яких формул можна знайти ексцентриситет і директриси гіперболи?
38. Дайте означення параболи.
39. Запишіть канонічне рівняння параболи.
40. Запишіть рівняння директриси параболи.
41. Запишіть рівняння площини, що проходить через три задані точки.
42. Запишіть рівняння площини у відрізках на осях.
43. Запишіть рівняння площини, що проходить через задану точку перпендикулярно заданому вектору.
44. Запишіть загальне рівняння площини.
45. Як можна знайти кут між площинами?
46. Сформулюйте умови паралельності та перпендикулярності площин.
47. Як знайти відстань від заданої точки до площини?
48. Які види рівнянь прямої у просторі ви знаєте?
49. Як знайти кут між прямими у просторі?
50. Сформулюйте умови паралельності та перпендикулярності прямих у просторі.
51. Як визначити кут між прямою і площиною?
52. Сформулюйте умови паралельності та перпендикулярності прямої та площини.

Змістовий модуль 3. Диференціальне числення функцій

Тема 10. Функції. Границя функції

Нехай X – непорожня множина дійсних чисел. Якщо кожному числу $x \in X$ за певним правилом ставиться у відповідність єдине число y, то кажуть, що задано функцію f з областю визначення X. Для позначення використовують запис $y = f(x)$. При цьому x називають *незалежною змінною* або *аргументом* функції f, y – *залежною змінною*, або значенням функції в точці x. Область визначення функції позначають $D(f)$, а множину значень $E(f)$.

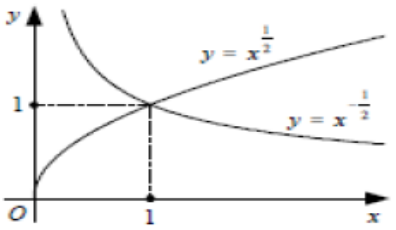
Послідовністю називають функцію з областю визначення $X = \{1,2,3,\ldots\}$. Позначають символом $\{x_n\}$.

Графіком функції $y = f(x)$ називають множину точок з координатами $(x, f(x))$ на площині xOy.

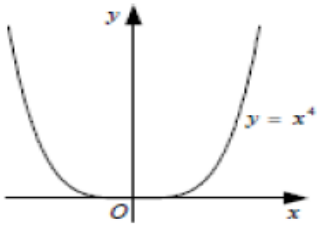
Основними елементарними функціями називають наступні функції:

1) Стала функція $y = c, c \in R$.

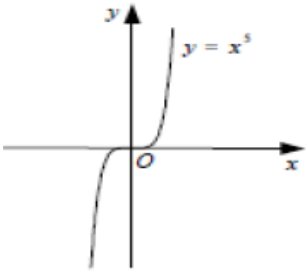
2) Степенева функція $y = x^{\alpha}, \alpha \in R$.

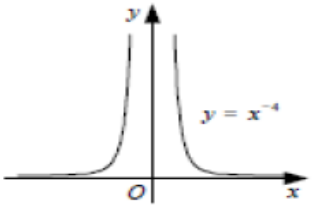


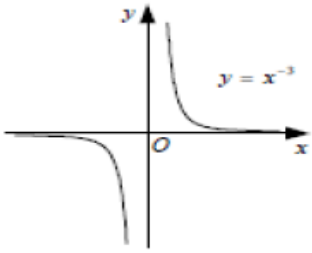
а)



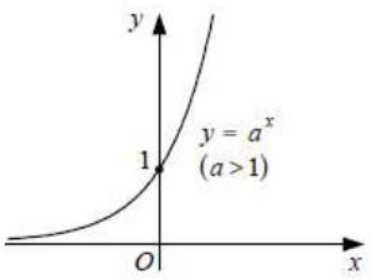
б)

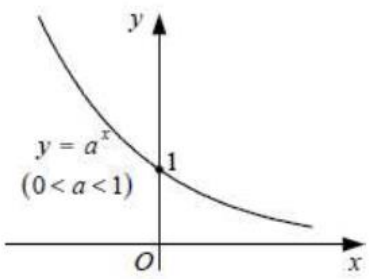




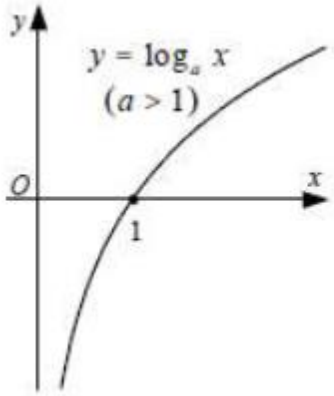


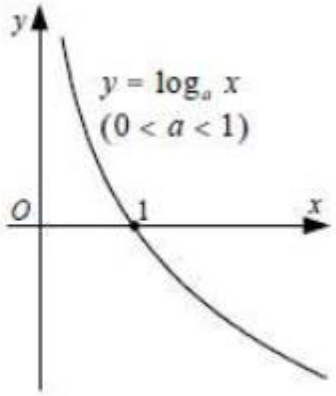
3) Показникова функція $y = a^x, a \in R,\ a > 0, a \neq 1,$
$D(f): x \in R, E(f): y \in (0,+\infty)$





4) Логарифмічна функція $y = \log_a x,\ a \in R,\ a > 0, a \neq 1,$
$D(f): x \in (0,+\infty),\ E(f): y \in R$





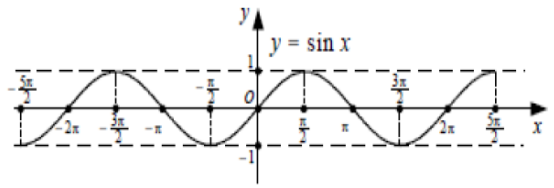
5) Тригонометричні функції:

а) синус $y = \sin x,\ D(f): x \in R,\ E(f): y \in [-1,1],$

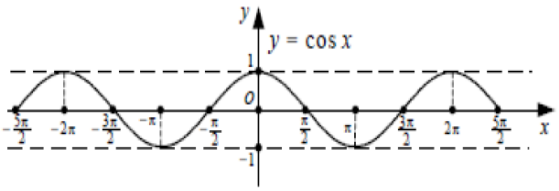
б) косинус $y = \cos x,\ D(f): x \in R,\ E(f): y \in [-1,1],$

в) тангенс $y = tgx,\ D(f): x \in (-\frac{\pi}{2} + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k), k \in Z,\ E(f): y \in R,$

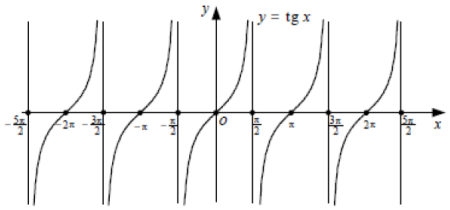
г) котангенс $y = ctgx,\ D(f): x \in (\pi k, \pi + \pi k), k \in Z,\ E(f): y \in R,$



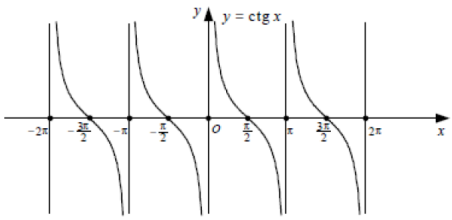
а)



б)



в)



г)

6) Обернені тригонометричні функції:

*) арксинус $y = \arcsin x$ (рис. 5 а).

$$D(f): x \in [-1, 1]; \quad E(f): y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right];$$

*) арккосинус $y = \arccos x$ (рис. 5 б).

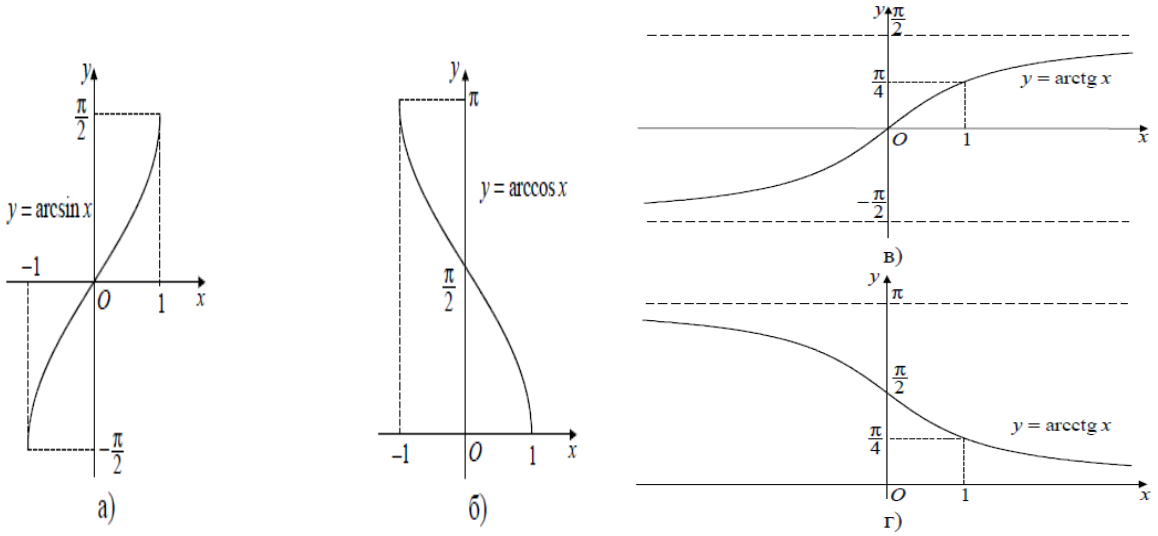
$$D(f): x \in [-1, 1]; \quad E(f): y \in [0, \pi];$$

*) арктангенс $y = \operatorname{arctg} x$ (рис. 5 в).

$$D(f): x \in R; \quad E(f): y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right);$$

*) арккотангенс $y = \operatorname{arcctg} x$ (рис. 5 г).

$$D(f): x \in R; \quad E(f): y \in (0, \pi).$$



Елементарними називають функції, що одержуються з основних елементарних функцій за допомогою операцій додавання, віднімання, множення, ділення та операції утворення складної функції, які застосовують скінченну кількість разів. Операція утворення складної функції полягає у наступному: якщо $y = f(u)$, а $u = g(x)$, то функція $y = f(g(x))$ – складна.

Приклад 10.1. Функцію задано формулою $f(x) = \dfrac{x+3}{x-1}$. Знайти $f(0)$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $f(1)$. Обчислимо значення функції $f(x)$ у вказаних точках, підставляючи у формулу замість x задані значення аргументу: $f(0) = \dfrac{0+3}{0-1} = \dfrac{3}{-1} = -3$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\frac{1}{2}+3}{\frac{1}{2}-1} = \dfrac{\frac{7}{2}}{-\frac{1}{2}} = -7$. Значення $f(1)$ не існує, оскільки при підстановці у формулу одиниці отримаємо нуль в знаменнику.

Границя функції

Число a називають *границею функції* $f(x)$ в точці x_0, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що для всіх значень x з області визначення функції, які задовольняють умову $0 < |x - x_o| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - a| < \varepsilon$. Позначення: $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = a$.

Властивості границь.

Якщо існують границі $\lim\limits_{x \to x_o} f(x)$ та $\lim\limits_{x \to x_o} g(x)$, то

1) $\lim\limits_{x \to x_o} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to x_o} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_o} g(x)$;

2) $\lim\limits_{x \to x_o} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to x_o} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_o} g(x)$;

3) $\lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_o} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_o} g(x)}$

4) $\lim\limits_{x \to x_o} c \cdot f(x) = c \cdot \lim\limits_{x \to x_o} f(x)$.

При обчисленні границь зручно користуватись тим, що коли x_0 належить області визначення елементарної функції $f(x)$, то

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_0).$$

Приклади

10.2. $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 - 3x + 2) = 2^2 - 3 \cdot 2 + 2 = 0$.

10.3. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 2x}{x^2 - x + 3} = \dfrac{(-1)^2 + 2 \cdot (-1)}{(-1)^2 - (-1) + 3} = -\dfrac{1}{5}$

10.4. $\lim\limits_{x \to \infty} (x + 5) = \infty$.

Якщо $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = 0$, то функцію $f(x)$ називають *нескінченно малою* при $x \to x_o$.

Якщо $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = \infty$, то функцію $f(x)$ називають *нескінченно великою* при $x \to x_o$

Якщо функція $f(x)$ є нескінченно малою (нескінченно великою), то обернена до неї функція $\dfrac{1}{f(x)}$ буде нескінченно великою (нескінченно малою).

Приклади.

10.5 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x^2 - 1} = \left[\dfrac{1}{0}\right] = \infty$.

10.6 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{x^3}=4\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^3}=4\cdot\left[\dfrac{1}{\infty}\right]=0$

10.7 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+3}{x-2}=\cdot\left[\dfrac{5}{0}\right]=\infty$.

