**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**
**ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

**С. І. Гоменюк,**
**С. М. Гребенюк,**
**Н. М. Д'яченко**

# КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

**Навчальний посібник**
**для здобувачів ступеня вищої освіти магістра**
**спеціальності «Математика» освітньо-професійної програми**
**«Математика»**

Затверджено
вченою радою ЗНУ
Протокол №__ від _____.

Запоріжжя
2024

УДК 517.544.8 (075.8)
Г641

Гоменюк С. І., Гребенюк С. М., Д’яченко Н. М. Крайові задачі теорії аналітичних функцій : навчальний посібник для здобувачів вищої освіти магістра спеціальності «Математика» освітньо-професійної програми «Математика». Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2024. 107 с.

В посібнику найбільшу увагу приділено викладенню основних теоретичних положень та методів аналітичного розв’язання деяких класів крайових задач теорії аналітичних функцій, а також розглянуто застосування таких задач в контактній механіці. Посібник має на меті сприяти студентам у оволодінні теоретичним матеріалом дисципліни та практичними навичками розв’язання відповідних задач.

Посібник складається із чотирьох розділів. У першому розділі подано теоретичні відомості, у другому – практикум із розв’язання задач, у третьому викладено застосування крайових задач теорії аналітичних функцій в контактній механіці, у четвертому – індивідуальне завдання, у п’ятому – теоретичні питання для самоконтролю. Розділ з теоретичними відомостями містить конспекти лекцій. У практикумі з розв’язання задач наведено різноманітні приклади і задачі, що дозволять студентам повністю оволодіти програмним навчальним матеріалом, а також повторити матеріал курсу комплексного аналізу. Розділ щодо застосування крайових задач теорії аналітичних функцій дає студентам уявлення про зв’язок даного курсу з прикладними задачами механіки.

Посібник призначений для студентів спеціальності «Математика» освітньо-професійної програми «Математика», однак його можуть використовувати студенти інших спеціальностей, молоді науковці та дослідники для розширення кругозору з математики.

Рецензент
*М. І. Клименко*, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри фундаментальної та прикладної математики

Відповідальний за випуск
*С. М. Гребенюк,* доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри фундаментальної та прикладної математики

# ЗМІСТ


ВСТУП ……..…..….. 4
Розділ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ …….……..... 5
1.1. Функції, які задовольняють умову Гельдера ……..…..……. 5
1.2. Поняття та властивості індексу функції ……...……. 6
1.3. Інтегрaл типу Коші на контурі ……..…….. 8
1.4. Сингулярний криволінійний інтеграл …….……..…… 9
1.5. Формули Сохоцького на зімкненому контурі …….……..……. 11
1.6. Інтеграл типу Коші вздовж дійсної осі …….…… 13
1.7. Сингулярний інтеграл вздовж дійсної осі ……...…… 15
1.8. Властивості граничних значень інтеграла типу Коші …… 17
1.9. Теорема про аналітичне продовження і узагальнена теорема Ліувіля …….. 18
1.10. Задача Рімана на зімкненому контурі ……..……...……..……. 19
РЕЗЮМЕ 1……..……..…… 25
1.11. Задача Рімана на дійсній осі ……..……...…..…… 26
РЕЗЮМЕ 2……..……..……..…… 31
1.12. Задача Рімана з розривними коефіцієнтами на зімкненому контурі …… 32
1.13. Задача Рімана на розімкненому контурі ……..……..……. 37
Розділ 2. ПРАКТИКУМ ІЗ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ……..…….... 39
2.1. Функції, які задовольняють умову Гельдера.…...…….……...……. 39
2.2. Обчислення індексу функції...……...…..…...……..……..…….. 42
2.3. Інтеграл типу Коші на зімкненому контурі. Сингулярний криволінійний інтеграл. Формули Сохоцького ….....……..…. 45
2.4. Інтеграл типу Коші, сингулярний інтеграл, формули Сохоцького на дійсній осі ……... 49
2.5. Задача Рімана на зімкненому контурі ……...……. 50
2.6. Задача Рімана на дійсній осі ……...…...……. 60
2.7. Задача Рімана з розривним коефіцієнтом …….……..… 63
2.8. Задача Рімана на розімкненому контурі ……...……. 75
Розділ 3. ЗАСТОСУВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ У КОНТАКТНІЙ МЕХАНІЦІ…… 81
3.1 Постановка задачі та інтегральне рівняння…… 81
3.2 Зведення інтегрального рівняння до крайової задачі Рімана…...…… 82
3.3 Зведення інтегрального рівняння контактної задачі до крайової задачі Рімана. 82
**3**.4 Розв'язання крайової задачі Рімана плоскої контактної задачі для штампа з неплоскою підошвою……..……. 83
3.4.1. Отримання загального результату…….……... 83
3.4.1. Числові результати…….…… 86
3.5 Розв'язок плоскої контактної задачі для штампа з плоскою підошвою……..… 87
3.5.1 Виведення загальних формул розв'язку……..…… 87
3.5.2 Розв'язок плоскої контактної задачі для плоского штампа без нахилу…. 90
3.5.3. Розв'язок плоскої контактної задачі для плоского штампа з нахилом…. 90
3.5.4. Числовий аналіз результатів у випадку штампа з плоскою підошвою з нахилом…….. 91
3.6 Інші сфери застосування крайових задач теорії аналітичних функцій …….. 92
Розділ 4. ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ……..……..... 93
Розділ 5. ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ……...…….. 102
РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА…….…… 104
ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА…….. 105
ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК…….…….. 106

# ВСТУП

Відповідно до освітньо-професійної програми «Математика», дисципліна «Крайові задачі теорії аналітичних функцій» є обов'язковою компонентною освітньо-професійної програми та належить до циклу професійної підготовки освітньої програми. Ця дисципліна дає змогу закріпити і поглибити знання з основних і спеціальних розділів математичного, комплексного аналізу, інтегральних рівнянь, а також навчитися їх застосувати при розв'язанні крайових задач теорії аналітичних функцій.

**Метою** вивчення навчальної дисципліни «Крайові задачі теорії аналітичних функцій» є отримання систематичних знань про основні теоретичні і практичні засади теорії крайових задач теорії аналітичних функцій; отримання досвіду із застосування аналітичних методів розв'язання крайових задач теорії аналітичних функцій та основних сфер застосування цих задач.

Основними завданнями вивчення дисципліни «Крайові задачі теорії аналітичних функцій» є:

- засвоїти основні теоретичні положення крайових задач теорії аналітичних функцій;
- набути знань щодо методів розв'язання в замкненому вигляді задач Рімана (однорідна і неоднорідна) на зімкненому і на розімкненому контурі, з розривним коефіцієнтом, на дійсній осі, на смузі, задач Газемана, Карлемана;
- набути вмінь і навичок використання здобутих знань для розв'язування крайових задач теорії аналітичних функцій;
- навчитися застосовувати набуті навички до розв'язання прикладних задач, зокрема, задач механіки, що допускають зведення до крайових задач теорії аналітичних функцій.

**У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен набути таких результатів навчання (знання, уміння тощо) та компетентностей:**

- Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.
- Здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях.
- Здатність приймати обґрунтовані рішення.
- Уявлення про прикладні задачі, які можуть бути досліджені за допомогою сучасних математичних методів, знання та розуміння методів побудови та якісного і кількісного аналізу математичних моделей природних, техногенних, економічних та соціальних об'єктів та процесів.
- Здатність створювати математичну модель розв'язуваної проблеми та використовувати аналітичні та/або чисельні методи для розв'язання математичних задач, що виникають в межах математичної моделі.
- Здатність користуватися існуючими програмними засобами для проведення обчислень, пошуку інформації, оформлення результатів роботи тощо.
- Розуміти фундаментальну математику на рівні, необхідному для досягнення інших вимог освітньої програми.
- Розв'язувати задачі придатними математичними методами, перевіряти умови виконання математичних тверджень, коректно переносити умови та твердження на нові класи об'єктів, знаходити й аналізувати відповідності між поставленою задачею й відомими моделями.
- Вміти розв'язувати крайові задачі теорії аналітичних функцій

# Розділ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

## 1.1. Функції, які задовольняють умову Гельдера

Нехай $\gamma$ – деякий спрямлюваний контур і $\varphi(t)$ – функція, задана на контурі $\gamma$.

**Означення 1.1.** *Функція $\varphi(t)$ задовольняє на контурі $\gamma$ умову Гельдера*, якщо

$$\exists A>0, \exists \lambda>0:\ \forall t_1, t_2 \in \gamma\ \ \left|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)\right| \le A\left|t_1-t_2\right|^{\lambda}.$$

Константу $A$ називають сталою Гельдера, а $\lambda$ – показником Гельдера.

При $\lambda=1$ умову Гельдера називають умовою Ліпшиця.

Множину функцій, що задовольняють на контурі $\gamma$ умову Гельдера з показником $\lambda$, позначають $H_{\lambda}(\gamma)$. Доведіть ✍, що ця множина утворює лінійний простір.

**Властивості функцій, що задовольняють умову Гельдера.**

**Властивість Г1.** Якщо функція $\varphi(t)$ задовольняє умову Гельдера на спрямлюваному контурі $\gamma$, то ця функція є неперервною на $\gamma$.

►Нехай $t, t_0 \in \gamma$ , тоді за означенням 1.1

$$\left.\begin{array}{ccc} 0 \le \left|\varphi(t)-\varphi(t_0)\right| & \le & A\left|t-t_0\right|^{\lambda} \\ \searrow & \Downarrow & \swarrow\ t\to t_0 \\ & 0 & \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{t\to t_0}\varphi(t)=\varphi(t_0).$$

Отримане означає неперервність функції $\varphi(t)$ в довільній точці $t_0$ контура $\gamma$. ◄

**Властивість Г2.** Якщо функція $\varphi(t)$ задовольняє умову Гельдера на спрямлюваному контурі $\gamma$ з показником Гельдера $\lambda>1$, то $\varphi(t)=const$ на $\gamma$.

► Нехай $t, t_0 \in \gamma$ , тоді

$$\left.\begin{array}{ccc} 0 \le \dfrac{\left|\varphi(t)-\varphi(t_0)\right|}{\left|t-t_0\right|} & \le & A\left|t-t_0\right|^{\lambda-1} \\ \searrow & \Downarrow & \swarrow\ t\to t_0 \\ & 0 & \end{array}\right\} \Rightarrow\ \varphi'(t_0)=0\ \forall t_0\in\gamma\ \Rightarrow\ \varphi(t)=const. \quad ◄$$

Оскільки у подальшому сталі функції не є об’єктом нашого дослідження, то означення 1.1 запишемо у вигляді:

$$\exists A>0, \exists \lambda \in (0;1]:\ \forall t_1, t_2 \in \gamma\ \ \left|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)\right| \le A\left|t_1-t_2\right|^{\lambda}. \qquad (1.1)$$

**Властивість Г3.**

$$\left.\begin{array}{l} 0<\lambda<\lambda_1\le 1, \\ \varphi(t)\in H_{\lambda_1}(\gamma) \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi(t)\in H_{\lambda}(\gamma),$$

тобто $H_{\lambda_1}(\gamma)\subset H_{\lambda}(\gamma)$.

► Оскільки $\varphi(t)\in H_{\lambda_1}(\gamma)$, то

$$\exists A>0:\ \sup_{t_1\neq t_2}\frac{\left|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)\right|}{\left|t_1-t_2\right|^{\lambda_1}}\le A.$$

Тоді

$$\sup_{t_1\neq t_2}\frac{\left|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)\right|}{\left|t_1-t_2\right|^{\lambda}}=\sup_{t_1\neq t_2}\frac{\left|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)\right|}{\left|t_1-t_2\right|^{\lambda_1}}\left|t_1-t_2\right|^{\lambda_1-\lambda}\le\left(\operatorname{diam}\gamma\right)^{\lambda_1-\lambda}\cdot A.\ \blacktriangleleft$$

**Властивість Г4.** Нехай $\varphi_1(t),\varphi_2(t)\in H_{\lambda_1}(\gamma),\ \lambda=\min\{\lambda_1,\lambda_2\}$, тоді

1) $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{C}\ \ \alpha\varphi_1(t)+\beta\varphi_2(t)\in H_{\lambda}(\gamma)$,
2) $\varphi_1(t)\cdot\varphi_2(t)\in H_{\lambda}(\gamma)$,
3) $\varphi_2(t)\neq 0\ \forall t\in\gamma\Rightarrow\dfrac{\varphi_1(t)}{\varphi_2(t)}\in H_{\lambda}(\gamma)$.

► ✍ Довести самостійно! ◄

**Властивість Г5.**

$$\left.\begin{array}{l}\varphi_1(t)\in H_{\lambda_1}(\gamma),\\ \varphi_1:\gamma\to L,\ \tau=\varphi_1(t),\\ \varphi_2(\tau)\in H_{\lambda_2}(L),\\ \lambda=\lambda_1\cdot\lambda_2,\end{array}\right\}\Rightarrow\varphi_2\left[\varphi_1(t)\right]\in H_{\lambda}(\gamma).$$

► ✍ Довести самостійно! ◄

### 1.2. Поняття та властивості індексу функції

**Означення 1.2.** Нехай $\gamma$ – гладкий зімкнений контур і $G(t)$ – задана на ньому неперервна функція, яка не обертається в нуль на $\gamma$. Індексом $\kappa$ функції $G(t)$ відносно контура $\gamma$ називається поділений на $2\pi$ приріст її аргументу при повному оббігу кривої $\gamma$ в додатному напрямі:

$$\kappa=\operatorname{Ind}G(t)=\frac{1}{2\pi}\left[\arg G(t)\right]\Big|_{\gamma}. \qquad (1.2)$$

При неперервному відображенні $G(t)$ образом гладкої зімкненої кривої $\gamma$ буде гладка зімкнена крива $L$, тому повний приріст аргументу функції $G(t)$ буде кратним $2\pi$. Звідси випливає перша властивість індексу.

**Властивість Ind1.** Індекс функції є цілим числом.

Оскільки функція $G(t)$ не обертається в нуль на контурі, то коректним є розгляд головного значення логарифмічної функції з аргументом $G(t)$, яке подається формулою $\ln G(t)=\ln\left|G(t)\right|+i\arg G(t)$. При повному оббігу контура функція $\left|G(t)\right|$ повертається до свого початкового значення, тому $\left[\ln\left|G(t)\right|\right]_{\gamma}=0$, звідки $\left[\ln G(t)\right]_{\gamma}=i\left[\arg G(t)\right]_{\gamma}$. Отже,

$$\kappa=\frac{1}{2\pi i}\left[\ln G(t)\right]\Big|_{\gamma}. \qquad (1.3)$$

Із (1.3) та із властивостей логарифмічної функції отримаємо наступні дві властивості індексу.

**Властивість Ind2.** Індекс добутку функцій дорівнює сумі індексів цих функцій. А саме:

$$\mathrm{Ind}\left[G_1(t)\cdot G_2(t)\right]=\mathrm{Ind}G_1(t)+\mathrm{Ind}G_2(t).$$

**Властивість Ind3.** Індекс частки двох функцій дорівнює різниці індексів цих функцій. А саме:

$$\mathrm{Ind}\frac{G_1(t)}{G_2(t)}=\mathrm{Ind}G_1(t)-\mathrm{Ind}G_2(t).$$

Розглянемо розбиття кривої $\gamma=\cup AB$ скінченною кількістю точок:

$$A=M_0\prec M_1\prec\ldots\prec M_{k-1}\prec M_k\prec\ldots\prec M_{n-1}\prec M_n=B.$$

Подамо приріст логарифмічної функції при повному оббігу кривої скінченною сумою приростів на дугах розбиття:

$$\left[\ln G(t)\right]\Big|_\gamma=\sum_{k=1}^{n}\left[\ln G(t)\right]\Big|_{\cup M_{k-1}M_k}=\sum_{k=1}^{n}\left[\ln G(M_k)-\ln G(M_{k-1})\right].$$

У результаті отримано інтегральну суму Стілтьєса. Якщо діаметр розбиття $\lambda=\max\left|\cup M_{k-1}M_k\right|$ спрямувати до 0, то за умови, що функція $G(t)$ має обмежену варіацію на контурі $\gamma$, отримаємо криволінійний інтеграл Стілтьєса:

$$\left[\ln G(t)\right]\Big|_\gamma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\left[\ln G(M_k)-\ln G(M_{k-1})\right]=(S)\oint_\gamma d\left(\ln G(t)\right).$$

Отже, індекс можна подати інтегралом Стілтьєса:

$$\kappa=\mathrm{Ind}G(t)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma d\left(\ln G(t)\right)=\frac{1}{2\pi}\oint_\gamma d\left(\arg G(t)\right). \qquad (1.4)$$

Якщо функція $G(t)$ диференційована на $\gamma$ і являє собою крайове значення функції, аналітичної всередині або зовні контура $\gamma$, то інтеграл Стілтьєса можна подати інтегралом Рімана, і отримати:

$$\kappa=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma d\left(\ln G(t)\right)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{G'(t)}{G(t)}dt. \qquad (1.5)$$

Останній інтеграл є логарифмічним лишком функції $G(t)$. Із властивостей логарифмічного лишку [3] випливають властивості індексу.

**Властивість Ind4.** Якщо $G(t)$ є крайовим значенням функції, аналітичної всередині (зовні) контура, то її індекс дорівнює кількості нулів $N^+$ розташованих всередині контура $\gamma$, тобто $\kappa=N^+$ (числу нулів $N^-$, що знаходяться зовні контура $\gamma$, взятому з протилежним знаком, тобто $\kappa=-N^-$) з урахуванням їх кратності.

**Властивість Ind5.** Якщо функція $G(t)$ аналітична всередині (зовні) контура $\gamma$, за винятком скінченного числа точок, де вона може мати полюси, то

індекс такої функції дорівнює різниці кількості нулів $N^+$ і полюсів $P^+$, тобто $\kappa = N^+ - P^+$ (різниці кількості нулів $N^-$ і полюсів $P^-$ зовні контура $\gamma$, взятій з протилежним знаком, тобто $\kappa = -\left[ N^- - P^- \right]$) з урахуванням їх кратності.

### 1.3. Інтеграл типу Коші на контурі

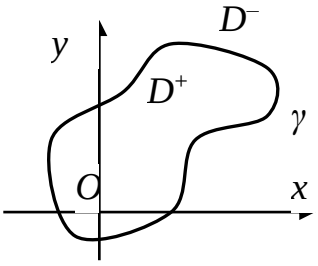



Рис. 1.1

Нехай $\gamma$ – деякий гладкий зімкнений контур на площині комплексної змінної $z$. Область що лежить всередині контура $\gamma$, будемо називати внутрішньою і позначати $D^+$, а ту, що лежить зовні контура $\gamma$, – зовнішньою і позначати $D^-$. Область $D^-$ містить нескінченно віддалену точку (див. рис. 1.1).

Із комплексного аналізу відомі такі формули [1, 3]:

**ЗІ.** Якщо $f(z)$ – функція, аналітична в $D^+$ і неперервна в $D^+ \bigcup \gamma$, то за формулою Коші

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(\tau)}{\tau - z} d\tau = \begin{cases} f(z), z \in D^+; \\ 0, z \in D^-. \end{cases} \tag{1.6}$$

**ЗІІ.** Якщо ж $f(z)$ аналітична в області $D^-$ (включаючи точку $z = \infty$) і неперервна в $D^- \bigcup \gamma$, то

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(\tau)}{\tau - z} d\tau = \begin{cases} f(\infty), z \in D^+; \\ -f(z) + f(\infty), z \in D^-. \end{cases} \tag{1.7}$$

Інтеграли обчислюються вздовж контура $\gamma$, який оббігається у додатньому напрямку, тобто у напрямку, при якому область $D^+$ залишається зліва. Інтеграл, який стоїть зліва в формулах (1.6), (1.7), називають *інтегралом Коші.*

**Означення 1.3.** Нехай $\gamma$ – гладкий зімкнений або незімкнений контур, який являє собою обмежену множину, а $\varphi(\tau)$ – неперервна функція точок контура $\gamma$. Тоді інтеграл

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau, \tag{1.8}$$

побудований так само, як і інтеграл Коші, називають *інтегралом типу Коші*. Функцію $\varphi(\tau)$ називають його *щільністю*, а $\frac{1}{\tau - z}$ *– ядром*.

Із комплексного аналізу відомою є наступна властивість [3].

**Властивість Ф1.** Функція $\Phi(z)$, що подається інтегралом типу Коші з неперервною функцією щільності, являє собою функцію, аналітичну на всій комплексній площині, за винятком точок контура $\gamma$.

Точки контура $\gamma$ є точками розриву функції $\Phi(z)$. Тому контур $\gamma$ – особлива лінія для функції $\Phi(z)$, а функція $\Phi(z)$ є кусково-аналітичною функцією.

Якщо $\gamma$ – зімкнений контур, то $\Phi(z)$ розпадається на дві функції: $\Phi^+(z)$ – аналітичну в області $D^+$, і $\Phi^-(z)$ – аналітичну в області $D^-$:

$$\Phi(z)=\begin{cases}\Phi^+(z),\ z\in D^+,\\ \Phi^-(z),\ z\in D^-.\end{cases}$$

**Властивість Ф2.** $\Phi(\infty)=0$.

► При досить великих $z$ маємо:

$$\frac{1}{\tau-z}=-\frac{1}{z}-\frac{\tau}{z^2}-\frac{\tau^2}{z^3}-\ldots-\frac{\tau^n}{z^{n+1}}-\ldots\ .$$

Тоді

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{z^{k+1}}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\varphi(\tau)\tau^k d\tau=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k}{z^{k+1}}=\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k}{z^k},\quad(1.9)$$

де $C_k=-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\varphi(\tau)\tau^k d\tau$. Отже, $\Phi(\infty)=0$. ◄

## 1.4. Сингулярний криволінійний інтеграл

Нехай $\gamma=\cup ab$ – спрямлюваний контур, а $t,\tau$ – його точки, причому точка $t$ не збігається з кінцями контура $a$ і $b$. Розглянемо особливий криволінійний інтеграл

$$\int_\gamma\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau\qquad(1.10)$$

і з'ясуємо умови його існування.

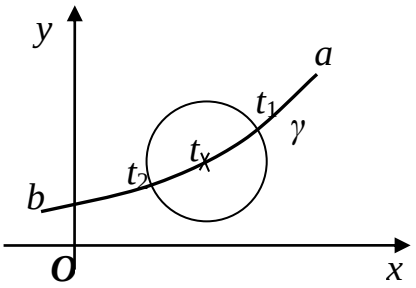



Рис. 1.2

**Означення 1.4.** Проведемо коло з центром в точці $t\in\gamma$ настільки малого радіусу $\rho$, щоб це коло перетинало контур рівно у двох точках $t_1,t_2$. Тоді інтеграл $\int_{\gamma\setminus\cup t_1t_2}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau$ є власним. Границю $\lim\limits_{\rho\to0}\int_{\gamma\setminus\cup t_1t_2}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau$ (якщо вона існує) називають головним значенням за Коші особливого інтеграла (1.10) або *сингулярним інтегралом Коші*.

Знайдемо умови існування сингулярного інтеграла (1.10). Дослідження розіб'ємо на етапи.

**Етап 1.** Покладемо $\varphi(\tau)\equiv 1$ і обчислимо інтеграл

$$\int\limits_{\gamma=\cup ab}\frac{d\tau}{\tau-t}. \tag{1.11}$$

Первісною підінтегральної функції є багатозначна функція $\mathrm{Ln}(\tau-t)$. Зробимо розріз, який сполучає точки $t$ і $\infty$, отримаємо, що $\ln(\tau-t)$ є контурним значенням аналітичної функції $\ln(\tau-z)$, однозначної в розрізаній даним способом площині [3]. Тоді

$$\int\limits_{\gamma}\frac{d\tau}{\tau-t}=\lim_{\rho\to 0}\int\limits_{\gamma_l}\frac{d\tau}{\tau-t}=\lim_{\rho\to 0}\left\{\ln(\tau-t)\Big|_a^{t_1}+\ln(\tau-t)\Big|_{t_2}^{b}\right\}=$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\left\{\ln\frac{b-t}{a-t}+\ln\left(t_1-t\right)-\ln\left(t_2-t\right)\right\}=$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\left\{\ln\frac{b-t}{a-t}+\ln\left|t_1-t\right|+i\arg(t_1-t)-\left[\ln\left|t_2-t\right|+i\arg(t_2-t)\right]\right\}.$$

Оскільки $\left|t_1-t\right|=\left|t_2-t\right|=\rho$, то $\ln\left|t_1-t\right|-\ln\left|t_2-t\right|=0$. При $\rho\to 0$ різниця аргументів $\arg(t_1-t)-\arg(t_2-t)$ прямує до кута між дотичними зліва і справа до контура $\gamma$ в точці $t$. У випадку, коли $t$ – точка гладкості контура $\gamma$, цей кут дорівнює $\pi$, а у випадку, коли $t$ – кутова точка, кут дорівнює $\alpha\neq\pi$; і $\alpha=0$ або $\alpha=2\pi$ – в точках повернення. Отже,

$$\int\limits_{\gamma}\frac{d\tau}{\tau-t}=\begin{cases}\ln\dfrac{b-t}{a-t}+i\pi, \text{ якщо } t-\text{точка гладкості контура;}\\ \ln\dfrac{b-t}{a-t}+i\alpha, \text{ якщо } t-\text{кутова точка контура.}\end{cases} \tag{1.12}$$

Якщо контур $\gamma=\cup ab$ є зімкненим, тобто $a=b$, то

$$\oint\limits_{\gamma}\frac{d\tau}{\tau-t}=\begin{cases}i\pi, \text{ якщо } t-\text{точка гладкості;}\\ i\alpha, \text{ якщо } t-\text{кутова точка.}\end{cases} \tag{1.13}$$

**Етап 2.** Нехай функція $\varphi(\tau)$ задовольняє умову Гельдера, тобто $\varphi(\tau)\in H_\lambda(\gamma)$. Тоді інтеграл (1.10) подамо у вигляді

$$\int\limits_{\gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau=\int\limits_{\gamma}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}d\tau+\varphi(t)\int\limits_{\gamma}\frac{d\tau}{\tau-t}. \tag{1.14}$$

1) Другий інтеграл у правій частині (1.14) досліджено на етапі 1. Цей інтеграл існує як сингулярний (у розумінні головного значення за Коші).

2) Розглянемо другий інтеграл $\int\limits_{\gamma}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}d\tau$. Оскільки $\varphi(\tau)\in H_\lambda(\gamma)$, то

$$\exists A>0,\ \exists\lambda\in(0;1]\left|\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}\right|\le\frac{A\left|\tau-t\right|^{\lambda}}{\left|\tau-t\right|}=\frac{A}{\left|\tau-t\right|^{1-\lambda}}.$$

В інтегралі $\int\limits_{\gamma}\frac{A\,d\tau}{|\tau-t|^{1-\lambda}}$ підінтегральна функція має показник степеня знаменника $1-\lambda$, менший 1, тому цей інтеграл збігається як невласний, звідки випливає (за ознакою порівняння), що збігається інтеграл $\int\limits_{\gamma}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}d\tau$.

**Висновок.** Сингулярний інтеграл $\int\limits_{\gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau$ існує, якщо функція щільності $\varphi(\tau)$ задовольняє умову Гельдера на спрямлюваному контурі $\gamma$.

Зокрема, в точках гладкості зімкненого контура маємо:

$$\oint\limits_{\gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau=\oint\limits_{\gamma}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}d\tau+i\pi\varphi(t). \tag{1.15}$$

## 1.5. Формули Сохоцького на зімкненому контурі

**Лема 1.1** [1]**.** Якщо щільність $\varphi(\tau)$ задовольняє умову Гельдера і точка $t$ не збігається з кінцями гладкого контура $\gamma$, то функція

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-z}d\tau \tag{1.16}$$

має певне граничне значення при наближенні $z$ до $t$ з будь-якої сторони контура $\gamma$ вздовж будь-якого шляху, тобто

$$\lim_{z\to t}\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-z}d\tau=\Psi(t).$$

► Доведення міститься в [1]. ◄

**ПРИПУЩЕННЯ:** 1) $\gamma-$ гладкий зімкнений контур,

2) функція $\varphi(\tau)$ задовольняє на $\gamma$ умову Гельдера.

Розглянемо інтеграл типу Коші

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau \tag{1.17}$$

і сингулярний інтеграл

$$\Phi(t)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau. \tag{1.18}$$

Позначимо через $\Phi^{+}(t)$, $\Psi^{+}(t)$ (відповідно $\Phi^{-}(t)$, $\Psi^{-}(t)$) *граничні (крайові) значення аналітичних функцій* $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ при прямуванні точки $z$ зсередини (зовні) $\gamma$ до точки $t$ контура, тобто з боку області $D^{+}$ (відповідно $D^{-}$). А саме:

$$\lim_{\substack{z\to t\\ z\in D^{\pm}}}\Phi(z)=\Phi^{\pm}(t),\ \lim_{\substack{z\to t\\ z\in D^{\pm}}}\Psi(z)=\Psi^{\pm}(t). \tag{1.19}$$

Із (1.6) і (1.13) випливає

$$\oint_\gamma \frac{d\tau}{\tau - z} = \begin{cases} 2\pi i, z \in D^+; \\ 0, z \in D^-; \\ \pi i, z \in \gamma. \end{cases}$$

Звідки та із (1.19) матимемо:

$$\Psi^+(t) = \lim_{\substack{z \to t \\ z \in D^+}} \left[ \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau - \frac{\varphi(t)}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{d\tau}{\tau - z} \right] = \Phi^+(t) - \varphi(t),$$

$$\Psi^+(t) = \lim_{\substack{z \to t \\ z \in D^+}} \left[ \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau - \frac{\varphi(t)}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{d\tau}{\tau - z} \right] = \Phi^+(t) - \varphi(t),$$

$$\Psi(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau - \frac{\varphi(t)}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{d\tau}{\tau - t} = \Phi(t) - \frac{1}{2}\varphi(t).$$

Із леми 1.1 та означення граничних значень $\Psi^{\pm}(t)$ випливає, що

$$\Psi^+(t) = \Psi^-(t) = \Psi(t).$$

Отже,

$$\Phi^+(t) - \varphi(t) = \Phi(t) - \frac{1}{2}\varphi(t) = \Phi^-(t).$$

Звідси отримуємо

$$\Phi^+(t) = \frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau; \tag{1.20}$$

$$\Phi^-(t) = -\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau, \tag{1.21}$$

або

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \varphi(t); \tag{1.22}$$

$$\Phi^+(t) + \Phi^-(t) = \frac{1}{\pi i} \oint_\gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau. \tag{1.23}$$

Формули (1.20) і (1.21) задають першу форму запису формул Сохоцького[1], а (1.22) і (1.23) – другу.

Для кутових точок формули Сохоцького також будуть мати місце, але набувають дещо іншого вигляду:

$$\Phi^+(t) = \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right)\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau;$$

$$\Phi^-(t) = -\frac{\alpha}{2\pi}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau.$$

✍ Довести формули самостійно!

[1] Формули (1.20), (1.21) отримані вперше в 1873 р. російським математиком Ю.В.Сохоцьким

## 1.6. Інтеграл типу Коші вздовж дійсної осі

Нехай $\varphi(\tau)$ – комплексна функція дійсної змінної $\tau$, яка має наступні властивості:

**R1)** $\varphi(\tau)$ прямує до певної границі $\varphi(\infty)$ при $\tau \to \pm\infty$;

**R2)** при великих $\tau$ виконується умова

$$\exists \mu > 0, \exists A > 0 \ \left|\varphi(\tau) - \varphi(\infty)\right| \le \frac{A}{\tau^{\mu}}. \tag{1.24}$$

**Означення 1.5.** Нехай $z$ не лежить на дійсній осі. Значення границі $\lim\limits_{N\to+\infty} \dfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{-N}^{N} \dfrac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau$, якщо воно існує, називають *інтегралом типу Коші на дійсній осі* і позначають $\Phi(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau$. Тобто

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau \overset{def}{=} \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-N}^{N} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau .$$

Встановимо умови існування інтеграла типу Коші на дійсній осі.

**Етап 1.** Нехай функція щільності $\varphi(\tau) \equiv 1$, тоді розглянемо інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{d\tau}{\tau - z}$. Первісною підінтегральної функції є многозначна функція $\mathrm{Ln}(\tau - z)$. Зробимо розріз комплексної площини, з'єднуючи точки $z$ і $\infty$, в результаті чого цю функцію можна зробити однозначною в розрізаній площині, обравши її конкретну гілку. Нехай це буде нульова гілка, тоді отримаємо головну частину логарифмічної функції – функцію $\ln(\tau - z)$. Отже,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau}{\tau - z} = \lim_{N\to+\infty} \int\limits_{-N}^{N} \frac{d\tau}{\tau - z} = \lim_{N\to+\infty} \ln(\tau - z)\Big|_{-N}^{N} = \lim_{N\to+\infty} \big(\ln(N - z) - \ln(-N - z)\big) =$$

$$= \lim_{N\to+\infty} \left( \underbrace{\ln\left|\frac{N - z}{-N - z}\right|}_{\to \ln 1 = 0} + i\big(\arg(N - z) - \arg(-N - z)\big) \right) = \begin{cases} i\pi, \text{ якщо } \mathrm{Im}\, z > 0; \\ -i\pi, \text{ якщо } \mathrm{Im}\, z < 0. \end{cases} \tag{1.25}$$

Перед переходом до розгляду етапу 2 зазначимо, що дійсна вісь розбиває комплексну площину на множину точок верхньої комплексної півплощини $D^{+} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z > 0\}$ і нижньої – $D^{-} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z < 0\}$ з нескінченно віддаленою точкою включно для обох півплощин.

**Етап 2.** Нехай функція щільності $\varphi(t)$ задовольняє умови R1) і R2), а також припустимо, що ця функція є крайовим значенням функції $\varphi(z)$, аналітичної в півплощині $D^{+}$, і неперервна на $D^{+} \bigcup \mathbb{R}$.

Інтеграл типу Коші подамо сумою:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(\infty)}{\tau-z}d\tau+\frac{\varphi(\infty)}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\tau}{\tau-z}. \qquad (1.26)$$

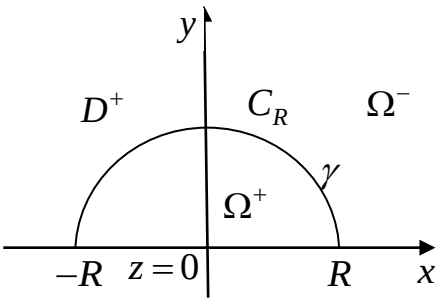



Рис. 1.3.

Розглянемо півколо $C_R$ радіусу $R$ з центром в точці 0, яке лежить в півплощині $D^+$. Контур $\gamma$ утворимо із півкола $C_R$ і відрізка дійсної осі, що сполучає точки $-R$ і $R$. Область, розташовану всередині цього контура, позначимо через $\Omega^+$, а зовні – $\Omega^-$ (див. рис. 1.3). Оскільки функція $\varphi(z)$ аналітична в $D^+$, а значення $\varphi(\infty)$ скінченне, то функція $\varphi(z)-\varphi(\infty)$ аналітична в $\Omega^+$. Згідно з (1.6)

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(\infty)}{\tau-z}d\tau=\begin{cases}\varphi(z)-\varphi(\infty), & z\in\Omega^+,\\ 0, & z\in\Omega^-.\end{cases} \qquad (1.27)$$

З іншого боку,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(\infty)}{\tau-z}d\tau=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_R}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(\infty)}{\tau-z}d\tau+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-R}^{R}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(\infty)}{\tau-z}d\tau. \qquad (1.28)$$

Здійснимо граничний перехід при $R\to+\infty$ в останній рівності. Для інтеграла в лівій частині (1.28) границю знайдемо, застосовуючи (1.27):

$$\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(\infty)}{\tau-z}d\tau=\begin{cases}\varphi(z)-\varphi(\infty), & z\in D^+,\\ 0, & z\in D^-.\end{cases} \qquad (1.29)$$

Значення границі для першого інтеграла в правій частині (1.28) знайдемо, застосовуючи лему Жордана. Нехай $z-$ деяка точка комплексної площини. Тоді для достатньо великих $R$ має місце нерівність $|z|<R$. Оскільки виконується умова R2), то для $\tau\in C_R$ можна провести оцінювання:

$$\left|\frac{\varphi(\tau)-\varphi(\infty)}{\tau-z}\right|\le\frac{A}{|\tau|^{\mu}\left(|\tau|-|z|\right)}=\frac{A}{R^{\mu}\left(R-|z|\right)}.$$

При $R\to+\infty$ порядок росту знаменника $R^{\mu}\left(R-|z|\right)$ вищий за $R$. Це означає, що можна застосувати лему Жордана, згідно з якою

$$\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_R}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(\infty)}{\tau-z}d\tau=0. \qquad (1.30)$$

Згідно з означенням 1.5

$$\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-R}^{R}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(\infty)}{\tau-z}d\tau=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(\infty)}{\tau-z}d\tau.$$

Внаслідок (1.28) – (1.30), отримаємо

$$\begin{cases}\varphi(z)-\varphi(\infty), & z\in D^+,\\ 0, & z\in D^-\end{cases}=0+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(\infty)}{\tau-z}d\tau. \qquad (1.31)$$

Підставимо (1.30) і (1.25) в (1.26), одержимо

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau=\begin{cases}\varphi(z)-\varphi(\infty), & z\in D^+;\\ 0, & z\in D^+;\end{cases}+\begin{cases}\varphi(\infty)/2, & z\in D^+;\\ -\varphi(\infty)/2, & z\in D^-;\end{cases}=\begin{cases}\varphi(z)-\varphi(\infty)/2, & z\in D^+;\\ -\varphi(\infty)/2, & z\in D^-.\end{cases}$$

**Висновок.** Якщо функція $\varphi(t)$ задовольняє умови R1) і R2), а також ця функція є крайовим значенням функції $\varphi(z)$, аналітичної у верхній півплощині $D^+$ (включаючи точку $z=\infty$) і неперервної на $D^+\bigcup\mathbb{R}$, то

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau=\begin{cases}\varphi(z)-\varphi(\infty)/2, & z\in D^+;\\ -\varphi(\infty)/2, & z\in D^-.\end{cases}\qquad(1.32)$$

Аналогічно виводиться наступна формула.

Якщо функція $\varphi(t)$ задовольняє умови R1) і R2), а також ця функція є крайовим значенням функції $\varphi(z)$, аналітичної у нижній півплощині $D^-$ (включаючи точку $z=\infty$) і неперервної на $D^-\bigcup\mathbb{R}$, то

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau=\begin{cases}\varphi(\infty)/2, & z\in D^+,\\ \varphi(\infty)/2-\varphi(z), & z\in D^-.\end{cases}\qquad(1.33)$$

## 1.7. Сингулярний інтеграл вздовж дійсної осі

Нехай $\varphi(\tau)$ – комплексна функція дійсної змінної $\tau$, що задовольняє умову Гельдера при всіх скінченних $\tau$.

**Означення 1.6.** Сингулярний інтеграл вздовж дійсної осі означують наступною границею:

$$\Phi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau\overset{def}{=}\lim_{\substack{N\to+\infty\\ \varepsilon\to+0}}\frac{1}{2\pi i}\left\{\int\limits_{-N}^{t-\varepsilon}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau+\int\limits_{t+\varepsilon}^{N}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau\right\},$$

якщо така границя існує.

Розглянемо сингулярний інтеграл вдовж дійсної осі з функцією щільності $\varphi(\tau)\equiv 1$:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\tau}{\tau-z}\overset{def}{=}\lim_{\substack{N\to+\infty\\ \varepsilon\to+0}}\frac{1}{2\pi i}\left\{\int\limits_{-N}^{t-\varepsilon}\frac{d\tau}{\tau-t}+\int\limits_{t+\varepsilon}^{N}\frac{d\tau}{\tau-t}\right\}=\lim_{\substack{N\to+\infty\\ \varepsilon\to+0}}\frac{1}{2\pi i}\left\{\ln|\tau-t|\Big|_{-N}^{t-\varepsilon}+\ln|\tau-t|\Big|_{t+\varepsilon}^{N}\right\}=$$

$$=\lim_{\substack{N\to+\infty\\ \varepsilon\to+0}}\frac{1}{2\pi i}\left\{\ln|-\varepsilon|-\ln|-N-t|+\ln|N-t|-\ln|\varepsilon|\right\}=\lim_{\substack{N\to+\infty\\ \varepsilon\to+0}}\frac{1}{2\pi i}\ln\left|\frac{N-t}{-N-t}\right|=0.\qquad(1.34)$$

**ПРИПУЩЕННЯ:** 1) $\varphi(\tau)$ – комплексна функція дійсної змінної $\tau$, що задовольняє умову Гельдера на дійсній осі;

2) функція $\varphi(\tau)$ задовольняє умови R1) і R2).

