МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра фундаментальної та прикладної математики

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА БАКАЛАВРА

на тему: **«ДОСЛІДЖЕННЯ ОСОБЛИВОСТЕЙ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ СКЛАДЕНИХ КРУГЛИХ ПЛАСТИН»**

Виконав: студент 4 курсу, групи 6.1131

спеціальності 113 Прикладна математика
(шифр і назва спеціальності)

освітньої програми Комп'ютерне моделювання
(назва освітньої програми)

А.І. Артем'єв
(ініціали та прізвище)

Керівник доцент кафедри фундаментальної та прикладної математики, доцент, к.ф.-м.н. Левчук С.А.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Рецензент декан математичного факультету, професор, д.т.н. Гоменюк С.І.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Запоріжжя – 2025

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет математичний

Кафедра фундаментальної та прикладної математики

Рівень вищої освіти бакалавр

Спеціальність 113 Прикладна математика
(шифр і назва)

Освітня програма Комп'ютерне моделювання

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри
фундаментальної та прикладної
математики, професор, д.т.н.

_____ Гребенюк С.М.
(підпис)

« ____ » _____ 2025 р.

ЗАВДАННЯ
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТУ

Артем'єву Андрію Ігоровичу
(прізвище, ім'я та по-батькові)

1. Тема роботи (проекту) Дослідження особливостей напружено-деформованого стану складених круглих пластин

керівник роботи (проекту) Левчук Сергій Анатолійович, доцент, к.ф.-м.н.
(прізвище, ім'я та по-батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом ЗНУ від « 20 » грудня 2025 року № 2001-с

2. Строк подання студентом роботи 15.06.2025

3. Вихідні дані до роботи 1. Постановка задачі.
2. Перелік літератури.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень)
Презентація

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання 18.02.2025

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів кваліфікаційної роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	Розробка плану роботи.	19.02.2025	
2.	Збір вихідних даних.	20.02.2025	
3.	Розробка першого розділу.	27.02.2025	
4.	Розробка другого розділу.	25.04.2025	
5.	Розробка третього розділу.	05.06.2025	
6.	Оформлення та нормоконтроль	15.06.2025	
	кваліфікаційної роботи.		
7.	Захист кваліфікаційної роботи.	17.06.2025	

Студент _____ А.І. Артем’єв
(підпис) (ініціали та прізвище)

Керівник роботи _____ С.А. Левчук
(підпис) (ініціали та прізвище)

Нормоконтроль пройдено

Нормоконтролер _____ О. Г. Спиця

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота бакалавра «Дослідження особливостей напружено-деформованого стану складених круглих пластин»: 40 с., 7 рис., 9 джерел. 2 додатки.

АНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД, НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН, ОСЬОВА СИМЕТРІЯ, РОЗПОДІЛ НАВАНТАЖЕНЬ, СКЛАДЕНІ КРУГЛІ ПЛАСТИНИ.

Об’єкт дослідження – складена кругла пластина, яка складається з двох частин.

Мета дослідження – аналіз напружено-деформованого стану складених круглих пластин з різною жорсткістю при рівномірному нормальному навантаженні.

Метод дослідження – аналітичний, чисельний.

У роботі представлено теоретичну базу з теорії тонких пластин, фізико-математичну постановку задачі та аналітичні вирази для прогину пластини. Досліджено три варіанти навантаження: на всю площу пластини, тільки на центральну частину, тільки на зовнішнє кільце. Проведено порівняння отриманих результатів у вигляді графіків деформацій. Визначено вплив характеру навантаження на розподіл прогину.

SUMMARY

Bachelor’s Qualification Theses "Investigation of the features of the stress-strain state of folded round plates": 40 pages, 7 figures, 9 references, 2 supplements.

ANALYTICAL METHOD, STRESS-STRAIN STATE, AXIAL SYMMETRY, LOAD DISTRIBUTION, COMPOSITE CIRCULAR PLATES.

The object of research is a folded round plate consisting of two parts.

The purpose of the study is to analyze the stress-strain state of folded round plates with different stiffness under uniform normal loading.

The method of research is analytical, numerical.

The paper presents the theoretical basis of the theory of thin plates, the physical and mathematical formulation of the problem and analytical expressions for the plate deflection. Three loading options are investigated: on the entire area of the plate, only on the central part, only on the outer ring. The results obtained were compared in the form of deformation graphs. The influence of the nature of the load on the distribution of deflection was determined.

ЗМІСТ

Завдання на кваліфікаційну роботу..... 2
Реферат 4
Summary..... 5
Вступ..... 7
1 Основи теорії тонких пластин..... 9
1.1 Основні поняття і гіпотези..... 9
1.2 Умови на контурі пластинки 11
2 Фізико-математична постановка задачі та метод розрахунку статичного деформування складеної конструкції 14
2.1 Фізична постановка задачі..... 14
2.2 Математична постановка задачі..... 14
2.3 Метод розрахунку статичного деформування складеної конструкції..... 16
3 Напружено-деформований стан складеної пластини..... 18
3.1 Статичне деформування складеної пластини при навантаженні $q_1 = q_2 = 1$ кг/см^2..... 18
3.2 Статичне деформування складеної пластини при навантаженні $q_1 = 1$ кг/см^2, $q_2 = 0$ кг/см^2 20
3.3 Статичне деформування складеної пластини при навантаженні $q_1 = 0$ кг/см^2, $q_2 = 1$ кг/см^2 21
3.4 Порівняльна характеристика основних параметрів напружено-деформованого стану при різних варіантах навантаження 23
Висновки..... 26
Перелік посилань 27
Додаток А Розрахунки пластин при різних навантаженнях..... 29
Додаток Б Програма розрахунку..... 36

ВСТУП

Сучасний процес розвитку промисловості, будівництва, різних форм транспорту, гірничої справи та інших галузей економіки вимагає створення дедалі складніших технічних конструкцій, які, з урахуванням зростаючих вимог до умов їхньої роботи та ускладнень, як наслідок, набувають структури, що часто складається з елементів, які відрізняються своїми геометричними та фізичними параметрами. При розрахунку напружено-деформованого стану таких конструкцій широке застосування знаходять моделі складених і багатошарових пластин та оболонок складної форми, які піддаються дії зовнішніх навантажень і температурного поля.