Тема 11. Методи знаходження границь функції

Якщо при підстановці замість x його граничного значення x_0 отримаємо невизначеності типу $\left[\dfrac{0}{0}\right],\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right],[0\cdot\infty],[\infty-\infty],[0^0],[1^\infty]$, то процес обчислення границі називається *розкриттям невизначеності*.

Правила розкриття невизначеностей

Правило 1. Для того, щоб знайти границю дробово-раціональної функції у випадку, коли при $x\to x_0$ чисельник та знаменник прямують до нуля (невизначеність типу $\left[\dfrac{0}{0}\right]$), потрібно скоротити дріб на $(x-x_0)$ і перейти до границі.

Застосування правила 1 ґрунтується на розкладанні чисельника та знаменника дробу на множники. Для цього можна скористатись, наприклад, формулами скороченого множення

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2,$$
$$a^2-b^2=(a+b)(a-b),$$
$$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2),$$

або формулою розкладу квадратного тричлена на множники

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

де x_1, x_2 - корені рівняння $ax^2+bx+c=0$.

Приклад 11.1. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-3x}$.

Підстановкою значення $x=3$ переконуємось, що маємо невизначеність $\left[\dfrac{0}{0}\right]$:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-7x+12}{x^2-3x}=\left[\frac{9-21+12}{9-9}\right]=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Розглянемо рівняння $x^2-7x+12=0$. Його коренями є числа $x_1=3, x_2=4$. Тому $x^2-7x+12=(x-3)(x-4)$. Отже,

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-7x+12}{x^2-3x}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-4)}{x(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x-4}{x}=-\frac{1}{3}.$$

Приклад 11.2. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=\frac{1^3-1}{1-1}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Для знаходження цієї границі застосуємо формулу скороченого множення $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=1^2+1+1=3.$$

Правило 2. Границя частки двох многочленів при $x\to\infty$ (невизначеність типу $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$) дорівнює:

- відношенню коефіцієнтів при старших степенях, якщо степені чисельника і знаменника однакові;
- нулю, якщо степінь чисельника менше степені знаменника;
- нескінченності, якщо степінь чисельника більше степені знаменника

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\begin{cases}\dfrac{a_n}{b_m}, n=m\\ 0, n<m\\ \infty, n>m\end{cases}$$

Приклади.

11.3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{x^2-3x+4}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=0,$

11.4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3x+1}{x^2+4}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\infty,$

11.5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-4x+5x^2-6x^3}{2x^3+4x+3}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\dfrac{-6}{2}=-3,$

11.6 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+2x^2-4}}{5x+3}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\dfrac{1}{5}.$

Особливі границі

Перша особлива границя

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=1$$

Наслідки першої особливої границі:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}=1$, 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$, 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctgx}{x}=1$,

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin \alpha x}{x}=\alpha$, 5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}=\dfrac{\alpha}{\beta}$, 6. $\lim\limits_{f(x)\to 0}\dfrac{\sin f(x)}{f(x)}=1$.

Приклади 11.7-11.9.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=3,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 2x}=\frac{5}{2},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x^2}=1.$$

Друга особлива границя

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\left[1^\infty\right]=e.$$

Наслідки другої особливої границі:

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\left[1^\infty\right]=e$, 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^x=e^k$, 3. $\lim\limits_{f(x)\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=e$.

Приклади 11.10-11.12

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^x=\left[1^\infty\right]=e^5,$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{3x}=\left[1^\infty\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{-2}{x}\right)^x\right)^3=\left(e^{-2}\right)^3=e^{-6},$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x+5}\right)^{x+5}=e^4$$

Застосування границь у біології

Нехай під час вливання деякого препарату в кров хворого його вміст через $t(t\geq 0)$ годин становить $C(t)$, тоді значення границі $\lim\limits_{t\to\infty}C(t)$ називають *рівноважним станом*.

Приклад 11.13. Коли вливають глюкозу, її вміст в крові хворого (виражений у відповідних одиницях) через $t(t \geq 0)$ годин становить $C(t) = 12 - 9e^{-t}$. Знайти рівноважний вміст глюкози в крові.

Розв'язання. $\lim\limits_{t\to\infty} C(t) = \lim\limits_{t\to\infty}(12 - 9e^{-t}) = 12 - 9\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{e^t} = 12$.

Нехай популяція росте від початкового розміру p_0 до розміру $p(t)$ в момент часу t. Значення границі $\lim\limits_{t\to\infty} p(t)$ називають *рівновагою популяції*.

Приклад 11.14. Нехай популяція росте від початкового розміру 1000 особин до $p(t) = \frac{1000e^t}{1 + 0{,}1(e^t - 1)}$ в момент часу t. Знайти рівновагу популяції.

Розв'язання. $\lim\limits_{t\to\infty} p(t) = \lim\limits_{t\to\infty}\frac{1000e^t}{1 + 0{,}1(e^t - 1)} = \lim\limits_{t\to\infty}\frac{1000}{0.1} = 10000.|$

Приклад 11.15. Нехай популяція росте від початкового розміру 700 особин до $p(t) = 700 + 300(1 - 2^{-t})$ в момент часу t. Знайти рівновагу популяції.

Розв'язання.

$$\lim_{t\to\infty} p(t) = \lim_{t\to\infty} 700 + 300(1 - 2^{-t}) = 700 + 300(1 - \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2^t}) = 10000.$$

Приклади розв’язання задач до тем 10-11

Приклад 1. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to -6}\sqrt{x^2 - 10}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to -6}\sqrt{x^2 - 10} = \sqrt{(-6)^2 - 10} = \sqrt{26}$

Приклад 2. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x} = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0$

Приклад 3. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x} = \left[\frac{1}{0}\right] = \infty$

Приклад 4. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 13}\frac{12}{169 - x^2}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to 13}\frac{12}{169 - x^2} = \left[\frac{12}{169 - 169}\right] = \left[\frac{12}{0}\right] = \infty$

Приклад 5. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+5}{2-x}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+5}{2-x} = \left[\frac{7}{0}\right] = \infty$

Приклад 6. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{x^3+x-1}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{x^3+x-1}=\left[\dfrac{4}{\infty}\right]=0$

Приклад 7. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5+4x^2-6x}{x^7-2x^3+1}$

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5+4x^2-6x}{x^7-2x^3+1}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\left[\dfrac{старший\ степінь=5}{старший\ степінь=7},5<7\right]=0$

Приклад 8. Обчислити границю

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6-x^2}{5x^2+3x+1}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\left[\dfrac{старший\ степінь=2}{старший\ степінь=2},2=2\right]=\dfrac{-1}{5}$

Приклад 9. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6-x^2}{5x^2+3x+1}$.

Розв'язання. 9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-100x^2+1}{100x^2+15x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\left[\dfrac{старший\ степінь=3}{старший\ степінь=2},3>2\right]=\infty$

Приклад 10. Обчислити границю

Розв'язання. 10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+1}{\sqrt{4x^2+1}}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\dfrac{3}{2}$

Приклад 11. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+1}{\sqrt{4x^2+1}}$

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\cdot\sqrt[4]{x^3+1}}{x+3}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\infty$

Приклад 12. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{3x^2+5x+1}-4x^2}{5x-2+\sqrt{9x^4+3x}}$

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{3x^2+5x+1}-4x^2}{5x-2+\sqrt{9x^4+3x}}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=-\dfrac{4}{3}$

Приклад 13. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to13}\dfrac{x^2-169}{x^2-12x-13}$

Розв'язання. Розкладемо чисельник і знаменник на множники, отримаємо

$$\lim_{x\to13}\frac{x^2-169}{x^2-12x-13}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to13}\frac{(x-13)(x+13)}{(x-13)(x+1)}=\lim_{x\to13}\frac{(x+13)}{(x+1)}=\frac{26}{14}=\frac{13}{7}.$$

Приклад 14. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-2x-15}{x^2-25}$.

Розв'язання. Розкладемо чисельник і знаменник на множники, отримаємо

$$\lim_{x\to5}\frac{x^2-2x-15}{x^2-25}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to13}\frac{(x-5)(x+3)}{(x-5)(x+5)}=\lim_{x\to13}\frac{(x+3)}{(x+5)}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$$

Приклад 15. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{2x}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{2x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{x}=\dfrac{1}{2}\cdot 7=\dfrac{7}{2}$

Приклад 16. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{tg4x}$

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{tg4x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\dfrac{\sin 4x}{\cos 4x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 4x}\cdot\cos 4x=\dfrac{3}{4}\cdot 1=\dfrac{3}{4}$

Приклад 17. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 6x}{5x^2}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 6x}{5x^2}=\dfrac{1}{5}\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 6x}{x}\right)^2=\dfrac{1}{5}(6)^2=\dfrac{36}{5}$.

Приклад 18. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{4}{x}\right)^x$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{4}{x}\right)^x=\left[1^\infty\right]=e^{-4}$.

Приклад 19. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^{3x}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^{3x}=\left[1^\infty\right]=\left(e^5\right)^3=e^{15}$.

Приклад 20. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{4x^2-1}\right)^{4x^2-1}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{4x^2-1}\right)^{4x^2-1}=e^3$.

Приклад 21. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x^2-4}\right)^{3x+2}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x^2-4}\right)^{3x+2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x^2-4}\right)^{\frac{(x^2-4)(3x+2)}{x^2-4}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+2}{x^2-4}}=e^0=1.$$

Завдання для самостійного розв'язання

Знайти границі функцій

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-1}{3x^2+4x+5}$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4x+1}{2x^2+5x+5}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-5x}{2x^2-3x+2}$ 4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+3)^3(2x-1)^2}{x^5+7}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt{x^3-5}}$ 6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^4+3}-\sqrt[5]{x^3+4}}{\sqrt[3]{x^7+5}}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x}$ 8. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+3}$

9. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-4x+5}{x-3}$ 10. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{x^3-3x^2+2x}$

11. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ 12. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^2-(1+3x)}{x^2+3x^3}$

Обчислити границі функцій за допомогою першої та другої особливих границь

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos6x}{1-\cos2x}$ 2. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{tgx}\right)$

3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x\sin2x}$ 4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x+1}{x}}$ 6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{2x+1}$ 8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)^x$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+1}\right)^{3x-6}$ 10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3x-1}{2x^2-x+4}\right)^x$

Тема 12. Диференціювання функцій однієї змінної

Похідною функції $y=f(x)$ в точці x_0 називається границя відношення приросту функції Δy до приросту аргументу Δx за умови, що приріст аргументу Δx прямує до нуля:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

Δy – приріст функції, Δx – приріст аргументу.

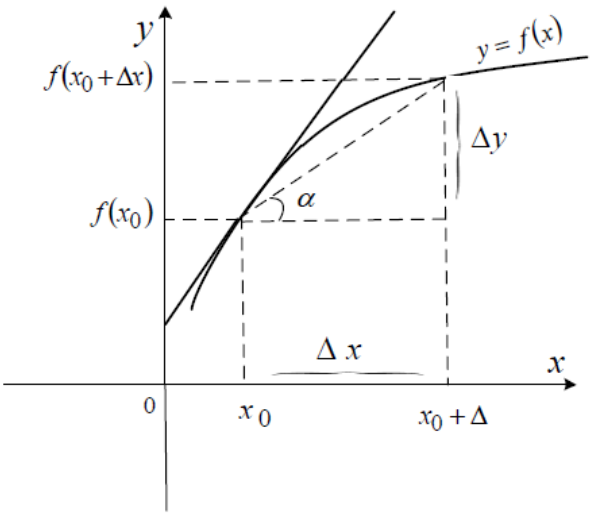
Операцію знаходження похідної називають диференціюванням функції.

Геометричний зміст похідної в точці

Значення похідної в точці x_0 дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до

графіка функції $y = f(x)$ в точці з абсцисою x_0 і кутовому коефіцієнту цієї дотичної

$$k = tg\alpha = f'(x_0).$$



Таблиця 1.1 – Похідні елементарних функцій

1	$(C)' = 0, C = const$	8	$(\cos x)' = -\sin x$
2	$(x^n)' = nx^{n-1}$	9	$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
3	$(a^x)' = a^x \ln a, a > 0, a \neq 1$	10	$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
4	$(e^x)' = e^x$	11	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
5	$\log_a x = \frac{1}{x \ln a}, a > 0, a \neq 1$	12	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
6	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	13	$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$
7	$(\sin x)' = \cos x$	14	$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Правила диференціювання

1. Похідна суми (різниці) двох функцій, кожна з яких має похідну, дорівнює сумі (різниці) похідних цих функцій

$$(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x).$$

2. Похідна добутку двох функцій дорівнює сумі добутків кожної функції на похідну іншої функції

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x).$$

3. Похідна частки двох функцій обчислюється за формулою

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}, \quad v(x) \neq 0.$$

4. Сталий множник можна виносити за знак похідної

$$\left(C\cdot f(x)\right)' = C\cdot f'(x).$$

Приклад 12.1. Обчислити похідну функції $y = 5x^3 - x^2$.