Відомо [1], що **ІСНУЄ** сингулярний інтеграл вздовж дійсної осі, щільність якого задовольняє зазначені припущення.

При виконанні цих припущень отриаємо формули Сохоцького. Функція $\Psi(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-z}d\tau$ має властивості, аналогічні тим, що сформульовані в лемі 1.1. Залишаємо введені в попередньому підрозділі позначення верхньої $D^+=\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}z>0\}$ і нижньої. $D^-=\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}z<0\}$ комплексної півплощин. Уводимо функції

$$\Phi^{\pm}(t)\overset{def}{=}\lim_{\substack{z\to t\\ z\in D^{\pm}}}\Phi(z),\ \Psi^{\pm}(t)\overset{def}{=}\lim_{\substack{z\to t\\ z\in D^{\pm}}}\Psi(z),\tag{1.35}$$

які є *крайовими (граничними) значеннями* функцій $\Phi(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau$ і $\Psi(z)$ на дійсній осі. Із аналога леми 1.1 на дійсній осі можна дійти висновку, що

$$\Psi^+(t)=\Psi^-(t)=\Psi(t).\tag{1.36}$$

Із (1.32) і (1.34) випливає, що

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\tau}{\tau-z}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & z\in D^+;\\ -\dfrac{1}{2}, & z\in D^-;\\ 0, & z\in\gamma.\end{cases}$$

застосовуючи останню формулу і (1.35) одержимо

$$\Psi^+(t)=\lim_{\substack{z\to t\\ z\in D^+}}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau-\frac{\varphi(t)}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{d\tau}{\tau-z}\right]=\Phi^+(t)-\frac{\varphi(t)}{2},$$

$$\Psi^-(t)=\lim_{\substack{z\to t\\ z\in D^-}}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau-\frac{\varphi(t)}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{d\tau}{\tau-z}\right]=\Phi^-(t)-\frac{\varphi(t)}{2},$$

$$\Psi(t)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau-\frac{\varphi(t)}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{d\tau}{\tau-t}=\Phi(t).$$

Підставимо отримані вирази в (1.36):

$$\Phi^+(t)+\frac{\varphi(t)}{2}=\Phi^-(t)-\frac{\varphi(t)}{2}=\Phi(t).$$

Звідси випливають формули Сохоцького на дійсній осі

$$\Phi^+(t)=\frac{1}{2}\varphi(t)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau,\tag{1.37}$$

$$\Phi^-(t)=-\frac{1}{2}\varphi(t)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau.\tag{1.38}$$

## 1.8. Властивості граничних значень інтеграла типу Коші

**Лема А.2** [1]. Якщо $\gamma$ – гладкий зімкнений контур і $\varphi(t)$ задовольняє на $\gamma$ умову Гельдера з показником $\lambda$, то граничні значення інтеграла типу Коші $\Phi^+(t)$ і $\Phi^-(t)$ також задовольняють цю ж саму умову, причому з тим же самим показником, якщо $\lambda<1$, і з показником, що як завгодно мало відрізняється від $\lambda$, якщо $\lambda=1$.

► Доведення міститься в [1]. ◄

**ПРИПУЩЕННЯ:**

1) $\gamma=\cup ab$ – розімкнений гладкий контур;
2) $t-$ довільна точка контура;
3) функція $\varphi(\tau)$ задовольняє умову Гельдера на $\gamma$ (тобто $\varphi(\tau)\in H_\lambda(\gamma)$).

Розглянемо інтеграл типу Коші

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-z}d\tau+\frac{\varphi(t)}{2\pi i}\int_\gamma\frac{d\tau}{\tau-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-z}d\tau+\frac{\varphi(t)}{2\pi i}\ln\frac{b-z}{a-z}. \quad (1.39)$$

Дослідимо функцію $F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-z}d\tau$ в точці $z=t\in\gamma$. Оскільки $\varphi(\tau)\in H_\lambda(\gamma)$, то

$$\exists A>0,\exists\lambda\in(0;1]\left|\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}\right|\le\frac{A|\tau-t|^\lambda}{|\tau-t|}=\frac{A}{|\tau-t|^{1-\lambda}}.$$

Оскільки $1-\lambda\in[0;1)$, то незалежно від точки $t$ на контурі, включаючи його кінці $a$ і $b$, інтеграл $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}d\tau$ збігається як невласний, тому функція $F(z)$ являє собою обмежену функцію в околі точки $t$. Функцію $\Phi(z)$ подамо у вигляді

$$\Phi(z)=\frac{\varphi(t)}{2\pi i}\ln(b-z)+F_1(z),\ F_1(z)=F(z)-\frac{\varphi(t)}{2\pi i}\ln(a-z)$$

або у вигляді

$$\Phi(z)=-\frac{\varphi(t)}{2\pi i}\ln(a-z)+F_2(z),\ F_2(z)=F(z)+\frac{\varphi(t)}{2\pi i}\ln(b-z).$$

Функції $F_1(z)$ і $F_2(z)$ обмежені в околах точок $b$ або $a$ відповідно, а функції $\ln(b-z)$ і $\ln(a-z)$ мають логарифмічні особливості в цих точках відповідно.

**Висновок.** В зазначених припущеннях на функцію щільності на кінцях контура, інтеграл типу Коші *має логарифмічну особливість.*

**Означення 1.7.** Нехай $\gamma$ – гладкий контур, а $\varphi(t)$ – функція, задана на ньому.

Обираючи напрям оббігу кривої $\gamma$, *лівим околом* точки $c$ називають ту множину точок, що передують точці $c$ при такому оббігу, а *правим* – множину точок, що слідують за нею.

*Лівою (правою) границю функції* $\varphi(t)$ *в точці* $c$ називають границю цієї функції в точці $c$ при прямуванні до $c$ вздовж кривої $\gamma$ з боку лівого (правого) околу цієї точки, якщо така границя існує. При цьому, застосовують позначення $\varphi(c-0)$ $\left(\varphi(c+0)\right)$.

Точку $c$ називають точкою розриву першого роду функції $\varphi(t)$, якщо існує як ліва, так і права границя ю функції $\varphi(t)$ в точці $c$, але вони нерівні, тобто $\varphi(c-0)\neq\varphi(c+0)$.

Нехай тепер функція щільності інтеграла типу Коші $\varphi(\tau)$ в точці $c\in\gamma$ має розрив I роду. В такому випадку потрібно внести деякі зміни в припущення 3). Для цього розглянемо дуги $\cup ac$ і $\cup cb$ і перевизначимо функцію $\varphi(\tau)$ у точці $c$: на дузі $\cup ac$ – значенням $\varphi(c+0)$, а на дузі $\cup cb$ – значенням $\varphi(c-0)$. Тепер будемо вважати, що функція $\varphi(\tau)$ задовольняє умову Гельдера на кожній дузі $\cup ac$ і $\cup cb$. Дослідимо інтеграл типу Коші в околі точки $c$, застосовуючи (1.39):

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau=\frac{1}{2\pi i}\int_{a}^{c}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau+\frac{1}{2\pi i}\int_{c}^{b}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau=$$

$$=\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{a}^{c}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(c+0)}{\tau-z}d\tau-\frac{\varphi(c+0)}{2\pi i}\ln(a-z)+\frac{1}{2\pi i}\int_{c}^{b}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(c-0)}{\tau-z}d\tau+\frac{\varphi(c-0)}{2\pi i}\ln(b-z)}_{F_c(z)}+$$

$$+\frac{\varphi(c+0)-\varphi(c-0)}{2\pi i}\ln(c-z).$$

Аналогічно попередньому випадку доводиться, що функція $F_c(z)$ обмежена в околі точки $c$, а функція $\ln(c-z)$ має логарифмічну особливість у точці $c$.

**Висновок.** В зазначених вище припущеннях (з урахуванням змін, виписаних для цього випадку), у точці розриву $c\in\gamma$ першого роду функції щільності $\varphi(\tau)$, інтеграл типу Коші *має логарифмічну особливість.*

## 1.9. Теорема про аналітичне продовження і узагальнена теорема Ліувіля

При розв'язанні крайових задач Рімана нам знадобляться наступні дві теореми.

**Теорема 1.1** *(про аналітичне продовження)* [1].

Нехай дві області $D^+$ і $D^-$ межують одна з одною вздовж деякої гладкої кривої $\gamma$; в областях $D^+$ і $D^-$ задані аналітичні функції $f^+(z)$ і $f^-(z)$. Припустимо, що граничні значення $f^{\pm}(t)=\lim\limits_{\substack{z\to t\\ z\in D^{\pm}}} f^{\pm}(z)$ являють собою неперервні функції в точках $t$ кривої $\gamma$, причому $f^+(t)=f^-(t)\ \forall t\in\gamma$. За таких умов функції $f^+(z)$ і $f^-(z)$ будуть аналітичними продовженнями одна одної.

**Теорема 1.2** *(узагальнена теорема Ліувіля)* [1].

Якщо функція $F(z)$ аналітична на комплексній площині, за винятком точок $a_0=\infty, a_k\ (k=1,2,...,n)$, де вона має полюси, причому головні частини розкладів функції $F(z)$ в околах полюсів мають вигляд

$$G_0(z)=C_1^0 z+C_2^0 z^2+...+C_{n_0}^0 z^{n_0} \text{ в точці } a_0,$$

$$G_k(z)=\frac{C_1^k}{z-a_k}+\frac{C_2^k}{\left(z-a_k\right)^2}+...+\frac{C_{n_k}^k}{\left(z-a_k\right)^{n_k}} \text{ в точці } a_k,$$

тоді функція $F(z)$ є раціональною функцією, яка набуває вигляду

$$F(z)=C+G_0(z)+\sum_{k=1}^{n}G_k(z).$$

**Наслідок 1.1.** Якщо функція $F(z)$ аналітична на комплексній площині, за винятком нескінченно віддаленої точки $a_0=\infty$, в якій вона має полюс порідку $m$, тоді $F(z)=P_m(z)$, де $P_m(z)-$ многочлен степеня $m$.

**Наслідок 1.2.** Якщо функція $F(z)$ аналітична на комплексній площині, за винятком точки $a_1\neq\infty$, в якій вона має полюс порядку $m$, тоді $F(z)=\dfrac{P_m(z)}{\left(z-a_1\right)^m}$.

## 1.10. Задача Рімана на зімкненому контурі

**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ:**

**1)** $\gamma$ – простий гладкий зімкнений контур, який розбиває комплексну площину на дві області: внутрішню $D^+$ і зовнішню $D^-$;
**2)** на початковому етапі будемо припускати, що $z=0\in D^+$;
**3)** функції $G(t)$ і $g(t)$ задовольняють умову Гельдера на $\gamma$;
**4)** $G(t)\neq 0\ \forall t\in\gamma$.

**Знайти** дві функції $\Phi^+(z)$ і $\Phi^-(z)$, аналітичні відповідно в областях $D^+$ і $D^-$ (для $D^-$ з нескінченно віддаленою точкою включно), які задовольняють на контурі $\gamma$ крайову умову

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in \gamma, \tag{1.40}$$

де $\Phi^\pm(t)$ – крайові значення функцій $\Phi^\pm(z)$ із областей $D^\pm$ відповідно.

Функцію $G(t)$ називають *коефіцієнтом* задачі Рімана, а функцію $g(t)$ – її *вільним членом*. Якщо $g(t) \equiv 0$, то задачу Рімана називають *однорідною*.

Дотримуючись методики викладення цієї задачі Гаховим Ф.Д. в [1], розв'язання розіб'ємо на три етапи.

**********

**Етап I.** Покладемо $G(t) \equiv 1$ і розглянемо задачу «про стрибок». Крайова умова (1.40) у цьому випадку набуває вигляду

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = g(t), \quad t \in \gamma. \tag{1.41}$$

Застосуємо формули Сохоцького (1.22). Оскільки інтеграл типу Коші щезає на нескінченності (властивість Ф2), то за умови $\Phi^-(\infty) = 0$ ця задача має єдиний розв'язок

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{g(\tau)}{\tau - z} d\tau. \tag{1.42}$$

Якщо ж умова $\Phi^-(\infty) = 0$ відсутня, то розв'язок задачі (1.41) визначається формулою

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{g(\tau)}{\tau - z} d\tau + const. \tag{1.43}$$

**********

**Етап II.** Розглянемо однорідну задачу Рімана на зімкненому контурі, тобто в (1.40) покладемо $g(t) \equiv 0$:

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t), \quad t \in \gamma. \tag{1.44}$$

Позначимо $\kappa = \mathrm{Ind} G(t)$ і назвемо $\kappa$ індексом задачі Рімана.

**Етап II.1.** Розглянемо спочатку однорідну задачу Рімана у випадку, коли $\boldsymbol{\kappa = \mathrm{Ind}\, G(t) = 0}$.

Із властивості Ind2 випливає, що

$$\mathrm{Ind}\, \Phi^+(t) = \mathrm{Ind}\, G(t) + \mathrm{Ind}\, \Phi^-(t).$$

Оскільки $\Phi^+(z)$ – аналітична в $D^+$, то, за властивістю Ind4, її індекс дорівнюватиме $\mathrm{Ind}\, \Phi^+(t) = N^+ \geq 0$. Аналогічно $\mathrm{Ind}\, \Phi^-(t) = -N^- \leq 0$. Отже,

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Ind}\, \Phi^+(t) = \mathrm{Ind}\, G(t) + \mathrm{Ind}\, \Phi^-(t) \\ \underset{\geq 0}{N^+} \;=\; 0 \;\; + \; \underset{\leq 0}{(-N^-)} \end{array}\right\} \Rightarrow N^+ = N^- = 0.$$

Таким чином, $\Phi^+(z)$ не має нулів в $D^+$, а $\Phi^-(z)$ – в $D^-$. Тоді функції $\ln\Phi^+(z)$ і $\ln\Phi^-(z)$ будуть аналітичними відповідно в областях $D^+$ і $D^-$, а, отже, і однозначними разом зі своїми крайовими значеннями $\ln\Phi^+(t)$ і $\ln\Phi^-(t)$. Тому крайову умову (1.44) можна логарифмувати, тобто

$$\ln\Phi^-(t) - \ln\Phi^-(t) = \ln G(t), \qquad t \in \gamma, \tag{1.45}$$

де для $\ln G(t)$ можна брати довільну гілку. Таким чином, ми прийшли до задачі «про стрибок» відносно функцій $\ln\Phi^+(z)$ і $\ln\Phi^-(z)$ та вільним членом $\ln G(t)$. Тому, за умови $\ln\Phi^-(\infty) = 0$ розв'язок задачі (1.45) надається формулою

$$\ln\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{\ln G(\tau)}{\tau - z}\,d\tau, \tag{1.46}$$

а якщо умова $\ln\Phi^-(\infty) = 0$ відсутня, то – формулою

$$\ln\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{\ln G(\tau)}{\tau - z}\,d\tau + const\,. \tag{1.47}$$

Якщо ввести позначення

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{\ln G(\tau)}{\tau - z}\,d\tau\,, \tag{1.48}$$

то із (1.46) випливає, що розв'язком однорідної задачі Рімана (1.45) за умови $\Phi^-(\infty) = 1$ буде

$$\Phi^+(z) = e^{\Gamma^+(z)}, \quad \Phi^-(z) = e^{\Gamma^-(z)}. \tag{1.49}$$

Якщо умова $\Phi^-(\infty) = 1$ відсутня, то із (1.47) випливає, що розв'язок набуде вигляду

$$\Phi^+(z) = Ae^{\Gamma^+(z)}, \quad \Phi^-(z) = Ae^{\Gamma^-(z)}. \tag{1.50}$$

де $A$ – довільна стала.

**Зауваження 1.1.** Задачу (1.44) можна переписати у вигляді

$$G(t) = \frac{\Phi^+(t)}{\Phi^-(t)}, \qquad t \in \gamma\,. \tag{1.51}$$

Із (1.49) випливає, що функція $G(t)$, яка має властивості:

**ф1)** $G(t) \neq 0 \;\; \forall t \in \gamma$,

**ф2)** $G(t)$ задовольняє умову Гельдера на гладкому зімкненому контурі $\gamma$,

**ф3)** $\operatorname{Ind} G(t) = 0$ на $\gamma$

може бути однозначно поданою у вигляді відношення крайових значень функцій, аналітичних відповідно в областях $D^+$ і $D^-$, тобто

$$G(t) = \frac{\mathrm{X}^+(t)}{\mathrm{X}^-(t)}, \qquad t \in \gamma\,, \tag{1.52}$$

$$\mathrm{X}^+(z) = e^{\Gamma^+(z)}, \quad \mathrm{X}^-(z) = e^{\Gamma^-(z)}. \tag{1.53}$$

Зважаючи на (1.48), (1.53) і на властивості граничних значень інтеграла типу Коші, можна отримати *властивості функцій* $\mathrm{X}^{\pm}(z)$ *та їх граничних значень* $\mathrm{X}^{\pm}(t)$:

1) $\mathrm{X}^{\pm}(z)$ аналітичні відповідно в областях $D^{\pm}$;
2) $\mathrm{X}^{\pm}(z) \neq 0 \; \forall z \in D^{\pm}$;
3) $\mathrm{X}^{\pm}(t) \neq 0 \; \forall t \in \gamma$;
4) $\mathrm{X}^{\pm}(t)$ задовольняють умову Гельдера на $\gamma$;
5) $\mathrm{X}^{-}(\infty) = 1$.

**Означення 1.8.** Зображення функції $G(t)$, яка має властивості ф1) – ф3), у вигляді відношення (1.52) функцій $\mathrm{X}^{\pm}(t)$, що мають зазначені властивості, називають її *факторизацією*.

**Етап II.2.** Розглянемо однорідну задачу Рімана на зімкненому контурі у випадку, коли $\boldsymbol{\kappa = \mathrm{Ind}\, G(t) \neq 0}$. Спочатку зазначимо, що оскільки $z = 0 \in D^{+}$, то $\mathrm{Ind}\, t^{n} = n$ (детально це буде пояснено у розділі 2, у прикладі 2.4). Тому

$$\mathrm{Ind}\left[ t^{-\kappa} G(t) \right] = \mathrm{Ind}\, t^{-\kappa} + \mathrm{Ind}\, G(t) = -\kappa + \kappa = 0 .$$

Тепер крайову умову (1.44) перепишемо у вигляді

$$\Phi^{+}(t) = t^{\kappa} \left[ t^{-\kappa} G(t) \right] \Phi^{-}(t), \quad t \in \gamma.$$

Оскільки функція $t^{-\kappa} G(t)$ має властивості ф1) – ф3), то її можна факторизувати, а саме:

$$t^{-\kappa} G(t) = \frac{\mathrm{X}^{+}(t)}{\mathrm{X}^{-}(t)}, \quad t \in \gamma, \tag{1.54}$$

$$\mathrm{X}^{+}(z) = e^{\Gamma^{+}(z)}, \quad \mathrm{X}^{-}(z) = e^{\Gamma^{-}(z)}, \tag{1.55}$$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\ln\left[ \tau^{-\kappa} G(\tau) \right]}{\tau - z} d\tau. \tag{1.56}$$

Тоді крайову умову однорідної задачі Рімана можна записати у вигляді

$$\frac{\Phi^{+}(t)}{\mathrm{X}^{+}(t)} = t^{\kappa} \frac{\Phi^{-}(t)}{\mathrm{X}^{-}(t)}, \quad t \in \gamma. \tag{1.57}$$

Із властивостей функцій $\mathrm{X}^{\pm}(z)$, $\Phi^{\pm}(z)$, $\mathrm{X}^{\pm}(t)$, $\Phi^{\pm}(t)$ випливає, що функції в рівності (1.57) $f^{+}(t) = \dfrac{\Phi^{+}(t)}{\mathrm{X}^{+}(t)}$, $f^{-}(t) = t^{\kappa} \dfrac{\Phi^{-}(t)}{\mathrm{X}^{-}(t)}$ є неперервними і рівними між собою на контурі $\gamma$. Розглянемо їх аналітичне продовження на $D^{+}$ і $D^{-}$ відповідно: функція $f^{+}(z) = \dfrac{\Phi^{+}(z)}{\mathrm{X}^{+}(z)}$ – аналітична в $D^{+}$, а функція

$f^-(z)=z^\kappa\dfrac{\Phi^-(z)}{\mathrm{X}^-(z)}$ – аналітична в $D^-$, за винятком, можливо, точки $z=\infty$, в якій у випадку $\kappa>0$ ця функція має полюс порядку $\kappa$, а у випадку $\kappa<0-$ нуль порядку $-\kappa$.

Отже, скориставшись теоремою про аналітичне продовження і наслідком 1.1 із узагальненої теореми Ліувіля, приходимо до таких висновків.

1) У випадку $\kappa>0$ має місце рівність $f^+(z)=f^-(z)=P_\kappa(z)$, де $P_\kappa(z)-$ многочлен степеня $\kappa$ з довільними коефіцієнтами. Тобто

$$\frac{\Phi^+(z)}{\mathrm{X}^+(z)}=z^\kappa\frac{\Phi^-(z)}{\mathrm{X}^-(z)}=P_\kappa(z).$$

Звідки отримаємо розв'язок задачі (1.44) у цьому випадку:

$$\Phi^+(z)=\mathrm{X}^+(z)P_\kappa(z),\qquad \Phi^-(z)=z^{-\kappa}\mathrm{X}^-(z)P_\kappa(z). \tag{1.58}$$

2) У випадку $\kappa<0$ матимемо: $f^+(z)=f^-(z)=0$. Отже, у цьому випадку однорідна задача Рімана (1.44) має тривіальний розв'язок

$$\Phi^+(z)=\Phi^-(z)\equiv 0.$$

Зауважимо, що у випадку $\kappa>0$ однорідна задача Рімана має $\kappa+1$ лінійно незалежний розв'язки

$$\Phi_k^+(z)=z^k\mathrm{X}^+(z),\quad \Phi_k^-(z)=z^{k-\kappa}\mathrm{X}^-(z),\quad k=0,1,2,...,\kappa, \tag{1.59}$$

де $\mathrm{X}^\pm(z)$ визначаються формулами (1.55), (1.56).

********************************

**Етап III.** Розглянемо неоднорідну задачу Рімана на зімкненому контурі

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)+g(t),\quad t\in\gamma. \tag{1.60}$$

Нехай $\kappa=\mathrm{Ind}\,G(t)$. Перепишемо (1.60) у вигляді

$$\Phi^+(t)=t^\kappa\left[t^{-\kappa}G(t)\right]\Phi^-(t)+g(t),\quad t\in\gamma.$$

Факторизуємо функцію $t^{-\kappa}G(t)$ за допомогою формул (1.55) – (1.57), після перетворень отримаємо

$$\frac{\Phi^+(t)}{\mathrm{X}^+(t)}=t^\kappa\frac{\Phi^-(t)}{\mathrm{X}^-(t)}+\frac{g(t)}{\mathrm{X}^+(t)},\qquad t\in\gamma. \tag{1.61}$$

Оскільки функція $\mathrm{X}^+(t)$ на контурі $\gamma$ не дорівнює нулю і на цьому контурі задовольняє умову Гельдера, то функція $\dfrac{g(t)}{\mathrm{X}^+(t)}$ також задовольняє умову Гельдера і, отже, за формулами Сохоцького зображується у вигляді

$$\frac{g(t)}{\mathrm{X}^+(t)}=\Psi^+(t)-\Psi^-(t), \tag{1.62}$$

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{g(\tau)}{\mathrm{X}^+(\tau)}\cdot\frac{d\tau}{\tau-z}. \tag{1.63}$$

Зауважимо, що для функції (1.63), яка записується інтегралом типу Коші (властивість Ф2),

$$\Psi^-(\infty)=0\,. \tag{1.64}$$

Підставимо (1.62) в крайову умову (1.61):

$$\frac{\Phi^+(t)}{\mathrm{X}^+(t)}-\Psi^+(t)=t^{\kappa}\frac{\Phi^-(t)}{\mathrm{X}^-(t)}-\Psi^-(t),\quad t\in\gamma. \tag{1.65}$$

Застосовуємо теорему про аналітичне продовження та узагальнену теорему Ліувіля аналогічно випадку однорідної задачі.

1) У випадку $\kappa\geq 0$ отримаємо спочатку рівність

$$\frac{\Phi^+(z)}{\mathrm{X}^+(z)}-\Psi^+(z)=z^{\kappa}\frac{\Phi^-(z)}{\mathrm{X}^-(z)}-\Psi^-(z)=P_{\kappa}(z),$$

із якої знайдемо розв'язок

$$\Phi^+(z)=\mathrm{X}^+(z)\Big[\Psi^+(z)+P_{\kappa}(z)\Big], \tag{1.65}$$

$$\Phi^-(z)=z^{-\kappa}\mathrm{X}^-(z)\Big[\Psi^-(z)+P_{\kappa}(z)\Big], \tag{1.66}$$

де $P_{\kappa}(z)-$ многочлен степеня $\kappa$ з довільними коефіцієнтами.

2) У випадку $\kappa<0$ функція $f_1^-(z)=z^{\kappa}\dfrac{\Phi^-(z)}{\mathrm{X}^-(z)}$ в точці $z=\infty$ має нуль порядку $-\kappa$. Внаслідок (1.64), для функції $\Psi^-(z)$ точка $z=\infty$ теж є нулем. Отже, єдина, аналітична на всій площині функція

$$F(z)=\frac{\Phi^+(z)}{\mathrm{X}^+(z)}-\Psi^+(z)=z^{\kappa}\frac{\Phi^-(z)}{\mathrm{X}^-(z)}-\Psi^-(z)$$

являє собою сталу, яка дорівнює нулю. Отже, у випадку $\kappa<0$ розв'язок неоднорідної задачі Рімана (1.60) визначається формулами

$$\Phi^+(z)=\mathrm{X}^+(z)\Psi^+(z), \tag{1.67}$$

$$\Phi^-(z)=z^{-\kappa}\mathrm{X}^-(z)\Psi^-(z). \tag{1.68}$$

Оскільки $\Psi^-(\infty)=0$, то при $\kappa=-1$ задача (1.60) має єдиний розв'язок, що визначається формулами (1.67), (1.68), (1.55), (1.56), (1.63). Якщо $\kappa<-1$, то неоднорідна задача (1.60) в загальному випадку є нерозв'язною. Це пов'язано з тим, що в цьому випадку функція $\Phi^-(z)$, яка визначається рівністю (1.68), утворюється із добутку функцій $z^{-\kappa}$ з полюсом порядку $(-\kappa)$ і функції $\Psi^-(z)$ з простим полюсом в точці $z=\infty$. Отже, функція $\Phi^-(z)$ на нескінченності може мати полюс порядку $-\kappa-1$.

Однак, за певних умов при $\kappa<-1$ функція $\Phi^-(z)$ в точці $z=\infty$ не має полюсів, а, отже, неоднорідна задача має єдиний розв'язок, який визначається формулами (1.67) і (1.68). Отримаємо ці умови. При досить великих $z$

$$\frac{1}{\tau-z}=-\frac{1}{z}-\frac{\tau}{z^2}-\frac{\tau^2}{z^3}-\ldots-\frac{\tau^n}{z^{n+1}}-\ldots\,.$$

Тоді

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\frac{g(\tau)}{\mathrm{X}^{+}(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-z}=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{z^{k+1}}\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\frac{g(\tau)}{\mathrm{X}^{+}(\tau)}\tau^{k}d\tau=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k}{z^{k+1}},$$

де $C_k=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{g(\tau)}{\mathrm{X}^{+}(\tau)}\tau^{k}d\tau$. Звідки

$$\Phi^{-}(z)=z^{-\kappa}\mathrm{X}^{-}(z)\Psi^{-}(z)=\mathrm{X}^{-}(z)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k}{z^{\kappa+k+1}}.$$

Для того, щоб в точці $z=\infty$ анулювати полюс, потрібно покласти

$$C_0=0 \text{ при } \kappa=-2,$$

$$C_0=C_1=0 \text{ при } \kappa=-3,$$

у загальному випадку –

$$C_0=C_1=...=C_{-\kappa-2}=0.$$

Отже, умови, за яких неоднорідна задача має єдиний розв'язок у випадку $\kappa<-1$, мають вигляд:

$$\oint\limits_{\gamma}\frac{g(\tau)}{\mathrm{X}^{+}(\tau)}\tau^{k}d\tau=0,\ k=0,1,...,-\kappa-2. \qquad (1.69)$$

**Зауваження 1.2.** Якщо точка $z=0$ не належить області $D^{+}$, то роль функції $t^{n}$, буде відігравати функція $(t-z_0)^{n}$, де $z_0$ – довільна точка області $D^{+}$. В цьому випадку побудова розв'язків задачі Рімана проводиться за викладеною схемою.

Наступні формули випишемо в загальному випадку з урахуванням зауваження 1.2.

## РЕЗЮМЕ 1

**I. Задача «про стрибок»:** $\Phi^{+}(t)-\Phi^{-}(t)=g(t),\ \ t\in\gamma$.

Розв'язок визначається формулами:

$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\frac{g(\tau)}{\tau-z}d\tau$, за умови $\Phi^{-}(\infty)=0$,

$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\frac{g(\tau)}{\tau-z}d\tau+C$ ($C-$ довільна стала), якщо умова $\Phi^{-}(\infty)=0$ відсутня.

**II. Однорідна задача** $\Phi^{+}(t)=G(t)\Phi^{-}(t),\quad t\in\gamma$.

**II.1. Випадок** $\kappa=\mathrm{Ind}G(t)=0$.

Розв'язок визначається формулами:

$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\frac{\ln G(\tau)}{\tau-z}d\tau$,

$\Phi^{\pm}(z)=e^{\Gamma^{\pm}(z)}$, за умови $\Phi^{-}(\infty)=1$,

$\Phi^{+}(z)=Ae^{\Gamma^{+}(z)}$ ($A-$ довільна стала), якщо умова $\Phi^{-}(\infty)=1$ відсутня.

**II.2. Випадок** $\kappa = \mathrm{Ind} G(t) \neq 0$.

У випадку $\kappa < 0$ розв'язок має вигляд $\Phi^+(z) = \Phi^-(z) \equiv 0$.

У випадку $\kappa > 0$ розв'язок визначається формулами ($z_0 \in D^+$):

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{\ln\left[(\tau - z_0)^{-\kappa} G(\tau)\right]}{\tau - z} d\tau, \quad \mathrm{X}^\pm(z) = e^{\Gamma^\pm(z)},$$

$$\begin{cases} \Phi^+(z) = \mathrm{X}^+(z) P_\kappa(z), \\ \Phi^-(z) = (z - z_0)^{-\kappa} \mathrm{X}^-(z) P_\kappa(z). \end{cases}$$

Тут $P_\kappa(z)-$ многочлен степеня $\kappa$ з довільними коефіцієнтами.

**III. Неоднорідна задача:** $\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in \gamma$.

Розв'язок визначається формулами $z_0 \in D^+$:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{\ln\left[(\tau - z_0)^{-\kappa} G(\tau)\right]}{\tau - z} d\tau, \quad \mathrm{X}^\pm(z) = e^{\Gamma^\pm(z)}, \quad \Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{g(\tau)}{\mathrm{X}^+(\tau)} \cdot \frac{d\tau}{\tau - z},$$

$$\begin{cases} \Phi^+(z) = \mathrm{X}^+(z)\left[\Psi^+(z) + P_\kappa(z)\right], \\ \Phi^-(z) = (z - z_0)^{-\kappa} \mathrm{X}^-(z)\left[\Psi^-(z) + P_\kappa(z)\right] \end{cases} \text{ у випадку } \kappa \geq 0;$$

$$\begin{cases} \Phi^+(z) = \mathrm{X}^+(z)\Psi^+(z), \\ \Phi^-(z) = (z - z_0)^{-\kappa} \mathrm{X}^-(z)\Psi^-(z) \end{cases} \text{ у випадку } \kappa < 0. \qquad (*).$$

Якщо $\kappa = -1$, тоді існує єдиний розв'язок (*).

Умови, за яких неоднорідна задача має єдиний розв'язок (*) у випадку $\kappa < -1$:

$$\oint_\gamma \frac{g(\tau)}{\mathrm{X}^+(\tau)} \tau^k d\tau = 0, \; k = 0,1,\ldots,-\kappa - 2.$$

## 1.11. Задача Рімана на дійсній осі

**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ:**

**1)** $\gamma = \mathbb{R}$ – дійсна вісь, яка розбиває комплексну площину на дві півплощини: верхню $D^+ = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z > 0\}$ і нижню $D^- = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z < 0\}$;

**2)** функції $G(t)$ і $g(t)$ задовольняють умову Гельдера на $\gamma$;

**3)** при $t \to \pm\infty$ функції $G(t)$ і $g(t)$ задовольняють умови R1 I R2;

**4)** $G(t) \neq 0 \; \forall t \in \gamma$.

**Знайти** дві функції $\Phi^+(z)$ і $\Phi^-(z)$, аналітичні відповідно в областях $D^+$ і $D^-$ (з нескінченно віддаленою точкою включно для обох областей), які задовольняють на $\gamma$ крайову умову

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad -\infty < t < +\infty, \qquad (1.70)$$

де $\Phi^\pm(t)$ – крайові значення функцій $\Phi^\pm(z)$ із областей $D^\pm$ відповідно.

Розв'язання задачі Рімана проводиться за тією ж схемою, що і у випадку зімкненого контура. Тільки тут замість функції $t^n$ розглядають функція $\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^n$, оскільки

$$\mathrm{Ind}\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^n = n. \tag{1.71}$$

(✍ Обчисліть індекс зазначеної функції!)

**********

**Етап I.** Задача «про стрибок»:

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = g(t), \quad -\infty < t < +\infty. \tag{1.72}$$

Застосуємо формули Сохоцького (1.37(, (1.38). Розв'язок задачі (1.72) визначається формулою

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\tau)}{\tau - z} d\tau + C, \tag{1.73}$$

де $C$ – довільна стала.

**********

**Етап II.** Розглянемо однорідну задачу Рімана на дійсній осі:

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t), \quad -\infty < t < +\infty \tag{1.74}$$

Нехай $\kappa = \mathrm{Ind} G(t)$.

**Етап II.1.** Розглянемо випадок $\boldsymbol{\kappa = 0}$. Із властивості Ind2 випливає, що

$$\mathrm{Ind}\,\Phi^+(t) = \mathrm{Ind}\,G(t) + \mathrm{Ind}\,\Phi^-(t). \tag{1.75}$$

Оскільки $\Phi^+(z)$ – аналітична в верхній півплощині $D^+$, то, за властивістю Ind4, її індекс дорівнюватиме $\mathrm{Ind}\,\Phi^+(t) = N^+ \geq 0$. Аналогічно $\mathrm{Ind}\,\Phi^-(t) = -N^- \leq 0$. Отже, із (1.75) випливає, що

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Ind}\,\Phi^+(t) = \mathrm{Ind}\,G(t) + \mathrm{Ind}\,\Phi^-(t) \\ \underset{\geq 0}{N^+} \;=\; 0 \;+\; \underset{\leq 0}{(-N^-)} \end{array}\right\} \Rightarrow N^+ = N^- = 0.$$

Таким чином, $\Phi^+(z)$ не має нулів в $D^+$, а $\Phi^-(z)$ – в $D^-$. Тоді функції $\ln\Phi^+(z)$ і $\ln\Phi^-(z)$ будуть аналітичними відповідно в областях $D^+$ і $D^-$, а, отже, і однозначними разом зі своїми крайовими значеннями $\ln\Phi^+(t)$ і $\ln\Phi^-(t)$. Тому крайову умову (1.74) можна логарифмувати, тобто

$$\ln\Phi^-(t) - \ln\Phi^-(t) = \ln G(t), \quad -\infty < t < +\infty, \tag{1.76}$$

де для $\ln G(t)$ можна обрати довільну гілку. Таким чином, ми прийшли до задачі «про стрибок» відносно функцій $\ln\Phi^+(z)$ і $\ln\Phi^-(z)$ та вільним членом $\ln G(t)$. Застосовуючи властивості логарифмічної функції, приходимо до висновку, що розв'язок однорідної задачі в цьому випадку визначається формулами:

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\ln G(\tau)}{\tau-z}d\tau, \tag{1.77}$$

$$\Phi^{+}(z)=Ae^{\Gamma^{+}(z)},\quad \Phi^{-}(z)=Ae^{\Gamma^{-}(z)}, \tag{1.78}$$

де $A$ – довільна стала.

**Зауваження 1.3.** Із (1.74), (1.77) і (1.78) випливає, що у випадку, коли функція $G(t)$ має властивості

**фR1)** $G(t)\neq 0\ \ \forall t\in\mathbb{R}$,

**фR2)** $G(t)$ задовольняє умову Гельдера $\mathbb{R}$, а при $t\to\pm\infty$ задовольняє умови R1 I R2,

**фR3)** $\operatorname{Ind} G(t)=0$ на $\mathbb{R}$,

її можна *факторизувати*, тобто подати у вигляді

$$G(t)=\frac{\mathrm{X}^{+}(t)}{\mathrm{X}^{-}(t)},\qquad -\infty<t<\infty, \tag{1.79}$$

де

$$\mathrm{X}^{+}(z)=e^{\Gamma^{+}(z)},\quad \mathrm{X}^{-}(z)=e^{\Gamma^{-}(z)}, \tag{1.80}$$

а функцій $\mathrm{X}^{\pm}(z)$ та їх граничні значення $\mathrm{X}^{\pm}(t)$ мають наступні властивості:

1) $\mathrm{X}^{\pm}(z)$ аналітичні відповідно в областях $D^{\pm}$;

2) $\mathrm{X}^{\pm}(z)\neq 0\ \forall z\in D^{\pm}$;

3) $\mathrm{X}^{\pm}(t)\neq 0\ \forall t\in\mathbb{R}$;

4) $\mathrm{X}^{\pm}(t)$ задовольняють умову Гельдера на $\mathbb{R}$;

**Етап II.2.** Розглянемо тепер однорідну задачу Рімана на дійсній осі у випадку $\boldsymbol{\kappa=\operatorname{Ind}G(t)\neq 0}$. Крайову умову (1.74) перепишемо у вигляді

$$\Phi^{+}(t)=\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{\kappa}\left[\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{-\kappa}G(t)\right]\Phi^{-}(t),\quad -\infty<t<+\infty.$$

Оскільки функція в квадратних діжках має властивості фR1) – фR3), то її можна факторизувати, а саме:

$$\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{-\kappa}G(t)=\frac{\mathrm{X}^{+}(t)}{\mathrm{X}^{-}(t)},\quad -\infty<t<+\infty, \tag{1.81}$$

$$\mathrm{X}^{+}(z)=e^{\Gamma^{+}(z)},\quad \mathrm{X}^{-}(z)=e^{\Gamma^{-}(z)}, \tag{1.82}$$

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\ln\left[\left(\frac{\tau-i}{\tau+i}\right)^{-\kappa}G(\tau)\right]\cdot\frac{d\tau}{\tau-z}. \tag{1.83}$$

Тоді крайову умову однорідної задачі Рімана можна записати у вигляді

$$\frac{\Phi^{+}(t)}{\mathrm{X}^{+}(t)}=\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{\kappa}\frac{\Phi^{-}(t)}{\mathrm{X}^{-}(t)},\qquad -\infty<t<+\infty. \tag{1.84}$$

Із властивостей функцій $\mathrm{X}^{\pm}(z)$, $\Phi^{\pm}(z)$, $\mathrm{X}^{\pm}(t)$, $\Phi^{\pm}(t)$ випливає, що функції в рівності (1.84) $f^{+}(t)=\dfrac{\Phi^{+}(t)}{\mathrm{X}^{+}(t)}$, $f^{-}(t)=\left(\dfrac{t-i}{t+i}\right)^{\kappa}\dfrac{\Phi^{-}(t)}{\mathrm{X}^{-}(t)}$ є неперервними і рівними між собою на дійсній осі. Розглянемо їх аналітичне продовження на $D^{+}$ і $D^{-}$ відповідно: функція $f^{+}(z)=\dfrac{\Phi^{+}(z)}{\mathrm{X}^{+}(z)}$ – аналітична в $D^{+}$, а функція $f^{-}(z)=\left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)^{\kappa}\dfrac{\Phi^{-}(z)}{\mathrm{X}^{-}(z)}$ – аналітична в $D^{-}$, за винятком, можливо, точки $z=-i$, в якій у випадку $\kappa>0$ ця функція має полюс порядку $\kappa$, а у випадку $\kappa<0$ – нуль порядку $-\kappa$.

Отже, скориставшись теоремою про аналітичне продовження і наслідком 1.2 із узагальненої теореми Ліувіля, приходимо до таких висновків.