За правилами 1 і 4 та таблицею похідних отримаємо

$$y' = \left(5x^3 - x^2\right)' = \left(5x^3\right)' - \left(x^2\right)' = 5\cdot 3x^2 - 2x = 15x^2 - 2x$$

Приклад 12.2. Обчислити похідну функції $y = \sqrt{x}$.

Використовуючи властивості степенів, запишемо функцію у вигляді $y = x^{\frac{1}{2}}$. За таблицею похідних отримаємо

$$y' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Приклад 12.3. Обчислити похідну функції $y = \sin x + 2^x - 4$.

За правилом 1 та таблицею похідних отримаємо

$$y' = (\sin x + 2^x - 4)' = \cos x + 2^x \ln 2.$$

Приклад 12.4. Обчислити похідну функції $y = x^5 + \frac{1}{x^4} - 6\sqrt[3]{x^2}$.

Використовуючи властивості степенів, запишемо функцію у вигляді $y = x^5 + x^{-4} - 6x^{\frac{2}{3}}$. За правилом 1 та таблицею похідних отримаємо

$$y' = 5x^4 + (-4)\cdot x^{-4-1} - 6\cdot\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{2}{3}-1} = 5x^4 - 4x^{-5} - 4x^{-\frac{1}{3}} = 5x^4 - \frac{4}{x^5} - \frac{4}{\sqrt[3]{x}}.$$

Приклад 12.5. Обчислити похідну функції $y = (x^2 - 1)\cdot tgx$.

За правилом 2 та таблицею похідних отримаємо

$$y' = (x^2 - 1)'\cdot tgx + (x^2 - 1)\cdot (tgx)' = 2xtgx + (x^2 - 1)\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$$

Приклад 12.6. Обчислити похідну функції $y = \frac{\arcsin x}{\ln x}$.

За правилом 3 та таблицею похідних отримаємо

$$y' = \frac{(\arcsin x)'\cdot \ln x - \arcsin x\cdot (\ln x)'}{(\ln x)^2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot \ln x - \arcsin x\cdot\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}$$

Похідна складеної функції

Якщо аргументом функції $y = f(u)$ є функція незалежної змінної x, тобто $u = u(x)$, то функція $y = f(u(x))$ називається *складеною* функцією від x. При цьому функцію $f(u)$ називають *зовнішньою*, а функцію $u(x)$ – *внутрішньою* функцією складеної функції $y = f(u(x))$.

Похідна складеної функції $y = f(u(x))$ обчислюється за формулою

$$y' = f'_u \cdot u'_x,$$

де f'_u - похідна зовнішньої функції за проміжною змінною;

u'_x - похідна зовнішньої функції за основним аргументом.

Приклад 12.7. Обчислити похідну функції $y = \sin(2x-1)$.

Внутрішньою функцією буде функція $u(x) = 2x-1$, а зовнішньою $y = f(u) = \sin u$. Тому

$$y' = \left(\sin(2x-1)\right)' = \cos(2x-1)\cdot(2x-1)' = \cos(2x-1)\cdot 2 = 2\cos(2x-1).$$

Приклад 12.8. Обчислити похідну функції $y = (4x+3)^5$.

$$y' = \left((4x+3)^5\right)' = 5\cdot(4x+3)^4\cdot(4x+3)' = 20(4x+3)^4.$$

Приклад 12.9. Обчислити похідну функції $y = tg^3 x$.

$$y' = 3tg^2 x\cdot(tgx)' = 3tg^2 x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Приклад 12.10. Обчислити похідну функції $y = \sqrt{x^2+5}$.

$$y' = \left(\sqrt{x^2+5}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+5}}\cdot(x^2+5)' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+5}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}.$$

Похідні вищих порядків.

Якщо функція $y = f(x)$ диференційована на деякому інтервалі (тобто має похідну в кожній точці інтервалу), то за означенням *похідна другого порядку (друга похідна)* цієї функції знаходиться за формулою $y'' = (y')'$. Таким чином, друга похідна від заданої функції є похідна від її першої похідної.

Аналогічно *похідна третього порядку (третя похідна)* $y''' = (y'')'$ і т.д.

Приклад 12.11 Знайти похідну третього порядку функції $y = x^5 - 7x^3 + 2$.

Знайдемо послідовно:

$$y' = 5x^4 - 21x^2,$$

$$y'' = (5x^4 - 21x^2)' = 20x^3 - 42x,$$

$$y''' = (20x^3 - 42x)' = 60x^2 - 42.$$

Приклад 12.12 Знайти похідну п’ятого порядку функції $y = \sin^2 x$.

Знайдемо послідовно:

$$y' = 2\sin x\cos x = \sin 2x, \quad y'' = (\sin 2x)' = 2\cos 2x,$$

$$y''' = (2\cos 2x)' = -4\sin 2x, \qquad y^{(4)} = (-4\sin 2x)' = -8\cos 2x,$$
$$y^{(5)} = (-8\cos 2x)' = 16\sin 2x.$$

Диференціювання функцій, що задані параметрично

Нехай функція $y = f(x)$ задана параметрично $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, t – параметр, $t \in T$. Її похідна знаходиться за формулою

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t},$$

де y'_x - похідна функції $y = f(x)$, y'_t – похідна функції y по змінній t, x'_t – похідна функції x по змінній t.

Приклад 12.13 Знайти похідну функції $\begin{cases} x = tgt \\ y = \sin t \end{cases}$.

$$x'_t = \frac{1}{\cos^2 t}, \; y'_t = \cos t,$$
$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\cos t}{\frac{1}{\cos^2 t}} = \cos^3 t.$$

Приклад 12.14 Знайти похідну функції $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - arctgt \end{cases}$.

$$x'_t = \frac{2t}{1+t^2}, \; y'_t = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2},$$
$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\frac{t^2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{t}{2}.$$

Диференціювання неявно заданих функцій

Якщо кожному числу x з множини X ставиться у відповідність єдине число y так, що пара чисел (x, y) задовольняє рівняння $F(x, y) = 0$, то кажуть, що *функцію* $y = f(x), x \in X$ *задано неявно.*

Незважаючи на те, що рівняння $F(x, y) = 0$ не розв'язане відносно y, можна знайти похідну $y' = y'(x)$. Для цього потрібно:

1) обидві частини рівняння $F(x, y) = 0$ продиференціювати по x, вважаючи, що y є функцією від x;

2) одержане рівняння розв'язати відносно y'.

Приклад 12.15 Знайти похідну функції, заданої неявно

$$5x+3y-7=0.$$

Продиференціюємо по x обидві частини рівняння, враховуючи, що y є функцією від x:

$$5+3y'=0.$$

Розв'яжемо рівняння відносно y':

$$y'=-\frac{5}{3}.$$

Приклад 12.16 Знайти похідну функції, заданої неявно

$$x^3+y^3-4xy=0.$$

Продиференціюємо по x обидві частини рівняння, враховуючи, що y є функцією від x:

$$3x^2+3y^2y'-4(1\cdot y+xy')=0.$$

Розв'яжемо рівняння відносно y':

$$3x^2+3y^2y'-4y-4xy'=0, \qquad 3y^2y'-4xy'=4y-3x^2,$$

$$y'(3y^2-4x)=4y-3x^2, \qquad y'=\frac{4y-3x^2}{3y^2-4x}.$$

Правило Лопіталя знаходження границь функцій

Правило Лопіталя використовують для знаходження границь диференційовних функцій, якщо маємо невизначеності типу $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Нехай виконується співвідношення

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0$$

або

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=\infty,$$

де a - число або $+\infty,-\infty$. Тоді

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Правило Лопіталя можна застосовувати кілька разів.

Приклад 12.17 Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2\ln x}$, використовуючи правило Лопіталя

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2\ln x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1)'}{(2\ln x)'}=\lim_{x\to 1}\frac{2x}{2\cdot\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}x^2=1.$$

Приклад 12.16. Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x^2}$, використовуючи правило Лопіталя

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 3x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(3\sin 3x)'}{(2x)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{9\cos 3x}{2}=\frac{9}{2}.$$

Якщо функція $y=f(x)$ має похідну в точці x, то приріст функції $\Delta f(x)$ можна записати у вигляді

$$\Delta f(x)=f'(x)\Delta x+o(\Delta x),\ \Delta x\to 0.$$

Диференціалом функції $y=f(x)$ у точці x називають вираз $f'(x)\Delta x$ і позначають $df(x)$ або dy. Диференціалом незалежної змінної x вважають її приріст Δx і позначають dx. Отже, диференціал функції обчислюється за формулою

$$dy=f'(x)dx.$$

З останньої формули випливає, що позначення похідної $\dfrac{dy}{dx}$ можна розуміти як відношення двох диференціалів.

Приклад 12.17. Обчислити диференціал функції $y=5^{2x}$.

$$dy=(5^{2x})'dx=2\cdot 5^{2x}\cdot\ln 5dx.$$

Застосування похідної у біології

Нехай $y=f(x)$ характеризує кількість особин популяції в момент часу x. Тоді вираз

$$\frac{\Delta y(x)}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)}{\Delta x}$$

характеризує *середню швидкість* зміни кількості особин популяції за проміжок часу Δx.

Якщо спрямувати Δx до нуля, то одержимо *миттєву швидкість* зміни кількості особин популяції. Отже, характеризує $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{f(x+\Delta x)}{\Delta x}$ миттєву швидкість росту (розмноження) популяції.

Приклад 12.18. Нехай $f(x)=1000+50x^2$ – визначає розмір деякої популяції в момент часу x (x вимірюють у годинах). Дослідити середню швидкість росту популяції.

Обчислимо приріст кількості особин популяції за проміжок часу Δx

$$\Delta y(x)=f(x+\Delta x)-f(x)=1000+50(x+\Delta x)^2-1000-50x^2=$$

$$=50x^2+100x\Delta x+50\Delta x^2-50x^2=\Delta x(100x+50\Delta x)$$

Тоді одержимо середню швидкість росту популяції за проміжок часу Δx

$$\frac{\Delta y(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta x(100x + 50\Delta x)}{\Delta x} = 100x + 50\Delta x$$

Середня швидкість росту цієї популяції збільшується з часом.

Приклад 12.19. Нехай $f(x) = 300 + 100x^2$ – визначає розмір деякої популяції в момент часу x (x вимірюють у годинах).

Обчислимо швидкість росту популяції $f'(x) = 200x$. Миттєва швидкість росту цієї популяції збільшується з часом. Якщо $x = 1$, то миттєва швидкість росту становить 200 особин у годину, якщо $x = 5$, то миттєва швидкість росту – 1000 особин у годину.

Приклад 12.20. Реакція організму на отримані ліки може виражатись у підвищенні кров'яного тиску, зменшенні температури тіла, зміні пульсу або інших фізіологічних показниках. Рівень реакції залежить від назначеної дози ліків. Припустимо, що x – доза отриманих ліків, а рівень реакції організму y описується функцією $y = f(x) = x^2(a - x)$, де a – деяка додатна стала. За якого значення x реакція буде максимальною?

Дослідимо цю функцію на максимум. Знайдемо критичні точки

$$f'(x) = 2ax - 3x^2,$$

$$2ax - 3x^2 = 0,$$

$$x = 0,\ x = \frac{2a}{3}$$

У разі переходу через $x = \frac{2a}{3}$ похідна змінює знак з «+» на «–«, тому $x = \frac{2a}{3}$ буде точкою максимуму. Отже, $x = \frac{2a}{3}$ – величина дози ліків, за якої настає максимальна реакція $f\left(\frac{2a}{3}\right) = \frac{4a^3}{27}$.

Приклад 12.21. У поживне середовище вносять популяцію з 1000 бактерії. Кількість особин популяції росте відповідно функції $f(x) = 1000 + \frac{1000x}{100 + x^2}$, де час x вимірюється в годинах. Знайти максимальний розмір цієї популяції.

Обчислимо швидкість зміни кількості особин популяції

$$f'(x) = \frac{1000(100 - x^2)}{(100 + x^2)^2}$$

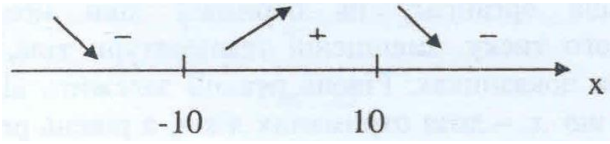
Знайдемо критичні точки

$$\frac{1000(100 - x^2)}{(100 + x^2)^2} = 0,$$

$$100 - x^2 = 0,$$

$$x = \pm 10.$$

Визначимо знак похідної



У разі переходу через $x=10$ похідна змінює знак з «+» на «–«, тому $x=10$ буде точкою максимуму. Отже максимальний розмір популяції дорівнює $f(10)=1050$ особин і досягається через 10 годин від початку досліду.

Приклади розв'язання задач до теми 12

Приклад 1. Знайти похідну функції $y=4x^7-8$.

Розв'язання. Скористаємось правилом для похідної різниці та таблицею похідних

$$y'=(4x^7-8)'=(4x^7)'-(8)'=4\cdot 7x^6-0=28x^6.$$

Приклад 2. Знайти похідну функції $y=\frac{4}{x}+5x$.

Розв'язання. Скористаємось правилом для похідної суми та таблицею похідних

$$y'=\left(\frac{4}{x}+5x\right)'=\left(\frac{4}{x}\right)'+(5x)'=4\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)+5\cdot 1=-\frac{4}{x^2}+5.$$

Приклад 3. Знайти похідну функції $y=6x^8-7\sqrt{x}$.

Розв'язання. Скористаємось правилом для похідної різниці та таблицею похідних

$$y'=\left(6x^8-7\sqrt{x}\right)'=\left(6x^8\right)'-\left(7\sqrt{x}\right)'=6\cdot 8x^7-7\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=48x^7-\frac{7}{2\sqrt{x}}$$

Приклад 4. Знайти похідну функції $y=4\log_3 x-6\arcsin x$.

Розв'язання. Скористаємось правилом для похідної різниці та таблицею похідних

$$y'=\frac{4}{x\ln 3}-\frac{6}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Приклад 5. Знайти похідну функції $y=(6x-8)\cdot(3x^5+7x-2)$.

Розв'язання. Скористаємось правилом для похідної добутку та таблицею похідних

$$y'=(6x-8)'\cdot(3x^5+7x-2)+(6x-8)\cdot(3x^5+7x-2)'=$$

$$=6\cdot(3x^5+7x-2)+(6x-8)\cdot(15x^4+7)=$$

$$=18x^5+42x-12+90x^5+42x-120x^4-56=108x^5-120x^4+84x-68$$

Приклад 6. Знайти похідну функції $y=\frac{3x^4+7}{5-4x^2}$.

Розв'язання. Скористаємось правилом для похідної частки та таблицею похідних

$$y' = \frac{(3x^4+7)'(5-4x^2)-(3x^4+7)(5-4x^2)'}{(5-4x^2)^2} =$$

$$= \frac{12x^3\cdot(5-4x^2)-(3x^4+7)\cdot(-8x)}{(5-4x^2)^2} = \frac{60x^3-48x^5+24x^5+56x}{(5-4x^2)^2} =$$

$$= \frac{-24x^5+60x^3+56x}{(5-4x^2)^2}.$$

Приклад 7. Знайти похідну функції $y = \cos 8x - 4tg(5x+3)$.

Розв'язання. Скористаємось правилом для похідної різниці, таблицею похідних та правилом диференціювання складеної функції

$$y' = \left(\cos 8x - 4tg(5x+3)\right)' = \left(\cos 8x\right)' - \left(4tg(5x+3)\right)' =$$

$$= -\sin 8x\cdot(8x)' - 4\cdot\frac{1}{\cos^2(5x+3)}\cdot(5x+3)' = -8\sin 8x - 4\cdot\frac{1}{\cos^2(5x+3)}\cdot 5 =$$

$$= -8\sin 8x - \frac{20}{\cos^2(5x+3)}$$

Приклад 8. Знайти похідну функції $y = 5^{3x-1} + (4x^2-5x+1)^3$.

Розв'язання. Скористаємось правилом для похідної суми, таблицею похідних та правилом диференціювання складеної функції

$$y' = \left(5^{3x-1}\right)' + \left((4x^2-5x+1)^3\right)' = 5^{3x-1}\ln 5\cdot(3x-1)' + 3(4x^2-5x+1)^2(4x^2-5x+1)' =$$

$$= 5^{3x-1}\ln 5\cdot 3 + 3(4x^2-5x+1)^2(8x-5)$$

Приклад 9. Знайти похідну функції $y = 6arctg(9-3x^4)$.

Розв'язання. Скористаємось правилом диференціювання складеної функції

$$y = \left(6arctg(9-3x^4)\right)' = 6\cdot\frac{1}{1+(9-3x^4)^2}\cdot(9-3x^4)' = \frac{6}{1+(9-3x^4)^2}\cdot(0-3\cdot 4x^3) =$$

$$= \frac{-72x^3}{1+(9-3x^4)^2}$$

Завдання для самостійного розв'язання

Знайти похідну функції:

1. $y = \ln^2 x$
2. $y = x + \sqrt[3]{x}$
3. $y = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \operatorname{tg}^2 4x$
4. $y = arctg\sqrt{x} + \arcsin^2 x$
5. $y = \ln(x^2+a^2) + \ln\cos x$
6. $y = (x^3+1)e^{\frac{2}{x}}$

7. $y = x^2 e^{-2x}$
8. $y = 3^{2x} \lg(x^2 + 1)$
9. $y = \frac{x^2}{1-x}$
10. $y = \frac{\sqrt{x}}{4+\sqrt{x}}$
11. $y = \frac{1+\cos x}{\sin 3x}$
12. $y = \ln \frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}$

Знайти похідну функції, що задана парметрично

1. $\begin{cases} x = \frac{t+1}{t} \\ y = \frac{t-1}{t} \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \\ y = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \end{cases}$
3. $\begin{cases} x = \ln(1 + t^2) \\ y = t - arctgt \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x = e^{2t} sin2t \\ y = e^t cos6t \end{cases}$

Обчислити границі функції за допомогою правила Лопіталя

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}$ 2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - sinx}{x - tgx}$ 3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$ 4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - arctgx}{x^3}$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{lncosx}{x}$ 6. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 + 2x}{x + \sin 3x}$ 7. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3 - 12x + 16}{x^3 - 4x^2 + 4x}$

Тема 13. Диференціювання функцій багатьох змінних

Означення. Змінну величину z називають *функцією двох змінних* x, y, якщо кожній упорядкованій парі (x, y) їх значень із даної області площини поставлено у відповідність єдине значення z. Позначення $z = f(x, y)$. Змінні x, y називають *аргументами* або *незалежними змінними*.

Аналогічне означення функції трьох або більшого числа змінних.

Під областю визначення функції $z = f(x, y)$ розуміють сукупність точок (x, y) площини xOy, в яких задана функція визначена, тобто вираз $f(x, y)$ набуває певних дійсних значень.

Частинні похідні функції двох змінних

За означенням *частинна похідна* функції $z = f(x, y)$ у точці $P(x, y)$ по змінній x дорівнює

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

За означенням *частинна похідна* функції $z = f(x, y)$ у точці $P(x, y)$ по змінній y дорівнює

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

З означення частинних похідних випливає, що для їх знаходження можна використовувати відомі формули обчислення похідних функцій однієї змінної, вважаючи іншу змінну сталою.

Аналогічно означуються і знаходяться частинні похідні функцій трьох та більшого числа змінних.

Приклад 13.1. Знайти частинні похідні функції $z = 3x^2y + x^2 - y^2 + 5$.

Вважаючи y сталою, знаходимо

$$z'_x = (3x^2y + x^2 - y^2 + 5)'_x = 3 \cdot 2 \cdot xy + 2x - 0 + 0 = 6xy + 2x.$$

Вважаючи x сталою, знаходимо

$$z'_y = (3x^2y + x^2 - y^2 + 5)'_y = 3x^2 \cdot 1 + 0 - 2y + 0 = 3x^2 - 2y.$$

Приклад 13.2. Знайти частинні похідні функції $z = 5x\sin y - \cos x + 3$.

Вважаючи y сталою, знаходимо

$$z'_x = (5x\sin y - \cos x + 3)'_x = 5 \cdot 1 \cdot \sin y - (-\sin x) + 0 = 5\sin y + \sin x.$$

Вважаючи x сталою, знаходимо

$$z'_y = (5x\sin y - \cos x + 3)'_y = 5x\cos y - 0 + 0 = 5x\cos y.$$

Приклад 13.3. Знайти частинні похідні функції $z = \dfrac{y}{x}$.

Вважаючи y сталою, знаходимо

$$z'_x = \left(\frac{y}{x}\right)'_x = y \cdot \left(\frac{1}{x}\right)'_x = y \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2}.$$

Вважаючи x сталою, знаходимо

$$z'_y = \left(\frac{y}{x}\right)'_y = \frac{1}{x} \cdot (y)'_y = \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{1}{x}.$$

Приклад 13.4. Знайти частинні похідні функції $z = (2x^4 + 5y^2)^3$.

Вважаючи y сталою, знаходимо частинну похідну складеної функції

$$z'_x = 3 \cdot (2x^4 + 5y^2)^2 \cdot (2x^4 + 5y^2)'_x = 3 \cdot (2x^4 + 5y^2)^2 \cdot (2 \cdot 4 \cdot x^3 + 0) = 24x^3(2x^4 + 5y^2)^2$$

Вважаючи x сталою, знаходимо частинну похідну складеної функції

$$z'_y = 3 \cdot (2x^4 + 5y^2)^2 \cdot (2x^4 + 5y^2)'_y = 3 \cdot (2x^4 + 5y^2)^2 \cdot (0 + 5 \cdot 2 \cdot y) = 30y(2x^4 + 5y^2)^2.$$

Частинні похідні вищих порядків

Частинними похідними другого порядку функції називають частинні похідні від її частинних похідних першого порядку. Для частинних похідних другого порядку використовують позначення

$$z''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad z''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \quad z''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Якщо частинні похідні, що обчислюються, неперервні, то результат повторного диференціювання не залежить від порядку диференціювання, тобто

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Приклад 13.5. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = x^3 y^4 + 2x^2 - y^3 + 1$.

Знайдемо частинні похідні першого порядку

$$z'_x = (x^3 y^4 + 2x^2 - y^3 + 1)'_x = 3x^2 y^4 + 4x,$$

$$z'_y = (x^3 y^4 + 2x^2 - y^3 + 1)'_y = 4x^3 y^3 - 3y^2.$$

Знайдемо частинні похідні від похідних першого порядку

$$z''_{xx} = (3x^2 y^4 + 4x)'_x = 6xy^4 + 4,$$

$$z''_{xy} = (3x^2 y^4 + 4x)'_y = 3x^2 \cdot 4y^3 + 0 = 12x^2 y^3,$$

$$z''_{yx} = (4x^3 y^3 - 3y^2)'_x = 4 \cdot 3x^2 y^3 - 0 = 12x^2 y^3,$$

$$z''_{yy} = (4x^3 y^3 - 3y^2)'_y = 4x^3 \cdot 3y^2 - 3 \cdot 2y = 12x^3 y^2 - 6y.$$

Приклад 13.6. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = (3x + 7y)^5$.

Знайдемо частинні похідні першого порядку

$$z'_x = 5(3x + 7y)^4 \cdot (3x + 7y)'_x = 5(3x + 7y)^4 \cdot 3 = 15(3x + 7y)^4,$$

$$z'_y = 5(3x + 7y)^4 \cdot (3x + 7y)'_y = 5(3x + 7y)^4 \cdot 7 = 35(3x + 7y)^4.$$

Знайдемо другі частинні похідні

$$z''_{xx} = (15(3x + 7y)^4)'_x = 15 \cdot 4 \cdot (3x + 7y)^3 \cdot 3 = 180(3x + 7y)^3,$$

$$z''_{xy} = (15(3x + 7y)^4)'_y = 15 \cdot 4 \cdot (3x + 7y)^3 \cdot 7 = 420(3x + 7y)^3,$$

$$z''_{yy} = (35(3x + 7y)^4)'_y = 35 \cdot 4 \cdot (3x + 7y)^3 \cdot 7 = 980(3x + 7y)^3.$$

Екстремум функції двох змінних

Функція $f(x,y)$ має *локальний максимум (мінімум)* $f(a,b)$ у точці $P(a,b)$, якщо для всіх відмінних від P точок $P'(x,y)$ у деякому околі точки P виконується нерівність $f(a,b) > f(x,y)$ (відповідно $f(a,b) < f(x,y)$). Максимум або мінімум функції називається її *екстремумом*.

Необхідна умова екстремуму. Точки, в яких диференційована функція $f(x,y)$ може набувати екстремуму, знаходять шляхом розв'язання системи рівнянь

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 0, \\ f'_y(x,y) = 0. \end{cases}$$

Розв'язки системи називають *стаціонарними точками*.

Достатня умова екстремуму. У стаціонарній точці екстремуму $P(a,b)$ знаходимо

$$A = f''_{xx}(a,b),\ B = f''_{xy}(a,b),\ C = f''_{yy}(a,b),\ \Delta = AC - B^2.$$

Якщо:

1) $\Delta > 0$, то функція має екстремум у точці $P(a,b)$, а саме – максимум, якщо $A < 0$, і мінімум, якщо $A > 0$;

2) $\Delta < 0$, то екстремуму в точці $P(a,b)$ немає;

3) $\Delta = 0$, то потрібні подальші дослідження.