1) У випадку $\kappa>0$ має місце рівність $f^{+}(z)=f^{-}(z)=P_{\kappa}(z)$, де $P_{\kappa}(z)$ – многочлен степеня $\kappa$ з довільними коефіцієнтами. Тобто

$$\frac{\Phi^{+}(z)}{\mathrm{X}^{+}(z)}=\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{\kappa}\frac{\Phi^{-}(z)}{\mathrm{X}^{-}(z)}=\frac{P_{\kappa}(z)}{(z+i)^{\kappa}}.$$

Звідки отримаємо розв'язок задачі (1.74) у цьому випадку:

$$\Phi^{+}(z)=\mathrm{X}^{+}(z)\frac{P_{\kappa}(z)}{(z+i)^{\kappa}},\qquad \Phi^{-}(z)=\mathrm{X}^{-}(z)\frac{P_{\kappa}(z)}{(z-i)^{\kappa}},. \tag{1.85}$$

2) У випадку $\kappa<0$ матимемо: $f^{+}(z)=f^{-}(z)=0$. Отже, у цьому випадку однорідна задача Рімана (1.74) має тривіальний розв'язок

$$\Phi^{+}(z)=\Phi^{-}(z)\equiv 0.$$

Зауважимо, що у випадку $\kappa>0$ однорідна задача Рімана має $\kappa+1$ лінійно незалежний розв'язок

$$\Phi_{k}^{+}(z)=\mathrm{X}^{+}(z)\frac{z^{k}}{(z+i)^{\kappa}},\ \Phi_{k}^{-}(z)=\mathrm{X}^{-}(z)\frac{z^{k}}{(z-i)^{\kappa}},\quad k=0,1,2,...,\kappa, \tag{1.86}$$

де $\mathrm{X}^{\pm}(z)$ визначаються формулами (1.82), (1.83).

********************************

**Етап III.** Розглянемо неоднорідну задачу Рімана на дійсній осі

$$\Phi^{+}(t)=G(t)\Phi^{-}(t)+g(t),\quad -\infty<t<+\infty. \tag{1.87}$$

Нехай $\kappa=\operatorname{Ind}G(t)$. Перепишемо (1.87) у вигляді

$$\Phi^{+}(t)=\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{\kappa}\left[\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{-\kappa}G(t)\right]\Phi^{-}(t)+g(t),\quad -\infty<t<+\infty.$$

Факторизуємо за допомогою формул (1.81) – (1.83) функцію в квадратних дужках правої частині останньої крайової умови, після перетворень отримаємо

$$\frac{\Phi^{+}(t)}{\mathrm{X}^{+}(t)}=\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{\kappa}\frac{\Phi^{-}(t)}{\mathrm{X}^{-}(t)}+\frac{g(t)}{\mathrm{X}^{+}(t)},\quad -\infty<t<+\infty. \tag{1.88}$$

Оскільки функція $g(t)/\mathrm{X}^+(t)$ задовольняє умову Гельдера на дійсній осі, то, за формулами Сохоцького, вона зображується у вигляді

$$\frac{g(t)}{\mathrm{X}^+(t)} = \Psi^+(t) - \Psi^-(t), \tag{1.89}$$

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\tau)}{\mathrm{X}^+(\tau)(\tau - z)}\,d\tau. \tag{1.90}$$

Підставимо (1.89) в крайову умову (1.87):

$$\frac{\Phi^+(t)}{\mathrm{X}^+(t)} - \Psi^+(t) = \left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{\kappa} \frac{\Phi^-(t)}{\mathrm{X}^-(t)} - \Psi^-(t), \quad -\infty < t < +\infty\,. \tag{1.91}$$

Застосовуємо теорему про аналітичне продовження та узагальнену теорему Ліувіля.

1) У випадку $\kappa \geq 0$ отримаємо спочатку рівність

$$\frac{\Phi^+(z)}{\mathrm{X}^+(z)} - \Psi^+(z) = \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{\kappa} \frac{\Phi^-(z)}{\mathrm{X}^-(z)} - \Psi^-(z) = \frac{P_\kappa(z)}{(z+i)^\kappa},$$

із якої знайдемо розв'язок

$$\Phi^+(z) = \mathrm{X}^+(z)\left[\Psi^+(z) + \frac{P_k(z)}{(z+i)^\kappa}\right], \tag{1.92}$$

$$\Phi^-(z) = \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{-\kappa} \mathrm{X}^-(z)\left[\Psi^-(z) + \frac{P_k(z)}{(z+i)^\kappa}\right], \tag{1.93}$$

де $P_\kappa(z)-$ многочлен степеня $\kappa$ з довільними коефіцієнтами.

2) У випадку $\kappa < 0$ єдиною, аналітичною на всій площині функцією

$$F(z) = \frac{\Phi^+(z)}{\mathrm{X}^+(z)} - \Psi^+(z) = \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{\kappa} \frac{\Phi^-(z)}{\mathrm{X}^-(z)} - \Psi^-(z)$$

буде стала. Отже, у випадку $\kappa < 0$ розв'язок неоднорідної задачі Рімана (1.87) визначається формулами

$$\Phi^+(z) = \mathrm{X}^+(z)\Big[\Psi^+(z) + C\Big], \tag{1.94}$$

$$\Phi^-(z) = \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{-\kappa} \mathrm{X}^-(z)\Big[\Psi^-(z) + C\Big]. \tag{1.95}$$

Функція $\Phi^-(z)$ в точці $z = -i$ має полюс. У випадку, коли $\kappa = -1$ цей полюс можна анулювати за рахунок вибору константи $C$:

$$C = -\Psi^-(-i)\,. \tag{1.96}$$

Тоді при $\kappa = -1$ неоднорідна задача буде мати єдиний розв'язок, який можна знайти за формулами (1.94), (1.95), (1.82), (1.83), (1.90).

Якщо $\kappa < -1$, то неоднорідна задача (1.87) в загальному випадку є нерозв'язною. Однак, за певних умов розв'язок буде існувати, причому єдиний, який визначається зазначеними вище формулами. Отримаємо ці умови. В достатньо малому околі точки $z = -i$ має місце розклад

$$\frac{1}{\tau - z} = \frac{1}{\tau + i - (z + i)} = \frac{1}{\tau + i} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z + i}{\tau + i}} = \frac{1}{\tau + i} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{z + i}{\tau + i} \right)^k .$$

Звідки

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\tau)}{\mathrm{X}^+(\tau)(\tau - z)} d\tau = \sum_{k=0}^{\infty} (z + i)^k \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\tau)}{\mathrm{X}^+(\tau)(\tau + i)^{k+1}} d\tau = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z + i)^k ,$$

де $C_k = \dfrac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{g(\tau)}{\mathrm{X}^+(\tau)(\tau + i)^{k+1}} d\tau$. Тоді

$$\Phi^-(z) = \left( \frac{z - i}{z + i} \right)^{-\kappa} \mathrm{X}^-(z) \left[ \Psi^-(z) + C \right] = (z - i)^{-\kappa} \mathrm{X}^-(z) \times$$

$$\times \left\{ (C + C_0)(z + i)^{-\kappa} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k (z + i)^{k - \kappa} \right\}.$$

Для того, щоб в точці $z = -i$ анулювати полюс, потрібно покласти

$C + C_0 = 0$ при $\kappa = -1$, що відповідає (1.96),

$C + C_0 = C_1 = 0$ при $\kappa = -2$,

$C + C_0 = C_1 = C_2 = 0$ при $\kappa = -3$,

у загальному випадку, окрім умови (1.96), потрібно задовольнити умови:

$$C_1 = C_2 = \ldots = C_{-\kappa - 1} = 0 .$$

Отже, умови, за яких неоднорідна задача на дійсній осі має єдиний розв'язок у випадку $\kappa < -1$, мають вигляд:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\tau)}{\mathrm{X}^+(\tau)(\tau + i)^{k+1}} d\tau = 0, \ k = 1, 2, \ldots, -\kappa - 1. \qquad (1.97)$$

## РЕЗЮМЕ 2

**I. Задача «про стрибок»:** $\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = g(t), \quad -\infty < t < +\infty$.

Розв'язок визначається формулою:

$\Phi(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{g(\tau)}{\tau - z} d\tau + C$ ($C -$ довільна стала).

**II. Однорідна задача** $\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t), \quad -\infty < t < +\infty$.

**II.1. Випадок** $\kappa = \mathrm{Ind} G(t) = 0$.

Розв'язок визначається формулами:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln G(\tau)}{\tau - z} d\tau ,$$

$\Phi^+(z) = Ae^{\Gamma^+(z)}$ ($A -$ довільна стала).

**II.2. Випадок** $\kappa = \mathrm{Ind} G(t) \neq 0$

У випадку $\kappa < 0$ розв'язок має вигляд: $\Phi^+(z) = \Phi^-(z) \equiv 0$.

У випадку $\kappa > 0$ розв'язок визначається формулами ($ai/b \in D^+$, $-ci/h \in D^-$):

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln\left[\left(\frac{b\tau - ai}{h\tau + ci}\right)^{-\kappa} G(\tau)\right]\frac{d\tau}{\tau - z}, \quad \mathrm{X}^{\pm}(z) = e^{\Gamma^{\pm}(z)},$$

$$\Phi^+(z) = \mathrm{X}^+(z)\frac{P_\kappa(z)}{(hz+ci)^\kappa}, \quad \Phi^-(z) = \mathrm{X}^-(z)\frac{P_\kappa(z)}{(bz-ai)^\kappa}.$$

Тут $P_\kappa(z)-$ многочлен степеня $\kappa$ з довільними коефіцієнтами.

**III. Неоднорідна задача:** $\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad -\infty < t < +\infty$.

Розв'язок визначається формулами:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln\left[\left(\frac{b\tau - ai}{h\tau + ci}\right)^{-\kappa} G(\tau)\right]\frac{d\tau}{\tau - z}, \; \mathrm{X}^{\pm}(z) = e^{\Gamma^{\pm}(z)},$$

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\tau)}{\mathrm{X}^+(\tau)(\tau - z)}d\tau,$$

$$\Phi^+(z) = \mathrm{X}^+(z)\left[\Psi^+(z) + \frac{P_k(z)}{(hz+ci)^\kappa}\right], \quad \Phi^-(z) = \left(\frac{bz-ai}{hz+ci}\right)^{-\kappa}\mathrm{X}^-(z)\left[\Psi^-(z) + \frac{P_k(z)}{(hz+ci)^\kappa}\right] \text{ при } \kappa \geq 0,$$

$$\Phi^+(z) = \mathrm{X}^+(z)\left[\Psi^+(z) + C\right], \; \Phi^-(z) = \left(\frac{bz-ai}{hz+ci}\right)^{-\kappa}\mathrm{X}^-(z)\left[\Psi^-(z) + C\right], \; C = -\Psi^-(-i) \text{ при } \kappa < 0. \quad (**)$$

Якщо $\kappa = -1$, тоді існує єдиний розв'язок (**).

Умови, за яких неоднорідна задача має єдиний розв'язок (**) у випадку $\kappa < -1$:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\tau)}{\mathrm{X}^+(\tau)(h\tau+ci)^{k+1}}d\tau = 0, \; k = 1,2,...,-\kappa-1.$$

## 1.12. Задача Рімана з розривними коефіцієнтами на зімкненому контурі

### 1.12.1. Постановка задачі.

**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ** [1]

1) Нехай $\gamma-$ простий гладкий зімкнений контур;

2) функції $G(t)$, $g(t)$ в точках $t_1, t_2, ..., t_m$ контура $\gamma$ мають розриви першого роду;

3) на дугах $t_j t_{j+1}$ $(j = \overline{1,m})$ функції $G(t)$, $g(t)$ задовольняють умову Гельдера;

4) $G(t) \neq 0 \; \forall t \in \gamma$.

Розглянемо задачу Рімана на $\gamma$:

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in \gamma. \tag{1.98}$$

Зауважимо, що крайова умова (1.98) виконується всюди на $\gamma$, крім точок розриву функцій $G(t)$, $g(t)$, де вона втрачає зміст.

Розв'язок задачі (1.98) будемо шукати в класі функцій, інтегровних на контурі $\gamma$. Із цього випливає, що розв'язок задачі (1.98) буде задовольняти умову Гельдера на $\gamma$, за винятком точок $t_j$, $(j = \overline{1,m})$, де можуть виконуватись наступні можливості:

1) розв'язок обмежений в усіх точках розриву;

2) розв'язок обмежений в деяких точках розриву, а в решті має інтегровну нескінченність;

3) розв'язок допускає в усіх точках розриву інтегровну нескінченність.

**1.12.2. Задача «про стрибок».** Розглянемо спочатку *задачу «про стрибок»*:

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = g(t), \quad t \in \gamma, \tag{1.99}$$

де функція $g(t)$ в окремих точках має розриви першого роду або ж особливості вигляду $g(t) = \dfrac{g_0(t)}{(t-t_j)^\mu}$, де $g_0(t) \in H_\lambda(\gamma)$, $\operatorname{Re}\mu \in (0;1)$. Розв'язок задачі (1.99) будемо шукати в класі інтегровних на $\gamma$ функцій, причому $\Phi^-(\infty) = 0$. Тоді, внаслідок формул Сохоцького, розв'язок задачі (1.99) визначається формулою

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{g(\tau)}{\tau - z}\,d\tau,$$

причому [1] ця функція в точках розриву функції $g(t)$ першого роду, має логарифмічну особливість, а в точках розриву другого роду – особливість того ж типу, що і функція $g(t)$. При цьому інших розв'язків дана задача не допускає, тобто її розв'язок єдиний. Це випливає з того, що в класі інтегровних функцій задача $\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = 0$ має лише нульовий розв'язок [1].

Метод розв'язання задачі Рімана з розривними коефіцієнтами і вільною функцією полягає у зведенні її до задачі Рімана з неперервним коефіцієнтом (яка досліджувалася вище) за допомогою спеціально підібраних функцій.

**1.12.3. Фундаментальні допоміжні функції.** Розглянемо дві аналітичні відповідно в областях $D^+$ і $D^-$ функції [1]:

$$\omega^+(z) = (z - t_1)^\nu, \; \omega^-(z) = \left(\frac{z - t_1}{z - z_0}\right)^\nu, \tag{1.100}$$

де $z_0$ – деяка точка в області $D^+$; $t_1$ – точка контура $\gamma$; $\nu = \alpha + i\beta$ – деяке комплексне число. Здійснимо розріз в площині $z$ із точки $z_0$ через точку $t_1$ і до нескінченно віддаленої точки, причому ділянку розрізу від точки $z_0$ до точки $t_1$ розташуємо всередині контура. В розрізаній таким чином площині функції

$\omega^+(z)$ і $\omega^-(z)$ будуть однозначними і аналітичними відповідно в областях $D^+$ і $D^-$. На контурі $\gamma$ дані функції будуть неперервні всюди, за винятком, можливо, точки $t_1$. Поведінка цих функцій в точці $t_1$ буде залежати від величини $\nu$. Тимчасово залишимо це питання відкритим.

Вивчимо поведінку відношення граничних значень функцій $\omega^+(z)$ і $\omega^-(z)$ в околі точки $t_1$:

$$\Omega(t)=\frac{\omega^-(t)}{\omega^+(t)}=(t-z_0)^{-\nu}.$$

Причому, в точці $t_1$ функція $\Omega(t)$ невизначена. Знайдемо відношення її лівої і правої границь в точці $t_1$. Оскільки лівий і правий околи точки $t_1$ лежать з різних сторін розрізу $(z_0,t_1,\infty)$ для функції $(z-z_0)^\nu$, то при оббігу розрізу аргумент функції $z-z_0$ збільшується на $2\pi$, а функції $(z-z_0)^\nu$ – на $2\pi\nu$, при цьому, значення модуля в точці повернення $t_1$ рівні. Отже,

$$\frac{\Omega(t_1-0)}{\Omega(t_1+0)}=e^{-2\pi\nu i}. \tag{1.101}$$

Тепер дослідимо поведінку функцій $\omega^+(z)$ і $\omega^-(z)$ в околі точки $t_1$ залежно від величини $\nu$. Для цього досить дослідити функцію $\omega^+(z)=(z-t_1)^\nu$. Поклавши $z-t_1=re^{i\theta}$, будемо мати

$$(z-t_1)^\nu=e^{\nu\ln(z-t_1)}=r^\alpha e^{-\beta\theta}e^{i(\beta\ln r+\alpha\theta)}\cdot e^{2\pi k\nu i}. \tag{1.102}$$

Із (1.102) випливає, що при $\alpha\neq 0$ порядок функції залежить тільки від $\alpha$. При $\alpha>0$ вона має нуль порядку $\alpha$, при $\alpha<0$ – нескінченність порядку $-\alpha$, а при $\alpha=0$ залишається обмеженою, але не має границі в точці $t_1$. **Таким чином**, функції $\omega^+(z)$ і $\omega^-(z)$, в точці $t_1$ будуть мати нескінченність інтегровного порядку при $-1<\alpha<0$, будуть обмежені, зокрема, при $0\le\alpha<1$.

**1.12.4. Зведення до задачі з неперервним коефіцієнтом. Найпростіший випадок.** Припустимо спочатку, що функція $G(t)$ має одну точку розриву $t_1$, і розглянемо однорідну задачу

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t),\quad t\in\gamma. \tag{1.103}$$

Покладемо

$$\nu=\frac{1}{2\pi i}\operatorname{Ln}\frac{G(t_1-0)}{G(t_1+0)}. \tag{1.104}$$

Гілка многозначної логарифмічної функції фіксована і залежать від потрібного класу розв'язків. Значення величини $\nu$ буде визначати функції $\omega^+(z)$ і $\omega^-(z)$ за формулами (1.100).

Введемо нові невідомі функції $\Phi_1^\pm(z)$ поклавши

$$\Phi^\pm(z)=\omega^\pm(z)\Phi_1^\pm(z). \tag{1.105}$$

Підставляючи $\Phi^\pm(z)$ в (1.103), однорідну задачу приведемо до наступної:

$$\Phi_1^+(t)=G_1(t)\Phi_1^-(t),\quad t\in\gamma, \tag{1.106}$$

де

$$G_1(t)=\frac{\omega^-(t)}{\omega^+(t)}G(t)=\Omega(t)G(t),\ t\in\gamma. \tag{1.107}$$

Функція $G_1(t)$ неперервна в усіх точках контура $\gamma$ (✍ поясніть це!), які не збігаються з точкою $t_1$. Покажемо, що функція $G_1(t)$ неперервна і в точці $t_1$:

$$\frac{G_1(t_1-0)}{G_1(t_1+0)}\overset{(1.106)}{=}\frac{\Omega(t_1-0)G(t_1-0)}{\Omega(t_1+0)G(t_1+0)}\overset{(1.101)}{=}e^{-2\pi\nu i}\frac{G_1(t_1-0)}{G_1(t_1+0)}\overset{(1.104)}{=}1,$$

тобто $G_1(t_1-0)=G_1(t_1+0),$ що означає неперервність функції $G_1(t)$ в точці $t_1$.

Визначимо індекс задачі. Поведінка розв'язку задачі (1.105) поблизу точки розриву $t_1$ залежить від поведінки функцій $\omega^+(z)$ і $\omega^-(z)$, яка визначається величиною $\alpha=\mathrm{Re}\,\nu$, про що йшлося в п. 1.12.3. Таким чином, поведінка розв'язку задачі (1.106) поблизу точки $t_1$ визначається вибором гілки логарифма при знаходженні $\nu$ в (1.104). Цей вибір потрібно робити залежно від класу розв'язків, який вимагається умовою задачі, а саме: необхідно забезпечити виконання умови $0\le\mathrm{Re}\,\nu<1,$ якщо розв'язки обмежені поблизу точки $t_1$, і умови $-1<\mathrm{Re}\,\nu<0,$ якщо розв'язки повинні мати в точці $t_1$ інтегровну нескінченність.

Позначимо через $\theta$ приріст якоїсь гілки аргументу функції $G(t)$ при обході контура $\gamma$, тобто $\theta$ – це стрибок аргументу $G(t)$ в точці розриву, взятий з протилежним знаком. Тоді, позначаючи

$$\frac{G(t_1-0)}{G(t_1+0)}=\rho e^{i\theta}, \tag{1.108}$$

відповідно до (1.104) отримаємо:

$$\nu=\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{G(t_1-0)}{G(t_1+0)}=\frac{\theta}{2\pi}-\kappa-i\frac{\ln\rho}{2\pi}, \tag{1.109}$$

де ціле число $\kappa$ необхідно вибрати так, щоб $\mathrm{Re}\,\nu=\frac{\theta}{2\pi}-\kappa\in[0;1)$, якщо розв'язки обмежені поблизу точки $t_1$, і $\frac{\theta}{2\pi}-\kappa\in(-1;0)$, якщо розв'язки в точці $t_1$ мають інтегровну особливість. Відповідні значення для $\kappa$ можна знайти за формулами:

$$\kappa=\left[\frac{\theta}{2\pi}\right] \tag{1.110}$$

для класу обмежених розв'язків;

$$\kappa=\left[\frac{\theta}{2\pi}\right]+1 \tag{1.111}$$

для класу необмежених поблизу точки $t_1$ розв'язків; тут $[x]$ – ціла частина числа $x$.

Тепер обчислимо індекс функції $G_1(t)$:

$$\mathrm{Ind}G_1(t)=\frac{1}{2\pi i}\left[\ln G_1(t)\right]\Big|_\gamma=\frac{1}{2\pi i}\ln\left(\frac{G(t_1-0)}{G(t_1+0)}e^{-2\pi i\nu}\right)=\frac{1}{2\pi i}\ln\left(\rho e^{i\theta}\right)-\nu=$$

$$= -i\frac{\ln\rho}{2\pi} + \frac{\theta}{2\pi} - \left(\frac{\theta}{2\pi} - \kappa - i\frac{\ln\rho}{2\pi}\right) = \kappa.$$

Цю величину називають *індексом задачі з розривним коефіцієнтом*.

Таким чином, значення числа $\kappa$ залежить від класу функцій, в якому шукаються розв'язки задачі Рімана.

**1.12.5. Розв'язання однорідної задачі.** Нехай функція $G(t)$ має точки розриву $t_1, t_2, ..., t_m$. Розіб'ємо контур $\gamma$ на дуги $t_j t_{j+1}$ $(j = \overline{1,m})$ і визначимо в кожній початковій точці $t_j$ дуги $t_j t_{j+1}$ гілку $\arg G(t_j + 0)$ довільно, а в кінцевій точці дуги $\arg G(t_{j+1} - 0)$ отримаємо із вибраної гілки $\arg G(t_j + 0)$ шляхом неперервної зміни.

Покладемо

1) $$\frac{G(t_j - 0)}{G(t_j + 0)} = \rho_j e^{i\theta_j}, \quad j = 1, ..., m, \tag{1.108'}$$

де $\theta_j$ – стрибок аргументу в точці $t_j$, взятий з протилежним знаком;

2) $$\nu_j = \frac{1}{2\pi i}\operatorname{Ln}\frac{G(t_j - 0)}{G(t_j + 0)} = \frac{\theta_j}{2\pi} - \kappa_j - i\frac{\ln\rho_j}{2\pi}; \tag{1.109'}$$

3) $$\kappa_j = \left[\frac{\theta_j}{2\pi}\right], \tag{1.110'}$$

якщо розв'язок шукається в класі обмежених функцій, і

$$\kappa_j = \left[\frac{\theta_j}{2\pi}\right] + 1, \tag{1.111'}$$

якщо розв'язок шукається в класі необмежених функцій з інтегрованою нескінченністю в точці $t_j$;

4) $$\Phi^{\pm}(z) = \prod_{j=1}^{m} \omega_j^{\pm}(z) \cdot \Phi_1^{\pm}(z), \tag{1.105'}$$

причому розріз для кожної з функцій $\omega_j^{\pm}(z)$ проходить через точки $z_0, t_j, \infty$.

Підставляючи (1.105') в (1.103), однорідну задачу з розривним коефіцієнтом зведемо до задачі Рімана з неперервним коефіцієнтом:

$$\Phi_1^{+}(t) = G_1(t)\Phi_1^{-}(t), \quad t \in \gamma, \tag{1.106'}$$

$$G_1(t) = \prod_{j=1}^{m} \frac{\omega_j^{-}(t)}{\omega_j^{+}(t)} \cdot G(t) = \prod_{j=1}^{m} \Omega_j(t) \cdot G(t). \tag{1.107'}$$

Обчислимо індекс задачі:

$$\operatorname{Ind} G_1(t) = \frac{1}{2\pi i}\left\{\ln G_1(t)\right\}\Big|_{\gamma} = \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{m}\left\{\ln G_1(t)\right\}\Big|_{t_j}^{t_{j+1}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{m}\ln\left[\frac{\Omega_j(t_j - 0)G(t_j - 0)}{\Omega_j(t_j + 0)G(t_j + 0)}\right] = \kappa_1 + \kappa_2 + ... + \kappa_k = \kappa,$$

$$\kappa = \kappa_1 + \kappa_2 + ... + \kappa_k. \tag{1.112}$$

Нехай потрібно знайти розв'язок задачі Рімана, який має інтегровну особливість в $p$ точках розриву, а в решті $m-p$ точках розриву розв'язок обмежений. Тоді

$$\kappa = \sum_{j=1}^{m}\left[\frac{\theta_j}{2\pi}\right] + p\,.$$

Розв'язок однорідної задачі (1.106') шукаємо за формулами п. 1.10 або резюме 1. В результаті знаходимо функції $\Phi_1^{\pm}(z)$, які відповідають розв'язку задачі з неперервним коефіцієнтом. Розв'язок задачі з розривним коефіцієнтом – функції $\Phi^{\pm}(z)$ – знаходимо за формулами (1.105').

**1.12.5. Розв'язання неоднорідної задачі** шукаємо аналогічно однорідній. Спочатку вводимо позначення (1.108') – (1.111'), а після введення нових невідомих функцій (1.105') приходимо до неоднорідної крайової задачі Рімана з неперервним коефіцієнтом:

$$\Phi_1^{+}(t) = G_1(t)\Phi_1^{-}(t) + g_1(t), \quad t \in \gamma\,, \tag{1.113}$$

$$G_1(t) = \prod_{j=1}^{m}\frac{\omega_j^{-}(t)}{\omega_j^{+}(t)} \cdot G(t), \tag{1.114}$$

$$g_1(t) = \prod_{j=1}^{m}\frac{1}{\omega_j^{+}(t)} \cdot g(t)\,, \tag{1.115}$$

розв'язок якої було знайдено в п.1.10. Для отримання розв'язку задачі з розривним коефіцієнтом потрібно скористатися формулами (1.105').

### 1.13. Задача Рімана на розімкненому контурі

Нехай контур $\gamma$ складається із сукупності $m$ простих гладких кривих $\gamma_1$, $\gamma_2$, …, $\gamma_m$ які не перетинаються. Перш, ніж перейти до подальшого викладення, потрібно з'ясувати, як означити напрям оббігу такої кривої, щоб визначитися з поняттями областей $D^{\pm}$, функцій $\Phi^{\pm}(z)$, що їм відповідають, і граничних значень цих функцій – $\Phi^{\pm}(t)$.

Доповнимо контур $\gamma$ довільними гладкими кривими $\gamma_1'$, $\gamma_2'$, …, $\gamma_m'$, що не перетинаються так, щоб утворилась одна гладка зімкнена крива $L$ $\left(\gamma_1 \cup \gamma_1' \cup \gamma_2 \cup \gamma_2' \cup \ldots \cup \gamma_k \cup \gamma_k' = L\right)$ без самоперетинів (рис. 1.4). Саме така крива визначає додатний напрям оббігу, області $D^{+}$ і $D^{-}$, функції $\Phi^{\pm}(z)$ і $\Phi^{\pm}(t)$.

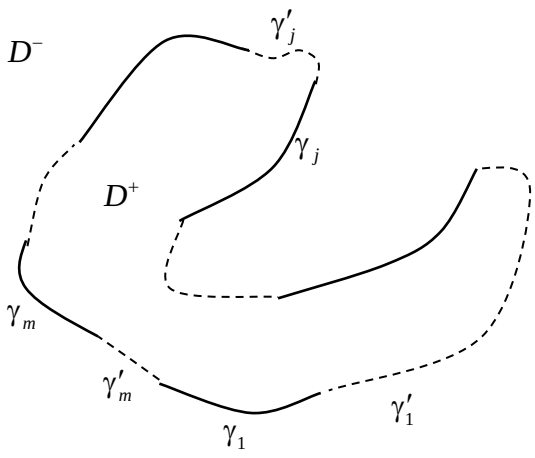



Рис. 1.4.

Нехай на $\gamma$ задані функції $G(t)$ і $g(t)$, які задовольняють умові Гельдера, причому $G(t) \neq 0$ всюди на $\gamma$.

В задачі **потрібно знайти** функцію $\Phi(z)$, аналітичну на всій площині, крім точок контура $\gamma$, граничні значення якої є

інтегровними функціями, що задовольняють крайову умову

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in \gamma \tag{1.116}$$

Задача Рімана на розімкненому контурі **принципово відрізняється** від задачі Рімана на зімкненому контурі тим, що вся площина з розрізом вздовж кривої $\gamma$ складає одну область, і потрібно шукати не дві самостійні аналітичні функції $\Phi^+(z)$ і $\Phi^-(z)$, а одну функцію, аналітичну на всій комплексній площині з лінією стрибків $\gamma$.

Сформульовану задачу можна звести до задачі Рімана з розривним коефіцієнтом і розривною правою частиною (вільною функцією) на гладкому зімкненому контурі $L$. При цьому на доповнюючих контурах $\gamma'_j$ повинна виконуватись умова

$$\Phi^+(t) = \Phi^-(t).$$

Враховуючи це, задачу (1.115) можна розглядати як задачу Рімана на зімкненому контурі $L$, тобто

$$\Phi^+(t) = G^*(t)\Phi^-(t) + g^*(t), \quad t \in L, \tag{1.117}$$

$$G^*(t) = \begin{cases} G(t), t \in \gamma_j, \\ 1, \quad t \in \gamma'_j, \end{cases} \qquad g^*(t) = \begin{cases} g(t), t \in \gamma_j, \\ 0, \quad t \in \gamma'_j. \end{cases} \tag{1.118}$$

Застосовуючи схему побудови розв’язків задачі Рімана з розривними коефіцієнтами і розривною правою частиною, викладену в попередньому підрозділі, неважко побудувати розв’язок задачі (1.117), а, отже, й задачі (1.116).

# Розділ 2. ПРАКТИКУМ ІЗ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

## 2.1. Функції, які задовольняють умову Гельдера

**Вправа 2.1.** Показати, що функції $\varphi_1(t)=\sin t$, $\varphi_2(t)=t^3-2t^2+1$, $\varphi_3(t)=\dfrac{t^2}{t^2+1}$ задовольняють умову Гельдера на сегменті $[0,1]$.

**Приклад 2.1.** Показати, що функція $\varphi(t)$ задовольняє умову Гельдера на $\gamma$:

1) $\varphi(t)=t\cos^2(t+1)+\operatorname{arcctg} t$, $\gamma=[-5;3]$;

2) $\varphi(t)=\cos^2(2t+1)+\operatorname{arctg}^2 t+\dfrac{t}{t^2+4}$, $\gamma=\mathbb{R}$;

3) $\varphi(t)=\dfrac{t+1}{t+2}$, $\gamma=\{t\in\mathbb{C}:\ |t|=1\}$.

**Розв'язання.** Відповідно до означення 1.1 і властивості Г2, потрібно довести справедливість висловлювання:

$$\exists\, A>0, \exists\lambda\in(0;1]:\ \forall t_1,t_2\in\gamma\ \ |\varphi(t_1)-\varphi(t_2)|\le A|t_1-t_2|^{\lambda}.$$

**1)** В цьому випадку $\gamma=[-5;3]$. Задана функція $\varphi(t)$ дійсної змінної неперервна на відрізку $[-5;3]$ і має похідну

$$\varphi'(t)=\left(t\cos^2(t+1)+\operatorname{arcctg} t\right)'=\cos^2(t+1)-2t\cos(t+1)\sin(t+1)-\frac{1}{1+t^2},$$

на відрізку $[-5;3]$. Згідно з теоремою Лагранжа (повторити теорему Лагранжа, [Гребенюк С.М][1] с. 41),

$$\forall t_1,t_2\in[-5;3]\ \ \exists\tau:\ t_1\lesseqgtr\tau\lesseqgtr t_2\quad \varphi(t_1)-\varphi(t_2)=\varphi'(\tau)\cdot(t_1-t_2).$$

Застосовуючи нерівності

$$\forall\tau\in[-5;3]\ \ |\tau|\le 5;\ \ |\cos(\tau+1)|\le 1;\ \ |\sin(\tau+1)|\le 1;\ \ \frac{1}{1+\tau^2}\le 1,$$

отримаємо:

$$|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)|=|\varphi'(\tau)|\cdot|t_1-t_2|\le$$

$$\le\left(\cos^2(\tau+1)+2\cdot|\tau|\cdot|\cos(\tau+1)|\cdot|\sin(\tau+1)|+\frac{1}{1+\tau^2}\right)\cdot|t_1-t_2|\le$$

$$\le\left(1+2\cdot5\cdot1\cdot1+1\right)\cdot|t_1-t_2|=12\cdot|t_1-t_2|.$$

В означенні потрібно покласти $A=12, \lambda=1$, що доводить той факт, що функція задовольняє умову Гельдера с показником 1, тобто задовольняє умову Ліпшиця.

**2)** В цьому випадку $\gamma=\mathbb{R}$. Задана функція $\varphi(t)$ дійсної змінної неперервна на $\mathbb{R}$ і має похідну

[1] Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної: частина 1: навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів / С.М. Гребенюк, Н.М. Д'яченко, М.І. Клименко, І.В. Красікова, О.О. Тітова, В.В. Леонтьєва. Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2014. 231 с.

$$\varphi'(t) = -4\cos(2t+1)\sin(2t+1) + 2\operatorname{arctg} t \cdot \frac{1}{t^2+1} + \frac{-t^2+4}{\left(t^2+4\right)^2},$$

модуль якої можна оцінити в такий спосіб:

$$\left|\varphi'(t)\right| \le 4 \cdot \left|\cos(2t+1)\right| \cdot \left|\sin(2t+1)\right| + 2\left|\operatorname{arctg} t\right| \cdot \frac{1}{t^2+1} + \left|\frac{-t^2-4+8}{\left(t^2+4\right)^2}\right| \le$$

$$\le 4 + 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 1 + \left|-\frac{1}{t^2+4} + \frac{8}{\left(t^2+4\right)^2}\right| \le 4 + \pi + \underset{\le \frac{1}{4}}{\frac{1}{t^2+4}} + \underset{\le \frac{8}{16}}{\frac{8}{\left(t^2+4\right)^2}} \le 5 + \pi.$$

Застосуємо формулу Лагранжа на будь-якому скінченному відрізку дійсної осі:

$$\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R} \ \exists \tau : \ t_1 \leqslant \tau \leqslant t_2 \quad \varphi(t_1) - \varphi(t_2) = \varphi'(\tau) \cdot (t_1 - t_2),$$

$$\left|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)\right| \le (5+\pi) \cdot \left|t_1 - t_2\right|.$$

В означенні 1.1 потрібно покласти $A = 5+\pi, \lambda = 1$, отже, функція задовольняє умову Ліпшиця.

**3)** Спочатку зауважимо, що оскільки $\gamma = \{t \in \mathbb{C} : \left|t\right| = 1\}$, то $\forall t_1, t_2 \in \gamma \ \ \left|t_1\right| = 1, \ \left|t_2\right| = 1$. Доведення проведемо за означенням

$$\left|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)\right| =$$

$$= \left|\frac{t_1+1}{t_1+2} - \frac{t_2+1}{t_2+2}\right| = \left|\frac{t_1 - t_2}{\left(t_1+2\right)\left(t_2+2\right)}\right| \le \frac{\left|t_1 - t_2\right|}{\left(2-\left|t_1\right|\right)\left(2-\left|t_2\right|\right)} = \frac{\left|t_1 - t_2\right|}{(2-1)(2-1)} = \left|t_1 - t_2\right|.$$

В означенні 1.1 потрібно покласти $A = 1, \lambda = 1$, отже, функція задовольняє умову Ліпшиця. ■

**Вправа 2.2.** Показати, що якщо функція $\varphi(t)$ диференційовна на контурі $\gamma$ і має на ньому скінченну похідну, то вона на $\gamma$ задовольняє умову Ліпшиця.

**Приклад 2.2.** Показати, що функція $\varphi(t) = t^{\mu}$, $0 < \mu \le 1$, $t \in [0; +\infty)$ задовольняє умову Гельдера з показником $\mu$ на будь-якому сегменті $[0, L]$, і задовольняє умову Ліпшиця на будь-якому сегменті, що не містить точку нуль.

**Розв'язання.** Той факт, що функція задовольняє умову Ліпшиця на будь-якому сегменті, що не містить точку нуль, пропонуємо довести самостійно (✍) за допомогою формули Лагранжа.

Розглянемо відрізок $[0, L]$. Відповідно до означення і умови задачі, потрібно довести справедливість висловлювання:

$$\exists A > 0 \ \forall t_1, t_2 \in [0, L] \ \ \frac{\left|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)\right|}{\left|t_1 - t_2\right|^{\mu}} \le A.$$

Без обмеження загальності міркувань можна вважати, що $t_2 < t_1$, тоді зробимо перетворення:

$$\frac{\left|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)\right|}{\left|t_1-t_2\right|^{\mu}}=\frac{(t_1)^{\mu}-(t_2)^{\mu}}{(t_1-t_2)^{\mu}}=\frac{1-\left(\frac{t_2}{t_1}\right)^{\mu}}{\left(1-\frac{t_2}{t_1}\right)^{\mu}}.$$

Позначимо $s=\frac{t_2}{t_1}$. Оскільки $0<t_2<t_1$, то $s\in[0;1)$. Для функції $F(s)=\frac{1-s^{\mu}}{(1-s)^{\mu}}$ знайдемо $\sup\limits_{s\in[0;1)} F(s)$. Оскільки

$$F'(s)=\frac{-\mu s^{\mu-1}(1-s)^{\mu}+\mu(1-s^{\mu})(1-s)^{\mu-1}}{(1-s)^{2\mu}}=\mu\frac{-s^{\mu-1}(1-s)+(1-s^{\mu})}{(1-s)^{\mu+1}}=$$

$$=\mu\frac{1-s^{\mu-1}}{(1-s)^{\mu+1}}=\mu\frac{s^{1-\mu}-1}{s^{1-\mu}(1-s)^{\mu+1}}<0\ \ \forall s\in[0;1),$$

то функція $F(s)$ спадає на проміжку $[0;1)$, тому $\sup\limits_{s\in[0;1)} F(s)=F(0)=1$. Отже,

$$F(s)=\frac{1-s^{\mu}}{(1-s)^{\mu}}\le 1\ \ \forall s\in[0;1)\ \ \Rightarrow\ \ \frac{\left|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)\right|}{\left|t_1-t_2\right|^{\mu}}\le 1\ \ \forall t_1,t_2\in\left[0,\,L\right].$$

Це і доводить потрібне. ■

**Приклад 2.3.** Показати, що функція $\varphi(t)=\begin{cases}0, & t=0;\\ \dfrac{1}{\ln t}, & 0<t\le\dfrac{1}{2}\end{cases}$ є неперервною на сегменті $\left[0,\,\frac{1}{2}\right]$ і не задовольняє на ньому умову Гельдера.

**Розв'язання.** Функція $\frac{1}{\ln t}$ неперервна на проміжку $\left(0;\frac{1}{2}\right]$ як частка неперервних функцій на цьому проміжку. Крім того, $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{\ln t}=0=\varphi(0)$, звідки випливає неперервність функції в точці $t=0$. Отже, дана функція неперервна на відрізку $\left[0,\,\frac{1}{2}\right]$.

Якщо б дана функція задовольняла умову Гельдера, то виконувалась би нерівність (1.1.) в точках $t_1=0$ і $t_2=t-$ як завгодно близькій до 0, тобто

$$\exists A>0\ \ \frac{\left|\varphi(0)-\varphi(t)\right|}{\left|t\right|^{\mu}}\le A\ \ \Leftrightarrow\ \ \exists A>0\ \ \frac{1}{\left|\ln t\right|t^{\mu}}\le A.$$

Однак, оскільки

$$\lim_{t\to+0}\frac{1}{\left|\ln t\right|t^{\mu}}=\lim_{t\to+0}\frac{t^{-\mu}}{\left|\ln t\right|}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right](\text{правило Лопіталя})=\lim_{t\to+0}\frac{-\mu t^{-\mu-1}}{1/t}=\lim_{t\to+0}\frac{-\mu}{t^{\mu}}=\infty,$$

то виписана вище нерівність не може виконуватися. ■

### 2.2. Обчислення індексу функції

**Приклад 2.4.** Нехай $\gamma-$ довільний контур, що містить всередині себе точку $z=0$. Знайти індекс функції $G(t)=t^n$, $n$ – ціле

**Розв'язання.** Якщо $n$ – натуральне, то із комплексного аналізу відомо, що при піднесенні до степеня $n$ комплексне число $z$ збільшує аргумент в $n$ разів, при цьому радіус-вектор точки $z$ здійснює оберт навколо точки нуль. Отже, при повному оббігу контура $\gamma$ точкою $t$ точка $t^n$ здійснить $n$ оберти навколо точки нуль, тому аргумент функції $G(t)=t^n$ збільшиться на $2\pi n$. Тоді

$$\mathrm{Ind}G(t)=\frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi n=n.$$

Якщо $n$ – ціле від'ємне, то зобразимо функцію у вигляді $G(t)=t^n=\dfrac{1}{t^{-n}}$. Застосуємо властивість Ind3:

$$\mathrm{Ind}G(t)=t^n=\mathrm{Ind}\,1-\mathrm{Ind}\,t^{-n}=0-(-n)=n.$$

**Відповідь.** $\mathrm{Ind}\,t^n=n$.

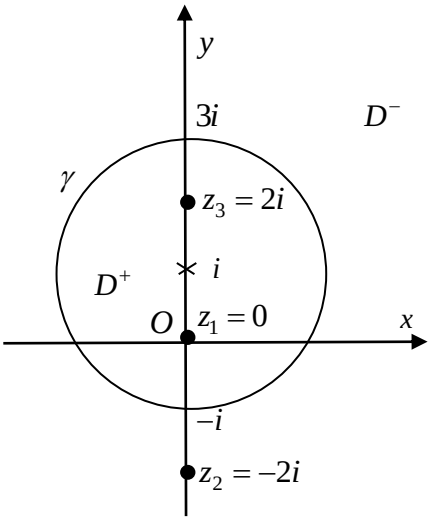



Рис. 2.1.

**Приклад 2.5.** Знайти індекси функції $G(t)=\dfrac{t^3}{t^2+4}$ на контурі $\gamma=\{t\in\mathbb{C}:|t-i|=2\}$.

**Розв'язання**. Даний контур $\gamma-$ це коло з центром в точці $z=i$ радіусу 2 (ри.с.2.1). Це коло розбиває комплексну площину на дві області: внутрішню – $D^+$ і зовнішню – $D^-$.

Знайдемо нулі і полюси функції $G(z)=\dfrac{z^3}{z^2+4}$, $z\in\mathbb{C}$. Щоб знайти нулі цієї функції, потрібно знайти корені її чисельника:

$$z^3=0\ \Leftrightarrow\ z_1=0.$$

Комплексне число $z_1=0$, яке належить області $D^+$, є нулем функції $G(z)$ кратності 3.

Щоб знайти полюси функції, потрібно знайти корені її знаменника:

$$z^2+4=0\ \Leftrightarrow\ z_{2,3}=\pm 2i.$$

Числа $z_{2,3}=\pm 2i$ є полюсами першого порядку функції $G(z)$. Зауважимо, що $z_2=2i$ належить області $D^+$, а $z_3=-2i$ – області $D^-$.

Додатково дослідимо нескінченно віддалену точку $z_4=\infty\in D^-$. Ця точка є ізольованою особливою точкою функції $G(z)$, оскільки

$$\lim_{z\to\infty} G(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{z^3}{z^2+4} = \infty .$$

Визначимо тип цієї особливої точки. Для цього зробимо заміну $z = \dfrac{1}{\xi}$:

$$G(z) = \frac{\left(\dfrac{1}{\xi}\right)^3}{\left(\dfrac{1}{\xi}\right)^2 + 4} = \frac{1}{\xi\left(1+4\xi^2\right)} = G_1(\xi).$$

Точка $\xi = 0$ є полюсом першого порядку функції $G_1(\xi)$, тому, за означенням, той самий тип має і особлива точка $z_4 = \infty$.

В результаті маємо:

1) нулі функції $G(z)$ – $z_1 = 0 \in D^+$ кратності 3;

тому $N^+ = 3,\ N^- = 0$,

2) полюси першого порядку – $z_2 = 2i \in D^+,\ z_3 = -2i \in D^-,\ z_4 = \infty \in D^-$;

тому $P^+ = 1,\ P^- = 2$.

Для обчислення значення індексу застосуємо властивість Ind5. З одного боку, $\kappa = \mathrm{Ind}G(t) = N^+ - P^+ = 3-1 = 2$.

З іншого боку, $\kappa = \mathrm{Ind}G(t) = -\left[N^- - P^-\right] = -\left[0-2\right] = 2$.

Отже, обидва способи привели до одного й того ж результату.

**Відповідь.** $\kappa = \mathrm{Ind}G(t) = 2$.

**Вправа 2.3.** Нехай $\gamma = \{t, |t| = 1\}$ – одиничне коло. Знайти індекси функцій $G(t) = \dfrac{\sin t}{t^2+9}$; $G(t) = \dfrac{4t^2-1}{t^2+4}$; $G(t) = \dfrac{\ln(1+t/4)}{t^2-2}$; $G(t) = \dfrac{t^n}{t^2+4}$ $(n \in \mathbb{Z})$.

**Вправа 2.4.** Нехай $G(t) = \dfrac{9t^2+1}{t^2+1}$. Знайти індекс цієї функції відносно контурів $\gamma = \{t, |t| = 1/4\}$, $\gamma = \{t, |t| = 3\}$.

**Приклад 2.6.** Обчислити індекс функції $G(t) = \dfrac{t^4+4}{t^4+4t^2+4}$ на дійсній осі $\mathbb{R}$.

**Розв'язання**. Дійсна вісь розбиває комплексну площину на верхню півплощину $D^+$ і нижню – $D^-$ (рис. 2.2). Для функції $G(z) = \dfrac{z^4+4}{z^4+4z^2+4}$ нескінченно віддалена точка є точкою аналітичності, зокрема в цій точці

$$\lim_{z\to\infty} G(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{z^4+4}{z^4+4z^2+4} = 1.$$

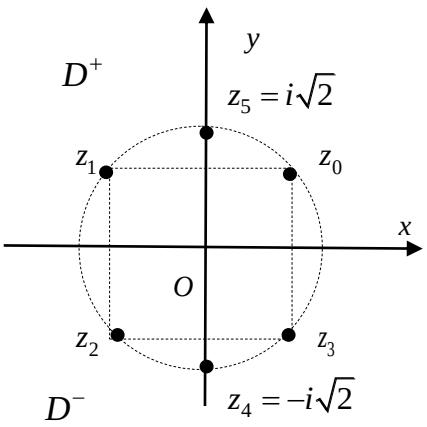



Рис. 2.2.

Знайдемо нулі функції $G(z)$:

$$z^4+4=0 \Leftrightarrow z=\sqrt[4]{-4}\ .$$

Оскільки $|-4|=4,\ \arg(-4)=\pi$, то за формулою Муавра

$$z_k=\sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{4}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{4}\right),\quad k=0,1,2,3,$$

$$z_0=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=1+i,$$

$$z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)=-1+i,$$

$$z_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)=-1-i,$$

$$z_3=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)=1-i.$$

Отримані точки розташовуються на колі радіусу $\sqrt{2}$ в вершинах квадрата. Два перші числа належать області $D^+$, а два інші – області $D^-$

Знайдемо полюси функції $G(z)$:

$$z^4+4z^2+4=0 \Leftrightarrow \left(z^2+2\right)^2=0 \Leftrightarrow \left(z+i\sqrt{2}\right)^2\left(z-i\sqrt{2}\right)^2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_4=-i\sqrt{2};\ z_5=i\sqrt{2}\ .$$

Числа $z_{4,5}=\mp i\sqrt{2}\in D^{\mp}$ – полюси 2-го порядку.

Таким чином, маємо:

1) нулі функції $G(z)$ першого порядку – $z_0, z_1\in D^+;\ z_2, z_3\in D^-$,

тому $N^+=2,\ N^-=2$,

2) полюси другого порядку – $z_{4,5}=\mp i\sqrt{2}\in D^{\mp}$,

тому $P^+=2,\ P^-=2$.

Для обчислення значення індексу застосуємо властивість Ind5. З одного боку, $\kappa=\mathrm{Ind}G(t)=N^+-P^+=2-2=0$.

З іншого боку, $\kappa=\mathrm{Ind}G(t)=-\left[N^--P^-\right]=-\left[2-2\right]=0$.

Отже, обидва способи привели до одного й того ж результату.

**Відповідь.** $\kappa=\mathrm{Ind}G(t)=0$.

**Вправа 2.5.** Обчислити індекси функцій

$$G(t)=\frac{t+3i}{t-2i},\ G(t)=\frac{t^2+9}{4t^2+1},\ G(t)=\frac{t^4+9}{4t^4+4t^2+1}$$

на дійсній осі $\mathbb{R}$.

## 2.3. Інтеграл типу Коші на зімкненому контурі. Сингулярний криволінійний інтеграл. Формули Сохоцького

**Приклад 2.7.** Нехай $\gamma = \{t \in \mathbb{C}: \ |t| = 1\}$. Обчислити інтеграли типу Коші:

а) $\Phi(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} \dfrac{(\tau^3 - 7)d\tau}{(4\tau^2 + 1)(\tau - z)}$; б) $\Phi(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} \dfrac{3\tau\, d\tau}{(2\tau + 1)(\tau - 2)(\tau - z)}$;

в) $\Phi(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} \dfrac{\tau\, d\tau}{\operatorname{tg}\tau\,(\tau - z)}$.

**Розв'язання. а)** Щільністю інтеграла типу Коші $\Phi(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} \dfrac{(\tau^3 - 7)d\tau}{(4\tau^2 + 1)(\tau - z)}$ є функція $f(\tau) = \dfrac{\tau^3 - 7}{4\tau^2 + 1}$, яка є крайовим значенням функції $f(z) = \dfrac{z^3 - 7}{4z^2 + 1}$. Знайдемо особливі точки функції $f(z)$:

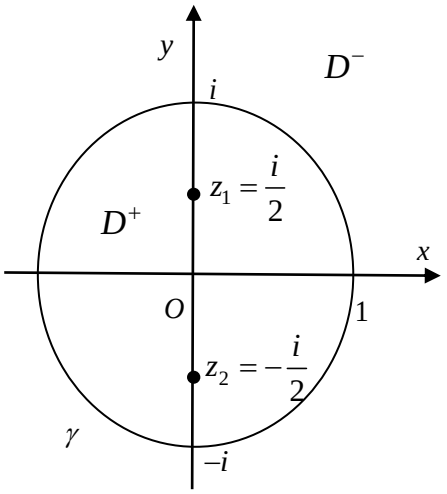


Рис. 2.3.

$$4z^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow z_{1,2} = \pm\frac{i}{2};$$

$$f(\infty) = \infty.$$

Точки $z_{1,2} = \pm\dfrac{i}{2}$ належать області $D^+$, а $z_3 = \infty$ – $D^-$ (рис. 2.3). Для того, щоб була можливість застосувати формули (1.6) або (1.7), потрібно, щоб функція $f(z)$ була аналітичною в одній із областей $D^+$ або $D^-$. Такої властивості функція $f(z)$ не має. Розкладемо цю функцію на суму двох так, щоб одна функція-доданок мала за особливу точкою $z_3 = \infty$, а друга – точки $z_{1,2} = \pm\dfrac{i}{2}$. Для цього виділимо цілу частину із раціонального дробу $\dfrac{z^3 - 7}{4z^2 + 1}$:

$$\frac{z^3 - 7}{4z^2 + 1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{z^3 + z/4 - z/4 - 7}{z^2 + 1/4} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left( z + \frac{-z/4 - 7}{z^2 + 1/4} \right) = \frac{z}{4} - \frac{1}{4} \cdot \frac{z + 28}{4z^2 + 1}.$$

Запишемо даний інтеграл у вигляді

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} \frac{(\tau^3 - 7)d\tau}{(4\tau^2 + 1)(\tau - z)} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} \frac{\tau d\tau}{4(\tau - z)} - \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} \frac{(\tau + 28)d\tau}{4(4\tau^2 + 1)(\tau - z)}.$$

Інтеграл $\Phi_1(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\dfrac{\tau d\tau}{4(\tau-z)}$ має функцію щільності $f_1(\tau)=\dfrac{\tau}{4}$, яка є крайовим значенням функції $f_1(z)=\dfrac{z}{4}$. Функція $f_1(z)$ має одну особливу точку $z_3=\infty$, яка належить області $D^-$, тому є аналітичною в області $D^+$. Інтеграл обчислимо за допомогою формули (1.6):

$$\Phi_1(z)=\begin{cases}\dfrac{z}{4}, & z\in D^+;\\ 0\ , & z\in D^-.\end{cases}$$

Інтеграл $\Phi_2(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\dfrac{(\tau+28)d\tau}{4(4\tau^2+1)(\tau-z)}$ має функцію щільності $f_2(\tau)=\dfrac{\tau+28}{4(4\tau^2+1)}$, яка є крайовим значенням функції $f_2(z)=\dfrac{z+28}{4(4z^2+1)}$. Функція $f_2(z)$ має дві особливі точки $z_{1,2}=\pm\dfrac{i}{2}$, які належать області $D^+$, тому є аналітичною в області $D^-$. Інтеграл обчислимо за допомогою формули (1.7), враховуючи, що $f_2(\infty)=0$:

$$\Phi_2(z)=\begin{cases}0, & z\in D^+;\\ 0-\dfrac{z+28}{4(4z^2+1)}\ , & z\in D^-.\end{cases}$$

Отже, отримаємо:

$$\Phi(z)=\begin{cases}\dfrac{z}{4}, & z\in D^+;\\ -\dfrac{z+28}{4(4z^2+1)}\ , & z\in D^-.\end{cases}\quad\blacksquare$$

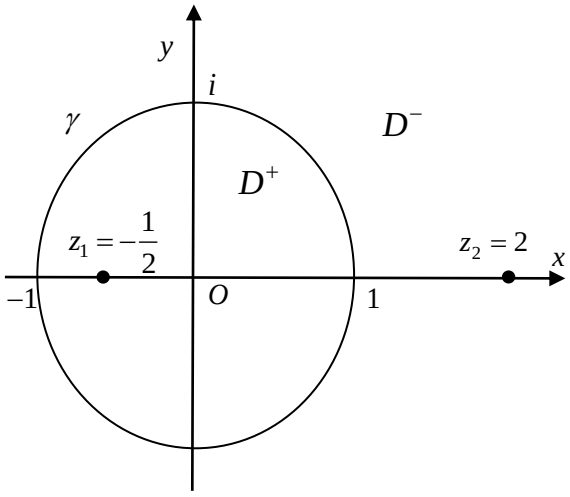


Рис. 2.4.

**б)** Щільністю інтеграла типу Коші $\Phi(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\dfrac{3\tau\,d\tau}{(2\tau+1)(\tau-2)(\tau-z)}$ є функція $f(\tau)=\dfrac{3\tau}{(2\tau+1)(\tau-2)}$, яка є крайовим значенням функції $f(z)=\dfrac{3z}{(2z+1)(z-2)}$. Знайдемо особливі точки функції $f(z)$:

$(2z+1)(z-2)=0\Leftrightarrow z_1=-\dfrac{1}{2}\in D^+,\ z_2=2\in D^-$.

Оскільки особливі точки належать як $D^+$,

так і $D^-$, то подамо функцію $f(z)$ сумою простих дробів:

$$f(z)=\frac{3z}{(2z+1)(z-2)}=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2z+1}+\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{z-2}.$$

Оскільки функція $f_1(z)=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2z+1}$ аналітична в області $D^-$ і $f_1(\infty)=0$, то за формулою (1.7)

$$\Phi_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{3d\tau}{5(2\tau+1)(\tau-z)}=\begin{cases}0, & z\in D^+;\\ 0-\dfrac{3}{5(2z+1)}, & z\in D^-.\end{cases}$$

Функція $f_1(z)=\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{z-2}$ аналітична в області $D^+$, тому за формулою (1.6)

$$\Phi_2(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{6d\tau}{5(\tau-2)(\tau-z)}=\begin{cases}\dfrac{6}{5(z-2)}, & z\in D^+;\\ 0, & z\in D^-.\end{cases}$$

Отже,

$$\Phi(z)=\begin{cases}\dfrac{6}{5(z-2)}, & z\in D^+;\\ -\dfrac{3}{5(2z+1)}, & z\in D^-.\end{cases}\quad\blacksquare$$

**в)** Розглянемо інтеграл типу Коші $\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{\tau\,d\tau}{\operatorname{tg}\tau\,(\tau-z)}$. Знайдемо особливі точки функції $f(z)=\frac{z}{\operatorname{tg} z}$:

$$\operatorname{tg} z=0\Leftrightarrow z_0=0\in D^+,\ z_n=\pi n\in D^-,\ n=\pm1,\pm2,\ldots.$$

Оскільки точка $z_0=0$ є усувною особливою точкою, а функція $g(z)=\begin{cases}\dfrac{z}{\operatorname{tg} z}, & z\neq0;\\ 1, & z=0\end{cases}$ є аналітичною в області $D^+$, то внаслідок (1.6)

$$\Phi(z)=\begin{cases}g(z), & z\in D^+;\\ 0, & z\in D^-;\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{z}{\operatorname{tg} z}, & z\in D^+\setminus\{0\};\\ 1, & z=0;\\ 0, & z\in D^-.\end{cases}\quad\blacksquare$$

**Вправа 2.6.** Нехай $\gamma=\{t\in\mathbb{C}:\ |t|=1\}$. Обчислити інтеграли типу Коші:

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{2d\tau}{\tau(\tau-2)(\tau-z)};\qquad\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{(\tau^2+4)d\tau}{(4\tau^2+1)(\tau-z)};$$

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\frac{d\tau}{\cos\tau(\tau-z)};\ \Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\frac{\tau\,d\tau}{\sin\tau\,(\tau-z)};$$

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\frac{d\tau}{(9\tau^2-1)(\tau-z)}.$$

**Приклад 2.8.** Нехай $\gamma=\{t\in\mathbb{C}:\ |t|=1\}$. Обчислити сингулярний інтеграл $(t\in\gamma)$:

$$\Phi(t)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\frac{3\tau\,d\tau}{(2\tau+1)(\tau-2)(\tau-t)}.$$

**Розв'язання.** В прикладі 2.7 б) обчислено інтеграл типу Коші

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\frac{3\tau\,d\tau}{(2\tau+1)(\tau-2)(\tau-z)}=\begin{cases}\dfrac{6}{5(z-2)}, & z\in D^+;\\ -\dfrac{3}{5(2z+1)}, & z\in D^-.\end{cases}$$

Звідки $\Phi^+(z)=\dfrac{6}{5(z-2)}$, $\Phi^-(z)=-\dfrac{3}{5(2z+1)}$. Знайдемо граничні значення цих функцій в точках $t\in\gamma$ контура:

$$\Phi^+(t)=\lim_{\substack{z\to t\\ z\in D^+}}\Phi^+(z)=\lim_{\substack{z\to t\\ z\in D^+}}\frac{6}{5(z-2)}=\frac{6}{5(t-2)},$$

$$\Phi^-(t)=\lim_{\substack{z\to t\\ z\in D^-}}\Phi^-(z)=\lim_{\substack{z\to t\\ z\in D^-}}\left(-\frac{3}{5(2z+1)}\right)=-\frac{3}{5(2t+1)}.$$

При обчисленні границі застосовано той факт, що функції $\dfrac{6}{5(z-2)}$ і $-\dfrac{3}{5(2z+1)}$ неперервні у всіх точках комплексної площини, за винятком точок $z_2=2$ і $z_1=-\dfrac{1}{2}$ відповідно. Ці точки не належать контуру, тому обидві функції неперервні на контурі $\gamma$, отже, границя функцій в точці $t\in\gamma$ дорівнює значенню відповідної функції в цій точці.

Тепер застосуємо формулу Сохоцького (1.23)

$$\Phi^+(t)+\Phi^-(t)=\frac{1}{\pi i}\oint\limits_{\gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau,$$

отримаємо $(t\in\gamma)$:

$$\Phi(t)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\frac{3\tau\,d\tau}{(2\tau+1)(\tau-2)(\tau-t)}=\frac{1}{2}\Big[\Phi^+(t)+\Phi^-(t)\Big]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{6}{5(t-2)}-\frac{3}{5(2t+1)}\right]=\frac{9t+12}{10(2t+1)(t-2)}.\ \blacksquare$$

**Вправа 2.7.** Нехай $\gamma = \{t \in \mathbb{C}: \ |t| = 2\}$. Обчислити сингулярні інтеграли $(t \in \gamma)$:

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{\tau\, d\tau}{(\tau - 1)(\tau + 3)(\tau - t)}, \ \Phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{\sin\tau\, d\tau}{\tau\,(\tau - t)},$$

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{\tau\, d\tau}{(e^\tau - 1)(\tau - t)}.$$

## 2.4. Інтеграл типу Коші, сингулярний інтеграл, формули Сохоцького на дійсній осі

**Приклад 2.9.** Обчислити $\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau^2 d\tau}{(\tau^2 + 4)(\tau - t)}$, $t \in (-\infty, +\infty)$,

**Розв'язання.** Обчислимо спочатку інтеграл типу Коші на дійсній осі

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau^2 d\tau}{(\tau^2 + 4)(\tau - z)}.$$

Функція $\varphi(z) = \frac{z^2}{z^2 + 4}$ має дві особливі точки $z_1 = 2i$ і $z_2 = -2i$. Точка $z_1 = 2i$ лежить у верхній півплощині $D^+$, а точка $z_2 = -2i$ – в нижній півплощині $D^-$. Перепишемо функцію $\varphi(z)$ у вигляді

$$\varphi(z) = \frac{z^2 + 4 - 4}{z^2 + 4} = 1 - \frac{4}{(z - 2i)(z + 2i)} = 1 - \left( \frac{1/i}{z - 2i} - \frac{1/i}{z + 2i} \right) = 1 + \frac{i}{z - 2i} - \frac{i}{z + 2i}.$$

У розділі 1 випадок, коли $\varphi_1(z) = 1$, досліджено окремо, а результат наведено у формулі (1.25). Для інших функцій зазначимо, що $\varphi_2(z) = \frac{i}{z - 2i}$ – аналітична в $D^-$ і $\varphi_2(\infty) = 0$, а $\varphi_3(z) = \frac{i}{z + 2i}$ – в $D^+$ і $\varphi_3(\infty) = 0$, і застосуємо формули (1.33) і (1.32) відповідно:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau^2 d\tau}{(\tau^2 + 4)(\tau - z)} = \begin{cases} \frac{\pi i}{2\pi i} + \frac{0}{2} - \left( \frac{i}{z + 2i} - \frac{0}{2} \right), & z \in D^+; \\ -\frac{\pi i}{2\pi i} + \frac{0}{2} - \frac{i}{z - 2i} - \left( \quad - \frac{0}{2} \right), & z \in D^+. \end{cases}$$

Звідси $\Phi^+(z) = \frac{1}{2} - \frac{i}{z + 2i}$, $\Phi^-(z) = -\frac{1}{2} - \frac{i}{z + -2i}$.

Знайдемо граничні значення отриманих функцій в точках $t$ дійсної осі:

$$\Phi^+(t) = \lim_{\substack{z \to t \\ z \in D^+}} \Phi^+(z) = \lim_{\substack{z \to t \\ z \in D^+}} \left( \frac{1}{2} - \frac{i}{z + 2i} \right) = \frac{1}{2} - \frac{i}{t + 2i},$$

$$\Phi^-(t)=\lim_{\substack{z\to t\\ z\in D^-}}\Phi^-(z)=\lim_{\substack{z\to t\\ z\in D^-}}\left(-\frac{1}{2}-\frac{i}{z-2i}\right)=-\frac{1}{2}-\frac{i}{t-2i}.$$

При обчисленні границі застосовано неперервність функцій $\Phi^+(z)$, $\Phi^-(z)$ в точках дійсної осі.

Тепер застосуємо формули Сохоцького (1.37) і (1.38), з яких отримаємо

$$\Phi^+(t)+\Phi^-(t)=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau,$$

$$\Phi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tau^2 d\tau}{(\tau^2+4)(\tau-t)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{i}{t+2i}+\left(-\frac{1}{2}-\frac{i}{t-2i}\right)\right]=-\frac{t\cdot i}{t^2+4}. \quad \blacksquare$$

**Вправа 2.8.** Обчислити інтеграл типу Коші вздовж дійсної осі:

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\tau d\tau}{(\tau^2+4)(\tau-z)};\qquad \Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(\tau^2+5)d\tau}{(\tau^2+4)(\tau-z)}.$$

**Вправа 2.9.** Обчислити сингулярний інтеграл з ядром Коші вздовж дійсної осі:

$$\Phi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{3\tau d\tau}{(\tau^2+9)(\tau-t)},\quad \Phi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(4\tau^2+5)d\tau}{(4\tau^2+1)(\tau-t)},$$

$$\Phi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(\tau+2)d\tau}{(\tau^2+2\tau+10)(\tau-t)},\quad t\in(-\infty,+\infty).$$

### 2.5. Задача Рімана на зімкненому контурі

**Приклад 2.10.** Розв'язати крайову задачу Рімана

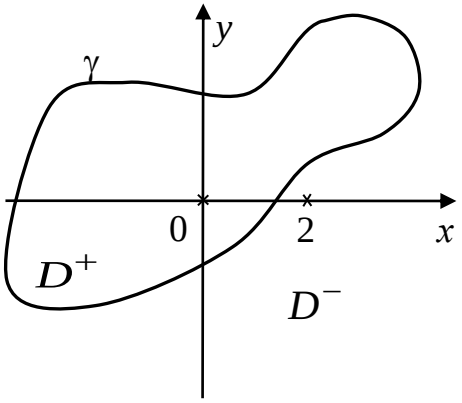



Рис. 2.5.

$$\Phi^+(t)=\frac{2}{t-2}\Phi^-(t)+\frac{1}{2t(t-2)^2},$$

за таких припущень: $2\in D^-$, $0\in D^+$.

**Розв'язання.** Зображення області наведено на рис. 2.5. Знаходимо $G(t)$ та $g(t)$ відповідно до (1.40):

$$G(t)=\frac{2}{t-2};\quad g(t)=\frac{1}{2t(t-2)^2}.$$

Отже, дана задача є неоднорідною крайовою задачею Рімана на зімкненому контурі.

Знайдемо індекс функції $G(t)$. Ця функція не має нулів і не має полюсів в області $D^+$, тому

$$\kappa=\mathrm{Ind}G(t)=0.$$

Знайдемо функцію $\Gamma(z)$ за допомогою (1.56):

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\frac{\ln\left[\tau^{-\kappa}\cdot G(\tau)\right]}{\tau-z}d\tau=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\frac{\ln\left[\tau^{-0}\cdot\dfrac{2}{\tau-2}\right]}{\tau-z}d\tau.$$

Розглянемо функцію $f(z)=\ln\left(\dfrac{2}{z-2}\right)$. Її особлива точка $z=2$ належить $D^-$, тому $f(z)-$ аналітична в $D^+$, то згідно з формулою (1.6),

$$\Gamma(z)=\begin{cases}\ln\dfrac{2}{z-2}, z\in D^+;\\ 0,\ z\in D^-.\end{cases}$$

Знайдемо функції $X^{\pm}(z)$, застосовуючи (1.55):

$$X^+(z)=e^{\Gamma^+(z)}=\frac{2}{z-2};.$$
$$X^-(z)=e^{\Gamma^-(z)}=e^0=1.$$

Використовуючи формулу (1.63)

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\oint\limits_{\gamma}\frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\cdot\frac{d\tau}{\tau-z},$$

одержимо:

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\oint\limits_{\gamma}\frac{1}{2\tau(\tau-2)^2}\cdot\frac{\tau-2}{2}\cdot\frac{d\tau}{\tau-z}.$$

Функція щільності останнього інтеграла типу Коші є крайовим значенням функції $f(z)=\dfrac{1}{4z(z-2)}$. Ця функція може бути подана сумою двох функцій: $f_1(z)=-\dfrac{1}{8z}$, аналітичної в області $D^+$, та функції $f_2(z)=\dfrac{1}{8(z-2)}$, аналітичної в області $D^-$. Тому, відповідно до (1.6) і (1.7), знайдемо

$$\Psi(z)=\begin{cases}0+\dfrac{1}{8(z-2)},\ z\in D^+;\\ 0-\left(-\dfrac{1}{8z}\right)+0,\ z\in D^-.\end{cases}$$

Звідси матимемо:

$$\Psi^+(z)=\frac{1}{8(z-2)},\quad \Psi^-(z)=\frac{1}{8z}.$$

Тепер знайдемо $\Phi^{\pm}(z)$ за формулами (1.65) і (1.66), обираючи за многочлен нульового степеня $P_{\kappa}(z)=A$:

$$\Phi^+(z)=\mathrm{X}^+(z)\Big[\Psi^+(z)+P_{\kappa}(z)\Big]=\frac{2}{z-2}\left[A+\frac{1}{8(z-2)}\right];$$

$$\Phi^-(z)=z^{-\kappa}\mathrm{X}^-(z)\Big[\Psi^-(z)+P_{\kappa}(z)\Big]=A+\frac{1}{8z}.$$

**Відповідь.** $\Phi^+(z)=\dfrac{2}{z-2}\left[A+\dfrac{1}{8(z-2)}\right]$; $\Phi^-(z)=A+\dfrac{1}{8z}$.

**Приклад 2.11.** Розв'язати крайову задачу Рімана

$$\Phi^+\left(t\right)=\frac{t}{t^2-1}\Phi^-\left(t\right)+\frac{t^3-t^2+1}{t^2-t}$$

за умови $\Phi^-(\infty)=0$, якщо:

а) $\pm1\in D^-$, $0\in D^+$;

б) $-1\in D^-$, 0 і $1\in D^+$;

в) $0\in D^-$, $\pm1\in D^+$.

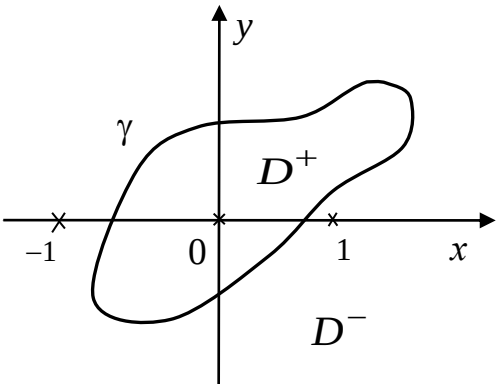



Рис. 2.6.

**Розв'язання.** Знаходимо $G(t)$ та $g(t)$ відповідно до (1.40):

$$G(t)=\frac{t}{t^2-1}\quad;\quad g(t)=\frac{t^3-t^2+1}{t^2-t}.$$

Отже, дана крайова задача є неоднорідною.

**а)** Схематичне ображення контура $\gamma$ у випадку $\pm1\in D^-$, $0\in D^+$ наведено на рис. 2.6. Знайдемо індекс функції $G(t)$. В області $D^+$ функція $G(z)=\dfrac{z}{z^2-1}$ має один нуль і не має полюсів, тому $\kappa=\mathrm{Ind}G(t)=1$.

Відповідно до (1.56)

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{\ln\left[\tau^{-\kappa}\cdot G(\tau)\right]}{\tau-z}d\tau=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{\ln\left(\dfrac{1}{\tau^2-1}\right)}{\tau-z}d\tau.$$

Розглянемо функцію $f(z)=\ln\left(\dfrac{1}{z^2-1}\right)$. Її особливі точки $\pm1$ належать області $D^-$, тому $f(z)$ аналітична в $D^+$. Отже, за формулою (1.6),

$$\Gamma(z)=\begin{cases}\ln\left(\dfrac{1}{z^2-1}\right), z\in D^+;\\ 0, \quad z\in D^-.\end{cases}$$

Відповідно до формул (1.55)

$$\mathrm{X}^+(z)=e^{\Gamma^+(z)}=\frac{1}{z^2-1},$$

$$\mathrm{X}^-(z)=e^{\Gamma^-(z)}=e^0=1.$$

Застосовуючи (1.63), отримаємо:

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\oint\limits_{\gamma}\frac{g(\tau)}{X^{+}(\tau)}\cdot\frac{d\tau}{\tau-z}=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\frac{(\tau^3-\tau^2+1)(\tau^2-1)}{\tau^2-\tau}\cdot\frac{d\tau}{\tau-z}.$$

Розглянемо функцію $f(z)=\dfrac{(z^3-z^2+1)(z^2-1)}{z^2-z}$. Оскільки $f(z)=z^3-z^2+1+\dfrac{1}{z}$, а $f_1(z)=z^3-z^2+1$ – аналітична в області $D^+$, $f_2(z)=\dfrac{1}{z}$ – аналітична в $D^-$, то (згідно з (1.6) і (1.7)) одержимо:

$$\Psi(z)=\begin{cases}z^3-z+1, z\in D^+;\\ -\dfrac{1}{z}, z\in D^-.\end{cases}$$

Звідси

$$\Psi^{+}(z)=z^3-z+1,\quad \Psi^{-}(z)=-\frac{1}{z}.$$

Шуканий розв'язок знаходимо, застосовуючи (1.65) і (1.66), де $P_{\kappa}(z)=Az+B$

$$\Phi^{+}(z)=\mathrm{X}^{+}(z)\cdot\left[\mathrm{P}_{\kappa}(z)+\Psi^{+}(z)\right]=\frac{1}{z^2-1}\cdot\left[A\cdot z+B+z^3-z+1\right],$$

$$\Phi^{-}(z)=z^{-\kappa}\cdot\mathrm{X}^{-}(z)\cdot\left[\mathrm{P}_{\kappa}(z)+\Psi^{-}(z)\right]=\frac{1}{z}\cdot\left[A\cdot z+B-\frac{1}{z}\right].$$

Оскільки розв'язок цієї крайової задачі повинен задовольняти умову $\Phi^{-}(\infty)=0$, то $A=0$. Отже, розв'язок задачі має вигляд:

$$\Phi^{+}(z)=\frac{1}{z^2-1}\cdot\left[B+z^3-z+1\right]=\frac{C}{z^2-1}+z,$$

$$\Phi^{-}(z)=\frac{1}{z}\cdot\left[B-\frac{1}{z}\right]=\frac{C}{z}-\frac{z+1}{z^2},$$

де $C=B+1$.

**Відповідь.** $\Phi^{+}(z)=\dfrac{C}{z^2-1}+z,\quad \Phi^{-}(z)=\dfrac{C}{z}-\dfrac{z+1}{z^2}.$

**б)** За умовою $-1\in D^-$, 0 і $1\in D^+$. Зображення відповідного контура наведено на рис. 2.7.

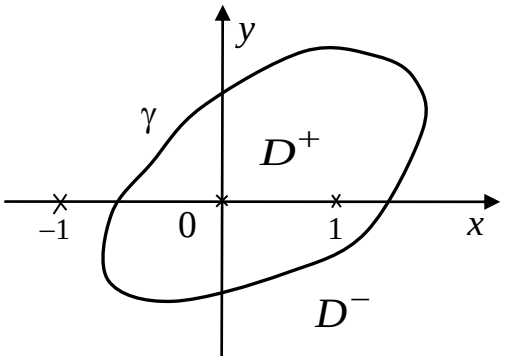


Рис. 2.7.

Оскільки в області $D^+$ функція $G(z)=\dfrac{z}{z^2-1}$ має один нуль і один полюс, то $\kappa=\mathrm{Ind}G(t)=0$.

Знаходимо функції $\Gamma(z)$ за допомогою формули (1.56):

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\frac{\ln\left[\tau^{-\kappa}G(\tau)\right]}{\tau-z}d\tau=\frac{1}{2\pi i}\cdot\oint\limits_{\gamma}\frac{\ln\left[\tau^0\cdot\dfrac{\tau}{\tau^2-1}\right]}{\tau-z}d\tau.$$

Оскільки функція $f(z)=\ln\left[\dfrac{z}{z^2-1}\right]$ є сумою функції $f_1(z)=\ln\left(\dfrac{z}{z-1}\right)$, аналітичної в області $D^-$, і функції $f_2(z)=\ln\left(\dfrac{1}{z+1}\right)$, аналітичної в $D^+$, то (згідно з (1.6) і (1.7)) одержимо

$$\Gamma(z)=\begin{cases}\ln\left(\dfrac{1}{z+1}\right), z\in D^+;\\ -\ln\left(\dfrac{z}{z-1}\right), z\in D^-.\end{cases}$$

Відповідно до (1.55) знайдемо функції $X^{\pm}(z)$:

$$\mathrm{X}^+(z)=e^{\Gamma^+(z)}=\frac{1}{z+1},$$
$$\mathrm{X}^-(z)=e^{\Gamma^-(z)}=\frac{z-1}{z}.$$

Застосовуючи (1.63), отримаємо:

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\oint_\gamma\frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\cdot\frac{d\tau}{\tau-z}=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{\left(\tau^3-\tau^2+1\right)(\tau+1)}{\tau^2-\tau}\cdot\frac{d\tau}{\tau-z}.$$

Оскільки

$$f(z)=\frac{\left(z^3-z^2+1\right))(z+1)}{z^2-z}=z(z+1)+\frac{z+1}{z(z-1)},$$

функція $f_1(z)=z(z+1)$ – аналітична в області $D^+$, функція $f_2(z)=\dfrac{z+1}{z(z-1)}$ – аналітична в $D^-$, то (згідно з (1.6) і (1.7)) одержимо:

$$\Psi(z)=\begin{cases}z(z+1),\ z\in D^+;\\ -\dfrac{z+1}{z(z-1)}, z\in D^-.\end{cases}$$

Звідси

$$\Psi^+(z)=z(z+1),\quad \Psi^-(z)=-\frac{z+1}{z(z-1)}.$$

Шуканий розв'язок знаходимо, застосовуючи (1.65), (1.66) при $P_{\text{к}}(z)=A$

$$\Phi^+(z)=\mathrm{X}^+(z)\cdot\left[\mathrm{P}_{\text{к}}(z)+\Psi^+(z)\right]=\frac{1}{z+1}\cdot\left[A+z(z+1)\right],$$
$$\Phi^-(z)=z^{-\text{к}}\cdot\mathrm{X}^-(z)\cdot\left[\mathrm{P}_{\text{к}}(z)+\Psi^-(z)\right]=\frac{z-1}{z}\cdot\left[A-\frac{z+1}{z(z-1)}\right].$$

Розв'язок цієї крайової задачі, задовольняє умову $\Phi^-(\infty)=0$, тому $A=0$, і розв'язок набуває вигляду

$$\Phi^+(z)=z,\quad \Phi^-(z)=-\frac{z+1}{z^2}.$$

**Відповідь.** $\Phi^+(z)=z,\ \ \Phi^-(z)=-\dfrac{z+1}{z^2}.$

**в)** Зображення контура у випадку $0\in D^-,\ \pm1\in D^+$ наведено на рис. 2.8.

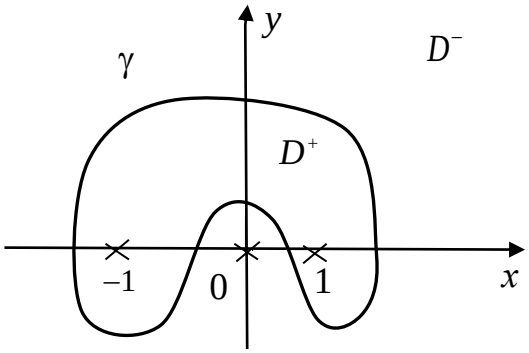


Рис. 2.8.

В області $D^+$ функція $G(z)=\dfrac{z}{z^2-1}$ не має нулів і має два полюси, тому

$$\kappa=\operatorname{Ind}G(t)=-2.$$

Оберемо за точку, що лежить всередині контура, точку $z_0=1$, тоді функцію $\Gamma(z)$ будемо обчислювати за формулою із резюме 1

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\oint_\gamma\frac{\ln\left[(\tau-z_0)^{-\kappa}\cdot G(\tau)\right]}{\tau-z}d\tau,$$

звідси

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\oint_\gamma\frac{\ln\left[(\tau-1)^2\cdot\dfrac{\tau}{\tau^2-1}\right]}{\tau-z}d\tau.$$

Оскільки $f(z)=\ln\left[(z-1)^2\cdot\dfrac{z}{z^2-1}\right]=\ln\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)+\ln z,$ де функція $f_1(z)=\ln\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)$ – аналітична в області $D^-$, а функції $f_2(z)=\ln z$ – аналітична в $D^+$, то (згідно з (1.6) і (1.7)) одержимо

$$\Gamma(z)=\begin{cases}\ln z, z\in D^+;\\ -\ln\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right), z\in D^-.\end{cases}$$

Із (1.55)

$$\mathrm{X}^+(z)=e^{\Gamma^+(z)}=z,$$

$$\mathrm{X}^-(z)=e^{\Gamma^-(z)}=\frac{z+1}{z-1}.$$

Перевіримо умову (1.69) існування розв'язку поставленої крайової задачі з індексом $\kappa=-2$, меншим за $-1$:

$$\frac{1}{2\pi i}\cdot\oint_\gamma\frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}d\tau=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{\tau^3-\tau^2+1}{\tau(\tau^2-\tau)}d\tau=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma d\tau+\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{d\tau}{\tau^2(\tau-1)}=\frac{1}{2\pi i}\left[\oint_\gamma d\tau+\oint_\gamma\frac{1}{\tau-1}d\tau-\oint_\gamma\frac{1}{\tau}d\tau-\oint_\gamma\frac{1}{\tau^2}d\tau\right].$$

Розглянемо інтеграли $\oint\limits_\gamma d\tau$, $\oint\limits_\gamma \frac{1}{\tau-1}d\tau$, $\oint\limits_\gamma \frac{1}{\tau}d\tau$, $\oint\limits_\gamma \frac{1}{\tau^2}d\tau$. Функції, що стоять під знаками цих інтегралів, є аналітичними всередині контура. Тому значення цих інтегралів дорівнюють нулю. За теоремою Коші, інтеграл $\oint\limits_\gamma \frac{1}{\tau-1}d\tau$ дорівнює $2\pi i$. Отже,

$$\frac{1}{2\pi i}\cdot\oint\limits_\gamma \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}d\tau = 1 \neq 0.$$

Це означає, що умова існування розв'язку крайової задачі Рімана не виконується. Тому дана задача не має розв'язку.