Приклад 13.7. Дослідити на екстремум функцію $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

Знайдемо частинні похідні і складемо систему

$$z'_x = 3x^2 + 3y^2 - 15,\ z'_y = 6xy - 12$$

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0, \\ 6xy - 12 = 0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x^2 + y^2 - 5 = 0, \\ xy - 2 = 0 \end{cases}.$$

Розв'язуємо систему $\begin{cases} \left(\frac{2}{y}\right)^2 + y^2 - 5 = 0, \\ x = \frac{2}{y} \end{cases}$ і знаходимо чотири стаціонарні точки $M_1(1;2)$, $M_2(2;1)$, $M_3(-1;-2)$, $M_4(-2;-1)$.

Знайдемо похідні другого порядку

$$z''_{xx} = 6x,\ z''_{xy} = 6y,\ z''_{yy} = 6x.$$

Обчислимо $\Delta = AC - B^2 = 6x \cdot 6x - (6y)^2 = 36x^2 - 36y^2$ для кожної стаціонарної точки:

1) $\Delta(M_1) = 36 \cdot 1^2 - 36 \cdot 2^2 = 36 - 144 = -108$. Оскільки $\Delta(M_1) < 0$, то у точці M_1 екстремуму немає;

2) $\Delta(M_2) = 36 \cdot 2^2 - 36 \cdot 1^2 = 144 - 36 = 108$, оскільки $\Delta(M_2) > 0$, $A(M_2) = 12 > 0$, то у точці M_2 функція має мінімум. Цей мінімум дорівнює значенню функції при $x = 2$, $y = 1$: $z_{\min} = 2^3 + 3 \cdot 2 \cdot 1^2 - 15 \cdot 2 - 12 \cdot 1 = -28$.

3) $\Delta(M_3) = 36 \cdot (-1)^2 - 36 \cdot (-2)^2 = 36 - 144 = -108$, оскільки $\Delta(M_3) < 0$, то у точці M_3 екстремуму немає;

4) $\Delta(M_4) = 36 \cdot (-2)^2 - 36 \cdot (-1)^2 = 144 - 36 = 108$, оскільки $\Delta(M_4) < 0$, $A(M_2) = 12 > 0$, $A(M_2) = -12 < 0$, то у точці M_4 функція має максимум, що дорівнює $z_{\min} = (-2)^3 + 3 \cdot (-2) \cdot (-1)^2 - 15 \cdot (-2) - 12 \cdot (-1) = 28$.

Приклади розв'язання задач до теми 13

Приклад 1. Знайти частинні похідні функції $z = 6x^3 + 9y^2 - 7$

Розв'язання.

$$z'_x = (6x^3 + 9y^2 - 7)'_x = 6 \cdot 3 \cdot x^2 + 0 - 0 = 18x^2$$

$$z'_y = (6x^3 + 9y^2 - 7)'_y = 0 + 9 \cdot 2 \cdot y - 0 = 18y.$$

Приклад 2. Знайти частинні похідні функції $z = x^3 y^4 + 3xy^2 - 5\sin x + 4y - xy - 1$

Розв'язання.

$$z'_x = (x^3 y^4 + 3xy^2 - 5\sin x + 4y - xy - 1)'_x = 3x^2 y^4 + 3y^2 - 5\cos x + 0 - y - 0 =$$
$$= 3x^2 y^4 + 3y^2 - 5\cos x - y$$
$$z'_x = (x^3 y^4 + 3xy^2 - 5\sin x + 4y - xy - 1)'_y = x^3 \cdot 4y^3 + 3x \cdot 2y - 0 + 4 - x - 0 =$$
$$= 4x^3 y^3 + 6xy + 4 - x$$

Приклад 3. Знайти частинні похідні функції $z = (7x^4 + 5xy^2 - 4y)^3$.

Розв'язання.

$$z'_x = ((7x^4 + 5xy^2 - 4y)^3)'_x = 3 \cdot (7x^4 + 5xy^2 - 4y)^2 (7 \cdot 4 \cdot x^3 + 5 \cdot 1 \cdot y^2 - 0) =$$
$$= 3 \cdot (7x^4 + 5xy^2 - 4y)^2 (28x^3 + 5y^2)$$
$$z'_y = ((7x^4 + 5xy^2 - 4y)^3)'_y = 3 \cdot (7x^4 + 5xy^2 - 4y)^2 (0 + 5x \cdot 2y - 4 \cdot 1) =$$
$$= 3 \cdot (7x^4 + 5xy^2 - 4y)^2 (10xy - 4)$$

Приклад 4. Знайти частинні похідні функції $z = 5\cos(3x - 2y^4)$.

Розв'язання.

$$z'_x = (5\cos(3x - 2y^4))'_x = -5\sin(3x - 2y^4) \cdot (3 \cdot 1 - 0) =$$
$$= -15\sin(3x - 2y^4) \cdot$$
$$z'_y = (5\cos(3x - 2y^4))'_y = -5\sin(3x - 2y^4) \cdot (0 - 2 \cdot 4y^3) =$$
$$= 40y^3 \sin(3x - 2y^4).$$

Приклад 5. Знайти частинні похідні функції $z = \sqrt{x^2 - y^2}$.

Розв'язання.

$$z_x = \left(\sqrt{x^2 - y^2}\right)_x' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - y^2}} \left(x^2 - y^2\right)_x' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - y^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}$$
$$z'_y = \left(\sqrt{x^2 - y^2}\right)_y' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - y^2}} \left(x^2 - y^2\right)_y' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - y^2}} \cdot (-2y) = \frac{-y}{\sqrt{x^2 - y^2}}$$

Приклад 6. Знайти всі другі частинні похідні функції $z = 2xy^2 - yx^2 - \cos x$.

Розв'язання. Знайдемо спочатку перші частинні похідні

$$z'_x = (2xy^2 - yx^2 - \cos x)'_x = 2y^2 - 2yx + \sin x,$$
$$z'_y = (2xy^2 - yx^2 - \cos x)'_y = 4xy - x^2.$$

Далі знайдемо другі частинні похідні

$$z''_{xx} = (2y^2 - 2yx + \sin x)'_x = 0 - 2y + \cos x = -2y + \cos x,$$
$$z''_{xy} = (2y^2 - 2yx + \sin x)'_y = 4y - 2x + 0 = 4y - 2x,$$
$$z''_{yy} = (4xy - x^2)'_y = 4x - 0 = 4x.$$

Приклад 7. Знайти всі другі частинні похідні функції $z = \ln(3x + 4y)$.

Розв'язання. Знайдемо спочатку перші частинні похідні

$$z'_x = (\ln(3x + 4y))'_x = \frac{1}{3x + 4y} \cdot (3 + 0) = \frac{3}{3x + 4y},$$
$$z'_y = (\ln(3x + 4y))'_y = \frac{1}{3x + 4y} \cdot (0 + 4) = \frac{4}{3x + 4y}.$$

Далі знайдемо другі частинні похідні

$$z''_{xx} = \left(\frac{3}{3x + 4y}\right)'_x = \frac{0 \cdot (3x + 4y) - 3 \cdot (3 \cdot 1 + 0)}{(3x + 4y)^2} = \frac{-9}{(3x + 4y)^2},$$
$$z''_{xy} = \left(\frac{3}{3x + 4y}\right)'_y = \frac{0 \cdot (3x + 4y) - 3 \cdot (0 + 4 \cdot 1)}{(3x + 4y)^2} = \frac{-12}{(3x + 4y)^2},$$
$$z''_{yy} = \left(\frac{4}{3x + 4y}\right)'_y = \frac{0 \cdot (3x + 4y) - 4 \cdot (0 + 4 \cdot 1)}{(3x + 4y)^2} = \frac{-16}{(3x + 4y)^2}.$$

Завдання для самостійного розв'язання

Знайти частинні похідні функцій:

1. $z = x^3 + 3xy^2 + y^3$ 2. $z = (5x^2y - y^3 + 7)^3$
3. $z = x^3y - xy^3$ 4. $z = \sqrt{x^2 + y^2} + e^{xy}$
5. $z = \arcsin(2x - 3y) + \ln \operatorname{tg}(xy)$

Обчислити диференціал функції двох змінних:

1. $z = x^2 + y^2 + x^y$
2. $z = \ln(x + 3y) + \sqrt{x - 2y}$
3. $z = xy^3 - 3x^2y^2 + 2y^4$

Знайти всі другі частинні похідні

1. $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$
2. $z = e^{xy}$

Дослідити на екстремум функцію

1. $z = 2y^2 + (x - 1)^2$
2. $z = 2x + 4y - 2xy$
3. $z = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 - 4$
4. $z = x^2 - 2yx + 3y^2 - 1$

Питання для самоконтролю до змістового модулю 3

1. Поясніть поняття функції, які є способи задання функцій.
2. Сформулюйте поняття границі функції у точці.
3. Сформулюйте основні правила розкриття невизначеностей, першу та другу особливі границі.
4. Дайте визначення похідної функції.
5. Сформулюйте правила диференціювання функцій.
6. Як знайти похідну складеної функції?
7. Дайте означення похідної другого порядку.
8. Дайте означення функції двох змінних.
9. Як знайти частинні похідні першого та другого порядку функції двох змінних?
10. Сформулюйте правило дослідження функції двох змінних на екстремум.

Змістовий модуль 4 Інтегральне числення

Тема 14. Невизначений інтеграл

Невизначеним інтегралом $\int f(x)dx$ функції $f(x)$ (на проміжку X) називають вираз $F(x)+C$, де $F(x)-$ одна з первісних функції $f(x)$, тобто $F'(x)=f(x)\,(x\in X)$, C – довільна стала.

Таблиця основних невизначених інтегралів

1. $\int dx = x + C$	8. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + C$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	9. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + C$
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	10. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$
4. $\int e^x dx = e^x + C$	11. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + C$
5. $\int \frac{dx}{x} = \ln\|x\| + C$	12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
6. $\int \cos x dx = \sin x + C$	13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\| + C$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$	

Приклади. Обчислити невизначений інтеграл за допомогою таблиці інтегралів

14.1 $\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = \frac{x^4}{4} + C$ *(за формулою 2)*

14.2 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}} = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C$ *(за формулою 2)*

14.3 $\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$ *(за формулою 3)*

14.4 $\int \frac{dx}{x^2 + 9} = \int \frac{dx}{x^2 + 3^2} = \frac{1}{3} arctg \frac{x}{3} + C$. *(за формулою 10)*

14.5 $\int \frac{dx}{x^2 - 5} = \int \frac{dx}{x^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln\left|\frac{x - \sqrt{5}}{x + \sqrt{5}}\right| + C$. *(за формулою 11)*

14.6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-7}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-7}\right| + C$. *(за формулою 13)*

Методи інтегрування

Безпосереднє інтегрування

Безпосереднє обчислення невизначених інтегралів ґрунтується на тотожних перетвореннях підінтегральної функції та властивостях невизначеного інтеграла.

Властивості невизначеного інтеграла.

1. Сталий множник можна винести за знак інтеграла
$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx,\ k = const, k \neq 0.$$
2. Інтеграл від суми (різниці) функцій дорівнює сумі (різниці) інтегралів
$$\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx.$$
3. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, то для будь-яких сталих k та b $(k \neq 0)$
$$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C.$$

Приклади. Обчислити невизначений інтеграл

14.7 $\int \frac{3}{\cos^2 x}dx = (\textit{за правилом } 1) = 3\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = 3tgx + C.$

14.8 $\int (4 - \frac{3}{x} + \frac{e^x}{2})dx = (\textit{за правилами } 1 \textit{ і } 2) = 4\int dx - 3\int \frac{1}{x}dx + \frac{1}{2}\int e^x dx =$

$= 4x - 3\ln|x| + \frac{1}{2}e^x + C.$

14.9 $\int \sin(4x+3)dx = (\textit{за правилом } 3,\ k = 4, b = 3) = -\frac{1}{4}\cos(4x+3) + C.$

14.10 $\int \frac{dx}{9x^2+4} = \int \frac{dx}{(3x)^2+2^2} = (\textit{за правилом } 3 \textit{ та формулою } 10) =$

$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}arctg\frac{3x}{2} + C$

Метод заміни змінної

Обчислення невизначених інтегралів методом заміни змінної ґрунтується на формулі

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C,$$

де $F(x)$ – первісна функція $f(x)$, $g'(x)$ – похідна функції $g(x)$.

При застосуванні цієї формули зручно перейти до нової змінної t, поклавши $t = g(x)$. Розглядаючи t як функцію змінної *x*, запишемо диференціал $dt = g'(x)dx$. В результаті приходимо до інтеграла відносно

змінної t: $\int f(t)dt = F(t) + C$. Зробивши заміну $t = g(x)$ у правій частині цієї рівності, отримаємо остаточну відповідь $F(g(x)) + C$.