**Відповідь.** Задача не має розв'язку.

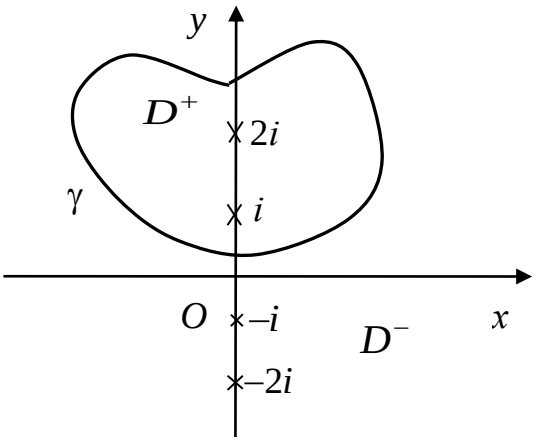


Рис. 2.9.

**Приклад 2.12.** Розв'язати крайову задачу Рімана

$$\Phi^+(t) = \frac{(t-i)(t-2i)}{(t+i)(t+2i)}\Phi^-(t) + \frac{2t}{(t+i)^2(t+2i)(t-i)}$$

якщо $-i,-2i \in D^-$, $i,2i \in D^+$.

**Розв'язання.** Зображення області наведено на рис. 2.9. У даній неоднорідній задачі Рімана

$$G(t) = \frac{(t-i)(t-2i)}{(t+i)(t+2i)},\quad g(t) = \frac{2t}{(t+i)^2(t+2i)(t-i)}.$$

Знайдемо індекс функції $G(t) = \frac{(t-i)(t-2i)}{(t+i)(t+2i)}$. В області $D^+$ функція $G(z) = \frac{(z-i)(z-2i)}{(z+i)(z+2i)}$ має два нулі і не має полюсів, тому $\kappa = \mathrm{Ind}G(t) = 2$.

Оскільки в умові задачі не зазначено місце розташування точки $z=0$, то для знаходження функції $\Gamma(z)$ застосуємо формулу із резюме 1

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\cdot\oint\limits_\gamma \frac{\ln\left[(\tau-z_0)^{-\kappa}\cdot G(\tau)\right]}{\tau-z}d\tau.$$

Оберемо $z_0 = i \in D^+$, тоді

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_\gamma \frac{\ln\left((\tau-i)^{-2}\cdot\frac{(\tau-i)(\tau-2i)}{(\tau+i)(\tau+2i)}\right)}{\tau-z}d\tau.$$

Оскільки

$$f(z) = \ln\left((z-i)^{-2}\cdot\frac{(z-i)(z-2i)}{(z+i)(z+2i)}\right) = \ln\frac{z-2i}{z-i} + \ln\frac{1}{(z+i)(z+2i)},$$

$f_1(z)=\ln\dfrac{z-2i}{z-i}$ – аналітична в $D^-$, $f_2(z)=\ln\dfrac{1}{(z+i)(z+2i)}$ – аналітична в $D^+$, то (згідно з (1.6) і (1.7)) одержимо

$$\Gamma(z)=\begin{cases}\ln\dfrac{1}{(z+i)(z+2i)}, & z\in D^+,\\ -\ln\dfrac{z-2i}{z-i}, & z\in D^-.\end{cases}$$

Відповідно до формул (1.55)

$$\mathrm{X}^+(z)=e^{\Gamma^+(z)}=\frac{1}{(z+i)(z+2i)},\quad \mathrm{X}^-(z)=e^{\Gamma^-(z)}=\frac{z-i}{z-2i}.$$

Із (1.63)

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\oint\limits_\gamma\frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\cdot\frac{d\tau}{\tau-z}=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_\gamma\frac{2\tau}{(\tau+i)(\tau-i)}\cdot\frac{d\tau}{\tau-z}.$$

Оскільки

$$f(z)=\frac{2z}{(z+i)(z-i)}=\frac{1}{z+i}+\frac{1}{z-i},$$

$f_1(z)=\dfrac{1}{z+i}$ – аналітична в $D^+$, $f_2(z)=\dfrac{1}{z-i}$ – аналітична в $D^-$, то (згідно з (1.6) і (1.7)) отримаємо:

$$\Psi(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{z+i}, & z\in D^+;\\ -\dfrac{1}{z-i}, & z\in D^-.\end{cases}$$

Звідси

$$\Psi^+(z)=\frac{1}{z+i},\quad \Psi^-(z)=-\frac{1}{z-i}.$$

В результаті, застосовуючи формули із резюме 1, одержимо розв'язок задачі:

$$\Phi^+(z)=\mathrm{X}^+(z)\cdot\left[\mathrm{P}_\kappa(z)+\Psi^+(z)\right]=\frac{1}{(z+i)(z+2i)}\cdot\left[Az^2+Bz+C+\frac{1}{z+i}\right],$$

$$\Phi^-(z)=(z-z_0)^{-\kappa}\cdot\mathrm{X}^-(z)\cdot\left[\mathrm{P}_\kappa(z)+\Psi^-(z)\right]=\frac{1}{(z-i)(z-2i)}\cdot\left[Az^2+Bz+C-\frac{1}{z-i}\right].$$

**Відповідь.**

$$\Phi^+(z)=\frac{1}{(z+i)(z+2i)}\cdot\left[Az^2+Bz+C+\frac{1}{z+i}\right],$$

$$\Phi^-(z)=\frac{1}{(z-i)(z-2i)}\cdot\left[Az^2+Bz+C-\frac{1}{z-i}\right].$$

**Приклад 2.13.** При якому значенні параметра $a$ буде розв'язною крайова задача

$$\Phi^+(t)=\frac{(t-i)(t-2i)}{(t+i)(t+2i)}\Phi^-(t)+\frac{2t(t-2i)(1+at)}{(t+i)(t+2i)},\ \ \Phi^-(\infty)=0,$$

якщо $i,-2i,-2i\in D^-$, $-i\in D^+$.

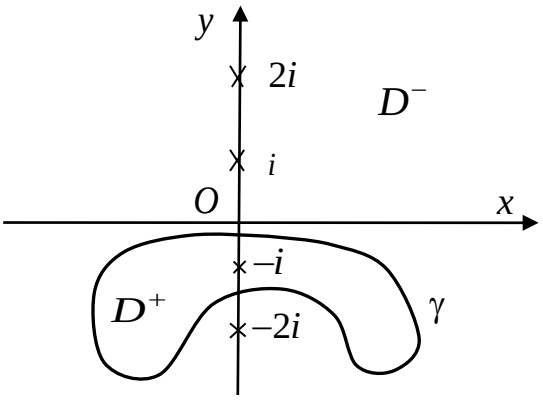



Рис. 2.10.

**Розв'язання.** Зображення області наведено на рис. 2.10. У даній неоднорідній задачі Рімана

$$G(t)=\frac{(t-i)(t-2i)}{(t+i)(t+2i)},\quad g(t)=\frac{2t(t-2i)(1+at)}{(t+i)(t+2i)}.$$

В області $D^+$ функція $G(z)=\dfrac{(z-i)(z-2i)}{(z+i)(z+2i)}$ не має нулів і має один полюс, тому $\kappa=\mathrm{Ind}G(t)=-1$.

Оберемо $z_0=-i$. Знаходимо $\Gamma(z)$:

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\oint_\gamma\frac{\ln\left[(\tau-z_0)^{-\kappa}\cdot G(\tau)\right]}{\tau-z}d\tau\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\ln\left(\dfrac{(\tau-i)(\tau-2i)}{(\tau+2i)}\right)}{\tau-z}d\tau.$$

Оскільки функція $f(z)=\ln\dfrac{(z-i)(z-2i)}{z+2i}$ є аналітичною в області $D^+$, то

$$\Gamma(z)=\begin{cases}\ln\dfrac{(z-i)(z-2i)}{z+2i}, & z\in D^+;\\ 0, & z\in D^-.\end{cases}$$

Тоді

$$X^+(z)=e^{\Gamma^+(z)}=\frac{(z-i)(z-2i)}{z+2i},$$

$$X^-(z)=e^{\Gamma^-(z)}=1.$$

Із (1.63)

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\oint_\gamma\frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\cdot\frac{d\tau}{\tau-z}=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{2\tau(a\tau+1)}{(\tau+i)(\tau-i)}\cdot\frac{d\tau}{\tau-z}.$$

Оскільки

$$f(z)=(az+1)\cdot\frac{2z}{(z+i)(z-i)}=(az+1)\cdot\left(\frac{1}{z+i}+\frac{1}{z-i}\right)=\frac{az+1}{z+i}+\frac{az+1}{z-i},$$

$f_1(z)=\dfrac{az+1}{z-i}$ – аналітична в області $D^+$, $f_2(z)=\dfrac{az+1}{z+i}$ – аналітична $D^-$, $f_2(\infty)=a$, то (згідно з (1.6) і (1.7)) одержимо:

$$\Psi(z)=\begin{cases}\dfrac{az+1}{z-i}+a, z\in D^+;\\ a-\dfrac{az+1}{z+i}, z\in D^-.\end{cases}$$

Звідси

$$\Psi^+(z)=\frac{az+1}{z-i}+a=\frac{2az-ai+1}{z-i},\quad \Psi^-(z)=a-\frac{az+1}{z+i}=\frac{ai-1}{z+i}.$$

Шуканий розв'язок знаходимо за формулами із резюме 1:

$$\Phi^+(z)=\mathrm{X}^+(z)\cdot\Psi^+(z)=\frac{(z-i)(z-2i)}{z+2i}\cdot\frac{2az-ai+1}{z-i}=\frac{(2az-ai+1)(z-2i)}{z+2i},$$

$$\Phi^-(z)=\left(z-z_0\right)^{-\kappa}\cdot\mathrm{X}^-(z)\cdot\Psi^-(z)=(z+i)^1\cdot 1\cdot\frac{ai-1}{z+i}=ai-1.$$

Із умови $\Phi^-(\infty)=0$ отримаємо $a=-i$. Залишається знайдене значення параметра підставити в розв'язок.

**Відповідь.** Задача має єдиний розв'язок

$$\Phi^+(z)=-\frac{2iz(z-2i)}{z+2i},\quad \Phi^-(z)=0$$

при $a=-i$.

**Вправа 2.10.** Розв'язати крайову задачу Рімана на зімкненому контурі:

1) $\Phi^+(t)=(t-1)\Phi^-(t)+t^2-1,\qquad t\in\gamma$,

а) якщо $\gamma$ містить всередині себе точку $z_1=1$;

б) якщо $\gamma$ НЕ містить всередині себе точку $z_1=1$;

2) $\Phi^+\left(t\right)=\dfrac{t^2+1}{t}\Phi^-\left(t\right)+\dfrac{t^2-1}{t\left(t^2+16\right)},\qquad t\in\gamma;\ \gamma=\left\{t,\left|t\right|=2\right\};$

3) $\Phi^+\left(t\right)=\dfrac{t^2-1}{t^2-16}\Phi^-\left(t\right)+\dfrac{t+1}{t\left(t+5\right)},\qquad t\in\gamma.\ \gamma=\left\{t,\left|t\right|=2\right\};$

4) $\Phi^+\left(t\right)=\dfrac{t}{t^2-1}\Phi^-\left(t\right)+\dfrac{t^3-t^2+1}{t^3-t},\qquad t\in\gamma$

за умови, що $\Phi^-\left(\infty\right)=0$ і $\gamma$ – довільний гладкий замкнений контур такого вигляду:

а) контур $\gamma$ містить всередині себе точку $z_1=0$ і не містить точок $z_2=1$, $z_3=-1$;

б) контур $\gamma$ містить всередині себе точки $z_1=0$, $z_2=1$ і не містить точку $z_3=-1$;

в) контур $\gamma$ містить всередині себе точки $z_1=0$, $z_2=1$, $z_3=-1$;

г) контур $\gamma$ містить всередині себе точки $z_2=1$, $z_3=-1$ і не містить точку $z_1=0$;

5) $\Phi^+\left(t\right)=\dfrac{t}{\ln\dfrac{t}{t-1}}\Phi^-\left(t\right)+\sin t+e^{\frac{1}{t}},\quad t\in\gamma,\qquad \Phi^-(\infty)=0$

для контура, що залишає точки 0, 1 в області $D^+$.

## 2.6. Задача Рімана на дійсній осі

**Приклад 2.14.** Розв'язати задачу Рімана на дійсній осі

а) $\Phi^+(t)=\dfrac{-2t+3i}{4t+i}\Phi^-(t)+\dfrac{f_1t+f_2}{4t+i},\ \ t\in(-\infty,+\infty);$

б) $\Phi^+(t)=\dfrac{-3t+5i}{2t-i}\Phi^-(t)+\dfrac{f_1t+f_2}{2t-i},\ \ t\in(-\infty,+\infty).$

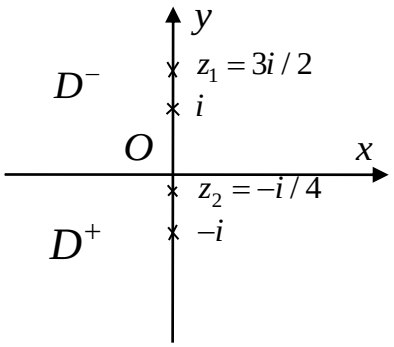



Рис. 2.11.

**Розв'язання. а)** У даному прикладі

$$G(t)=\frac{-2t+3i}{4t+i},\ \ g(t)=\frac{f_1t+f_2}{4t+i}.$$

Поставлена задача є неоднорідною задачею Рімана на дійсній осі. Тут $\gamma=\mathbb{R}$ – дійсна вісь розбиває комплексну площину на дві півплощини: верхню $D^+=\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}z>0\}$ і нижню $D^-=\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}z<0\}$.

Знайдемо індекс функції $G(t)$ на дійсній осі. Функція $G(z)=\dfrac{-2z+3i}{4z+i}$ має один нуль $z_1=\dfrac{3i}{2}$, який належить $D^+$, і один полюс $z_2=-\dfrac{i}{4}$, який не належить $D^+$. Тому $\kappa=\operatorname{Ind}G(t)=1$.

Застосовуватимемо узагальнені формули, надані в резюме 2. Потрібно визначити $ai/b\in D^+, -ci/h\in D^-$. Відповідно до форми подання коефіцієнту задачі Рімана, оберемо $a=-3, b=-2, c=1, h=4$.

Обчислено функції $\Gamma(z)$, $X(z)$, $\Psi(z)$:

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\ln\left[\left(\frac{b\tau-ai}{h\tau+ci}\right)^{-\kappa}G(\tau)\right]\frac{d\tau}{\tau-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\ln\left[\left(\frac{-2\tau+3i}{4\tau+i}\right)^{-1}\frac{-2\tau+3i}{4\tau+i}\right]\frac{d\tau}{\tau-z}=0;$$

$$X(z)=e^{\Gamma(z)}=1;$$

Для функції $\Psi(z)$

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(\tau)}{\mathrm{X}^+(\tau)(\tau-z)}d\tau=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f_1\tau+f_2}{(4\tau+i)\cdot1\cdot(\tau-z)}d\tau$$

розглянемо подовження функції щільності на всю комплексну площину – $\varphi(z)=\dfrac{f_1z+f_2}{4z+i}$. Отримана функція має особливу точку $z_2=-\dfrac{i}{4}$, яка належить $D^-$, тому являє собою функцію, аналітичну в $D^+$, причому $\varphi(\infty)=\dfrac{f_1}{4}$, тому за формулою (1.32)

$$\Psi(z)=\begin{cases}\dfrac{f_1z+f_2}{4z+i}-\dfrac{f_1}{8}, & z\in D^+;\\[2ex] -\dfrac{f_1}{8}, & z\in D^-.\end{cases}$$

Тепер знайдемо розв'язок задачі, враховуючі, що $\kappa=1\geq0$ :

$$\Phi^+(z)=\mathrm{X}^+(z)\left[\Psi^+(z)+\frac{P_k(z)}{(hz+ci)^\kappa}\right]=1\cdot\left[\frac{f_1z+f_2}{4z+i}-\frac{f_1}{8}+\frac{Az+B}{4z+i}\right]=$$

$$=\frac{f_1z+2Az+2f_2+\left(-\frac{f_1i}{4}+2B\right)}{2(4z+i)};$$

$$\Phi^-(z)=\left(\frac{bz-ai}{hz+ci}\right)^{-\kappa}\mathrm{X}^-(z)\left[\Psi^-(z)+\frac{P_k(z)}{(hz+ci)^\kappa}\right]=\frac{4z+i}{-2z+3i}\cdot1\cdot\left[-\frac{f_1}{8}+\frac{Az+B}{4z+i}\right]=$$

$$=\frac{-f_1z+2Az+\left(-\frac{f_1i}{4}+2B\right)}{2(-2z+3i)}.$$

У відповіді врахуємо введення нових констант $A^*=2A,\ B^*=-\frac{f_1i}{4}+2B.$

**Відповідь:** $\Phi^+(z)=\frac{f_1z+A^*z+2f_2+B^*}{2(4z+i)};\ \Phi^-(z)=\frac{-f_1z+A^*z+B^*}{2(-2z+3i)}.$

**б)** Для задачі Рімана

$$\Phi^+(t)=\frac{-3t+5i}{2t-i}\Phi^-(t)+\frac{f_1t+f_2}{2t-i},\quad t\in(-\infty,+\infty)$$

коефіцієнт і вільний член дорівнюють відповідно:

$$G(t)=\frac{-3t+5i}{2t-i},\ g(t)=\frac{f_1t+f_2}{2t-i}.$$

Нулем функції $G(z)=\frac{-3z+5i}{2z-i}$ є точка $z_1=\frac{5i}{3}$, а полюсом – $z_2=\frac{i}{2}$, обидві належить $D^+$, тому $N^+=P^+=1,\kappa=0$.

Для даної задачі вибір точок $ai/b\in D^+,-ci/h\in D^-$ в узагальнених формулах не має суттєвого значення, тому застосуємо стандартні формули з підрозділу (1.11).

Внаслідок (1.83) маємо:

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\ln\left[\left(\frac{\tau-i}{\tau+i}\right)^{-\kappa}G(\tau)\right]\cdot\frac{d\tau}{\tau-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\ln\left[\frac{-3\tau+5i}{2\tau-i}\right]\cdot\frac{d\tau}{\tau-z}.$$

Обидві особливі точки функція $\varphi(z)=\ln\frac{-3z+i}{2z-i}$ а – це $z_1=\frac{5i}{3}$ і $z_2=\frac{i}{2}$ належать області , тому $D^+$ функція аналітична в $D^-$, причому

$$\varphi(\infty)=\ln\left(-\frac{3}{2}\right)=\ln\left|-\frac{3}{2}\right|+i\arg\left(-\frac{3}{2}\right)=\ln\frac{3}{2}+i\pi.$$

Для обчислення інтеграла застосовуємо формулу (1.33):

$$\Gamma(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(\ln\frac{3}{2}+i\pi\right), & z\in D^+;\\ \frac{1}{2}\left(\ln\frac{3}{2}+i\pi\right)-\ln\frac{-3z+i}{2z-i}, & z\in D^-.\end{cases}$$

За допомогою (1.82) і, знаючи, що $e^{\frac{\pi}{2}i}=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$, отримаємо:

$$\mathrm{X}^+(z)=e^{\Gamma^+(z)}=e^{\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}}\cdot e^{\frac{\pi}{2}i}=\sqrt{\frac{3}{2}}i,$$

$$\mathrm{X}^-(z)=e^{\Gamma^-(z)}=\frac{2z-i}{-3z+i}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}i.$$

Із (1.90)

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(\tau)}{\mathrm{X}^+(\tau)(\tau-z)}d\tau=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{i}\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{f_1\tau+f_2}{2\tau-i}\cdot\frac{d\tau}{\tau-z}.$$

Подовження функції щільності останнього інтеграла на всю дійсну вісь є функція $\varphi(z)=\frac{1}{i}\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{f_1z+f_2}{2z-i}$, аналітична в області $D^-$, де $\varphi(\infty)=\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{f_1}{2i}$. Внаслідок (1.33) маємо

$$\Psi(z)=\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{f_1}{4i}, & z\in D^+;\\ \sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{f_1}{4i}-\frac{1}{i}\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{f_1z+f_2}{2z-i}, & z\in D^-;\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Psi^+(z)=\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{f_1}{4i};\quad\Psi^-(z)=\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{f_1}{4i}-\frac{1}{i}\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{f_1z+f_2}{2z-i}.$$

Розв'язок знаходимо за допомогою (1.92) і (1.93):

$$\Phi^+(z)=\mathrm{X}^+(z)\left[\Psi^+(z)+\frac{P_k(z)}{(z+i)^\kappa}\right]=\sqrt{\frac{3}{2}}i\cdot\left[\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{f_1}{4i}+\frac{A}{(z+i)^0}\right]=\frac{f_1}{4}+A\sqrt{\frac{3}{2}}i;$$

$$\Phi^-(z)=\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{-\kappa}\mathrm{X}^-(z)\left[\Psi^-(z)+\frac{P_k(z)}{(z+i)^\kappa}\right]=$$

$$=\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^0\frac{2z-i}{-3z+i}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}i\cdot\left[\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{f_1}{4i}-\frac{1}{i}\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{f_1z+f_2}{2z-i}+\frac{A}{(z+i)^0}\right]=$$

$$=\frac{-f_1i-2f_1z-4f_2+4A\sqrt{\frac{3}{2}}i}{4(-3z+i)}.$$

Уведемо нову константу $A^*=A\sqrt{\frac{3}{2}}i$, яку врахуємо у відповіді.

**Відповідь.** $\Phi^+(z)=\frac{f_1}{4}+A^*,\quad\Phi^-(z)=\frac{-f_1i-2f_1z-4f_2+4A^*}{4(-3z+i)}.$

**Вправа 2.11.** Розв'язати крайову задачу Рімана на дійсній осі

1) $\Phi^+(t)=\frac{2t-ih}{t+i}\Phi^-(t)+\frac{t+ic}{t^2+1},\ h\neq0,\ t\in(-\infty;\infty);$

2) $\Phi^+(t)=\frac{t-ih}{t-i}\Phi^-(t)+\frac{t+ic}{t^2+1},\ h\neq0,\ t\in(-\infty;\infty).$

## 2.7. Задача Рімана з розривним коефіцієнтом

**Приклад 2.15** [1]. Нехай $\gamma -$ одиничне коло, $\gamma = \{t \in \mathbb{C} : |t| = 1\}$, $\gamma_1$ і $\gamma_2 -$ верхнє та нижнє півколо відповідно. Розв'язати на контурі $\gamma$ крайову задачу Рімана

$$\Phi^+(t) = G(t) \cdot \Phi^-(t) + (t-1)^{\frac{2\pi-5}{\pi}} \cdot (t+1)^{\frac{5-\pi}{\pi}} \cdot \frac{e^{4t}}{t^2 + a^2}, \ (|a| < 1),$$

де функція визначається наступним чином

$$G(t) = \begin{cases} e^{14i}, \text{ якщо } t \in \gamma_1, \\ e^{4i}, \text{ якщо } t \in \gamma_2. \end{cases}$$

Многозначна функція $\left(\frac{t+1}{t-1}\right)^{\frac{5}{\pi}}$ задається деякою своєю певною гілкою. Розглянути класи функцій, що мають інтегровну нескінченність в точках:

а) $t_1 = 1, t_2 = -1,$

б) $t_1 = 1$

і обмежені в інших точках комплексної площини.

в) Розв'язати задачу в класі всюди обмеженої функції.

г) Показати, що в класі функції, всюди обмеженої і яка обертається на нескінченності в нуль, задача має розв'язок лише при спеціальному підборі параметра *a*; вказати ці значення параметра і знайти розв'язок в цьому випадку.

**Розв'язання.** Спочатку визначимося з гілкою многозначної функції

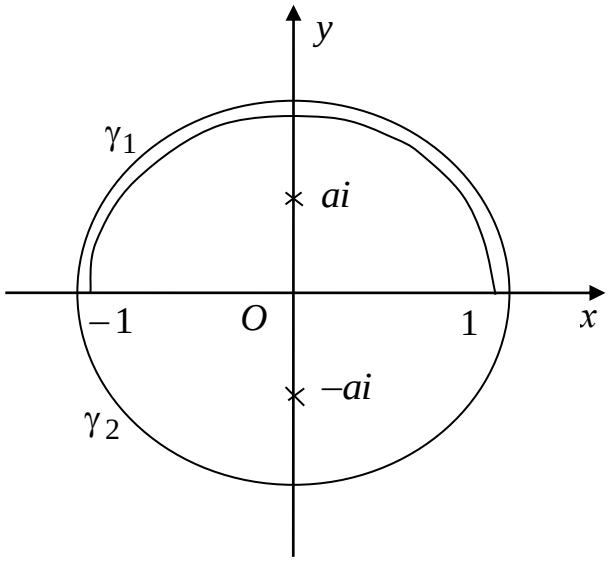



Рис. 2.12.

$$h(t) = \left(\frac{t+1}{t-1}\right)^{\frac{5}{\pi}}.$$

За означенням степеневої функції комплексної змінної маємо

$$(z-1)^{\frac{5}{\pi}} = e^{\operatorname{Ln}(z-1)^{\frac{5}{\pi}}} = e^{\frac{5}{\pi}\operatorname{Ln}(z-1)} =$$

$$= e^{\frac{5}{\pi}\left[\ln|z-1| + i\arg|z-1| + 2\pi n i\right]} =$$

$$= e^{\frac{5}{\pi}\left[\ln|z-1| + i\arg|z-1|\right]} \cdot e^{10ni},$$

$$(z+1)^{\frac{5}{\pi}} = e^{\frac{5}{\pi}\left[\ln|z+1| + i\arg|z+1|\right]} \cdot e^{10mi},$$

$$h(z) = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{5}{\pi}} =$$

$$= e^{\frac{5}{\pi}\left[\ln\left|\frac{z+1}{z-1}\right| + i\arg\frac{z+1}{z-1}\right]} \cdot e^{10(n-m)i}.$$

Зображення області наведено на рис. 2.12. Здійснимо розріз комплексної площини вздовж верхнього півкола $\gamma_1$. Оберемо ту гілку функції $h(z)$, щоб на

нижньому березі розрізу при наближені до точки $t \in \gamma_1$ аргумент функції $h^+(t) = \lim\limits_{\substack{z \to t \\ z \in D^+}} h(z) \quad (t \in \gamma_1)$ дорівнював аргументові $\frac{5}{\pi} \arg \frac{t+1}{t-1}$, тобто $h^+(t) = \left( \frac{t+1}{t-1} \right)^{\frac{5}{\pi}} \ (t \in \gamma_1)$. Тоді при наближенні до цієї ж точки з боку верхнього берегу розрізу аргумент зменшиться на 10. Це означатиме, що

$$h^-(t) = \lim_{\substack{z \to t \\ z \in D^-}} h(z) = h^+(t) \cdot e^{-10i} = \left( \frac{t+1}{t-1} \right)^{\frac{5}{\pi}} \cdot e^{-10i} \quad (t \in \gamma_1). \tag{2.1}$$

На нижньому півколі $\gamma_2$, на якому відсутній розріз, граничні значення $h^{\pm}(t)$ функції $h(z)$ будуть збігатися і дорівнювати значенню $h^+(t)$ на $\gamma_1$, тобто

$$h^+(t) = h^-(t) = \left( \frac{t+1}{t-1} \right)^{\frac{5}{\pi}} \ (t \in \gamma_2). \tag{2.2}$$

Застосуємо формулу (1.108'), де $t_1 = 1, \ t_2 = -1$ – точки розриву $G(t)$

$$\frac{G(t_1 - 0)}{G(t_1 + 0)} = \frac{e^{4i}}{e^{14i}} = e^{-10i}; \quad \rho_1 = 1, \theta_1 = -10;$$

$$\frac{G(t_2 - 0)}{G(t_2 + 0)} = \frac{e^{14i}}{e^{4i}} = e^{10i}; \quad \rho_2 = 1, \theta_2 = 10.$$

**а)** Знайдемо цілі числа $\kappa_1$, $\kappa_2$, застосовуючи формулу (1.111') для отримання розв'язку з інтегровною нескінченністю в точках $t_1 = 1, t_2 = -1$:

$$\kappa_1 = \left[ \frac{\theta_1}{2\pi} \right] + 1 = \left[ \frac{-10}{2\pi} \right] + 1 = -2 + 1 = -1;$$

$$\kappa_2 = \left[ \frac{\theta_2}{2\pi} \right] + 1 = \left[ \frac{10}{2\pi} \right] + 1 = 2.$$

За формулою(1.107') обчислимо $\kappa$:

$$\kappa_1 + \kappa_2 = -1 + 2 = 1.$$

Показники степеня набувають вигляду (див.(1.109'))

$$\nu_1 = \frac{-5}{\pi} + 1; \qquad \nu_2 = \frac{5}{\pi} - 2.$$

Обираючи $z_0 = 0$ і застосовуючи формули (1.100), знайдемо функції $\omega_{1,2}^{\pm}(z)$:

$$\omega_1^+(z) = (z - t_1)^{\nu_1} = (z-1)^{-\frac{5}{\pi}+1}; \qquad \omega_2^+(z) = (z - t_2)^{\nu_2} = (z+1)^{\frac{5}{\pi}-2};$$

$$\omega_1^-(z) = \left( \frac{z - t_1}{z - z_0} \right)^{\nu_1} = \left( \frac{z-1}{z} \right)^{-\frac{5}{\pi}+1}; \qquad \omega_2^-(z) = \left( \frac{z - t_2}{z - z_0} \right)^{\nu_2} = \left( \frac{z+1}{z} \right)^{\frac{5}{\pi}-2}.$$

Тоді

$$\omega_1^+(t)\cdot\omega_2^+(t)=h^+(t)\cdot\frac{t-1}{(t+1)^2}=\left(\frac{t+1}{t-1}\right)^{\frac{5}{\pi}}\cdot\frac{t-1}{(t+1)^2}\quad\text{для всіх } t\in\gamma;$$

$$\omega_1^-(t)\cdot\omega_2^-(t)=t\cdot h^-(t)\cdot\frac{t-1}{(t+1)^2}=t\cdot\left(\frac{t+1}{t-1}\right)^{\frac{5}{\pi}}\cdot\frac{t-1}{(t+1)^2}\cdot\begin{cases}e^{-10i}, & t\in\gamma_1;\\ 1, & t\in\gamma_2.\end{cases}$$

Тепер застосуємо формулу (1.107') для знаходження неперервної функції $G_1(t)$:

$$G_1(t)=\frac{\omega_1^-(t)\cdot\omega_2^-(t)}{\omega_1^+(t)\cdot\omega_2^+(t)}\cdot G(t)=t\cdot\frac{h^-(t)}{h^+(t)}\cdot G(t)=\begin{cases}t\cdot e^{-10i}\cdot e^{14i}, & t\in\gamma_1\\ t\cdot e^{4i}, & t\in\gamma_2\end{cases}=e^{4i}\cdot t\,.$$

За формулою (1.115) введемо функцію, яка відповідає вільному члену крайової задачі

$$g_1(t)=\frac{g(t)}{\omega_1^+(t)\cdot\omega_2^+(t)}=\left(\frac{t-1}{t+1}\right)^{\frac{5}{\pi}}\cdot\frac{(t+1)^2}{t-1}\cdot(t-1)^{2-\frac{5}{\pi}}\cdot(t+1)^{\frac{5}{\pi}-1}\cdot\frac{e^{4t}}{t^2+a^2}=\left(t^2-1\right)\cdot\frac{e^{4t}}{t^2+a^2}.$$

Отже, задачу зведено до крайової задачі Рімана

$$\Phi_1{}^+(t)=G_1(t)\Phi_1{}^-(t)+g_1(t),\quad t\in\gamma$$

з неперервними коефіцієнтом і вільною функцією. Знайдемо її розв'язок. Спочатку знайдемо функції $\Gamma(z)$, $X^{\pm}(z)$, використовуючи формули (1.56) і (1.55), (1.6):

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{\ln[\tau^{-\kappa}G_1(\tau)]}{\tau-z}d\tau=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{\ln\left[\tau^{-1}\cdot\tau\cdot e^{4i}\right]}{\tau-z}d\tau=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{4i}{\tau-z}d\tau=\begin{cases}4i,\ z\in D^+;\\ 0,\ z\in D^-;\end{cases}$$

$$X^+(z)=e^{\Gamma^+(z)}=e^{4i};\quad X^-(z)=e^{\Gamma^-(z)}=1.$$

Функцію $\Psi(z)$ обчислимо за допомогою формули (1.63)

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{g_1(\tau)}{X^+(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-z}=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma(\tau^2-1)\cdot\frac{e^{4\tau}}{\tau^2+a^2}\cdot\frac{1}{e^{4i}}\cdot\frac{d\tau}{\tau-z}\,.$$

Для обчислення останнього інтеграла спочатку розкладемо на прості дроби функцію

$$\frac{1}{(\tau-ai)\cdot(\tau+ai)\cdot(\tau-z)}=\frac{\frac{1}{2ai\cdot(ai-z)}}{\tau-ai}+\frac{\frac{1}{2ai\cdot(ai+z)}}{\tau+ai}+\frac{\frac{1}{z^2+a^2}}{\tau-z}.$$

Тоді

$$\Psi(z)=e^{-4i}\cdot\left[\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{2ai\cdot(ai-z)}\cdot\oint_\gamma(\tau^2-1)\cdot\frac{e^{4\tau}}{\tau-ai}d\tau+\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{2ai\cdot(ai+z)}\times\right.$$

$$\left.\times\oint_\gamma(\tau^2-1)\cdot\frac{e^{4\tau}}{\tau+ai}d\tau+\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{z^2+a^2}\cdot\oint_\gamma(\tau^2-1)\cdot\frac{e^{4\tau}}{\tau-z}d\tau\right].$$

Обчислимо кожен інтеграл останньої суми окремо. Оскільки функція $f(z)=(z^2-1)\cdot e^{4z}$ – аналітична в $D^+$, за теоремою Коші

$$\frac{1}{2\pi i}\cdot\oint_{\gamma}(\tau^2-1)\cdot\frac{e^{4\tau}}{\tau-ai}d\tau=\left((ai)^2-1\right)\cdot e^{4ai},$$

$$\frac{1}{2\pi i}\cdot\oint_{\gamma}(\tau^2-1)\cdot\frac{e^{4\tau}}{\tau+ai}d\tau=\left(-(ai)^2-1\right)\cdot e^{-4ai},$$

а за формулою (1.6):

$$\frac{1}{2\pi i}\cdot\oint_{\gamma}(\tau^2-1)\cdot\frac{e^{4\tau}}{\tau-z}d\tau=\begin{cases}(z^2-1)\cdot e^{4z}, & z\in D^+,\\ 0, & z\in D^-.\end{cases}$$

Отже,

$$\Psi(z)=e^{-4i}\cdot\left[\frac{1}{2ai\cdot(ai-z)}\cdot((ai)^2-1)\cdot e^{4ai}+\frac{1}{2ai\cdot(ai+z)}\cdot\left((-ai)^2-1\right)\cdot e^{-4ai}+\right.$$
$$\left.+\begin{cases}\frac{1}{z^2+a^2}\cdot(z^2-1)\cdot e^{4z}, & z\in D^+,\\ 0, & z\in D^-\end{cases}\right].$$

Спростимо отримані функції:

$$\Psi^-(z)=e^{-4i}\cdot\left[\frac{-(a^2+1)\cdot(\cos 4a+i\sin 4a)}{2ai\cdot(ai-z)}+\frac{-(a^2+1)\cdot(\cos 4a-i\sin 4a)}{2ai\cdot(ai+z)}\right]=$$

$$=e^{-4i}\cdot\frac{-(a^2+1)}{2ai}\cdot\frac{(\cos 4a+i\sin 4a)\cdot(ai+z)+(\cos 4a-i\sin 4a)\cdot(ai-z)}{(ai-z)\cdot(ai+z)}=$$

$$=-e^{-4i}\cdot\frac{a^2+1}{2ai}\cdot\frac{2ai\cdot\cos 4a+2i\cdot z\cdot\sin 4a}{-a^2-z^2}=$$

$$=e^{-4i}\cdot\frac{(a^2+1)\cdot(a\cos 4a+z\sin 4a)}{a(a^2+z^2)};$$

$$\Psi^+(z)=e^{-4i}\cdot\left[\frac{a^2+1}{a}\cdot\frac{a\cos 4a+z\sin 4a}{a^2+z^2}+\frac{1}{a^2+z^2}\cdot(z^2-1)\cdot e^{4z}\right].$$

Використовуючи формули (1.65) і (1.105')

$$\Phi_1^+(z)=\mathrm{X}^+(z)\cdot\left[P_{\kappa}(z)+\Psi^+(z)\right],$$

$$\Phi^+(z)=\prod_{j=1}^{2}\omega_j^+(z)\cdot\Phi_1^+(z),$$

отримаємо:

$$\Phi^+(z)=(z-1)^{-\frac{5}{\pi}+1}\cdot(z+1)^{\frac{5}{\pi}-2}\cdot e^{4i}\cdot\left[Az+B+\Psi^+(z)\right]=$$

$$=\frac{e^{4i}}{z+1}\cdot\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{5-\pi}{\pi}}\cdot\left[Az+B+e^{-4i}\cdot\frac{a^2+1}{a}\cdot\frac{a\cos 4a+z\sin 4a}{a^2+z^2}+\frac{z^2-1}{a^2+z^2}\cdot e^{4(z-i)}\right].$$

Тепер застосуємо формули (1.66) і (1.105')

$$\Phi_1^-(z)=(z-z_0)^{-\kappa}\cdot\mathrm{X}^-(z)\cdot\left[P_{\kappa}(z)+\Psi^+(z)\right],$$

$$\Phi^-(z)=\prod_{j=1}^{2}\omega_j^-(z)\cdot\Phi_1^-(z),$$

одержимо:

$$\Phi^-(z)=z^{-1}\cdot\left(\frac{z-1}{z}\right)^{-\frac{5}{\pi}+1}\cdot\left(\frac{z+1}{z}\right)^{\frac{5}{\pi}-2}\cdot 1\cdot\left[Az+B+\Psi^-(z)\right]=$$

$$=\frac{1}{z+1}\cdot\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{5-\pi}{\pi}}\cdot\left[Az+B+e^{-4i}\cdot\frac{(a^2+1)\cdot(a\cos 4a+z\sin 4a}{a(a^2+z^2)}\right].$$

Порядок нескінченності отриманого розв'язку в точці $t_1=1$ дорівнює $\frac{5-\pi}{\pi}\in(0,1)$, що відповідає інтегровному порядку нескінченності. В точці $t_2=-1$ нескінченність порядку $1-\frac{5-\pi}{\pi}=2-\frac{5}{\pi}\in(0,1)$, тобто теж є інтегровною. Це і вимагалося умовою.