Обчислення інтеграла методом заміни змінної зручно оформити наступним чином

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \left| \begin{matrix} t = g(x) \\ dt = g'(x)dx \end{matrix} \right| = \int f(t)dt = F(t) + C = F(g(x)) + C.$$

Приклади. Обчислити інтеграл

14.11 $\int \sin^2 x \cos x dx$

Оскільки $(\sin x)' = \cos x$, то

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \left| \begin{matrix} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{matrix} \right| = \int t^2 dt = (\textit{за формулою 2 з таблиці інтегралів}) =$$

$$= \frac{t^{2+1}}{2+1} + C = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

14.12 $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

Оскільки $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, то

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \left| \begin{matrix} t = \ln x \\ dt = \frac{dx}{x} \end{matrix} \right| = \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt = (\textit{за прикладом 2}) = \int t^{-\frac{1}{2}} dt = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{\ln x} + C$$

Метод інтегрування частинами

Формула інтегрування частинами має вигляд

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du.$$

Виділимо три класи підінтегральних функцій, для яких необхідно користуватися цією формулою.

1 клас: якщо підінтегральна функція

$$x^n \cdot \left\{ \begin{matrix} \sin x \\ \cos x \\ \frac{1}{\sin^2 x} \\ \frac{1}{\cos^2 x} \\ a^x \\ e^x \end{matrix} \right., \quad \textit{тоді приймаємо за} \quad u = x^n, \quad dv = \left\{ \begin{matrix} \sin x dx \\ \cos x dx \\ \frac{dx}{\sin^2 x} \\ \frac{dx}{\sin^2 x} \\ a^x dx \\ e^x dx \end{matrix} \right.$$

2 клас: якщо підінтегральна функція

$$x^n \cdot \begin{cases} \arcsin x \\ \arccos x \\ arctgx, \\ arcctgx \\ \ln x \end{cases} \quad \text{тоді приймаємо за} \quad u = \begin{cases} \arcsin x \\ \arccos x \\ arctgx, \\ arcctgx \\ \ln x \end{cases} \quad dv = x^n$$

3 клас: якщо підінтегральна функція

$$\sin x \cdot e^x,\ \cos x \cdot e^x,\ \sin x \cdot e^x,\ \cos x \cdot e^x,\ \ln|\cos x|,\ \ln|\sin x|,$$

то треба інтегрувати два рази частинами. При цьому в правій частині один із доданків міститиме вихідний інтеграл. Отримаємо його значення, розв'язавши рівняння.

Приклад 14.4 $\int (x+1)\cdot e^{2x}dx$

$$\int (x+1)\cdot e^{2x}dx = \begin{vmatrix} u = x+1 & du = dx \\ dv = e^{2x}dx & v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(x+1)e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}dx =$$

$$= \frac{1}{2}(x+1)e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C.$$

Приклади розв'язання задач до теми 14

Приклад 1. Знайти невизначений інтеграл $\int 12cosxdx$

Розв'язання. $\int 12cosxdx = 12\cdot \sin x + C = 12\sin x + C$.

Приклад 2. Знайти невизначений інтеграл $\int (4x^5 - 2x^3 - x + 5)dx$.

Розв'язання.

$$\int (4x^5 - 2x^3 - x + 5)dx = 4\cdot\frac{x^6}{6} - 2\cdot\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + 5x + C = \frac{2x^6}{3} - \frac{x^4}{2} - \frac{x^2}{2} + 5x + C.$$

Приклад 3. Знайти невизначений інтеграл $\int \left(15x^4 - \frac{13}{x}\right)dx$.

Розв'язання. $\int \left(15x^4 - \frac{13}{x}\right)dx = 15\cdot\frac{x^5}{5} - 13\ln|x| + C = 3x^5 - 13\ln|x| + C$.

Приклад 4. Знайти невизначений інтеграл $\int (7x+6)^5 dx$.

Розв'язання.

$$\int (7x+6)^4 dx = \frac{1}{7}\cdot\frac{(7x+6)^5}{5} + C = \frac{(7x+6)^5}{35} + C.$$

Приклад 5. Знайти невизначений інтеграл $\int 14^{9x-1}dx$.

Розв'язання. Скористаємося формулою (4) з таблиці інтегралів і отримаємо $\int 14^{9x-1}dx = \frac{14^{9x-1}}{9\ln 14} + C$.

Приклад 6. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{3x+4}}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3x+4}} = \frac{2\sqrt{3x+4}}{3} + C.$$

Приклад 7. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}} = \ln|x + \sqrt{x^2+9}| + C$$

Приклад 8. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{x^2-25}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{dx}{x^2-25} = \frac{1}{2\cdot 5}\ln\left|\frac{x-5}{x+5}\right| + C = \frac{1}{10}\ln\left|\frac{x-5}{x+5}\right| + C.$$

Приклад 9. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{(8x+5)^2+4}$.

Розв'язання. Скористаємося формулою (11) з таблиці інтегралів. В нашому випадку $u = 8x+5, a = 2$, отже

$$\int \frac{dx}{(8x+5)^2+4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}\cdot arctg\frac{8x+5}{2} + C = \frac{1}{16}arctg\frac{8x+5}{2} + C$$

Приклад 10. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{36-(2-5x)^2}}$.

Розв'язання. Скористаємося формулою (9) з таблиці інтегралів. В нашому випадку $u = 2-5x, a = 6$, отже

$$\int \frac{dx}{\sqrt{36-(2-5x)^2}} = \frac{1}{-5}\arcsin\frac{2-5x}{6} + C.$$

Приклад 11. Знайти невизначений інтеграл $\int arctgxdx$.

Розв'язання. Скористаємось методом інтегрування частинами

$$\int arctgxdx = \left|\begin{matrix} u = arctgx & du = \frac{1}{1+x^2}dx \\ dv = dx & v = x \end{matrix}\right| = x\cdot arctgx - \int x\cdot\frac{1}{1+x^2}dx =$$

$$= x\cdot arctgx - \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + C.$$

Приклад 12. Знайти невизначений інтеграл. $\int e^x \cos(e^x)dx$.

Розв'язання. Скористаємось методом заміни змінної

Оскільки $(e^x)' = e^x$, то

$$\int e^x \cos(e^x)dx = \left| \begin{array}{c} t = e^x \\ dt = e^x dx \end{array} \right| = \int \cos t dt = \sin t + C = \sin(e^x) + C.$$

Завдання для самостійного розв'язання

Знайти невизначені інтеграли

1. $\int (2x-3)^{99} dx$
2. $\int \sqrt[5]{(5x+7)^6} dx$
3. $\int (4^{3x} + 3^{-x})dx$
4. $\int (2x-3)^{99} dx$
5. $\int (\sqrt{x}-1)(x-\sqrt{x}+1)dx$
6. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-(2x+3)^2}}$
7. $\int \frac{dx}{16x^2-9}$
8. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}$
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}}$
10. $\int \frac{dx}{1+9x^2}$
11. $\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}} dx$
12. $\int \frac{3+x}{3-x} dx$
13. $\int \frac{x+2}{2x-1} dx$
14. $\int \frac{3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x}{2^x} dx$
15. $\int \frac{x^3}{1+x^4} dx$
16. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$
17. $\int \frac{x^4}{\sqrt{4+x^5}} dx$
18. $\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{1+x^4}} dx$
19. $\int \frac{dx}{(x+1)(2x-3)}$
20. $\int \frac{dx}{x^2-7x+10}$
21. $\int \frac{dx}{\sqrt{8+6x-9x^2}}$
22. $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+4}$
23. $\int \frac{dx}{x \ln x}$
24. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^6}}$
25. $\int x3^x dx$
26. $\int x^2 arctgx dx$
27. $\int x \ln x dx$

Тема 15. Визначений інтеграл

Визначений інтеграл функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ – це число, яке позначають $\int_a^b f(x)dx$. Тут $f(x)$ – підінтегральна функція, $[a,b]$ – відрізок інтегрування, a та b - нижня та верхня межі інтегрування.

Визначений інтеграл обчислюється за формулою Ньютона-Лейбніца

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

де $F(x)$ – первісна функції $f(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$.

Властивості визначеного інтеграла

1. Сталий множник можна виносити за знак визначеного інтеграла.

2. Визначений інтеграл суми (різниці) двох функцій дорівнює сумі (різниці) визначених інтегралів кожної з цих функцій.

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

(ця властивість поширюється на будь-яке скінченне число доданків).

3. Якщо у визначеному інтегралі поміняти місцями межі інтегрування, то інтеграл змінить свій знак на протилежний

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

4. Визначений інтеграл з однаковими межами інтегрування дорівнює нулю

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

5. Якщо точка c ділить відрізок $[a,b]$ на відрізки $[a,c]$ та $[c,b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Приклад 15.1 Обчислити визначений інтеграл $\int_0^{\pi/3} \cos x dx$.

$$\int_0^{\pi/3} \cos x dx = \sin x\Big|_0^{\pi/3} = \sin\frac{\pi}{3} - \sin 0 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Приклад 15.2 Обчислити визначений інтеграл $\int_0^1 \left(5e^x - 10x^4 + \frac{1}{1+x^2}\right)dx$.

$$\int_0^1 \left(5e^x - 10x^4 + \frac{1}{1+x^2}\right)dx = \left(5e^x - 10\cdot\frac{x^5}{5} + arctgx\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \left(5e^1 - 2\cdot 1^5 + arctg1\right) - \left(5e^0 - 2\cdot 0^5 + arctg0\right) = 5e - 7 + \frac{\pi}{4}.$$

Заміна змінної у визначеному інтегралі

Якщо у визначеному інтегралі вводиться нова змінна $\begin{cases} t = t(x) \\ dt = t'(x)dx \end{cases}$, то слід змінити межі інтегрування. Нижня межа інтегрування t_1 визначається як

значення нової змінної в точці $x=a$, а верхня межа t_2 – її значення в точці $x=b$, тобто $\begin{cases} t_1 = t(a) \\ t_2 = t(b) \end{cases}$.

Приклад 15.3. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^2 \frac{2xdx}{x^2+1}$.

Введемо нову змінну $t = x^2 + 1$. Тоді $dt = (x^2+1)dx = 2xdx$. Обчислимо нові межі інтегрування $\begin{cases} t_1 = t(0) = 0^2 + 1 = 1 \\ t_2 = t(2) = 2^2 + 1 = 5 \end{cases}$. Маємо

$$\int\limits_0^2 \frac{2xdx}{x^2+1} = \int\limits_0^5 \frac{dt}{t} = \ln|t|\Big|_0^5 = \ln|5| - \ln|0| = \ln 5.$$

Приклад 15.4. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin x dx$.

Введемо нову змінну $t = \cos x$. Тоді $dt = -\sin x dx$. Обчислимо нові межі інтегрування $\begin{cases} t_1 = t(0) = \cos 0 = 1 \\ t_2 = t(\frac{\pi}{2}) = \cos\frac{\pi}{2} = 0 \end{cases}$. Маємо

$$\int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin x dx = -\int\limits_1^0 t^2 dt = -\frac{t^3}{3}\Big|_1^0 = -\left(\frac{0^3}{3} - \frac{1^3}{3}\right) = \frac{1}{3}.$$

Інтегрування частинами у визначеному інтегралі

Формула інтегрування частинами у визначеному інтегралі має вигляд

$$\int\limits_a^b udv = uv\Big|_b^a - \int\limits_a^b vdu.$$

Приклад 15.5. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^1 xe^{-x}dx$.

$$\int\limits_0^1 xe^{-x}dx = \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = e^{-x}dx & v = -e^{-x} \end{vmatrix} = -xe^{-x}\Big|_0^1 + \int\limits_0^1 e^{-x}dx = -1\cdot e^{-1} + 0\cdot e^0 - e^{-x}\Big|_0^1 =$$

$$= -e^{-1} - e^{-1} + 1 = 1 - 2e^{-1}.$$

Застосування визначеного інтеграла у біології

Загальна біомаса популяції. Розглянемо популяцію, в якій вага особини популяції відчутно змінюється протягом життя. Будемо позначати:

τ – вік особини популяції (в певних одиницях часу);

$N(\tau)$ – кількість особин популяції, вік яких дорівнює τ;

$P(\tau)$ – середня вага особини популяції віком τ;

$M(\tau)$ – біомаса усіх особин популяції у віці від 0 до τ;

T – максимальний вік особини популяції.

Добуток $N(\tau)P(\tau)$ дорівнює біомасі усіх особин популяції віком τ. Загальну біомасу популяції легко обчислити за формулою

$$M = M(t) = \int_0^T N(\tau)P(\tau)d\tau$$

Кількість популяції. Наступні міркування добре підходять для популяцій з великою кількістю (понад 1000), наприклад, мікроорганізмів. Будемо називати швидкістю зміни кількості популяції приріст кількості особин популяції за одиницю часу і позначатимемо $v(t)$, а кількість популяції $N(t)$, де t – час у певних одиницях.

Нехай відомо швидкість зміни кількості популяції $v(t)$ і $v(t)$ є неперервною функцією часу. Тоді можна знайти *приріст кількості популяції* за проміжок часу від моменту t_1 до моменту t_2, використовуючи формулу

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$$

Якщо відомо початкову кількість популяції $N(t_1)$, то кількість популяції в довільний наступний момент часу t_2 визначаємо за формулою

$$N(t_2) = N(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$$

Приклад 15.6. Знайти приріст кількості популяції бактерій за проміжок часу від 0 до 10 (час вимірюють у днях), якщо відома швидкість зміни кількості популяції $800e^{0,8t}$.

Застосуємо формулу приросту кількості популяції, де $v(t) = 800e^{0,8t}$, $t_1 = 0$, $t_2 = 10$

$$\int_0^{10} 800e^{0,8t}dt = 800\frac{e^{0,8t}}{0,8}\Bigg|_0^{10} = 1000(e^{0,8\cdot 10} - e^{0,8\cdot 0}) = 1000(e^8 - 1) = 2979958(oc.)$$

Приклад 15.7. Популяція комах зростає від початкового розміру 10000 особин до кількості $p(t)$ через час t, який виражається в днях. Якщо швидкість зростання в момент часу t дорівнює $p'(t) = t + t^2$, якою буде кількість популяції через: а) один день; б) п'ять днів; в) десять днів.

Застосуємо властивість невизначеного інтеграла

$$p(t) = \int p'(t)dt = \int (t + t^2)dt = \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + C.$$

Щоб знайти значення сталої C використаємо те, що відома початкова кількість $p(0) = 10000$. Підставляючи в останню формулу, отримаємо $C = p(0) = 10000$.

Отже, кількість популяції через t днів можна обчислити, користуючись виразом

$$p(t)=\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+C$$

Отримали, що популяція нараховуватиме:

а) через один день $p(1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+10000=10000\frac{5}{6}\approx 10001$ (особина);

б) через п'ять днів $p(1)=\frac{25}{2}+\frac{125}{3}+10000=10054\frac{1}{6}\approx 10054$ (особин);

в) через десять днів $p(1)=\frac{100}{2}+\frac{1000}{3}+10000=10383\frac{1}{3}\approx 10383$ (особин)

Сумарна реакція. Якщо відома реакція на визначену дозу ліків через t годин після прийому $r(t)$ і $r(t)$ є неперервною функцією часу, то сумарну реакцію за проміжок часу $[0;T]$ можна визначити за формулою

$$R(T)=\int_0^T r(t)dt$$

Приклад 15.8. Реакція на визначену дозу ліків через t годин після прийому задається виразом $r(t)=t^2e^{-t^3}$. Знайти величину сумарної реакції на момент часу Т.

Використовуючи попередню формулу, обчислимо сумарну реакцію

$$R(T)=\int_0^T t^2e^{-t^3}dt=-\frac{1}{3}e^{-t^3}\Big|_0^T=-\frac{1}{3}(e^{-T^3}-e^0)=-\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{e^{T^3}}\right).$$

Приклад 15.9. Реакція на визначену дозу ліків через t годин після прийому задається виразом часу $r(t)=\frac{t}{1+t^4}$. Знайти величину сумарної реакції на момент часу *T*.

$$R(T)=\int_0^T \frac{t}{1+t^4}dt=\frac{1}{2}arctg(t^2)\Big|_0^T=\frac{1}{2}(arctg(T^2)-arctg0)=\frac{1}{2}arctg(T^2).$$

Середня довжина перельоту. У деяких дослідженнях треба знати середню довжину пробігу чи середню довжину шляху, який проходять тварини під час міграції на деякій фіксованій ділянці. Проведемо відповідне обчислення для птахів. Нехай ділянкою буде круг радіуса *R*. Вважатимемо *R* не дуже великим, так щоб більшість птахів досліджуваного виду перетинало цей круг по прямій.

Птах може під довільним кутом у будь-якій точці перетинати коло. Залежно від цього довжина його перельоту над кругом може дорівнювати будь-якому значенню від *0* до *2R*. Нас цікавить середня довжина перельоту, позначимо її *l*.

Оскільки круг симетричний стосовно довільного свого діаметра, то нам достатньо обмежитись тільки тими птахами, які летять у деякому одному напрямі, наприклад, паралельно до осі *Oy*. Тоді середня довжина перельоту – це

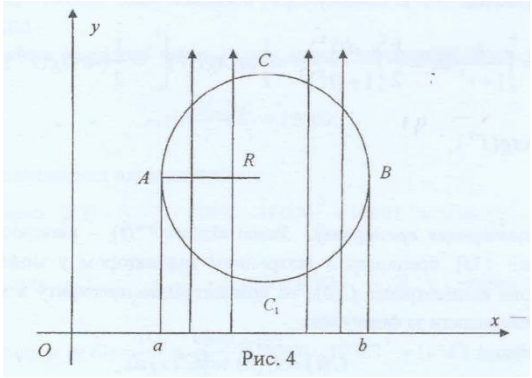


Рис. 4

середня відстань між дугами ACB і AC_1B. Це середнє значення функції $f_1(x) - f_2(x)$, де $y = f_1(x)$ – рівняння верхньої дуги кола, а $y = f_2(x)$ – рівняння нижньої дуги кола.

Отож, отримаємо

$$l = \frac{\int_a^b (f_1(x) - f_2(x))dx}{b-a}$$

Інтеграл $\int_a^b f_1(x)dx$ дорівнює площі криволінійної трапеції $aACBb$, а $\int_a^b f_2(x)dx$ – площі криволінійної трапеції aAC_1Bb. Тому різниця їхніх значень дорівнює площі круга – πR^2, де $R = \frac{b-a}{2}$.

Отже, одержимо середню довжину перельоту

$$l = \frac{\pi R^2}{2R} = \frac{\pi}{2}R.$$

Приклади розв'язання задач до теми 15

Приклад 1. Знайти значення інтеграла $\int_{-1}^{4}(4x^5 - 2x^3 - x + 5)dx$.

Розв'язання.

$$\int_{-1}^{4}(4x^5 - 2x^3 - x + 5)dx = 4\cdot\frac{x^6}{6} - 2\cdot\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + 5x\Big|_{-1}^{4} = \frac{2x^6}{3} - \frac{x^4}{2} - \frac{x^2}{2} + 5x\Big|_{-1}^{4} =$$

$$= \frac{2\cdot 4^6}{3} - \frac{4^4}{2} - \frac{4^2}{2} + 5\cdot 4 - \left(\frac{2\cdot(-1)^6}{3} - \frac{(-1)^4}{2} - \frac{(-1)^2}{2} + 5\cdot(-1)\right) =$$

$$= \frac{8192}{3} - \frac{256}{2} - \frac{16}{2} + 20 - \left(\frac{2\cdot}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 5\right) = \frac{8192}{3} - 116 - \frac{2\cdot}{3} + 6 = 2620$$

Приклад 2. Знайти значення інтеграла $\int_1^7 \frac{dx}{\sqrt{3x+4}}$.

Розв'язання.

$$\int_1^7 \frac{dx}{\sqrt{3x+4}} = \frac{2\sqrt{3x+4}}{3}\Big|_1^7 = \frac{2\sqrt{3\cdot 7+4}}{3} - \frac{2\sqrt{3\cdot 1+4}}{3} = \frac{2\sqrt{25}}{3} - \frac{2\sqrt{7}}{3} =$$

$$= \frac{10}{3} - \frac{2\sqrt{7}}{3} = \frac{10-2\sqrt{7}}{3}$$

Приклад 3. Знайти значення інтеграла $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x dx$.

Розв'язання. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x dx = \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \\ t_1 = \cos 0 = 1 \\ t_2 = \cos \frac{\pi}{2} = 0 \end{array} \right| = -\int\limits_1^0 t^2 dt = -\left. \frac{t^3}{3} \right|_1^0 = -0 - (-\frac{1^3}{3}) = \frac{1}{3}.$

Приклад 4. Знайти значення інтеграла $\int\limits_0^4 2x\sqrt{x^2+9}dx$.

Розв'язання.

$$\int\limits_0^4 2x\sqrt{x^2+9}dx = \left| \begin{array}{l} t = x^2+9 \\ dt = 2xdx \\ t_1 = 0^2+9 = 9 \\ t_2 = 4^2+9 = 25 \end{array} \right| = \int\limits_9^{25} \sqrt{t}dt = \int\limits_9^{25} t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{2}{3}\left. t^{\frac{3}{2}} \right|_9^{25} = \frac{2}{3}\left. \sqrt{t^3} \right|_9^{25} = \frac{2}{3}\left(\sqrt{25^3} - \sqrt{9^3}\right) =$$

$$= \frac{2}{3}(125-27) = \frac{2}{3} \cdot 98 = \frac{196}{3}.$$

Приклад 5. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^2 xe^{x^2} dx$.

Розв'язання. Нехай $t = x^2$. Тоді $dt = 2xdx$, або $xdx = -\frac{dt}{2}$. Обчислимо нові межі інтегрування

$$\int\limits_0^2 xe^{x^2} dx = \int\limits_0^2 e^{x^2} \cdot xdx = \int\limits_0^4 e^t \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2}\left. e^t \right|_0^4 = \frac{1}{2}(e^4 - e^0) = \frac{1}{2}(e^4 - 1).$$

Приклад 6. Обчислити інтеграл $\int\limits_1^e x^2 \ln x dx$.

Розв'язання. Скористаємось методом інтегрування частинами

$$\int\limits_1^e x^2 \ln x dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & du = \frac{1}{x}dx \\ dv = x^2 dx & v = \frac{x^3}{3} \end{array} \right| = \left. \frac{x^3}{3} \cdot \ln x \right|_1^e - \int\limits_1^e \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{e^3}{3} \cdot \ln e - \frac{1^3}{3} \cdot \ln 1 - \frac{1}{3}\int\limits_1^e x^2 dx =$$

$$= \frac{e^3}{3} \cdot 1 - -\frac{1}{3} \cdot 0 - \frac{1}{3} \cdot \left. \frac{x^3}{3} \right|_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{9}\left(e^3 - 1^3\right) = \frac{2e^3+1}{9}$$

Завдання для самостійного розв'язання

Обчислити інтеграли:

1. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 2. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{5-4x}}$ 3. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}$

4. $\int_0^3 \frac{2x+4}{9x^2+6x+1}\,dx$ 5. $\int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx$ 6. $\int_4^{13} \frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^4}}$

7. $\int_1^2 \frac{dx}{x^3+x}$ 8. $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2+1}}$ 9. $\int_0^3 \frac{x+3}{2x^2-x+5}\,dx$

10. $\int_1^2 x \ln x\,dx$ 11. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x\,dx$ 12. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x\,dx$

Тема 16. Невласні інтеграли

Невласні інтеграли I-го роду

Інтеграли з однією або двома нескінченними межами інтегрування прийнято трактувати як граничні значення відповідних визначених інтегралів

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx, \tag{16.1}$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx, \tag{16.2}$$

Якщо при цьому границя нескінчена або не існує, то кажуть, що невизначений інтеграл є *розбіжним*. Якщо ж границя є скінченим числом, то кажуть, що інтеграл *збігається*.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_a^{\infty} f(x)dx, \tag{16.3}$$

де інтеграли у правій частині рівності (16.3) визначаються так само, як у рівностях (16.1) і (16.2). Причому, якщо хоча б одна з двох границь є нескінченністю, то невласний інтеграл називається розбіжним. Якщо ж границі обох доданків існують, то невласний інтеграл називається збіжним.

Приклад 16.1 Дослідити інтеграл $\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{x^4}dx$ на збіжність.

Згідно з формулою (16.2) маємо

$$\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{x^4}dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^1 \frac{1}{x^4}dx = \lim_{a\to-\infty} \left(-\frac{1}{3x^3}\right)\Big|_b^1 = \lim_{a\to-\infty} \left(-\frac{1}{3\cdot 1^3} + \frac{1}{3a^3}\right) = -\frac{1}{3} + 0 = -\frac{1}{3}.$$

Оскільки границя скінченна, то інтеграл збіжний.

Приклад 16.2 Дослідити інтеграл $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ на збіжність.

Згідно з формулою (16.1) маємо

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\lim_{b\to\infty}2\sqrt{x}\Big|_1^{b}=\lim_{b\to\infty}\left(2\sqrt{b}-2\sqrt{1}\right)=\infty.$$

Оскільки границі не існує, то інтеграл розбіжний.