**Відповідь.** $\Phi^+(z)=$

$$=\frac{e^{4i}}{z+1}\cdot\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{5-\pi}{\pi}}\cdot\left[Az+B+e^{-4i}\cdot\frac{a^2+1}{a}\cdot\frac{a\cos 4a+z\sin 4a}{a^2+z^2}+\frac{z^2-1}{a^2+z^2}\cdot e^{4(z-i)}\right],$$

$$\Phi^-(z)=\frac{1}{z+1}\cdot\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{5-\pi}{\pi}}\cdot\left[Az+B+e^{-4i}\cdot\frac{(a^2+1)\cdot(a\cos 4a+z\sin 4a}{a(a^2+z^2)}\right].$$

**б)** Знайдемо цілі числа $\kappa_1$, $\kappa_2$, застосовуючи формулу (1.111') для отримання розв'язку з інтегровною нескінченністю в точці $t_1=1$ і (1.110') – для розв'язку, обмеженого в точці $t_2=-1$:

$$\kappa_1=\left[\frac{\theta_1}{2\pi}\right]+1=\left[\frac{-10}{2\pi}\right]+1=-2+1=-1;\qquad \kappa_2=\left[\frac{\theta_2}{2\pi}\right]=\left[\frac{10}{2\pi}\right]=1.$$

Використаємо формулу (1.109') для обчислення $\kappa$:

$$\kappa_1+\kappa_2=-1+1=0.$$

Обчислимо показники степенів, застосовуючи (1.109'):

$$\nu_1=\frac{-5}{\pi}+1;\qquad\qquad \nu_2=\frac{5}{\pi}-1.$$

Обираючи $z_0=0$ і застосовуючи формули (1.100), знайдемо функції $\omega_{1,2}^{\pm}(z)$:

$$\omega_1^+(z)=(z-t_1)^{\nu_1}=(z-1)^{-\frac{5}{\pi}+1};\qquad \omega_2^+(z)=(z-t_2)^{\nu_2}=(z+1)^{\frac{5}{\pi}-1};$$

$$\omega_1^-(z)=\left(\frac{z-t_1}{z-z_0}\right)^{\nu_1}=\left(\frac{z-1}{z}\right)^{-\frac{5}{\pi}+1};\qquad \omega_2^-(z)=\left(\frac{z-t_2}{z-z_0}\right)^{\nu_2}=\left(\frac{z+1}{z}\right)^{\frac{5}{\pi}-1}.$$

Тоді

$$\omega_1^+(t)\cdot\omega_2^+(t)=h^+(t)\cdot\frac{t-1}{t+1}=\left(\frac{t+1}{t-1}\right)^{\frac{5}{\pi}}\cdot\frac{t-1}{t+1}\quad\text{для всіх } t\in\gamma;$$

$$\omega_1^-(t)\cdot\omega_2^-(t)=h^-(t)\cdot\frac{t-1}{t+1}==\left(\frac{t+1}{t-1}\right)^{\frac{5}{\pi}}\cdot\frac{t-1}{t+1}\cdot\begin{cases}e^{-10i}, & t\in\gamma_1;\\ 1, & t\in\gamma_2.\end{cases}$$

Неперервні функцію $G_1(t)$ знаходимо за формулою (1.107'):

$$G_1(t)=\frac{\omega_1^-(t)\cdot\omega_2^-(t)}{\omega_1^+(t)\cdot\omega_2^+(t)}\cdot G(t)=h^-(t)\cdot\frac{1}{h^+(t)}\cdot G(t)=\begin{cases}e^{-10i}\cdot e^{14i}, & t\in\gamma_1\\ e^{4i}, & t\in\gamma_2\end{cases}=e^{4i}.$$

Із (1.115)

$$g_1(t)=\frac{g(t)}{\omega_1^+(t)\cdot\omega_2^+(t)}=\left(\frac{t+1}{t-1}\right)^{1-\frac{5}{\pi}}\cdot(t-1)^{2-\frac{5}{\pi}}\cdot(t+1)^{\frac{5}{\pi}-1}\cdot\frac{e^{4t}}{t^2+a^2}=\frac{(t-1)\cdot e^{4t}}{t^2+a^2}.$$

Отже, задачу зведено до крайової задачі Рімана

$$\Phi_1{}^+(t)=G_1(t)\cdot\Phi_1{}^-(t)+g_1(t),\quad t\in\gamma$$

з неперервними коефіцієнтом і вільною функцією. Знайдемо її розв'язок. Функції $\Gamma(z)$, $X^{\pm}(z)$ знаходимо за формулами (1.56) і (1.55), (1.6):

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{\ln[\tau^{-\kappa}G_1(\tau)]}{\tau-z}d\tau=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{\ln\left[\tau^0\cdot e^{4i}\right]}{\tau-z}d\tau=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{4i}{\tau-z}d\tau=\begin{cases}4i,\ z\in D^+;\\ 0,\ z\in D^-;\end{cases}$$

$$X^+(z)=e^{\Gamma^+(z)}=e^{4i};\quad X^-(z)=e^{\Gamma^-(z)}=1.$$

Функцію $\Psi(z)$ обчислимо за допомогою формули (1.63)

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{g_1(\tau)}{X^+(\tau)}\cdot\frac{d\tau}{\tau-z}=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{(\tau-1)\cdot e^{4\tau}}{\tau^2+a^2}\cdot\frac{1}{e^{4i}}\cdot\frac{d\tau}{\tau-z}.$$

Розкладемо на прості дроби функцію

$$\frac{1}{(\tau-ai)\cdot(\tau+ai)\cdot(\tau-z)}=\frac{\frac{1}{2ai\cdot(ai-z)}}{\tau-ai}+\frac{\frac{1}{2ai\cdot(ai+z)}}{\tau+ai}+\frac{\frac{1}{z^2+a^2}}{\tau-z}.$$

Тоді

$$\Psi(z)=e^{-4i}\cdot\left[\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{2ai\cdot(ai-z)}\cdot\oint_\gamma\frac{(\tau-1)\cdot e^{4\tau}}{\tau-ai}d\tau+\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{2ai\cdot(ai+z)}\times\right.$$

$$\left.\times\oint_\gamma\frac{(\tau-1)\cdot e^{4\tau}}{\tau+ai}d\tau+\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{z^2+a^2}\cdot\oint_\gamma\frac{(\tau-1)\cdot e^{4\tau}}{\tau-z}d\tau\right].$$

Оскільки функція $f(z)=(z-1)\cdot e^{4z}$ – аналітична в $D^+$, то за теоремою Коші

$$\frac{1}{2\pi i}\cdot\oint_\gamma\frac{(\tau-1)\cdot e^{4\tau}}{\tau-ai}d\tau=(ai-1)\cdot e^{4ai},$$

$$\frac{1}{2\pi i}\cdot\oint\limits_{\gamma}\frac{(\tau-1)\cdot e^{4\tau}}{\tau+ai}d\tau=(-ai-1)\cdot e^{-4ai}.$$

За формулою (1.6)

$$\frac{1}{2\pi i}\cdot\oint\limits_{\gamma}\frac{(\tau-1)\cdot e^{4\tau}}{\tau-z}d\tau=\begin{cases}(z-1)\cdot e^{4z},\ z\in D^{+},\\ 0,\quad z\in D^{-}.\end{cases}$$

Отже,

$$\Psi(z)=e^{-4i}\cdot\left[\frac{ai-1}{2ai\cdot(ai-z)}\cdot e^{4ai}+\frac{-ai-1}{2ai\cdot(ai+z)}\cdot e^{-4ai}+\right.$$
$$\left.+\begin{cases}\dfrac{z-1}{z^2+a^2}\cdot e^{4z},\ z\in D^{+},\\ 0,\qquad z\in D^{-}\end{cases}\right].$$

Спростимо отримані функції:

$$\Psi^{-}(z)=e^{-4i}\cdot\left[\frac{(ai-1)\cdot(\cos 4a+i\sin 4a)}{2ai\cdot(ai-z)}+\frac{(-ai-1)\cdot(\cos 4a-i\sin 4a)}{2ai\cdot(ai+z)}\right]=$$
$$=\frac{e^{-4i}}{2ai}\cdot\frac{(ai-1)\cdot(\cos 4a+i\sin 4a)\cdot(ai+z)+(-ai-1)\cdot(\cos 4a-i\sin 4a)\cdot(ai-z)}{(ai-z)\cdot(ai+z)}=$$
$$=\frac{e^{-4i}}{a}\cdot\frac{a\cdot(1-z)\cdot\cos 4a+(z+a^2)\cdot\sin 4a}{a^2+z^2};$$
$$\Psi^{+}(z)=e^{-4i}\cdot\left[\frac{1}{a}\cdot\frac{a\cdot(1-z)\cdot\cos 4a+(z+a^2)\cdot\sin 4a}{a^2+z^2}+\frac{z-1}{a^2+z^2}\cdot e^{4z}\right].$$

Використовуючи формули (1.65) і (1.105')

$$\Phi_1^{+}(z)=\mathrm{X}^{+}(z)\cdot\left[P_{\kappa}(z)+\Psi^{+}(z)\right],\quad \Phi^{+}(z)=\prod_{j=1}^{2}\omega_j^{+}(z)\cdot\Phi_1^{+}(z),$$

отримаємо

$$\Phi^{+}(z)=(z-1)^{-\frac{5}{\pi}+1}\cdot(z+1)^{\frac{5}{\pi}-1}\cdot e^{4i}\cdot\left[A+\Psi^{+}(z)\right]=$$
$$=e^{4i}\cdot\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{5-\pi}{\pi}}\cdot\left[A+e^{-4i}\cdot\frac{a\cdot(1-z)\cdot\cos 4a+\left(z+a^2\right)\cdot\sin 4a}{a\left(a^2+z^2\right)}+\frac{z-1}{a^2+z^2}\cdot e^{4(z-i)}\right].$$

Застосовуючи (1.66) і (1.105')

$$\Phi_1^{-}(z)=(z-z_0)^{-\kappa}\cdot\mathrm{X}^{-}(z)\cdot\left[P_{\kappa}(z)+\Psi^{+}(z)\right],\quad \Phi^{-}(z)=\prod_{j=1}^{2}\omega_j^{-}(z)\cdot\Phi_1^{-}(z),$$

одержимо:

$$\Phi^{-}(z)=z^{-1}\cdot\left(\frac{z-1}{z}\right)^{-\frac{5}{\pi}+1}\cdot\left(\frac{z+1}{z}\right)^{\frac{5}{\pi}-1}\cdot 1\cdot\left[A+\Psi^{-}(z)\right]=$$
$$=e^{4i}\cdot\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{5-\pi}{\pi}}\cdot\left[A+e^{-4i}\cdot\frac{a\cdot(1-z)\cdot\cos 4a+\left(z+a^2\right)\cdot\sin 4a}{a\left(a^2+z^2\right)}\right].$$

Порядок нескінченності отриманого розв'язку в точці $t_1 = 1$ дорівнює $\frac{5-\pi}{\pi} \in (0,1)$, що відповідає інтегровному порядку нескінченності. В точці $t_2 = -1$ розв'язок є обмеженим. Це і вимагалося умовою.

**Відповідь.** $\Phi^+(z) =$

$$= e^{4i} \cdot \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{5-\pi}{\pi}} \cdot \left[ A + e^{-4i} \cdot \frac{a \cdot (1-z) \cdot \cos 4a + \left(z + a^2\right) \cdot \sin 4a}{a\left(a^2 + z^2\right)} + \frac{z-1}{a^2 + z^2} \cdot e^{4(z-i)} \right],$$

$$\Phi^-(z) = e^{4i} \cdot \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{5-\pi}{\pi}} \cdot \left[ A + e^{-4i} \cdot \frac{a \cdot (1-z) \cdot \cos 4a + \left(z + a^2\right) \cdot \sin 4a}{a\left(a^2 + z^2\right)} \right].$$

Інші випадки прикладу розглянути самостійно! ✍

**Приклад 2.16.** Нехай $\gamma -$ одиничне коло, $\gamma = \{t : |t| = 1\}$, $\gamma_1$ *і* $\gamma_2$ – верхнє та нижнє півколо відповідно. Розв'язати на контурі $\gamma$ крайову задачу Рімана

$$\Phi^+(t) = G(t) \cdot \Phi^-(t) + \sqrt{t^2 - 1}, \quad t \in \gamma, \tag{2.3}$$

де $G(t) = \begin{cases} t, \text{ якщо } \operatorname{Im} t \geq 0; \\ -t, \text{ якщо } \operatorname{Im} t < 0. \end{cases}$ Двозначна функція $\sqrt{z^2 - 1}$ задається деякою своєю певною гілкою. Розглянути класи функцій:

а) обмежені в точках $t_1 = 1, t_2 = -1$ і

б) з інтегровною нескінченністю в цих точках.

**Розв'язання.** Спочатку визначимося з гілкою двозначної функції $h(z) = \sqrt{z^2 - 1}$. За означенням степеневої функції комплексної змінної маємо:

$$\sqrt{z+1} = e^{\operatorname{Ln}\sqrt{z+1}} = e^{\frac{1}{2}\operatorname{Ln}(z+1)} = e^{\frac{1}{2}\left(\ln(z+1) + i\arg(z+1) + 2\pi n i\right)};$$

$$\sqrt{z-1} = e^{\operatorname{Ln}\sqrt{z-1}} = e^{\frac{1}{2}\operatorname{Ln}(z-1)} = e^{\frac{1}{2}\left(\ln(z-1) + i\arg(z-1) + 2\pi n i\right)}.$$

Тоді

$$\sqrt{z^2 - 1} = \sqrt{z-1} \cdot \sqrt{z+1} = e^{\frac{1}{2}\ln(z^2-1) + i(\arg(z-1) + \arg(z+1)) + 2\pi i(n+m)}.$$

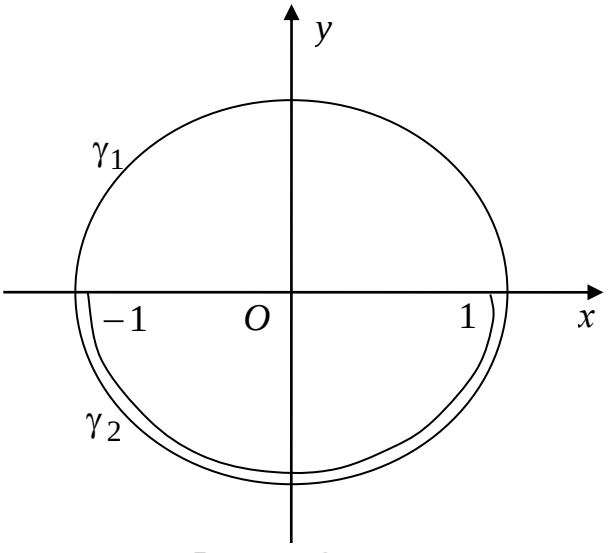


Рис. 2.13.

Зображення області наведено на рис. 2.13. Здійснимо розріз комплексної площини вздовж нижнього півкола $\gamma_2$. Оберемо ту гілку функції $h(z)$, щоб на верхньому березі розрізу при наближені

до точки $t \in \gamma_2$ аргумент функції $h^+(t) = \lim\limits_{\substack{z \to t \\ z \in D^+}} h(z) \quad (t \in \gamma_2)$ дорівнював аргументові $\frac{1}{2}\arg\left(t^2 - 1\right)$., тобто

$$h^+(t) = \sqrt{t^2 - 1} \quad (t \in \gamma_2). \tag{2.4}$$

Тоді при наближенні до цієї ж точки з боку нижнього берегу розрізу аргумент збільшиться на $\pi$. Це означатиме, що

$$h^-(t) = \lim_{\substack{z \to t \\ z \in D^-}} h(z) = h^+(t) \cdot e^{\pi i} \quad (t \in \gamma_2), \tag{2.5}$$

$$h^-(t) = -\sqrt{t^2 - 1} \quad (t \in \gamma_2). \tag{2.6}$$

На верхньому півколі $\gamma_1$, на якому відсутній розріз, граничні значення $h^{\pm}(t)$ функції $h(z)$ будуть збігатися і дорівнювати значенню $h^+(t)$ на $\gamma_2$, тобто

$$h^+(t) = h^-(t) = h^+(t) = \sqrt{t^2 - 1} \quad (t \in \gamma_1). \tag{2.7}$$

За такої домовленості щодо поведінки функції $h(z)$, потрібно обрати $n + m = 0$.

Застосуємо формулу (1.108'), де $t_1 = 1, t_2 = -1$ – точки розриву $G(t)$:

$$\frac{G(t_1 - 0)}{G(t_1 + 0)} = \frac{\lim\limits_{t \to 1}(-t)}{\lim\limits_{t \to 1} t} = \frac{-1}{+1} = \frac{e^{\pi i}}{e^{0i}} = e^{\pi i}; \quad \rho_1 = 1, \qquad \theta_1 = \pi;$$

$$\frac{G(t_2 - 0)}{G(t_2 + 0)} = \frac{\lim\limits_{t \to 1} t}{\lim\limits_{t \to 1}(-t)} = \frac{-1}{1} = e^{\pi i}; \quad \rho_2 = 1, \quad \theta_1 = \pi.$$

**а)** Знайдемо цілі числа $\kappa_1$, $\kappa_2$, застосовуючи формули (1.110') для отримання розв'язку, обмеженого в точках $t_1 = 1, t_2 = -1$:

$$\kappa_1 = \left[\frac{\theta_1}{2\pi}\right] = \left[\frac{\pi}{2\pi}\right] = 0; \quad \kappa_2 = \left[\frac{\theta_1}{2\pi}\right] = \left[\frac{\pi}{2\pi}\right] = 0.$$

Знаючи формулу(1.109') для обчислення $\kappa$ знайдемо:

$$\kappa_1 + \kappa_2 = 0 + 0 = 0.$$

Коефіцієнти набувають вигляду (див. формулу (1.8))

$$\nu_1 = \frac{\theta_1}{2\pi} - i \cdot \frac{\ln \rho_1}{2\pi} - \kappa_1 = \frac{1}{2}; \qquad \nu_2 = \frac{1}{2}.$$

Обираючи $z_0 = 0$ і застосовуючи формули (1.100), знайдемо функції $\omega_{1,2}^{\pm}(z)$ та добутки їх граничних значень:

$$\omega_1^+(z) = (z - t_1)^{\nu_1} = (z-1)^{\frac{1}{2}}; \quad \omega_2^+(z) = (z - t_2)^{\nu_2} = (z+1)^{\frac{1}{2}};$$

$$\omega_1^-(z) = \left(\frac{z - t_1}{z - z_0}\right)^{\nu_1} = \left(\frac{z-1}{z}\right)^{\frac{1}{2}}; \quad \omega_2^-(z) = \left(\frac{z - t_2}{z - z_0}\right)^{\nu_2} = \left(\frac{z+1}{z}\right)^{\frac{1}{2}};$$

$$\omega_1^+(t)\cdot\omega_2^+(t)=h^+(t)=\sqrt{t^2-1}\ \text{ для всіх } t\in\gamma;$$

$$\omega_1^-(t)\cdot\omega_2^-(t)=\frac{h^-(t)}{t}=\frac{\sqrt{t^2-1}}{t}\cdot\begin{cases}1, & t\in\gamma_1;\\ -1, & t\in\gamma_2.\end{cases}$$

Застосуємо формулу (1.107') для знаходження неперервної функції $G_1(t)$:

$$G_1(t)=\frac{\omega_1^-(t)\cdot\omega_2^-(t)}{\omega_1^+(t)\cdot\omega_2^+(t)}\cdot G(t)=t^{-1}\cdot h^-(t)\cdot\frac{1}{h^+(t)}\cdot G(t)=\begin{cases}t^{-1}\cdot t, & t\in\gamma_1\\ -t^{-1}\cdot(-t), & t\in\gamma_2\end{cases}=1.$$

Із (1.115)

$$g_1(t)=\frac{g(t)}{\omega_1^+(t)\cdot\omega_2^+(t)}=\frac{\sqrt{t^2-1}}{\sqrt{t^2-1}}=1.$$

Отже, задачу зведено до крайової задачі Рімана

$$\Phi_1^+(t)-\Phi_1^-(t)=1,\quad t\in\gamma.$$

Це задача про стрибок. Знайдемо її розв'язок – функції $\Phi_1^{\pm}(z)$, використовуючи формули (1.43):

$$\Phi_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\oint_\gamma\frac{1\cdot d\tau}{\tau-z}+c=\begin{cases}1+c, & z\in D^+;\\ c, & z\in D^-;\end{cases}$$

$$\Phi_1^+(z)=1+c,\quad \Phi_1^-(z)=c.$$

Враховуючи формули

$$\Phi^+(z)=\prod_{j=1}^{2}\omega_j^+(z)\cdot\Phi_1^+(z),\quad \Phi^-(z)=\prod_{j=1}^{2}\omega_j^-(z)\cdot\Phi_1^-(z),$$

одержимо:

$$\Phi^+(z)=(z-1)^{\frac{1}{2}}\cdot(z+1)^{\frac{1}{2}}\cdot(1+c)=\sqrt{z^2-1}\cdot(1+c);$$

$$\Phi^-(z)=\frac{\sqrt{z^2-1}}{z}\cdot c.$$

Проведемо **перевірку.** Для цього спочатку знайдемо граничні значення функцій $\Phi^{\pm}(z)$ на кожному півколі окремо. На *верхньому півколі* $\gamma_1$ граничні значення функції $h(z)=\sqrt{z^2-1}$ збігаються, як це зазначено в рівності (2.7):

$$h^+(t)=h^-(t)=\sqrt{t^2-1}.$$

Раціональні функції $\frac{c}{z}$ і $1+c$ мають граничні значення $\frac{c}{t}$ і $1+c$ відповідно, внаслідок їхньої неперервності на контурі. Отже, при $t\in\gamma_1$

$$\Phi^+(t)=\lim_{\substack{z\to t\\ z\in D^+}}\Phi^+(z)=\sqrt{t^2-1}\cdot(1+c),\quad \Phi^-(t)=\lim_{\substack{z\to t\\ z\in D^-}}\Phi^-(z)=\frac{\sqrt{t^2-1}}{t}\cdot c.$$

Розглянемо крайову умову $\Phi^+(t)=G(t)\cdot\Phi^-(t)+\sqrt{t^2-1}$ на $\gamma_1$. Оскільки $G(t)=t$ на $\gamma_1$, то після підстановки отриманих функцій в крайову умову, отримаємо рівність

$$\sqrt{t^2-1}\cdot(1+c)=t\cdot\frac{\sqrt{t^2-1}}{t}\cdot c+\sqrt{t^2-1}\quad(t\in\gamma_1),$$

яка є тотожністю.

Тепер розглянемо *нижнє півколо* $\gamma_2$. На ньому функція $h(z)$ має граничні значення, які визначаються рівностями (2.4) – (2.6):

$$h^-(t)=h^+(t)\cdot e^{\pi i},\ \ h^+(t)=\sqrt{t^2-1},\quad h^-(t)=-\sqrt{t^2-1}\quad(t\in\gamma_2).$$

Тоді, на нижньому півколі матимемо ($t\in\gamma_2$):

$$\Phi^+(t)=\lim_{\substack{z\to t\\ z\in D^+}}\Phi^+(z)=\sqrt{t^2-1}\cdot(1+c),\quad \Phi^-(t)=\lim_{\substack{z\to t\\ z\in D^-}}\Phi^-(z)=-\frac{\sqrt{t^2-1}}{t}\cdot c.$$

Оскільки $G(t)=-t$ на $\gamma_2$, то після підстановки отриманих значень в крайову умову, отримаємо рівність

$$\sqrt{t^2-1}\cdot(1+c)=-t\cdot\left(-\frac{\sqrt{t^2-1}}{t}\right)\cdot c+\sqrt{t^2-1}\quad(t\in\gamma_1),$$

яка є тотожністю.

Отже, функції $\Phi^{\pm}(z)$ задовольняють крайову умову. Причому, ці функції обмежені в точках $t_1=1,\ t_2=-1$.

**Відповідь.** $\Phi^+(z)=\sqrt{z^2-1}\cdot(1+c);\ \ \Phi^-(z)=\dfrac{\sqrt{z^2-1}}{z}\cdot c.$

**б)** Знайдемо цілі числа $\kappa_1$, $\kappa_2$, застосовуючи формули (1.111') для отримання розв'язку з інтегровною нескінченністю в точках $t_1=1, t_2=-1$:

$$\kappa_1=\left[\frac{\theta_1}{2\pi}\right]+1=\left[\frac{\pi}{2\pi}\right]+1=1;\quad \kappa_2=\left[\frac{\theta_1}{2\pi}\right]+1=\left[\frac{\pi}{2\pi}\right]+1=1.$$

Із (1.112)

$$\kappa_1+\kappa_2=2.$$

Показники степенів знайдемо із (1.109'):

$$\nu_1=\frac{\theta_1}{2\pi}-i\cdot\frac{\ln\rho_1}{2\pi}-\kappa_1=-\frac{1}{2};\quad \nu_2=-\frac{1}{2}.$$

Нехай $z_0=0$, тоді за формулами (1.100), знайдемо функції $\omega_{1,2}^{\pm}(z)$ та добуток їх граничних значень:

$$\omega_1^+(z)=(z-t_1)^{\nu_1}=(z-1)^{-\frac{1}{2}};\qquad \omega_2^+(z)=(z-t_2)^{\nu_2}=(z+1)^{-\frac{1}{2}};$$

$$\omega_1^-(z)=\left(\frac{z-t_1}{z-z_0}\right)^{\nu_1}=\left(\frac{z-1}{z}\right)^{-\frac{1}{2}};\qquad \omega_2^-(z)=\left(\frac{z-t_2}{z-z_0}\right)^{\nu_2}=\left(\frac{z+1}{z}\right)^{-\frac{1}{2}};$$

$$\omega_1^+(t)\cdot\omega_2^+(t)=\frac{1}{h^+(t)}=\frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\ \ \forall t\in\gamma;\quad \omega_1^-(t)\cdot\omega_2^-(t)=\frac{t}{h^-(t)}=\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\cdot\begin{cases}1, & t\in\gamma_1;\\ -1, & t\in\gamma_2.\end{cases}$$

Неперервну функцію $G_1(t)$ знаходимо за допомогою формули (1.107'):

$$G_1(t)=\frac{\omega_1^-(t)\cdot\omega_2^-(t)}{\omega_1^+(t)\cdot\omega_2^+(t)}\cdot G(t)=t\cdot h^-(t)\cdot\frac{1}{h^+(t)}\cdot G(t)=\begin{cases}t\cdot t, & t\in\gamma_1\\ -t\cdot(-t), & t\in\gamma_2\end{cases}=t^2.$$

Із (1.115)

$$g_1(t)=\frac{g(t)}{\omega_1^+(t)\cdot\omega_2^+(t)}=\sqrt{t^2-1}\cdot\sqrt{t^2-1}=t^2-1.$$

В результаті, задачу зведено до крайової задачі Рімана

$$\Phi_1{}^+(t)=G_1(t)\Phi_1{}^-(t)+g_1(t),\quad t\in\gamma$$

з неперервними коефіцієнтом і вільною функцією. Знайдемо її розв'язок. Використовуючи (1.56) і (1.55), отримаємо:

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{\ln[\tau^{-\kappa}G_1(\tau)]}{\tau-z}d\tau=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{\ln\left[\tau^{-2}\cdot\tau^2\right]}{\tau-z}d\tau=0,$$

$$X^+(z)=e^{\Gamma^+(z)}=1;\quad X^-(z)=e^{\Gamma^-(z)}=1.$$

Функцію $\Psi(z)$ обчислимо за допомогою формул (1.63) і (1.6)

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{g_1(\tau)}{X^+(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-z}=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{\tau^2-1}{1}\cdot\frac{d\tau}{\tau-z}=\begin{cases}z^2-1, & z\in D^+;\\ 0, & z\in D^-.\end{cases}$$

За допомогою (1.65), (1.66) і (1.105') отримаємо

$$\Phi^+(z)=(z-1)^{-\frac{1}{2}}\cdot(z+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot1\cdot\left[Az^2+Bz+C+z^2-1\right]=\frac{Az^2+Bz+C+z^2-1}{\sqrt{z^2-1}}.$$

$$\Phi^-(z)=z^{-2}\cdot\left(\frac{z-1}{z}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{z+1}{z}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot1\cdot\left[Az^2+Bz+C+\Psi^-(z)\right]=\frac{Az^2+Bz+C}{z\sqrt{z^2-1}}.$$

Проведемо **перевірку.** Спочатку знайдемо граничні значення функцій $\Phi^\pm(z)$ на кожному півколі окремо. На *верхньому півколі* $\gamma_1$ граничні значення функції $h(z)=\sqrt{z^2-1}$ збігаються, як це зазначено в рівності (2.7):

$$h^+(t)=h^-(t)=\sqrt{t^2-1}.$$

Отже, при $t\in\gamma_1$

$$\Phi^+(t)=\lim_{\substack{z\to t\\ z\in D^+}}\Phi^+(z)=\frac{At^2+Bt+C+t^2-1}{\sqrt{t^2-1}},$$

$$\Phi^-(t)=\lim_{\substack{z\to t\\ z\in D^-}}\Phi^-(z)=\frac{At^2+Bt+C}{t\sqrt{t^2-1}}.$$

Оскільки $G(t)=t$ на $\gamma_1$, то після підстановки отриманих функцій в крайову умову, отримаємо рівність

$$\frac{At^2+Bt+C+t^2-1}{\sqrt{t^2-1}}=t\cdot\frac{At^2+Bt+C}{t\sqrt{t^2-1}}+\sqrt{t^2-1}\quad(t\in\gamma_1),$$

яка є тотожністю.

Тепер розглянемо *нижнє півколо* $\gamma_2$. На ньому функція $h(z)$ має граничні значення, які визначаються рівностями (2.4) – (2.6):

$$h^-(t)=h^+(t)\cdot e^{\pi i},\ \ h^+(t)=\sqrt{t^2-1},\quad h^-(t)=-\sqrt{t^2-1}\quad(t\in\gamma_2).$$

Аналогічно верхньому півколу, на нижньому матимемо $(t\in\gamma_2)$

$$\Phi^+(t)=\lim_{\substack{z\to t\\ z\in D^+}}\Phi^+(z)=\frac{At^2+Bt+C+t^2-1}{\sqrt{t^2-1}},$$

$$\Phi^-(t)=\lim_{\substack{z\to t\\ z\in D^-}}\Phi^-(z)=-\frac{At^2+Bt+C}{t\sqrt{t^2-1}}.$$

Оскільки $G(t)=-t$ на $\gamma_2$, то після підстановки отриманих значень в крайову умову, отримаємо рівність

$$\frac{At^2+Bt+C+t^2-1}{\sqrt{t^2-1}}=-t\cdot\left(-\frac{At^2+Bt+C}{t\sqrt{t^2-1}}\right)+\sqrt{t^2-1}\quad(t\in\gamma_1),$$

яка є тотожністю.

Отже, функції $\Phi^{\pm}(z)$ задовольняють крайову умову. Причому, ці функції в точках $t_1=1, t_2=-1$ мають нескінченність порядку $\frac{1}{2}$, тобто інтегровного порядку.

**Відповідь.** $\Phi^+(z)=\dfrac{Az^2+Bz+C+z^2-1}{\sqrt{z^2-1}};\ \ \Phi^-(z)=\dfrac{Az^2+Bz+C}{z\sqrt{z^2-1}}.$

## 2.8 Задача Рімана на розімкненому контурі

Спочатку визначимося з гілкою двозначної функції $h(z)=\sqrt{z^2-1}$. За означенням степеневої функції комплексної змінної маємо

$$\sqrt{z+1}=e^{\operatorname{Ln}\sqrt{z+1}}=e^{\frac{1}{2}\operatorname{Ln}(z+1)}=e^{\frac{1}{2}\left(\ln|z+1|+i\arg(z+1)+2\pi ni\right)};$$

$$\sqrt{z-1}=e^{\operatorname{Ln}\sqrt{z-1}}=e^{\frac{1}{2}\operatorname{Ln}(z-1)}=e^{\frac{1}{2}\left(\ln|z-1|+i\arg(z-1)+2\pi ni\right)}.$$

Тоді

$$\sqrt{z^2-1}=\sqrt{z-1}\cdot\sqrt{z+1}=e^{\frac{1}{2}\ln|z^2-1|+\frac{i}{2}(\arg(z-1)+\arg(z+1))+\pi i(n+m)}.$$

Здійснимо розріз комплексної площини вздовж відрізка $[-1;1]$ (див. рис. 2.14). Оберемо ту гілку функції $h(z)$, щоб на верхньому березі розрізу при наближені до точки $t\in[-1;1]$ аргумент функції $h^+(t)=\lim\limits_{\substack{z\to t\\ z\in D^+}} h(z)$ $(t\in[-1;1])$ дорівнював аргументові $\frac{1}{2}\arg\left(t^2-1\right)$., тобто

$$h^+(t)=\sqrt{t^2-1}\quad t\in[-1,1]. \tag{2.8}$$

За такої домовленості щодо поведінки функції $h(z)$, потрібно обрати $n+m=0$.

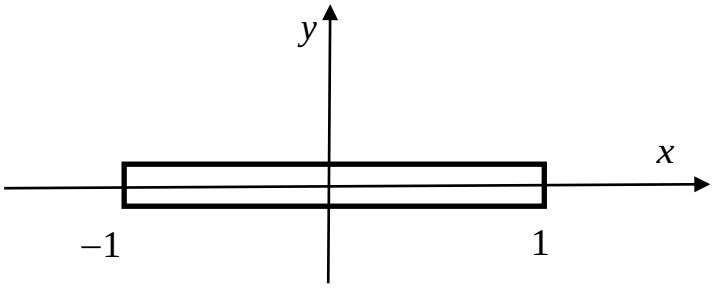



Рис. 2.14.

Зауважимо, що для $t\in[-1;1]$ вираз під знаком кореня в правій частині (2.8) є від'ємним. Тому $h^+(t)=\sqrt{t^2-1}=\sqrt{1-t^2}\cdot\sqrt{-1}$. Внаслідок вибору нульової гілки функції $h(z)=\sqrt{z^2-1}$, значення кореня із $-1$ оберемо рівним $\sqrt{-1}=i$. Отже,

$$h^+(t)=i\sqrt{1-t^2}\quad (t\in[-1,1]). \tag{2.9}$$

При наближенні до точок розрізу відрізка [−1;1] з боку нижнього берегу розрізу аргумент збільшиться на $\pi$. Це означатиме, що

$$h^-(t)=\lim_{\substack{z\to t\\ z\in D^-}} h(z)=h^+(t)\cdot e^{\pi i}\quad (t\in[-1,1]). \tag{2.10}$$

Зважаючи на (2.9), отримаємо

$$h^-(t)=-i\sqrt{1-t^2}\quad (t\in[-1,1]). \tag{2.11}$$

В точках дійсної осі $t\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$, в яких відсутній розріз, граничні значення $h^{\pm}(t)$ функції $h(z)$ будуть збігатися. При цьому, при $t\in(1;+\infty)$ значення виразу $\frac{1}{2}\arg\left(t^2-1\right)$ дорівнює 0, тому $h^+(t)=h^-(t)=\sqrt{t^2-1}$, а при $t\in(-\infty;-1)$ значення $\frac{1}{2}\arg\left(t^2-1\right)$ дорівнює $\frac{\pi}{2}$, тому $h^+(t)=h^-(t)=-\sqrt{t^2-1}$. Отже,

$$h^+(t)=h^-(t)=\operatorname{sgn}t\,\sqrt{t^2-1}\quad (t\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)). \tag{2.12}$$

Застосуємо теоретичні відомості підрозділу 1.13, в якому задача Рімана на розімкненому контурі зводиться до задачі Рімана з розривним коефіцієнтом. Останню задачу будемо розв'язувати зведенням її до задачі з неперервним коефіцієнтом, як це було в підрозділі 1.12.

Для подальшого розв'язання потрібно знати значення наступного інтеграла.

**Приклад 2.17** [Пихтєєв Г.М.][1]. Довести, що

$$H(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}\cdot(\tau-z)}=-\frac{1}{2\cdot\sqrt{z^2-1}}, \tag{2.13}$$

на комплексній площині з розрізом вздовж відрізка $[-1;1]$.

**Розв'язання.** Обчислимо спочатку цей інтеграл при $z=x\in\mathbb{R}$, де $|x|>1$

$$H(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}\,(\tau-x)}.$$

Для обчислення введемо заміну $\tau=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$. Тоді

$$d\tau=\frac{-4tdt}{\left(1+t^2\right)^2},\quad \sqrt{1-\tau^2}=\frac{2t}{1+t^2},\quad \tau-x=\frac{1-x+t^2\left(-1-x\right)}{1+t^2},$$

якщо $\tau=1$, то $t=0$, а якщо $\tau\to-1+0$, то $t\to+\infty$. В результаті одержимо: при $x>1$

$$H(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{dt}{1-x+t^2\left(-1-x\right)};$$

$$H(x)=-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{dt}{x-1+t^2\left(x+1\right)}=-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{dt}{\left(\sqrt{x-1}\right)^2+t^2\left(\sqrt{x+1}\right)^2}=$$

$$=-\frac{1}{\pi\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}}\operatorname{arctg}\frac{t\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}\Bigg|_{0}^{+\infty}=-\frac{1}{\pi\sqrt{x^2-1}}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{-1}{2a\sqrt{x^2-1}};$$

при $x<-1$

$$H(x)=\frac{1}{a\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{dt}{1-x+t^2\left(-1-x\right)}=\frac{1}{a\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{dt}{\left(\sqrt{1-x}\right)^2+t^2\left(\sqrt{-1-x}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{\pi\sqrt{1-x}\sqrt{-1-x}}\operatorname{arctg}\frac{t\sqrt{-1-x}}{\sqrt{1-x}}\Bigg|_{0}^{+\infty}=\frac{1}{\pi\sqrt{x^2-1}}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}.$$

Отже, при $|x|>1$ маємо:

$$H(x)==\frac{-\operatorname{sgn}x}{2\sqrt{x^2-1}}.$$

[1] Пыхтеев Г.Н. Точные методы вычисления интегралов типа Коши. Новосибирск : Наука, 1980. 128 с

Продовжимо цю функцію на всю комплексну площину з розрізом вздовж відрізка $[-1;1]$. Функція $\sqrt{z^2-1}$ в такій комплексній площині з розрізом обрана тією гілкою на якій вона дорівнює $\operatorname{sgn} x \cdot \sqrt{x^2-1}$ при $|x|>1$ (відповідно до (2.12)). Звідси випливає, що продовженням функції $H(x)$ на всю комплексну площину з розрізом вздовж відрізка $[-1;1]$ є функція

$$H(z)=\frac{-1}{2\sqrt{z^2-1}}. \ \blacksquare$$

**Приклад 2.18.** Розв'язати крайову задачу Рімана

$$\Phi^+(t)=-\Phi^-(t)+t^2-1, \quad t\in[-1;1],$$

в класі обмежених функцій в точках $t_1=1, \ t_2=-1$.

**Розв'язання.** Як контур в даній задачі розглядається відрізок $[-1;1]$. Він є частиною дійсної осі. Отже, даний відрізок можна вважати як розімкнений контур дійсної осі. Застосуємо формули (1.17), (1.18) для зведення поставленої задачі до задачі з розривним коефіцієнтом на дійсній осі. Отримаємо задачу:

$$\Phi^+(t)=G^*(t)\Phi^-(t)+g^*(t), \ t\in(-\infty;+\infty),$$

$$G^*(t)=\begin{cases}-1, & t\in[-1;1],\\ 1, & t\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty),\end{cases} \qquad g^*(t)=\begin{cases}t^2-1, & t\in[-1;1],\\ 0, & t\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty).\end{cases}$$

Застосуємо формулу (1.108'), де $t_1=1, \ t_2=-1$ – точки розриву $G(t)$.

$$\frac{G(t_1-0)}{G(t_1+0)}=\frac{-1}{1}=\frac{e^{\pi i}}{e^{0i}}=e^{\pi i}; \quad \rho_1=1, \theta_1=\pi;$$

$$\frac{G(t_2-0)}{G(t_2+0)}=\frac{1}{-1}=\frac{e^{0i}}{e^{\pi i}}=e^{-\pi i}; \quad \rho_2=1, \theta_2=-\pi.$$

Знайдемо цілі числа $\kappa_1$, $\kappa_2$, застосовуючи формулу (1.110') для отримання розв'язку, обмеженого в точках $t_1=1, t_2=-1$:

$$\kappa_1=\left[\frac{\theta_1}{2\pi}\right]=\left[\frac{\pi}{2\pi}\right]=0; \quad \kappa_2=\left[\frac{\theta_2}{2\pi}\right]=\left[\frac{-\pi}{2\pi}\right]=-1.$$

Із (1.112) і (1.109')

$$\kappa=\kappa_1+\kappa_2=-1,$$

$$\nu_1=\frac{\theta_1}{2\pi}-i\cdot\frac{\ln\rho_1}{2\pi}-\kappa_1=\frac{1}{2}; \qquad \nu_2=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}.$$

Для випадку задачі на дійсній осі у формулі (1.100) замість функцій $z-z_0$ будемо застосовувати $\frac{z-i}{z+i}$. Знайдемо функції $\omega_{1,2}^{\pm}(z)$:

$$\omega_1^+(z)=(z-t_1)^{\nu_1}=(z-1)^{\frac{1}{2}}; \quad \omega_2^+(z)=(z-t_2)^{\nu_2}=(z+1)^{\frac{1}{2}};$$

$$\omega_1^-(z)=\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^{\nu_1}\cdot(z-t_1)^{\nu_1}=\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot(z-1)^{\frac{1}{2}};$$

$$\omega_2^-(z)=\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^{\nu_1}\cdot(z-t_2)^{\nu_1}=\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot(z+1)^{\frac{1}{2}}.$$

Тоді

$$\omega_1^+(t)\cdot\omega_2^+(t)=h^+(t)=\begin{cases} i\sqrt{1-t^2}, & t\in[-1;1];\\ \operatorname{sgn}t\sqrt{t^2-1}, & t\in(-\infty;-1)\bigcup(1;+\infty);\end{cases} \tag{2.14}$$

$$\omega_1^-(t)\cdot\omega_2^-(t)=h^-(t)\cdot\frac{t+i}{t-i}=\frac{t+i}{t-i}\cdot\begin{cases} -i\sqrt{1-t^2}, & t\in[-1;1];\\ \operatorname{sgn}t\sqrt{t^2-1}, & t\in(-\infty;-1)\bigcup(1;+\infty).\end{cases} \tag{2.15}$$

За допомогою (1.107') знайдемо неперервну функцію $G_1(t)$:

$$G_1(t)=\frac{\omega_1^-(t)\cdot\omega_2^-(t)}{\omega_1^+(t)\cdot\omega_2^+(t)}\cdot G^*(t)=h^-(t)\cdot\frac{t+i}{t-i}\cdot\frac{1}{h^+(t)}\cdot G^*(t)=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{t+i}{t-i}\cdot(-1)\cdot(-1), & t\in[-1;1]\\ \dfrac{t+i}{t-i}\cdot1\cdot1, & t\in(-\infty;-1)\bigcup(1;+\infty)\end{cases}=\frac{t+i}{t-i}. \tag{2.16}$$

Із (1.115)

$$g_1(t)=\frac{g^*(t)}{\omega_1^+(t)\cdot\omega_2^+(t)}=\begin{cases}\dfrac{t^2-1}{i\sqrt{1-t^2}}, & t\in[-1;1];\\ 0, & t\in(-\infty;-1)\bigcup(1;+\infty);\end{cases}=\begin{cases} i\sqrt{1-t^2}, & t\in[-1;1];\\ 0, & t\in(-\infty;-1)\bigcup(1;+\infty).\end{cases}$$

Отже, задачу зведено до крайової задачі Рімана

$$\Phi_1{}^+(t)=G_1(t)\Phi_1{}^-(t)+g_1(t),\quad t\in R$$

з неперервним коефіцієнтом. Знайдемо її розв'язок.

Із (1.56) і (1.55):

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{\ln\left[\left(\dfrac{\tau-i}{\tau+i}\right)^{-\kappa}G_1(\tau)\right]}{\tau-z}d\tau=0;$$

$$X^+(z)=e^{\Gamma^+(z)}=1;\quad X^-(z)=e^{\Gamma^-(z)}=1.$$

Функцію $\Psi(z)$ обчислимо за допомогою формули (1.63):

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g_1(\tau)}{X^+(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{i\sqrt{1-\tau^2}}{1}\frac{d\tau}{\tau-z}=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1-\tau^2}{\sqrt{1-\tau^2}}\frac{d\tau}{\tau-z}=$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\tau d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}-\frac{z}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}+\left(1-z^2\right)\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{d\tau}{(\tau-z)\cdot\sqrt{1-\tau^2}}.$$

Скористаємося інтегралом (2.13), щоб отримати

$$\Psi(z)=-\frac{z}{2}+\left(1-z^2\right)\cdot\frac{-1}{2\cdot\sqrt{z^2-1}}=-\frac{z}{2}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{z^2-1}.$$

Знайдемо значення коефіцієнта $C$ за формулою (1.96), враховуючи властивості функції $h(z)$:

$$C=-\Psi^-(-i)=-\left(-\frac{(-i)}{2}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{(-i)^2-1}\right)=-\frac{i}{2}\cdot\left(1+\sqrt{2}\right).$$

Використовуючи формули (1.94) і (1.95) при $\kappa=-1$

$$\Phi_1^+(z)=X^+(z)\cdot\left[\Psi^+(z)+C\right]=1\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{z^2-1}-\frac{z}{2}-\frac{i}{2}\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)\right);$$

$$\Phi_1^-(z)=\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{-\kappa}\cdot X^-(z)\cdot\left[\Psi^-(z)+C\right]=\frac{z-i}{z+i}\cdot 1\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{z^2-1}-\frac{z}{2}-\frac{i}{2}\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)\right).$$

Тоді внаслідок (1.105')

$$\Phi^+(z)=\prod_{j=1}^{2}\omega_j^+(z)\cdot\Phi_1^+(z)=$$

$$=\left(z-1\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(z+1\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{z^2-1}-\frac{z}{2}-\frac{i}{2}\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(z^2-1\right)-\frac{1}{2}\cdot\left(i\left(1+\sqrt{2}\right)+z\right)\cdot\sqrt{z^2-1};$$

$$\Phi^-(z)=\prod_{j=1}^{2}\omega_j^-(z)\cdot\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{-\kappa}\cdot\Phi_1^-(z)=$$

$$=\sqrt{z^2-1}\cdot\frac{z+i}{z-i}\cdot\frac{z-i}{z+i}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{z^2-1}-\frac{z}{2}-\frac{i}{2}\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(z^2-1\right)-\frac{1}{2}\cdot\left(i\left(1+\sqrt{2}\right)+z\right)\cdot\sqrt{z^2-1}.$$

Отже, єдиною, аналітичною на всій комплексній площині з розрізом вздовж відрізка $[-1;1]$ є функція $\Phi(z)=\frac{1}{2}\cdot\left(z^2-1\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(i\left(1+\sqrt{2}\right)-z\right)\cdot\sqrt{z^2-1}$. Ця функція в точках $t_{1,2}=\pm1$ є обмеженою, що й вимагається умовою.

Проведемо **перевірку**. Знайдемо граничні значення функції $\Phi(z)$ *на відрізку* $[-1;1]$. На верхньому березі цього відрізка граничне значення функції $h(z)=\sqrt{z^2-1}$ дорівнює $h^+(t)=i\sqrt{1-t^2}$ (див (2.9)), тому

$$\Phi^+(t)=\lim_{\substack{z\to t\\ z\in D^+}}\Phi(z)=\frac{1}{2}\cdot\left(t^2-1\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(1+\sqrt{2}-it\right)\cdot\sqrt{1-t^2}.$$

Для нижнього берега відрізка $[-1;1]$ маємо: $h^-(t)=-i\sqrt{1-t^2}$ (див. (2.11)), тому

$$\Phi^-(t)=\lim_{\substack{z\to t\\ z\in D^-}}\Phi(z)=\frac{1}{2}\cdot\left(t^2-1\right)-\frac{1}{2}\cdot\left(1+\sqrt{2}-it\right)\cdot\sqrt{1-t^2}.$$

Підставимо в крайову умову $\Phi^+(t)=-\Phi^-(t)+t^2-1$ на $[-1;1]$:

$$\frac{1}{2}\cdot\left(t^2-1\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(1+\sqrt{2}-it\right)\cdot\sqrt{1-t^2}=-\left[\frac{1}{2}\cdot\left(t^2-1\right)-\frac{1}{2}\cdot\left(1+\sqrt{2}-it\right)\cdot\sqrt{1-t^2}\right]+t^2-1,$$

яка є тотожністю.

**Відповідь.** $\Phi(z)=\frac{1}{2}\cdot\left(z^2-1\right)-\frac{1}{2}\cdot\left(i\left(1+\sqrt{2}\right)+z\right)\cdot\sqrt{z^2-1}$.

# Розділ 3. ЗАСТОСУВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ У КОНТАКТНІЙ МЕХАНІЦІ

## 3.1 Постановка задачі та інтегральне рівняння

Нехай форма основи штампа описується рівнянням $y = f(x)$. У випадку штампа з неплоскою основою $f(x) = Ax^2$, де $A = \frac{1}{2R}\left[\frac{1}{\text{м}}\right]$, $R$ – радіус кривизни (рис. 3.1), плоскою – $f(x) = 0$ (рис. 3.2).

Штамп вдавлюється в півплощину силою $P$, паралельною вісі $y$. Лінія контакту визначається як $|x| \le a$ (рис. 3.1 і 3.2.).

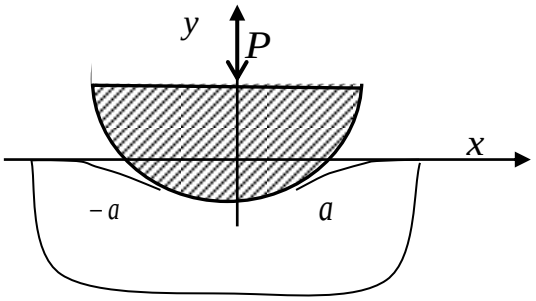



Рисунок 3.1

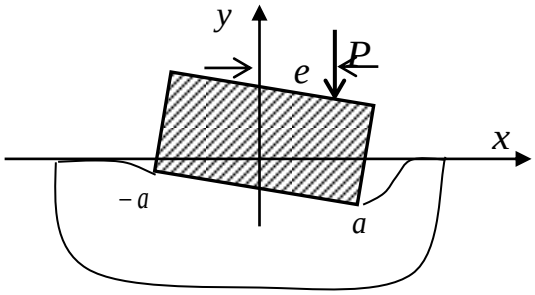



Рисунок 3.2

Будемо розглядати випадок контактної взаємодії в рамках лінійної теорії пружності, тоді зміщення $v(x, y)$ на лінії контакту $|x| \le a$ буде відрізнятися від функції $f(x)$ лише на лінійний доданок. Отже, маємо умову, яка визначає умову контакту за відсутності тертя в зоні контакту:

$$v(x, 0) = -\left[\delta + \alpha x - f(x)\right] \quad (|x| \le a). \tag{3.1}$$

Тут $\delta$ – осадка штампа у від'ємному напрямку осі $Oy$, $\alpha$ – тангенс куту повороту.

Використовуючи умову (3.1), отримаємо рівняння [Штаєрман І.Я.][1] :

$$\int_{-a}^{a} \frac{q(\xi)}{\xi - x} d\xi = \pi\theta\left[\alpha - f'(x)\right] (|x| \le a), \tag{3.2}$$

де $\theta = \frac{E}{2(1-\nu^2)}$, $E, \nu$ – модуль пружності і коефіцієнт Пуассона відповідно, $q(\xi)$ – функція тиску на площадці контакту. Також виконуються умови рівноваги сил та моментів:

$$P = \int_{-a}^{a} q(x)\, dx, \tag{3.3}$$

$$Pe = \int_{-a}^{a} x\, q(x)\, dx. \tag{3.4}$$

[1] Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. М.-Л., 1949. 270 с.

## 3.2 Зведення інтегрального рівняння до крайової задачі Рімана

Розглянемо один із видів особливого (сингулярного) інтегрального рівняння, яке називають характеристичним:

$$\mathrm{K}^{\circ}_{\phi} \equiv u(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau = f(t). \tag{3.5}$$

У цьому випадку рівняння можна привести до крайової задачі Рімана.

Введемо аналітичну функцію, задану інтегралом типу Коші, щільністю якого служить шуканий розв'язок характеристичного рівняння

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau. \tag{3.6}$$

Згідно з формулами Сохоцького (1.22) і (1.23),

$$\varphi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t),$$

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}dt = \Phi^+(t) + \Phi^-(t). \tag{3.7}$$

Виражаємо $\varphi(t)$, $\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}dt$ через $\Phi^+(t)$ і $\Phi^-(t)$ із формул Сохоцького, підставляючи до рівняння (3.5), отримане розв'язуємо відносно $\Phi^+(t)$. В результаті приходимо до крайової задачі Рімана, розв`язком якої є аналітична функція $\Phi(z)$:

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \tag{3.8}$$

де

$$G(t) = \frac{u(t) - b(t)}{u(t) + b(t)}, \qquad g(t) = \frac{f(t)}{u(t) + b(t)}. \tag{3.9}$$

У силу того, що шукана функція $\Phi(z)$ подається інтегралом типу Коші (3.6), вона повинна задовольняти додаткову умову

$$\Phi^-(\infty) = 0. \tag{3.10}$$

## 3.3 Зведення інтегрального рівняння контактної задачі до крайової задачі Рімана

Розглянемо випадок коли відсутня сила тертя в області контакту. Для цього випадку ми маємо рівняння (3.2), яке є характеристичним сингулярним, що допускає зведення до крайової задачі Рімана.

Розглянемо функцію $\Phi(z)$ комплексної змінної $z$, задану інтегралом типу Коші

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-a}^{a} \frac{q(\xi)}{\xi - z}d\xi. \tag{3.11}$$

Оскільки функція тиску $q(\xi)$ має бути неперервною на інтервалі $(-a;a)$, то інтеграл (3.11) як функція $z$ є аналітичною функцією у всій комплексній

площині $z$, за винятком точок відрізку інтегрування $[-a;a]$. Крім того, функція $\Phi(z)$ в нескінченно віддаленій точці обертається в нуль ($\Phi(\infty)=0$), як $|z|^{-1}$.

Проведемо в площині комплексної змінної $z$ по вісі $x$ розріз, що з'єднує точки $x=-a$ та $x=a$. Позначимо граничне значення функції $\Phi(z)$ при прямуванні точки $z$ до межі верхнього берега розрізу через $\Phi^{+}(x)$ та до межі нижнього берега розрізу – через $\Phi^{-}(x)$. Приведемо сингулярне інтегральне рівняння (3.2) до еквівалентної йому крайовій задачі. У формулах (3.10) покладемо

$$u(x)=0,\ b(x)=\frac{1}{\pi i},\ f(x)=\pi\theta\left[\alpha-f'(x)\right],$$

тоді

$$G(x)=\frac{0-\pi i}{0+\pi i}=-1,\ g(x)=\frac{\pi\theta\left[\alpha-f'(x)\right]}{0+\pi i}=-i\theta\left[\alpha-f'(x)\right],$$

звідки

$$\Phi^{+}(x)+\Phi^{-}(x)=-i\theta\left[\alpha-f'(x)\right]\ (|x|\le a). \qquad (3.12)$$

Таким чином, проблема зведена до визначення аналітичної у всій площині $z$ з розрізом функції, крайові значення якої на берегах розрізу задовольняють умову (3.12).

## 3.4 Розв'язання крайової задачі Рімана плоскої контактної задачі для штампа з неплоскою підошвою

Спочатку зведемо характеристичне сингулярне інтегральне рівняння контактної задачі до крайової задачі Рімана. До крайової задачі на розімкненому контурі (на відрізку дійсної осі) застосуємо викладений вище метод. Існують й інші методи розв'язання крайової задачі у цьому випадку, які ми пропонуємо вивчити самостійно читачеві посібника.

**3.4.1. Отримання загального результату.** У попередньому підрозділі плоску контактну задачу було зведено до задачі Рімана з крайовою умовою у формі (3.12). Розглянемо випадок, коли $e=0$, тоді й нахил буде відсутнім і $\alpha=0$, а крайова умова набуде вигляду;

$$\Phi^{+}(t)=-\Phi^{-}(t)+i\theta f'(t)\ \ |t|\le a.$$

Звідки $G(t)=-1,\ g(t)=i\theta f'(t)$. Введемо нові функції

$$G^{*}(t)=\begin{cases}-1, & |t|\le a,\\ 1, & |t|>a,\end{cases}\quad g^{*}(t)=\begin{cases}i\theta f'(t), & |t|\le a,\\ 0, & |t|>a.\end{cases}$$

У випадку контакту штампа з неплоскою підошвою функція тиску повинна бути обмеженою і неперервною на межі відрізка контакту, тобто

$$q(\pm a)=0. \qquad (3.13)$$

У прикладі 2.18 аналогічна задача була зведена до задачі Рімана з неперервними коефіцієнтами $G_1(t)$. Аналогічно прикладу 2.18 і відповідно до формул (1.108') і (1.110') у випадку, коли розв'язок шукаємо у класі обмежених функцій в точках розриву

для точки $t_1 = a$ отримаємо: $\rho_1 = 1,\ \theta_1 = \pi;\ \ \kappa_1 = 0,\ \nu_1 = \dfrac{1}{2};$

для точку $t_2 = -a$ – $\rho_2 = 1$, та $\theta_2 = -\pi;\ \kappa_2 = -1,\ \nu_2 = \dfrac{1}{2};$

із (1.112) випливає, що $\kappa = \kappa_1 + \kappa_2 = -1.$

Аналогічно до викладок (2.14) – (2.16) виведемо:

$$\omega_1^+(t)\cdot\omega_2^+(t) = \begin{cases} i\sqrt{a^2-t^2}, & t\in[-a;a]; \\ \operatorname{sgn} t\sqrt{t^2-a^2}, & t\in(-\infty;-a)\cup(a;+\infty); \end{cases}$$

$$\omega_1^-(t)\cdot\omega_2^-(t) = \frac{t+ai}{t-ai}\cdot\begin{cases} -i\sqrt{a^2-t^2}, & t\in[-a;a]; \\ \operatorname{sgn} t\sqrt{t^2-a^2}, & t\in(-\infty;-a)\cup(a;+\infty); \end{cases}$$

$$G_1(t) = \frac{\omega_1^-(t)\cdot\omega_2^-(t)}{\omega_1^+(t)\cdot\omega_2^+(t)}\cdot G^*(t) = \frac{t+ai}{t-ai}.$$

Отже, $G_1(t) = \dfrac{t+ai}{t-ai}$ на всій дійсній осі, тому ця функція неперервна на ній.

Згідно з формулою (1.115) і, враховуючи (2.2), (2.3) і (2.5), отримаємо:

$$g_1(t) = \frac{g^*(t)}{\omega_1^+(t)\cdot\omega_2^+(t)} = \begin{cases} \dfrac{\theta f'(t)}{\sqrt{a^2-t^2}}, & |t|\le a; \\ 0, & |t|>a. \end{cases}$$

Тепер задачу зведено до задачі Рімана з неперервним коефіцієнтом $G_1(t)$ і крайовою умовою

$$\Phi^+(t) = G_1(t)\cdot\Phi^-(t) + g_1(t),\ \ |t|\le a,$$

Знайдемо її розв'язок. Для цього спочатку визначимо функції $\Gamma(z)$ і $X(z)$ за формулами (1.56) і (1.55):

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\ln\left[\left(\frac{\tau-ai}{t+ai}\right)^{-\kappa}G_1(\tau)\right]\frac{d\tau}{\tau-z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1}\ln\left[\frac{\tau-ai}{\tau+ai}\cdot\frac{\tau+ai}{\tau-ai}\right]\frac{d\tau}{\tau-z} = 0;$$

$$X(z) = e^{\Gamma(z)} = e^0 = 1.$$

Тепер обчислимо функцію $\Psi(z)$ за формулою (1.63), враховуючі, що $f(x) = Ax^2$:

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g_1(\tau)}{X^+(\tau)}\cdot\frac{d\tau}{\tau-z} = \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}\frac{-i\theta f'(\tau)d\tau}{(\tau-z)\sqrt{a^2-\tau^2}} = -\frac{i\theta}{2\pi}\int_{-a}^{a}\frac{2A\tau d\tau}{(\tau-z)\sqrt{a^2-\tau^2}}.$$

Використовуючи формулу (2.13), обчислимо інтеграл на комплексній площині змінної $z$ з розрізом вздовж відрізку $[-a;a]$:

$$H_1(z)=\frac{i\theta}{2\pi}\int_{-a}^{a}\frac{2A\tau\,d\tau}{(\tau-z)\sqrt{a^2-\tau^2}}=\frac{i\,\theta\,2\,A}{2\pi}\int_{-a}^{a}\frac{(\tau-z+z)d\tau}{(\tau-z)\sqrt{a^2-\tau^2}}=$$

$$=\frac{i\,\theta A}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{d\tau}{\sqrt{a^2-\tau^2}}+2A\,i\,\theta\,z\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}\frac{d\tau}{(\tau-z)\sqrt{a^2-\tau^2}}=\frac{i\,\theta A}{\pi}\pi+2A\,i\,\theta\,z\frac{-1}{2\sqrt{z^2-a^2}}.$$

Звідси матимемо:

$$\Psi(z)=i\theta\left[-A+\frac{Az}{\sqrt{z^2-a^2}}\right].$$

Використовуємо формули (1.94) і (1.95) при $\kappa=-1$:

$$\Phi_1^+(z)=X^+(z)\cdot\left(\Psi^+(z)+Ci\right)=1\cdot\left(i\theta\left[-A+\frac{Az}{\sqrt{z^2-a^2}}\right]+Ci\right)=;$$

$$\Phi_1^-(z)=\left(\frac{z-ai}{z+ai}\right)^{-\kappa}\cdot X^-(z)\cdot\Psi^-(z)=\frac{z-ai}{z+ai}\cdot1\cdot\left(i\theta\left[-A+\frac{Az}{\sqrt{z^2-a^2}}\right]+Ci\right).$$

Тоді внаслідок (1.105')

$$\Phi^+(z)=\prod_{j=1}^{2}\omega_j^+(z)\cdot\Phi_1^+(z)=(z-a)^{\frac{1}{2}}\cdot(z+a)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(i\theta\left[-A+\frac{A\,z}{\sqrt{z^2-a^2}}\right]+Ci\right)=$$

$$=i\left[\left(-A\,\theta+C\right)\cdot\sqrt{z^2-a^2}+A\,\theta\,z\right];$$

$$\Phi^-(z)=\prod_{j=1}^{2}\omega_j^-(z)\cdot\left(\frac{z-ai}{z+ai}\right)^{-\kappa}\cdot\Phi_1^-(z)=$$

$$=\sqrt{z^2-a^2}\cdot\frac{z+ai}{z-ai}\cdot\frac{z-ai}{z+ai}\cdot\left(i\theta\left[-A+\frac{A\,z}{\sqrt{z^2-a^2}}\right]+Ci\right)=$$

$$=i\left[\left(-A\,\theta+C\right)\cdot\sqrt{z^2-a^2}+A\,\theta\,z\right].$$

Застосуємо умову $\Phi(\infty)=0$, щоб знайти сталу $C$. В наслідок того, що

$$0=\lim_{z\to\infty}\left[\left(-A\,\theta+C\right)\cdot\sqrt{z^2-a^2}+A\,\theta\,z\right]=\lim_{z\to\infty}\left[C\cdot\sqrt{z^2-a^2}+\frac{A\,\theta\,a^2}{z+\sqrt{z^2-a^2}}\right],$$

для виконання зазначеної умови потрібно, щоб $C=0$.

Отже,

$$\Phi(z)=\Phi^+(z)=\Phi^-(z)=i\left[-A\theta\cdot\sqrt{z^2-a^2}+A\theta z\right]$$

є розв'язком крайової задачі Рімана. Він являє собою аналітичну функцію в комплексній площині з розрізом вздовж відрізку $[-a,a]$.

Для обчислення невідомої функції тиску $q(x)$ скористаємося формулами Сохоцького (2.131)

$$\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=q(t).$$

Для цього спочатку знайдемо граничні значення функцій $\Phi^+(t)$ і $\Phi^-(z)$, застосовуючи (2.9) і (2.11):

$$\Phi^+(t)=\lim_{\substack{z\to t\\ \operatorname{Im} z>0}}\Phi(z)=A\theta\sqrt{a^2-t^2}+iA\theta t;$$

$$\Phi^-(t)=\lim_{\substack{z\to t\\ \operatorname{Im} z<0}}\Phi(z)=-A\theta\sqrt{a^2-t^2}+iA\theta t\,.$$

Отже,

$$q(t)=\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=2A\theta\sqrt{a^2-t^2}\,.$$

Оскільки $A=\dfrac{1}{2R}\left[\dfrac{1}{\text{м}}\right]$, де $R$ – радіус кривизни., то

$$q(x)=\frac{\theta}{R}\sqrt{a^2-x^2}\,, \tag{3.14}$$

Зауважимо, що знайдена функція тиску задовольняє умову (3.13).

Підставимо функцію $q(x)$ із формули (3.14) в рівняння рівноваги сил:

$$P=\int_{-a}^{a}q(x)dx=\frac{\theta}{R}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{\theta}{R}\cdot\frac{\pi a^2}{2}\,,$$

Звідки

$$a=\sqrt{\frac{2RP}{\pi\theta}}\,. \tag{3.15}$$

### 3.4.2. Числові результати.

Розглянемо $P_1=\dfrac{P}{\pi\theta}=8{,}625\cdot10^{-3}$ *м.* Позначимо $q_1(x)=\dfrac{q(x)}{\theta}$, тоді за формулою (3.14) матимемо:

$$q_1(x)=\frac{1}{R}\sqrt{a^2-x^2}\,. \tag{3.16}$$

Для обчислення значення півширини площадки контакту застосуємо (3.15), звідки

$$a=\sqrt{\frac{2RP}{\pi\theta}}=\sqrt{2RP_1}\,. \tag{3.17}$$

При $R=1$ м отримаємо:

$$a=0{,}131339 \text{ м},$$

а функцію тиску $q_1(x)$ графічно зображено на рисунку 3.3.

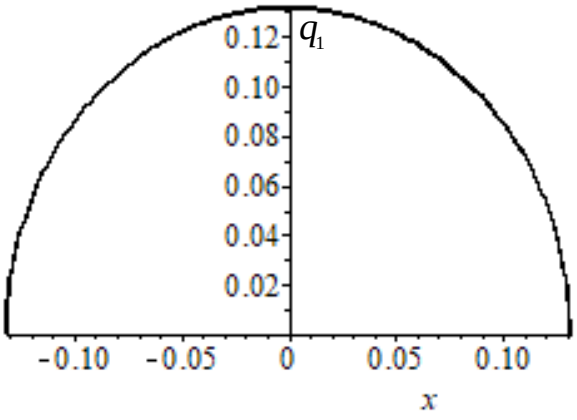



Рис. 3.3

## 3.5 Розв'язок плоскої контактної задачі для штампа з плоскою підошвою

**3.5.1 Виведення загальних формул розв'язку.** Розглянемо тепер випадок штампа з плоскою підошвою. Тоді $f(t)\equiv 0$, а в крайовій умові (3.12) потрібно покласти $f'(t)=0$:

$$\Phi^+(x)+\Phi^-(x)=-i\theta\alpha \ (|x|\le a),$$

причому

$$G^*(t)=\begin{cases}-1, |t|\le a,\\ 1, \ |t|>a,\end{cases} \quad g^*(t)=\begin{cases}-i\theta\alpha, \ |t|\le a,\\ 0, \quad |t|>a.\end{cases}$$

Розв'язок отримаємо аналогічно схемі, застосований при розв'язанні задачі про штамп з неплоскою підошвою. В цьому випадку розв'язок потрібно шукати в класі функцій, необмежених (з інтегровною нескінченністю) на кінцях відрізка $[-a;a]$.

Для точки $t_1=-a$ маємо $\dfrac{G^*(t_1-0)}{G^*(t_1+0)}=e^{-i\pi}$, тому $\rho_1=1,\ \theta_1=-\pi$. Оскільки розв'язок шукаємо в класі необмежених функцій в точці $t_1=-a$, то для обчислення $\kappa_1$ застосовуємо формулу (1.111'), звідки

$$\kappa_1=\left[\frac{\theta_1}{2\pi}\right]+1=\left[-\frac{1}{2}\right]+1=-1+1=0.$$

Тоді маємо:

$$\nu_1=\frac{\theta_1}{2\pi}+i\frac{\ln\rho_1}{2\pi}-\kappa_1=-\frac{1}{2}-0=-\frac{1}{2}.$$

Для точки $t_2=a$ одержимо $\dfrac{G^*(t_2-0)}{G^*(t_2+0)}=e^{i\pi}$, тоді $\rho_2=1,\ \theta_2=\pi$. Оскільки розв'язок повинен бути необмеженим в точці $t_2=a$, то

$$\kappa_2=\left[\frac{\theta_2}{2\pi}\right]+1=\left[\frac{1}{2}\right]+1=0+1=1;$$

$$\nu_2=\frac{\theta_2}{2\pi}+i\frac{\ln\rho_2}{2\pi}-\kappa_2=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}.$$

Із (1.112) випливає, що

$$\kappa=\kappa_1+\kappa_2=1.$$

Далі уведемо функції, аналогічні до (1.100)

$$\omega_1^+(z)=(z-t_1)^{\nu_1}=(z+a)^{-\frac{1}{2}}; \quad \omega_2^+(z)=(z-t_2)^{\nu_2}=(z-a)^{-\frac{1}{2}};$$

$$\omega_1^-(z)=\left(\frac{z+ai}{z-ai}\right)^{\nu_1}\cdot(z-t_1)^{\nu_1}=\left(\frac{z+ai}{z-ai}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot(z+a)^{-\frac{1}{2}};$$

$$\omega_2^-(z)=\left(\frac{z+ai}{z-ai}\right)^{\nu_1}\cdot(z-t_2)^{\nu_1}=\left(\frac{z+ai}{z-ai}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot(z-a)^{-\frac{1}{2}},$$

тоді з урахування (2.9) і (2.11) матимемо

$$\omega_1^+(t)\cdot\omega_2^+(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{i\sqrt{a^2-t^2}}, & t\in[-a;a];\\ \dfrac{1}{\operatorname{sgn}t\sqrt{t^2-a^2}}, & t\in(-\infty;-a)\cup(a;+\infty);\end{cases}$$

$$\omega_1^-(t)\cdot\omega_2^-(t)=\frac{t-ai}{t+ai}\cdot\begin{cases}-\dfrac{1}{i\sqrt{a^2-t^2}}, & t\in[-a;a];\\ \dfrac{1}{\operatorname{sgn}t\sqrt{t^2-a^2}}, & t\in(-\infty;-a)\cup(a;+\infty);\end{cases}$$

Отже, відповідно до (1.114), неперервний коефіцієнт набуває вигляду

$$G_1(t)=\frac{\omega_1^-(t)\cdot\omega_2^-(t)}{\omega_1^+(t)\cdot\omega_2^+(t)}\cdot G^*(t)=\frac{t-ai}{t+ai}\cdot\begin{cases}(-1)\cdot(-1), & t\in[-a;a];\\ 1\cdot1, & t\in(-\infty;-a)\cup(a;+\infty);\end{cases}=\frac{t+ai}{t-ai}.$$

Враховуючи (1.115), (2.9) і (2.11), обчислюємо функцію $g_1(t)$:

$$g_1(t)=\prod_{j=1}^{2}(t-t_j)^{-\nu_j}g^*(t)=(t+a)^{-\nu_1}(t-a)^{-\nu_2}g^*(t)=(t+a)^{\frac12}(t-a)^{\frac12}g^*(t)=$$

$$=\begin{cases}i\sqrt{a^2-t^2}(-i\theta\alpha), & |t|\le a\\ 0, & |t|>a\end{cases}=\begin{cases}\theta\alpha\sqrt{a^2-t^2}, & |t|\le a,\\ 0, & |t|>a.\end{cases}$$

Обчислимо функції $\Gamma(z)$ і $X(z)$ за формулами (1.56), (1.55)

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\ln\left[\left(\frac{\tau-ai}{t+ai}\right)^{-1}\frac{\tau-ai}{\tau+ai}\right]\frac{d\tau}{\tau-z}=0;$$

$$X(z)=e^{\Gamma(z)}=e^0=1.$$

Звідси та із (2.9) і аналогічно до (2.13) матимемо:

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g_1(\tau)}{\mathrm{X}^+(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{\theta\alpha\sqrt{a^2-\tau^2}}{1}\cdot\frac{d\tau}{\tau-z}=\frac{\theta\alpha}{2\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{(a^2-\tau^2)d\tau}{(\tau-z)\sqrt{a^2-\tau^2}}=$$

$$=\frac{\theta\alpha}{2\pi i}\int_{-a}^{a}\left[-\tau-z+\frac{a^2-z^2}{\tau-z}\right]\frac{d\tau}{\sqrt{a^2-\tau^2}}=$$

$$=\frac{\theta\alpha}{2\pi i}\left[\int_{-a}^{a}\frac{-\tau d\tau}{\sqrt{a^2-\tau^2}}-z\int_{-a}^{a}\frac{d\tau}{\sqrt{a^2-\tau^2}}\right]+\frac{\theta\alpha}{i}\cdot\frac{1}{2\pi}(a^2-z^2)\int_{-a}^{a}\frac{d\tau}{\sqrt{a^2-\tau^2}(\tau-z)}=$$

$$=\frac{\theta\alpha}{2\pi i}(-z)\pi+\frac{\theta\alpha}{i}(a^2-z^2)\frac{-1}{2\sqrt{z^2-a^2}}=-\frac{\theta\alpha z}{2i}+\frac{\theta\alpha}{2i}\sqrt{z^2-a^2}.$$

Підставимо отримані функції $X(z)$ і $\Psi(z)$ для значення $\kappa=1$ в (1.92), (1.93)

$$\Phi_1^+(z)=\mathrm{X}^+(z)\left[\Psi^+(z)+\frac{P_k(z)}{(z+ai)^\kappa}\right]=1\cdot\left[-\frac{\theta\alpha z}{2i}+\frac{\theta\alpha}{2i}\sqrt{z^2-a^2}+\frac{C_1z+C_2}{z+ai}\right];$$

$$\Phi_1^-(z)=\left(\frac{z-ai}{z+ai}\right)^{-\kappa}\mathrm{X}^-(z)\left[\Psi^-(z)+\frac{P_k(z)}{(z+ai)^\kappa}\right]=$$

$$=\left(\frac{z-ai}{z+ai}\right)^{-1}\cdot 1\cdot\left[-\frac{\theta\alpha z}{2i}+\frac{\theta\alpha}{2i}\sqrt{z^2-a^2}+\frac{C_1}{z+ai}+C_2\right].,$$

Тоді формула (1.105') дає змогу знайти

$$\Phi^+(z)=(z+a)^{-\frac{1}{2}}\cdot(z-a)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left[-\frac{\theta\alpha z}{2i}+\frac{\theta\alpha}{2i}\sqrt{z^2-a^2}+\frac{C_1}{z+ai}+C_2\right]=$$

$$=\left(\frac{C_1}{z+ai}+C_2\right)\frac{1}{\sqrt{z^2-a^2}}-\frac{\theta\alpha z}{2i\sqrt{z^2-a^2}}+\frac{\theta\alpha}{2i};$$

$$\Phi^-(z)=\prod_{j=1}^{2}\omega_j^-(z)\cdot\left(\frac{z-ai}{z+ai}\right)^{-\kappa}\cdot\Phi_1^-(z)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{z^2-a^2}.}\cdot\frac{z-ai}{z+ai}\cdot\frac{z+ai}{z-ai}\cdot\left[-\frac{\theta\alpha z}{2i}+\frac{\theta\alpha}{2i}\sqrt{z^2-a^2}+\frac{C_1}{z+ai}+C_2\right]=$$

$$=\left(\frac{C_1}{z+ai}+C_2\right)\frac{1}{\sqrt{z^2-a^2}}-\frac{\theta\alpha z}{2i\sqrt{z^2-a^2}}+\frac{\theta\alpha}{2i};$$

$$\Phi^-(z)=\Phi^+(z)=\Phi(z).$$

Шуканий розв'язок крайової задачі Рімана:

$$\Phi(z)=\left(\frac{C_1}{z+ai}+C_2\right)\frac{1}{\sqrt{z^2-a^2}}-\frac{\theta\alpha z}{2i\sqrt{z^2-a^2}}+\frac{\theta\alpha}{2i} \tag{3.18}$$

Він являє собою аналітичну функцію в комплексній площині з розрізом вздовж відрізку $[-a,a]$.

Умова $\Phi(\infty)=0$ повинна мати поведінку як $|z|^{-1}$. Доданок $\frac{C_1}{z+ai}\cdot\frac{1}{\sqrt{z^2-a^2}}$ поводиться як $|z|^{-2}$, тому

$$C_1=0.$$

Тепер знайдемо функцію тиску. Для цього шукаємо граничні значення функцій $\Phi^+(t)$ і $\Phi^-(t)$, застосовуючи (2.6) і (2.7):

$$\Phi^+(t)=\lim_{\substack{z\to t\\ \operatorname{Im} z>0}}\Phi(z)=\frac{C_2}{i\sqrt{a^2-t^2}}-\frac{\theta\alpha t}{2i\cdot\left(i\sqrt{a^2-t^2}\right)}+\frac{\theta\alpha}{2i};$$

$$\Phi^-(t)=\lim_{\substack{z\to t\\ \operatorname{Im} z<0}}\Phi(z)=-\frac{C_2}{i\sqrt{a^2-t^2}}+\frac{\theta\alpha t}{2i\cdot\left(i\sqrt{a^2-t^2}\right)}+\frac{\theta\alpha}{2i}.$$

Застосуємо формули Сохоцького (1.28), (1.29):

$$q(t)=\Phi^+(t)-\Phi^-(t).$$

$$q(t)==\frac{2C_2}{i\sqrt{a^2-t^2}}+\frac{\theta\alpha t}{\sqrt{a^2-t^2}}. \tag{3.19}$$

Підставимо функцію тиску (3.19) в умову рівноваги сил (3.3):

$$P=\int_{-a}^{a}q(t)dt=\int_{-a}^{a}\frac{2C_2}{i\sqrt{a^2-t^2}}dt+\underbrace{\int_{-a}^{a}\frac{\theta\alpha t}{\sqrt{a^2-t^2}}dt}_{=0}=-2iC_1\pi.$$

Звідки

$$C_2 = -\frac{P}{2\pi i}.$$

Тому, підставляючи знайдене значення сталої в (3.18), отримаємо:

$$q(t) = \frac{-2\left(-\frac{P}{2\pi i}\right)i + \theta\alpha t}{\sqrt{a^2 - t^2}};$$

$$q(t) = \frac{P}{\pi\sqrt{a^2 - t^2}} + \frac{\theta\alpha t}{\sqrt{a^2 - t^2}}. \qquad (3.20)$$

**3.5.2 Розв'язок плоскої контактної задачі для плоского штампа без нахилу.** Розглянемо випадок, коли $\alpha = 0$ – нахил відсутній. Тому із формули (3.20) матимемо:

$$q(x) = \frac{P}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}}. \qquad (3.21)$$

Виникнення нескінченних значень у контактного тиску в точках $x = \pm a$ можна пояснити [Штаєрман І.Я.][1] ідеалізацією задачі, а саме ідеалізацією кутів штампа – у природі кутів не існує, ідеалізацією властивостей матеріалу півплощини – у природі не існує матеріалів пружно реагуючих на будь-які великі навантаження. Насправді, контактний тиск в околах точок $x = \pm a$ буде великим, але скінченним. Якщо матеріал достатньо пружній, то максимуми тиску будуть залежати від закруглення кутів штампа (чим менші радіуси закруглень, тим більші максимуми тиску в околах точок $x = \pm a$). Якщо матеріал пружній, але недостатньо міцний, то в околах точок $x = \pm a$ відбудеться його локальне руйнування (розтріскування) та максимуми тиску стануть скінченними. Якщо матеріал пластичний, то при досягнені межі пластичності в околах точок $x = \pm a$ максимуми тиску знову стануть скінченними. Не дивлячись на вказаний недолік розв'язку (3.21), він використовується на практиці, бо цей недолік розв'язку (3.21) має місце лише у малих околах точок $x = \pm a$[1].

**3.5.3. Розв'язок плоскої контактної задачі для плоского штампа з нахилом.** Розглянемо випадок, коли $\alpha \neq 0$ – нахил наявний. Оскільки $\alpha \neq 0$, то значення $\alpha$ потрібно знайти. Підставимо функцію тиску (3.4) в умову рівноваги моментів сил:

$$Pe = \int_{-a}^{a} tq(t)dt;$$

$$Pe = \int_{-a}^{a} \frac{Ptdt}{\pi\sqrt{a^2 - t^2}} + \theta\alpha \int_{-a}^{a} \frac{t^2 dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} = \theta\alpha \int_{-a}^{a} \frac{t^2 - a^2 + a^2}{\sqrt{a^2 - t^2}} dt =$$

$$= \theta\alpha\left[ -\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - t^2}\, dt + a^2 \int_{-a}^{a} \frac{dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} \right] = \theta\alpha\left[ -\frac{a^2}{2}\pi + a^2\pi \right].$$

Звідки отримаємо:

[1] Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. М.-Л., 1949. 270 с.

$$Pe = \theta\alpha\frac{\pi a^2}{2};$$

$$\alpha = \frac{2Pe}{\theta\,\pi\,a^2}. \tag{3.22}$$

При достатньо великому куті повороту штампа $\alpha$ тиск в точці $x=-a$ може обернутися в нуль, тобто

$$\lim_{x\to -a} q(x) = \lim_{x\to -a}\frac{P+\pi\theta\alpha x}{\pi\sqrt{a^2-x^2}} = 0$$

Це можливо, якщо в точці $t=-a$ чисельник дорівнює нулю, тобто

$$P = \pi\,\theta\,\alpha\,a, \tag{3.23}$$

$$\alpha = \frac{P_1}{a},\ P_1 = \frac{P}{\pi\theta}. \tag{3.24}$$

Це відповідає значенню відстані, яку знаходимо із (3.22) і (3.23):

$$e = \frac{a}{2}.$$

Підставивши значення $P$ з формули (2.23) у формулу (3.20), отримаємо функцію тиску у випадку, коли на межі $x=-a$ тиск обертається в 0:

$$q(x) = \frac{\pi\theta\alpha a}{\pi\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{\theta\alpha x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \theta\alpha\frac{a+x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \theta\alpha\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}.$$

**3.5.4. Числовий аналіз результатів у випадку штампа з плоскою підошвою з нахилом.** Для випадку плоского штампа з нахилом функція тиску під штампом обчислюється за формулою (3.20). Поділимо обидві її частини на $\theta$ і виразимо через $P_1 = \frac{P}{\pi\theta}$:

$$q_1(x) = \frac{P_1}{\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{\alpha\,x}{\sqrt{a^2-x^2}}. \tag{3.25}$$

Кут нахилу обчислюємо за формулою (3.22). звідки

$$\alpha = \frac{2P_1 e}{a^2}. \tag{3.26}$$

Для розрахунків обираємо $P_1 = 8{,}625\cdot 10^{-3}$м. Для $a=1$м значення нахилу наведені в табл. 3.1 для різних значень відстані $e$ від лінії дії сили $P$ до осі $Oy$.