Приклад 16.3 Дослідити інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+1}dx$ на збіжність.

Згідно з формулою (16.3) маємо

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+1}dx=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2+1}dx+\int_{0}^{\infty}\frac{1}{x^2+1}dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^{0}\frac{1}{x^2+1}dx+\lim_{b\to\infty}\int_0^{b}\frac{1}{x^2+1}dx=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}arctgx\Big|_a^{0}+\lim_{b\to\infty}arctgx\Big|_0^{b}=\lim_{a\to-\infty}(arctg0-arctga)+\lim_{b\to\infty}(arctgb-arctg0)=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\lim\limits_{a\to-\infty}arctga=-\dfrac{\pi}{2}\\ \lim\limits_{b\to\infty}arctgb=\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right|=0-(-\frac{\pi}{2})+\frac{\pi}{2}-0=\pi.$$

Отже, інтеграл збіжний.

Невласні інтеграли II-го роду

Якщо функція $f(x)$ має розрив у точці $x=b$, а в інших точках проміжку (a,b) інтегрування вона неперервна, тоді

$$\int_a^{b}f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to0}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)dx. \qquad (16.4)$$

Якщо функція $f(x)$ має розрив у точці $x=a$, а в інших точках проміжку (a,b) інтегрування вона неперервна, тоді

$$\int_a^{b}f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{a+\varepsilon}^{b}f(x)dx. \qquad (16.5)$$

Якщо точка розриву знаходиться у точці $x=c$, де $a<c<b$, тоді

$$\int_a^{b}f(x)dx=\int_a^{c}f(x)dx+\int_c^{b}f(x)dx. \qquad (16.6)$$

Якщо існують границі інтегралів (16.4)-(16.6), то такі невласні інтеграли є збіжними.

Приклад 16. 4 Дослідити інтеграл $\int_3^{4}\frac{1}{\sqrt{x-3}}dx$ на збіжність.

Підінтегральна функція $\frac{1}{\sqrt{x-3}}$ має в точці $x=3$ розрив. Тому за формулою (16.5)

$$\int_3^{4}\frac{1}{\sqrt{x-3}}dx=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{3+\varepsilon}^{4}\frac{1}{\sqrt{x-3}}dx=\lim_{\varepsilon\to0}2\sqrt{x-3}\Big|_{3+\varepsilon}^{4}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}\left(2\sqrt{4-3}-2\sqrt{3+\varepsilon-3}\right)=\lim_{\varepsilon\to0}\left(2-2\sqrt{\varepsilon}\right)=2.$$

Отже, інтеграл збіжний.

Приклад 16.5 Дослідити інтеграл $\int_1^3 \frac{1}{(x-2)^3}\,dx$ на збіжність.

Підінтегральна функція $\frac{1}{(x-2)^3}$ має в точці $x=2$ розрив. Тому за формулою (16.6)

$$\int_1^3 \frac{1}{(x-2)^3}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{(x-2)^3}\,dx + \int_2^3 \frac{1}{(x-2)^3}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_1^{2-\varepsilon} \frac{1}{(x-2)^3}\,dx + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{2+\varepsilon}^3 \frac{1}{(x-2)^3}\,dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{2(x-2)^2}\right)\Bigg|_1^{2-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{2(x-2)^2}\right)\Bigg|_{2+\varepsilon}^3 = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{2(2-\varepsilon-2)^2} + \frac{1}{2(1-2)^2}\right) +$$

$$+ \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{2(3-2)^2} + \frac{1}{2(2+\varepsilon-2)^2}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{2\varepsilon^2} + \frac{1}{2}\right) + \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2\varepsilon^2}\right).$$

Оскільки $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon^2} = \infty$, то інтеграл є розбіжним.

Застосування невласного інтеграла у біології

Сумарна реакція. Якщо відома реакція на визначену дозу ліків через годин після прийому $r(t)$і $r(t)$ є неперервною функцією часу, тоді сумарну реакцію на задану дозу ліків можна визначити за формулою

$$R = \int_0^{+\infty} r(t)dt\,.$$

Приклад 16.6. Реакція на визначену дозу ліків через t годин після прийому задається виразом $r(t) = te^{-t^2}$. Знайти величину сумарної реакції.

Використовуючи попередню формулу, обчислимо сумарну реакцію

$$R = \int_0^{+\infty} te^{-t^2}dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^T te^{-t^2}dt = \lim_{T\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-t^2}\right)\Bigg|_0^T = \lim_{T\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-t^2}\right)\Bigg| =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{T\to\infty}\left(e^{-T^2} - e^0\right) = \frac{1}{2}\lim_{T\to\infty}\left(1 - \frac{1}{e^{T^2}}\right) = \frac{1}{2}.$$

Приклади розв'язання задач до теми 16

Приклад 1. Знайти значення інтеграла $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x}$ або довести, що він є розбіжним.

Розв'язання.

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to\infty}\ln|x|\Big|_1^b=\lim_{b\to\infty}\ln|b|-\ln|1|=\infty-0=\infty.$$

Інтеграл є розбіжним.

Приклад 2. Знайти значення інтеграла $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2+1}$ або довести, що він є розбіжним.

Розв'язання.

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2+1}=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{x^2+1}=\lim_{b\to\infty}arctgx\Big|_1^b=\lim_{b\to\infty}arctgb-arctg1=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$$ -

значення інтеграла.

Приклад 3. Знайти значення інтеграла $\int_{-\infty}^{1}\frac{dx}{x^2}$ або довести, що він є розбіжним.

Розв'язання.

$$\int_{-\infty}^{1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{a\to-\infty}\int_a^{1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{a\to-\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_a^1=\lim_{a\to-\infty}\left(-\frac{1}{1}+\frac{1}{a}\right)=-1-0=-1.$$

Інтеграл збіжний.

Приклад 4. Знайти значення інтеграла $\int_{-\infty}^{\infty}e^x dx$ або довести, що він є розбіжним.

Розв'язання. Згідно з формулою (16.3) маємо

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^x dx=\int_{-\infty}^{0}e^x dx+\int_0^{\infty}e^x dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^{0}e^x dx+\lim_{b\to\infty}\int_0^{b}e^x dx=\lim_{a\to-\infty}e^x\Big|_a^0+\lim_{b\to\infty}e^x\Big|_0^b=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\left(e^0-e^a\right)+\lim_{b\to\infty}\left(e^b-e^0\right)=1-0+\infty-1=\infty.$$

Інтеграл розбіжний.

Приклад 5. Знайти значення інтеграла $\int_0^{\infty}x\cdot e^{-x^2}dx$ або довести, що він є розбіжним.

Розв'язання. Згідно з формулою (16.1) маємо

$$\int_0^{\infty}x\cdot e^{-x^2}dx=\lim_{b\to\infty}\int_0^{b}x\cdot e^{-x^2}dx=\begin{vmatrix}t=x^2\\dt=2xdx\\t_1=0\\t_2=b^2\end{vmatrix}=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{2}\int_0^{b^2}e^{-t}dt\right)=\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left(-e^{-t}\right)\Big|_0^{b^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left(-e^{-b^2}+e^0\right)=\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{e^{b^2}}+1\right)=\frac{1}{2}.$$

Інтеграл збіжний.

Приклад 6. Дослідити інтеграл $\int_2^3 \frac{1}{(x-2)^2}dx$ на збіжність.

Розв'язання. Підінтегральна функція $\frac{1}{(x-2)^2}$ має в точці $x=2$ розрив. Тому за формулою (16.5)

$$\int_2^3 \frac{1}{(x-2)^2}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{2+\varepsilon}^3 \frac{1}{(x-2)^2}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{2+\varepsilon}^3 (x-2)^{-2}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(x-2)^{-1}}{-1}\Bigg|_{2+\varepsilon}^3 =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{x-2}\right)\Bigg|_{2+\varepsilon}^3 = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{3-2}+\frac{1}{2+\varepsilon-2}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-1+\frac{1}{\varepsilon}\right) = -1+\infty = \infty.$$

Отже, інтеграл розбіжний.

Приклад 7. Дослідити інтеграл $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ на збіжність.

Розв'язання. Підінтегральна функція $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ має в точці $x=1$ розрив. Тому за формулою (16.4)

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\arcsin x\Big|_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}(\arcsin(1-\varepsilon)-\arcsin 0) =$$

$$= \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Отже, інтеграл збіжний.

Завдання для самостійного розв'язання

Знайти значення невласного інтеграла або довести, що він є розбіжним:

1. $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+4}$
2. $\int_0^\infty \frac{xdx}{(x+1)^3}$
3. $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}dx}{(1+x)^2}$
4. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x^2+4)dx}{x}$
5. $\int_0^\infty \frac{dx}{x^3}$
6. $\int_0^\infty \frac{xdx}{(x+1)}$
7. $\int_0^\infty e^{-2x}dx$
8. $\int_{\sqrt{2}}^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$
9. $\int_0^\infty e^{-3x}cos2xdx$
10. $\int_0^1 x\ln xdx$
11. $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx$
12. $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{(x-2)(x-3)}}$
13. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$
14. $\int_0^{1/e} \frac{dx}{x\ln^2 x}$

Питання для самоконтролю до змістового модулю 4

1. Яка функція називається первісною для заданої функції?
2. Що називається невизначеним інтегралом? Який його геометричний зміст?
3. Які властивості невизначеного інтеграла ви знаєте?
4. Запишіть таблицю основних інтегралів.
5. Охарактеризуйте основні методи інтегрування: метод заміни змінної, інтегрування частинами. Наведіть приклади.
6. Дайте означення визначеного інтеграла. Які його властивості?
7. Запишіть формулу Ньютона-Лейбніца.
8. Які основні методи обчислення визначених інтегралів Ви знаєте?
9. Дайте означення невласних інтегралів І-го і ІІ-го роду. Як вони обчислюються?

ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Бараба Г. М. Вища математика для біологів : навчально-методичний посібник у двох частинах. Частина 1. Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2013. 136 с.

2. Барабаш Г. М. Вища математика для біологів : навчально-методичний посібник у двох частинах. Частина 2. Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2014. 110 с.

3. Практикум з вищої математики : навчальний посібник / за ред. В. О. Коваля. Житомир : ЖДТУ, 2008. 448 с.

4. Математика для економістів: вища математика : навчально-методичний посібник до практичних занять / В. О. Толок та ін. Запоріжжя : ЗНУ, 2010. 111 с.

5. Лавренчук В. П., Настасієв П. П., Мартинюк О. В., Кондур О. С. Вища математика. Загальний курс. Чернівці : Книги – XXI, 2010. 556 с.

6. Вища математика : збірник задач у двох частинах. Частина 1 / за заг. ред. П. П. Овчинникова. Київ : Техніка, 2004. 280 с.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Васильків І. М. Вища математика. Ч.1 : лінійна алгебра і аналітична геометрія : навч. посіб. Львів : Львівський національний університет імені Івана Франка, 2021. 64 с.
2. Голубков І. Г., Клименко В. А., Білоус О. А. Методичні вказівки до практичних занять із курсу «Вища математика». Розділ «Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії» Суми : СумДУ, 2019. 33 с.
3. Клепко В. Ю., Голець В. Л. Вища математика в прикладах і задачах : навч. посіб. Київ : Центр учбової літератури, 2021. 594 с.
4. Литвин І. І., Конопчук О. М., Желізняк Г. О. Вища математика : навч. посіб. Київ : Центр учбової літератури, 2019. 368 с.
5. Мелащенко О. П., Рог В. Є. Вища математика : навч. посіб. Харків : ХНУВС, 2019. 100 с.
6. Петрук В. А., Прозор О. П. Вища математика з прикладними задачами : навч. посіб. Вінниця : ВНТУ, 2018. 171 с.
7. Працьовитий М. В., Ковальчук М. Б., Сачанюк-Кавецька Н. В. Вища математика. Опорні схеми та алгоритми для самостійної роботи студентів : навч. посіб. Вінниця : ВНТУ, 2019. 103 с.
8. Прохоренко М. В., Ярема Н. П., Прохоренко С. В. Вища математика: функції декількох змінних, кратні та криволінійні інтеграли, диференціальні рівняння : навч. посіб. Львів : Львівська політехніка, 2019. 100 с.
9. Стороженко І. П. Вища математика. Математичний аналіз : навч. посіб. Харків : ХНТУСГ, 2019. 156 с.
10. Турчанінова Л. І., Доля О. В. Вища математика в прикладах і задачах: навч. посіб. Київ : Ліра, 2021. 348 с.

Навчальне видання
(українською мовою)

Гречнєва Марина Олександрівна

ОСНОВИ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Навчальний посібник
для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра
спеціальності «Лісове господарство» освітньо-професійної програми
«Мисливське господарство та рослинні ресурси»

Рецензент *І.Г.Ткаченко*
Відповідальний за випуск *І. В. Зіновєєв*
Коректор *М. О. Гречнєва*