Таблиця 3.1

| $e$ | $\alpha$ | | $e$ | $\alpha$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,131339 | | 0,3 | 0,005175 |
| 0,1 | 0,001725 | | 0,4 | 0,006900 |
| 0,2 | 0,003450 | | 0,5 | 0,008625 |

Графіки безрозмірних функцій тиску $q_1(x)$ для різних значень відстані $e$ наведено на рисунку 3.4. Міткою «1» позначено графік для значення $e=0{,}1$ м,

0міткою «2» – $e = 0{,}2$ м, міткою «3» – $e = 0{,}3$ м, міткою «4» – $e = 0{,}4$ м, міткою «5» – $e = 0{,}5$ м.

Аналіз графіків на рисунку 3.4 показує, що збільшення значення відстані $e$ від лінії дії сили $P$ до осі $Oy$ призводить до зменшення найменшого тиску, який досягається у внутрішній точці площадки контакту. Така точка при збільшені відстані $e$ пересувається в бік точки $x = -a$.

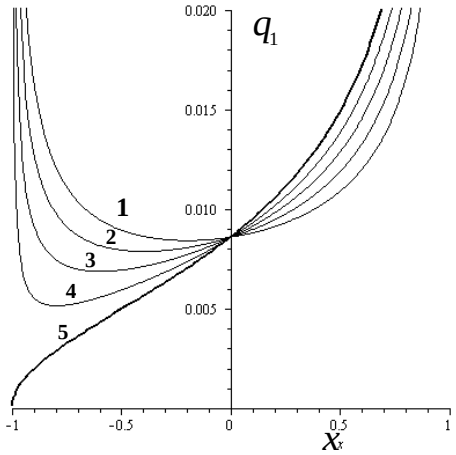



Рис. 3.4.

Випадок, коли в точці $x = -a$ тиск дорівнює нулю, відповідає значенню $e = 0{,}5$м. Функція тиску в цьому випадку позначена на рисунку 3.4 міткою 5.

### 3.6 Інші сфери застосування крайових задач теорії аналітичних функцій

У цьому розділи було розглянуто деякі класичні контактні задачі, які моделюються сингулярними інтегральними рівняннями з ядром Коші і зводяться до розв'язання крайових задач теорії аналітичних функцій.

Спектр застосування інтегралів типу Коші, сингулярних інтегралів та інтегральних рівнянь з ядром Коші, крайових задач теорії аналітичних функцій значно ширший, а саме:

- в книзі Гахова Ф.Д. [5] розглянуто логарифмічні потенціали простого та подвійного шару, що застосовується в математичній фізиці, також вивчено застосування задачі Рімана в теорії масового обслуговування;
- в посібнику Зражевського Г. М. [1] – задачі акустики та динамічну теорію тріщин;
- в роботі Карлемана Т. [7] – математичні задачі кінетичної теорії газів;
- в статті Кутеня А., Обшти А., Стащука М. [10] проведено діагностику струмопровідних матеріалів;
- в монографії Козачка О.П., Мартиняка Р.М., Слободяна Б.С. [8] досліджено взаємодія тіл з регулярним рельєфом за наявності міжконтактного середовища;
- в монографії Мартиняка Р.М., Середницької Х.І. [11] – контактні задачі термопружності для міжфазних тріщин в біматеріальних тілах.

# Розділ 4. ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ

**Формальні вимоги щодо виконання індивідуального завдання.** Індивідуальне завдання оформлюється в зошиті обсягом 12-18 аркушів і здається не пізніше передостаннього тижня навчального семестру, протягом якого вивчається дисципліна. Розв'язки повинні містити усі необхідні обґрунтування з посиланням на відповідні формули, теореми та властивості. У разі незарахування індивідуального завдання студент повинен його доопрацювати до останнього навчального тижня. Захист індивідуального завдання проводиться на тижні другого модуля. Студент, у якого індивідуальне завдання не зараховано, не допускається до заліку.

Індивідуальне завдання складається із 10 завдань. Номер варіанта обчислюється як залишок після ділення на 13 номера прізвища студента в журналі академічної групи.

**Завдання №1.** Показати, що функція $\varphi(t)$ задовольняє умову Гельдера на зімкненому контурі $\gamma$:

1) $\varphi(t) = t\arcsin t$, $\gamma = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$;

2) $\varphi(t) = t\,\mathrm{arctg}\ t - i\sin t$, $\gamma = [-3, 6]$;

3) $\varphi(t) = \ln(t+2) - t\sin t$, $\gamma = [-1, 5]$;

4) $\varphi(t) = \ln(t^2+2) - \sin t$, $\gamma = \mathbb{R}$;

5) $\varphi(t) = \ln(t^2+1) + \cos t$, $\gamma = \mathbb{R}$;

6) $\varphi(t) = \mathrm{arctg}\ t + \cos(t+1)$, $\gamma = \mathbb{R}$;

7) $\varphi(t) = \mathrm{arcctg}\ t + \frac{1}{1+t^2}$, $\gamma = \mathbb{R}$;

8) $\varphi(t) = t^2\arcsin t - \mathrm{tg}\pi t$, $\gamma = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$;

9) $\varphi(t) = (t+1)\arccos t - \frac{1}{t+1}$, $\gamma = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$;

10) $\varphi(t) = t^2\sin t - 2t + 1$, $\gamma = [0, 1]$;

11) $\varphi(t) = \frac{t^2-1}{t^2+1} + \cos t$, $\gamma = [-1, 1]$;

12) $\varphi(t) = \frac{t^2-3}{t^2+4} + \cos^2 t$, $\gamma = [-2, 2]$;

13) $\varphi(t) = t^2\cos t - \arcsin\frac{t}{2}$, $\gamma = [0, 1]$

**Завдання №2.** Обчислити індекс функції $G(t)$ на контурі $\gamma$:

1) $G(t)=\dfrac{5t^2-1}{t^2+9}$, $\gamma=\{t,|t|=1\}$;

2) $G(t)=\dfrac{t^2-4}{t^2+1}$, $\gamma=\{t,|t|=3/2\}$;

3) $G(t)=\dfrac{(1-2t)^2}{t^2+4}$, $\gamma=\{t,|t|=1\}$;

4) $G(t)=\dfrac{\sin^2 t}{9t^2-1}$, $\gamma=\{t,|t|=1\}$;

5) $G(t)=\dfrac{t^2+16}{t^2-1}$, а) $\gamma=\{t,|t|=1/4\}$, б) $\gamma=\{t,|t|=3\}$;

6) $G(t)=\dfrac{4t^2-1}{t^2+9t}$, $\gamma=\{t,|t|=1\}$;

7) $G(t)=\dfrac{4t^2-4t+1}{4t^2+1}$, $\gamma=\{t,|t|=1\}$;

8) $G(t)=\dfrac{2t^2-1}{t^4+10t^2+9}$, $\gamma=\{t,|t|=3/2\}$;

9) $G(t)=\dfrac{t^2+4}{t^4+5t^2+4}$, $\gamma=\{t,|t|=3/2\}$;

10) $G(t)=\dfrac{t^2}{4t^2+1}$, $\gamma=\{t,|t|=1\}$;

11) $G(t)=\dfrac{16t^2+1}{t^2+1}$, а) $\gamma=\{t,|t|=1/3\}$, б) $\gamma=\{t,|t|=3\}$;

12) $G(t)=\dfrac{(4t-1)^2}{4t^2+1}$, $\gamma=\{t,|t|=1\}$;

13) $G(t)=\dfrac{16t^2+1}{t^2-9}$, $\gamma=\{t,|t|=1\}$.

**Завдання №3.** Обчислити індекс функції $G(t)$ на дійсній осі:

1) $G(t)=\dfrac{t^4+16}{t^4+4t^2+4}$, $t\in\mathbb{R}$;

2) $G(t)=\dfrac{t^4+2t^2+1}{t^4+1}$, $t\in\mathbb{R}$;

3) $G(t)=\dfrac{4t^4+1}{t^4+10t^2+9}$, $t\in\mathbb{R}$;

4) $G(t)=\dfrac{t^4+81}{t^4+13t^2+36}$, $t\in\mathbb{R}$;

5) $G(t)=\dfrac{t^4+13t^2+36}{t^4+81}$, $t\in\mathbb{R}$;

6) $G(t)=\dfrac{t^2+4i}{t^2-4i}$, $t\in\mathbb{R}$;

7) $G(t)=\dfrac{t^4+16}{t^4+6t^2+9}$, $t\in\mathbb{R}$;

8) $G(t)=\dfrac{t^4+81}{t^4+2t^2+1}$, $t\in\mathbb{R}$;

9) $G(t)=\dfrac{t^4+81}{t^4+4t^2+4}$, $t\in\mathbb{R}$;

10) $G(t)=\dfrac{16t^4+1}{t^4+10t^2+9}$, $t\in\mathbb{R}$;

11) $G(t)=\dfrac{t^4+16}{t^4+10t^2+9}$, $t\in\mathbb{R}$;

12) $G(t)=\dfrac{t^4+2t^2+1}{t^4+1}$, $t\in\mathbb{R}$;

13) $G(t)=\dfrac{t^4+2t^2+1}{t^4+16}$, $t\in\mathbb{R}$.

**Завдання №4.** Обчислити інтеграл типу Коші на контурі $\gamma$:

1) $\Phi(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\left(\dfrac{\tau}{\cos\tau}\right)^2\cdot\dfrac{d\tau}{\tau-z}$, $\gamma=\{t,|t|=1\}$;

2) $\Phi(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\dfrac{\tau^2\,d\tau}{\operatorname{tg}\tau\cdot(\tau-z)}$, $\gamma=\{t,|t|=1\}$;

3) $\Phi(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\dfrac{4\,d\tau}{(\tau^2+4\tau)(\tau-z)}$, $\gamma=\{t,|t|=1\}$;

4) $\Phi(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\dfrac{(\tau^2+4)d\tau}{(4\tau^2+\tau)(\tau-z)}$, $\gamma=\{t,|t|=1\}$;

5) $\Phi(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\dfrac{(\tau^2+4)d\tau}{(4\tau^2+\tau)(\tau-z)}$, $\gamma=\{t,|t|=1\}$;

6) $\Phi(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\dfrac{(\tau^2-1)d\tau}{(9\tau^2+\tau)(\tau-z)}$, $\gamma=\{t,|t|=1\}$;

7) $\Phi(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\dfrac{5d\tau}{\tau(\tau-5)(\tau-z)}$, $\gamma=\{t,|t|=1\}$;

8) $\Phi(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\dfrac{\left(\tau^4+2\right)d\tau}{\left(9\tau^2+1\right)(\tau-z)}$, $\gamma=\{t,|t|=3\}$;

9) $\Phi(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\dfrac{\left(\tau^2+4\right)d\tau}{\left(\tau^4+5\tau^2+4\right)(\tau-z)}$, $\gamma=\{t,|t|=3/2\}$;

10) $\Phi(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\dfrac{\left(\tau^4+3\right)d\tau}{\left(\tau^4+3\tau^2+2\right)(\tau-z)}$, $\gamma=\{t,|t|=3/2\}$;

11) $\Phi(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\dfrac{\tau^2 d\tau}{\left(\tau^2-2\tau-3\right)(\tau-z)}$, $\gamma=\{t,|t|=2\}$;

12) $\Phi(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\dfrac{\tau^3 d\tau}{\left(\tau^2-2\tau-3\right)(\tau-z)}$, $\gamma=\{t,|t|=2\}$;

13) $\Phi(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\dfrac{\tau^3 d\tau}{\left(\tau^2-4\tau+3\right)(\tau-z)}$, $\gamma=\{t,|t|=2\}$;

**Завдання №5.** Обчислити сингулярний інтеграл з ядром Коші на контурі $\gamma$:

1) $\Phi(t)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\dfrac{\left(\tau^2+4\right)d\tau}{\left(4\tau^2+1\right)(\tau-t)}$, $\gamma=\{t,|t|=3\}$;

2) $\Phi(t)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\dfrac{\tau^2 d\tau}{(\tau+1)(\tau+3)(\tau-t)}$, $\gamma=\{t,|t|=2\}$;

3) $\Phi(t)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\dfrac{\tau^2 d\tau}{\left(\tau^2+3\tau+2\right)(\tau-t)}$, $\gamma=\{t,|t|=3/2\}$;

4) $\Phi(t)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\dfrac{\left(\tau^2+4\right)d\tau}{\left(\tau^4+5\tau^2+4\right)(\tau-t)}$, $\gamma=\{t,|t|=3/2\}$;

5) $\Phi(t)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\dfrac{\left(\tau^2+2\right)d\tau}{\left(9\tau^2+1\right)(\tau-t)}$, $\gamma=\{t,|t|=3\}$;

6) $\Phi(t)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\dfrac{\left(\tau^4+3\right)d\tau}{\left(\tau^4+3\tau^2+2\right)(\tau-t)}$, $\gamma=\{t,|t|=3/2\}$;

7) $\Phi(t)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\dfrac{\tau^2 d\tau}{\left(\tau^2-9\right)(\tau-t)}$, $\gamma=\{t,|t|=2\}$;

8) $\Phi(t)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\dfrac{\tau d\tau}{(\tau-1)(\tau+3)(\tau-t)}$, $\gamma=\{t,|t|=2\}$.

Обчислити інтеграли типу Коші вздовж дійсної осі:

9) $\Phi(t)=\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\left(\tau^2-1\right)d\tau}{\left(\tau^2+9\right)(\tau-t)}$, $\quad t\in(-\infty,+\infty)$;

10) $\Phi(t)=\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\tau\, d\tau}{\left(\tau^2+9\right)(\tau-t)}$, $\quad t\in(-\infty,+\infty)$;

11) $\Phi(t)=\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\left(\tau^2+1\right)d\tau}{\left(\tau^2+4\right)(\tau-t)}$, $\quad t\in(-\infty,+\infty)$;

12) $\Phi(t)=\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\tau^2 d\tau}{\left(\tau^2+4\right)(\tau-t)}$, $\quad t\in(-\infty,+\infty)$;

13) $\Phi(t)=\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\left(\tau^2+5\right)d\tau}{\left(\tau^2+4\right)(\tau-t)}$, $\quad t\in(-\infty,+\infty)$;

**Завдання №6.** Знайти розв'язок задачі Рімана на зімкненому контурі $\gamma$:

1) $\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=\dfrac{t+1}{t(t+5)}$, $\quad t\in\gamma$, $\quad \gamma=\{t,|t|=2\}$;

2) $\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=\dfrac{t+1}{(t-1)(t+3)}$, $\quad t\in\gamma$, $\quad \gamma=\{t,|t|=2\}$;

3) $\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=\dfrac{t^2}{t(t+5)}$, $\quad t\in\gamma$, $\quad \gamma=\{t,|t|=2\}$;

4) $\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=\dfrac{t^3+1}{t(t-5)}$, $\quad t\in\gamma$, $\quad \gamma=\{t,|t|=2\}$;

5) $\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=\dfrac{t-1}{(t+1)(t+5)}$, $\quad t\in\gamma$, $\quad \gamma=\{t,|t|=2\}$;

6) $\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=\dfrac{2t}{(t+i)(t+2i)}$, $\quad t\in\gamma$,

за умови, що $\gamma$ – довільний гладкий зімкнений контур, що містить всередині себе точку $-i$ і не містить точку $-2i$;

7) $\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=\dfrac{t^2-1}{t^2-2t}$, $\quad t\in\gamma$,

де $\gamma$ – довільний гладкий зімкнений контур, що містить всередині себе точку 0 і не містить точку2;

8) $\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=\dfrac{t^2-t+1}{t-1}$, $\quad t\in\gamma$,

де $\gamma$ –гладкий зімкнений контур, що містить всередині себе точку $z_1=1$;

9) $\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=\dfrac{t^3-t+1}{t-2}$, $\quad t\in\gamma$,

де $\gamma$ –гладкий зімкнений контур, що містить всередині себе точку $z_1=2$;

10) $\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=\dfrac{t^4-t}{t-3}$, $t\in\gamma$,

де $\gamma$ –гладкий зімкнений контур, що містить всередині себе точку $z=3$;

11) $\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=\dfrac{4t^2-1}{t^2-2t+3}$, $t\in\gamma$, $\gamma=\{t,|t|=2\}$;

12) $\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=\dfrac{t^2-1}{t^2-3t+2}$, $t\in\gamma$, $\gamma=\{t,|t|=3/2\}$;

13) $\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=\dfrac{t}{t^2-1}$, $t\in\gamma$,

за умови, що $\gamma$ – довільний гладкий зімкнений контур, що містить всередині себе точку $z_1=1$ і не містить точку $z_2=-1$, а також $\Phi^-(\infty)=1$.

**Завдання №7.** Знайти розв'язок задачі Рімана на зімкненому контурі $\gamma$:

1) $\Phi^+(t)=\dfrac{t^2-4}{t^2-25}\Phi^-(t)$, $t\in\gamma$, $\gamma=\{t,|t|=1\}$;

2) $\Phi^+(t)=\dfrac{t^2-1}{t^2+4t}\Phi^-(t)$, $t\in\gamma$, $\gamma=\{t,|t|=2\}$;

3) $\Phi^+(t)=\dfrac{(2t-1)^2}{t^2+25}\Phi^-(t)$, $t\in\gamma$, $\gamma=\{t,|t|=1\}$;

4) $\Phi^+(t)=\dfrac{4t^2-1}{9t^2-1}\Phi^-(t)$, $t\in\gamma$, $\gamma=\{t,|t|=2\}$;

5) $\Phi^+(t)=\dfrac{t}{t^2-1}\Phi^-(t)$, $t\in\gamma$,

за умови, що $\gamma$ – довільний гладкий зімкнений контур, що містить всередині себе точку $z_1=0$ і не містить точки $z_2=1$, $z_3=-1$, а також $\Phi^-(\infty)=1$;

6) $\Phi^+(t)=\dfrac{t-1}{t}\Phi^-(t)$, $t\in\gamma$,

за умови, що $\gamma$ – довільний гладкий зімкнений контур, що містить всередині себе точку $z_1=1$ і не містить точку $z_2=0$;

$\Phi^+(t)=\left(t-\dfrac{1}{t}\right)\Phi^-(t)$, $t\in\gamma$,

за умови, що $\gamma$ – довільний гладкий зімкнений контур, що містить всередині себе точку $z_1=1$ і не містить точку $z_2=0$;

7) $\Phi^+(t)=\dfrac{(t-1)^2}{t^2+t}\Phi^-(t)$, $t\in\gamma$,

за умови, що $\gamma$ – довільний гладкий зімкнений контур, що містить всередині себе точки $z_1=0$, $z_{2,3}=\pm1$;

8) $\Phi^+(t)=\dfrac{(t-i)(t-2i)}{(t+i)(t+2i)}\Phi^-(t)$, $t\in\gamma$,

за умови, що $\gamma$ – довільний гладкий зімкнений контур, що містить всередині себе точки $i$, $2i$ і не містить точки $-i,-2i$;

9) $\Phi^+(t)=\dfrac{(t-3i)^3}{(t+i)(t+2i)}\Phi^-(t), \qquad t\in\gamma,$

за умови, що $\gamma$ – довільний гладкий зімкнений контур, що містить всередині себе точку $3i$ і не містить точки $-i,-2i$;

10) $\Phi^+(t)=\dfrac{t}{t^2-1}\Phi^-(t), \qquad t\in\gamma,$

за умови, що $\gamma$ – довільний гладкий зімкнений контур, що містить всередині себе точки $z_1=0$ і $z_2=1$ і не містить точки $z_3=-1$;

11) $\Phi^+(t)=\dfrac{t^3}{t^2+1}\Phi^-(t), \qquad t\in\gamma,$

за умови, що $\gamma$ – довільний гладкий зімкнений контур, що містить всередині себе точку $z_1=0$ і не містить точки $z_2=i,\ z_3=-i$, а також $\Phi^-(\infty)=1$;

12) $\Phi^+(t)=\dfrac{t^2}{t^2+1}\Phi^-(t), \qquad t\in\gamma$

за умови, що $\gamma$ – довільний гладкий зімкнений контур, що містить всередині себе точки $z_1=0$ і $z_2=i$ і не містить точки $z_3=-i$, а також $\Phi^-(\infty)=1$.

**Завдання №8.** Знайти розв'язок задачі Рімана на зімкненому контурі $\gamma$:

1) $\Phi^+(t)=\dfrac{t}{t^2+1}\Phi^-(t)+\dfrac{t^2-1}{t^2+16}, \qquad t\in\gamma.,\ \ \gamma=\{t,|t|=2\};$

2) $\Phi^+(t)=\dfrac{t^2+1}{t^2+16}\Phi^-(t)+\dfrac{t^2-1}{t^2(t^2+16)}, \qquad t\in\gamma,\ \gamma=\{t,|t|=2\};$

3) $\Phi^+(t)=\dfrac{t^2+1}{t^2+16}\Phi^-(t)+\dfrac{t+1}{t(t+5)}, \qquad t\in\gamma,\ \ \gamma=\{t,|t|=2\};$

4) $\Phi^+(t)=\dfrac{t^2-1}{t^2+16}\Phi^-(t)+\dfrac{t+1}{t}, \qquad t\in\gamma,\ \gamma=\{t,|t|=2\};$

5) $\Phi^+(t)=(t-1)\Phi^-(t)+t^2-\dfrac{1}{t}, \qquad t\in\gamma$

за умови, що $\gamma$ – довільний гладкий зімкнений контур, що НЕ містить всередині себе точки $z_1=0, z_2=1$;

6) $\Phi^+(t)=(t-1)^{-1}\Phi^-(t)+t+(t-1)^{-1}, \qquad t\in\gamma$

за умови, що $\gamma$ – довільний гладкий зімкнений контур, що НЕ містить всередині себе точку $z_1=1$;

7) $\Phi^+(t)=t(t-1)^{-1}\Phi^-(t)+t(t-1)^{-1}, \qquad t\in\gamma$

за умови, що $\gamma$ – довільний гладкий зімкнений контур, що не містить всередині себе точку $z_1=0$ і містить точку $z_2=1$;

8) $\Phi^+(t)=(t-1)t^{-1}\Phi^-(t)+t(t-1)^{-1}, \qquad t\in\gamma$

за умови, що $\gamma$ – довільний гладкий зімкнений контур, що не містить всередині себе точки $z_1 = 0$ і містить точку $z_2 = 1$;

9) $\Phi^+(t) = (t^2 - t)\Phi^-(t) + t^2 - 1, \qquad t \in \gamma$

за умови, що $\gamma$ – довільний гладкий зімкнений контур, що не містить всередині себе точки $z_1 = 0$ і містить точку $z_2 = 1$;

10) $\Phi^+(t) = \left(t - \frac{1}{t}\right)\Phi^-(t) + t^2 - 1, \qquad t \in \gamma$

за умови, що $\gamma$ – довільний гладкий зімкнений контур, що містить всередині себе точки $z_{1,2} = \pm 1$ і не містить точку $z_2 = 0$;

11) $\Phi^+(t) = \frac{(t-i)(t+2i)}{(t+i)(t-2i)}\Phi^-(t) + \frac{2t}{(t+i)(t-2i)(t-i)}, \qquad t \in \gamma$

за умови, що $\gamma$ – довільний гладкий зімкнений контур, що містить всередині себе точки $i, 2i$ і не містить точки $-i, -2i$;

12) $\Phi^+(t) = \frac{(t-i)(t+2i)}{(t+i)(t-2i)}\Phi^-(t) + \frac{2t}{(t+i)(t-2i)(t-i)}, \qquad t \in \gamma$

за умови, що $\gamma$ – довільний гладкий зімкнений контур, що містить всередині себе точки $-i, i$ і не містить точки $-2i, 2i$;

13) $\Phi^+(t) = \frac{(t-3i)^2}{(t+i)(t+2i)}\Phi^-(t) + \frac{2t}{(t+i)(t+2i)(t-3i)}, \qquad t \in \gamma$

за умови, що $\gamma$ – довільний гладкий зімкнений контур, що містить всередині себе точки $3i$ і не містить точки $-i, -2i$.

**Завдання №9.** Знайти розв'язок задачі Рімана на дійсній осі:

1) $\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \frac{ai}{t^2+4}, \qquad t \in (-\infty, +\infty)$;

2) $\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \frac{ai}{(t+i)(t-2i)}, \qquad t \in (-\infty, +\infty)$;

3) $\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \frac{at+b}{t^2+1}, \qquad t \in (-\infty, +\infty)$;

4) $\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \frac{at+b}{(t+i)(t-2i)}, \qquad t \in (-\infty, +\infty)$;

5) $\Phi^+(t) = \left(\frac{-t+3i}{t+i}\right)^2 \Phi^-(t), \qquad t \in (-\infty, +\infty)$;

6) $\Phi^+(t) = \left(\frac{t-3i}{3t+i}\right)^2 \Phi^-(t), \qquad t \in (-\infty, +\infty)$;

7) $\Phi^+(t) = \frac{-t+3i}{t+i}\Phi^-(t), \qquad t \in (-\infty, +\infty)$;

8) $\Phi^+(t) = \frac{3i-t}{4t+i}\Phi^-(t), \qquad t \in (-\infty, +\infty)$;

9) $\Phi^+(t)=\dfrac{5i-t}{2t+i}\Phi^-(t),$ $t\in(-\infty,+\infty);$

10) $\Phi^+(t)=\dfrac{t-3i}{3t+i}\Phi^-(t),$ $t\in(-\infty,+\infty);$

11) $\Phi^+(t)=\dfrac{t^2+4}{9-t^2}\Phi^-(t),$ $t\in(-\infty,+\infty);$

12) $\Phi^+(t)=\dfrac{(t-i)(t-3i)}{(t+i)(t+3i)}\Phi^-(t),$ $t\in(-\infty,+\infty);$

13) $\Phi^+(t)=\dfrac{(t-i)(t+3i)}{(t+i)(t-2i)}\Phi^-(t),$ $t\in(-\infty,+\infty).$

**Завдання №10.** Знайти розв'язок задачі Рімана на дійсній осі:

1) $\Phi^+(t)=\dfrac{t+3i}{3t-i}\Phi^-(t)+\dfrac{at+b}{3t-i},$ $t\in(-\infty,+\infty);$

2) $\Phi^+(t)=\dfrac{3t+3i}{5t-i}\Phi^-(t)+\dfrac{at+b}{5t-i},$ $t\in(-\infty,+\infty);$

3) $\Phi^+(t)=\dfrac{i/2-t}{t-3i/2}\Phi^-(t)+\dfrac{ai}{t-3i/2},$ $t\in(-\infty,+\infty);$

4) $\Phi^+(t)=\dfrac{3i/2-t}{t-i/2}\Phi^-(t)+\dfrac{ai}{t-i/2},$ $t\in(-\infty,+\infty);$

5) $\Phi^+(t)=\dfrac{3i-t}{t+i}\Phi^-(t)+\dfrac{ai}{t+i},$ $t\in(-\infty,+\infty);$

6) $\Phi^+(t)=\dfrac{t+2i}{2t-i}\Phi^-(t)+\dfrac{t}{2t-i},$ $t\in(-\infty,+\infty);$

7) $\Phi^+(t)=\dfrac{t+3i}{3t-i}\Phi^-(t)+\dfrac{at+b}{3t-i},$ $t\in(-\infty,+\infty);$

8) $\Phi^+(t)=\dfrac{-t+3i}{5t-i}\Phi^-(t)+\dfrac{at+b}{5t-i},$ $t\in(-\infty,+\infty);$

9) $\Phi^+(t)=\dfrac{i/2-t}{t+3i/2}\Phi^-(t)+\dfrac{ai}{t+3i/2},$ $t\in(-\infty,+\infty);$

10) $\Phi^+(t)=\dfrac{3i-t}{t+2i}\Phi^-(t)+\dfrac{ai}{t+2i},$ $t\in(-\infty,+\infty);$

11) $\Phi^+(t)-\dfrac{t^2+4}{t^2+1}\Phi^-(t)=\dfrac{at^2+b}{t^2+1},$ $t\in(-\infty,+\infty);$

12) $\Phi^+(t)-\dfrac{i-t}{t+2i}\Phi^-(t)=\dfrac{at+b}{t+2i},$ $t\in(-\infty,+\infty);$

13) $\Phi^+(t)=\dfrac{t-2i}{2t+i}\Phi^-(t)+\dfrac{t}{2t+i},$ $t\in(-\infty,+\infty).$

# Розділ 5. ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Означення та основні властивості функцій, що задовольняють умову Гельдера.
2. Поняття індексу функції та його властивості. Основні методи обчислення індексу функції.
3. Інтеграл типу Коші вздовж плоскої кривої, його властивості та методи його обчислення.
4. Означення сингулярного інтеграла з ядром Коші вздовж плоскої кривої, його властивості.
5. Формули Сохоцького щодо зв'язку між сингулярними інтегралами вздовж зімкненого гладкого контура і граничними значеннями інтеграла типу Коші.
6. Інтеграл типу Коші вздовж дійсної осі, його властивості та методи обчислення.
7. Означення сингулярного інтеграла з ядром Коші вздовж дійсної осі, його властивості.
8. Формули Сохоцького вздовж дійсної осі.
9. Основні властивості граничних значень інтеграла типу Коші.
10. Узагальнена теорема Ліувіля і теорема про аналітичне продовження.
11. Постановка задачі Рімана «про стрибок» на зімкненому контурі та аналітичний метод її розв'язання.
12. Постановка однорідної задачі Рімана на зімкненому контурі та аналітичний метод її розв'язання у випадку, коли індекс коефіцієнта задачі нульовий. Поняття про факторизацію.
13. Постановка однорідної задачі Рімана на зімкненому контурі та аналітичний метод її розв'язання у випадку, коли індекс коефіцієнту задачі ненульовий.
14. Постановка неоднорідної задачі Рімана на зімкненому контурі та аналітичний метод її розв'язання у випадку, коли індекс коефіцієнту задачі невід'ємний.
15. Постановка неоднорідної задачі Рімана на зімкненому контурі та аналітичний метод її розв'язання у випадку, коли індекс коефіцієнту задачі від'ємний. Умови існування розв'язку такої задачі для випадку індексу, меншого за 1.
16. Постановка задачі Рімана на дійсній осі «про стрибок» та аналітичний метод її розв'язання.
17. Постановка однорідної задачі Рімана на дійсній осі та аналітичний метод її розв'язання у випадку, коли індекс коефіцієнту задачі ненульовий.
18. Постановка неоднорідної задачі Рімана на дійсній осі та аналітичний метод її розв'язання у випадку, коли індекс коефіцієнту задачі невід'ємний.
19. Постановка неоднорідної задачі Рімана на зімкненому контурі та аналітичний метод її розв'язання у випадку, коли індекс коефіцієнту задачі від'ємний. Умови існування розв'язку такої задачі для випадку індексу, меншого за 1.
20. Постановка задачі Рімана з розривним коефіцієнтом. Зведення задачі Рімана з розривним коефіцієнтом до задачі Рімана з неперервним коефіцієнтом. Клас розв'язків задачі.
21. Аналітичний розв'язок однорідної задачі Рімана з розривним коефіцієнтом.
22. Аналітичний розв'язок неоднорідної задачі Рімана з розривним коефіцієнтом.

23. Аналітичний метод розв’язання задачі Рімана на розімкненому контурі. Принципові відмінності розв’язку задачі Рімана на розімкненому контурі і на зімкненому. Зведення задачі Рімана на розімкненому контурі до задачі Рімана з розривним коефіцієнтом і розривною правою частиною.
24. Зсув та його властивості.
25. Постановка однорідної задачі Газемана та аналітичний метод її розв’язання.
26. Постановка неоднорідної задачі Газемана та аналітичний метод її розв’язання.
27. Постановка задачі Карлемана. Аналітичний розв’язок задачі Карлемана (однорідної і неоднорідної).
28. Основні сфери застосування крайових задач теорії аналітичних функцій. Приклад повного розв’язання конкретої задачі.

# РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

## Основна


1. Зражевський Г. М. Застосування теорії аналітичних функцій в задачах механіки : навчальний посібник. Киїів : Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2005. 61 с.
2. Комплексний аналіз : навчальний посібник / П. В. Слюсарчук, Т. В. Бояришева, М. С. Герич, О. О. Погоріляк, О. О. Синявська, Г.І. Сливка-Тилищак. Ужгород : «Шарк», 2020. 174 с.
3. Комплексний аналіз : навч. посіб. для студентів механіко-математичних факультетів вищих навчальних закладів. / Л. С. Тесленко, О. М. Чадаєв, Я. П. Менько. Миколаїв : МНУ, 2019. 121 с
4. Вайсфельд Н. Д., Журавльова З. Ю., Реут В. В. Плоскі мішані задачі теорії пружності для півнескінченної смуги : наукова монографія. Одеса : Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, 2019. 149 с.
5. Gakhov F. D. Boundary Value Problems. Courier Corporation, 1990. 561 p. URL: http://surl.li/nwuwqg (дата звернення: 23.06.2024)


## Додаткова


6. Єжов С. М., Разумова М. А. Теорія функцій комплексної змінної : навч. посіб. для студентів фізичних спеціальностей університетів. Київ : Київський університет, 2012. 191 с.
7. Карлеман Т. Математичні задачі кінетичної теорії газів. Москва : Іноземна література, 1960. 125 с.
8. Козачок О. П., Мартиняк Р. М., Слободян Б. С. Взаємодія тіл з регулярним рельєфом за наявності міжконтактного середовища. Львів : Растр-7, 2018. 200 с. URL : http://surl.li/usdeo (дата звернення: 23.06.2024).
9. Комплексний аналіз. Приклади і задачі : навч. посіб. / В. Г. Самойленко, В. А. Бородін, Г. В. Верьовкіна, А. В. Ловейкін, І. Б. Романенко ; за ред. В. Г. Самойленка. Київ : ВПЦ "Київський університет", 2010. 224 с.
10. Кутень А., Обшта А., Стащук М. Деякі способи обчислення сингулярних інтегралів типу Коші, необхідних для діагностики струмопровідних матеріалів. *Вимірювальна техніка та метрологія*. 2008. № 68. С. 169–174. URL: https://vlp.com.ua/files/34_23.pdf (дата звернення: 23.06.2024).
11. Мартиняк Р. М., Середницька Х. І. Контактні задачі термопружності для міжфазних тріщин в біматеріальних тілах. Львів : Растр-7, 2017. 168 с. URL : http://surl.li/usdex (дата звернення: 23.06.2024).
12. Панасенко Є. В. , Стреляєв Ю. М., Клименко М. І. Комплексний аналіз: Теорія рядів. Лишки та їх застосування : навчальний посібник для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра напряму підготовки «Математика». Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2016. 74 с.
13. Сніжко Н. В. Крайові задачі теорії аналітичних функцій: навчальний посібник для студентів математичних спеціальностей. Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2007. 95 с.
14. Begehr H. Boundary value problems in complex analysis. *Boletín de la*

*Asociación Matemática Venezolana*, Vol. XII, No. 1. 2005. P. 65-85. URL: http://emis.muni.cz/journals/BAMV/conten/vol12/Begehr-I.pdf (дата звернення: 23.06.2024).
15. Dugienko O. E., Starovoitov O.V, Dyachenko N. M. Application of the riemann boundary value problems for solving some problems of contact mechanics. *XXX International scientific and practical conference «Actual Problems of Science and Technology – from Theory to Practice»: Collection of abstracts (July 3-5, 2024)* Bern : International Scientific Unity, 2024. P. 70–76. URL: http://surl.li/zmokld (дата звернення: 29.08.2024).
16. Ramm Alexander G Boundary values of analytic functions. *Far East Journ. of Appl. Math*. Vo. 116, No 3, 2023. P. 215-227. URL: http://surl.li/usfja (дата звернення: 23.06.2024).

**Інформаційні ресурси**

1. Крайові задачі теорії аналітичних функцій : дисципліна в СЕЗН ЗНУ Moodle. URL: https://moodle.znu.edu.ua/course/view.php?id=1121
2. Крайові задачі теорії аналітичних функцій : навчальний посібник для студентів освітньо-кваліфікаційного рівня «спеціаліст» і освітнього ступеня «магістр» спеціальності «Математика» (за напрямами) / С .І. Гоменюк, С. М. Гребенюк, Н. М. Д'яченко, О. О. Тітова. Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2015. 91 с. URL: https://moodle.znu.edu.ua/course/view.php?id=1121 (дата звернення: 23.06.2024).
3. Сніжко Н. В. Крайові задачі теорії аналітичних функцій: навчальний посібник для студентів математичних спеціальностей. Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2007. 95 с. URL: https://moodle.znu.edu.ua/course/view.php?id=1121 (дата звернення: 23.06.2024)
4. Наукова бібліотека Запорізького національного університету. URL: http://library.znu.edu.ua/
5. Національна бібліотека України імені В. І. Вернадського. URL: http://www.nbuv.gov.ua/

## ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Крайові задачі теорії аналітичних функцій : навчальний посібник для студентів освітньо-кваліфікаційного рівня «спеціаліст» і освітнього ступеня «магістр» спеціальності «Математика» (за напрямами) / С .І. Гоменюк, С. М. Гребенюк, Н. М. Д'яченко, О. О. Тітова. Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2015. 91 с.
2. Сніжко Н. В. Крайові задачі теорії аналітичних функцій: навчальний посібник для студентів математичних спеціальностей. Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2007. 95 с.
3. Gakhov F. D. Boundary Value Problems. Courier Corporation, 1990. 561 p. URL: http://surl.li/nwuwqg (дата звернення: 23.06.2024).

## ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Гранични (крайові) значення інтеграла типу Коші на дійсній осі 16, 49
– – – – – – на зімкненому контурі 11, 48

Задача Рімана на дійсній осі (постановка задачі) 26
– – – – – неоднорідна 29, 50
– – – – – однорідна з ненульовим індексом 28
– – – – – – з нульовим індексом 27
– – – – – "про стрибок" 27
– – на зімкненому контурі (постановка Задачі) 19
– – – – – неоднорідна 23, 50
– – – – – однорідна з ненульовим індексом 22
– – – – – – з нульовим індексом 20
– – – – – "про стрибок" 20
– – на розімкненому контурі 37, 75
– – з розривним коефіцієнтом на зімкненому контурі 32, 62

Індекс функції 6, 42
Інтеграл типу Коші на дійсній осі, означення 13
– – – – – –, формули, обчислення 15, 49
– – – на зімкненому контурі, формули, обчислення 8, 45
– – – на контурі, означення 8

Ліва (права) границя функції в точці контура 18
Лівий (правий) окіл точки на контурі 18

Сингулярний інтеграл Коші на дійсній осі 15, 49
– – – на контурі 9, 48

Теорема Ліувіля, узагальнена 19
– про аналітичне продовження 19
Точка розриву першого роду для функції на контурі 18

Факторізація 22, 28
Формули для отримання розв'язку задачі Рімана на дійсній осі 31
– – – – – – на зімкненому контурі 25
– Сохоцького для сингулярного інтеграла Коші в гладкій точці зімкненого контура 12, 48
– – – – – – в кутовій точці зімкненого контура 12
– – – – – – на дійсній осі 16, 49
Функції, які задовольняють умову Гельдера 5, 39
– – – – Ліпшиця 5, 39

**НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ**
(українською мовою)

**Гоменюк Сергій Іванович**
**Гребенюк Сергій Миколайович**
**Д'яченко Наталія Миколаївна**

# КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Навчальний посібник
для здобувачів вищої освіти магістра спеціальності «Математика»
освітньо-професійної програми «Математика»

Рецензент *М.І. Клименко*
Відповідальний за випуск *С.М. Гребенюк*
Коректор *Н.М. Д'яченко*