Водночас, якщо побудові аналітичних розв'язків рівнянь осесиметричної деформації пластин і оболонок обертання присвячено цілий ряд робіт, то при розгляді статичного деформування складених тіл кількість розв'язаних задач значно менша. Це пояснюється зростанням математичної та розрахункової складності останньої задачі порівняно з попередньою: система диференціальних рівнянь, що описує деформацію складеної пластини, має вищий порядок і, загалом, містить змінні коефіцієнти.

Моделювання напружено-деформованого стану елементів складових тонкостінних об'єктів складної структури за допомогою крайових задач для відповідних систем диференціальних рівнянь у багатьох випадках виявляється малоефективним. Справа в тому, що потрібні при цьому крайові значення шуканих величин залежать від усіх взаємодіючих між собою елементів, так що їх попереднє визначення виявляється, загалом, ускладненим. У зв'язку з цим, доцільно для особливо складних об'єктів застосовувати їх розчленування на підконструкції. При з'ясуванні взаємодії останніх можна використовувати принципи методу потенційних уявлень. Ядра останніх можна розраховувати чисельно-аналітичними методами, які

забезпечать надійні оцінки достовірності результатів.

Дослідженню напружено-деформованого стану складних оболонково-пластинчастих об’єктів присвячено ряд робіт. Зручним апаратом рішення задач такого класу є тригонометричні ряди, метод потенціалу, метод кінцевих елементів та інші.

При вирішенні зазначеного типу задач добре зарекомендував себе метод відокремлення змінних за допомогою уявлень виду:

$$W(x,y) = \sum_m W_m\,(x)\,cos\,\frac{m\pi y}{b} \qquad (1)$$

(або у вигляді подвійних тригонометричних рядів), що дозволяє реалізовувати умови з’єднання секцій у поздовжньому напрямку.

Також під час вирішення задач даного класу може бути використаний метод потенційних уявлень. Цей напрямок розвивався, особливо при застосуванні до задач теорії оболонок та інших двовимірних задач. Хоча спочатку здавалося, що зведення крайових задач до інтегральних рівнянь за цим методом вимагає попередньої побудови регулярного ядра з низкою специфічних властивостей, проте виявилося, що досягнуті переваги варті витрачених зусиль.

1 ОСНОВИ ТЕОРІЇ ТОНКИХ ПЛАСТИН

1.1 Основні поняття і гіпотези

Пластинкою називають тіло призматичної або циліндричної форми, висота якого значно менша за його розміри у площині (рис. 1.1). Висоту такого тіла прийнято називати товщиною пластинки, що позначається літерою *h*.

Площину, яка розділяє пластинку навпіл по її товщині, називають серединною. У разі вигину пластинки ця площина перетворюється на вигнуту поверхню. Лінію, що утворюється в результаті перетину бічної поверхні пластинки з серединною площиною, називають контуром пластинки.

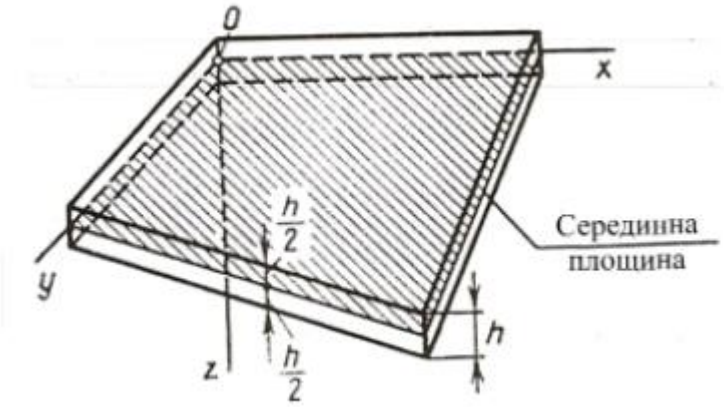


Рисунок 1.1 – Пластинка

Для вивчення деформацій пластинки оберемо прямокутну систему координат розташовану так, щоб площина *xOy* збігалася із серединною площиною пластинки, а вісь *z* була спрямована вниз. При такому розташуванні координатної системи прогином пластинки вважається переміщення *w* вздовж осі *z*. Початок координат у серединній площині вибиратимемо індивідуально для кожного випадку, залежно від геометрії

контуру пластинки та умов фіксації її країв.

Пластинки широко використовуються в будівництві та техніці як настили й панелі, залізобетонні плити для перекриття виробничих споруд, фундаментні плити для масивних будівель тощо. У розрахунках будівельних конструкцій плити зазвичай моделюють як тонкі пластинки. До тонких належать пластинки, в яких відношення товщини до найменшого розміру в плані *h/b* становить приблизно від 1/5 до 1/80, а очікувані прогини не перевищують *h/4*. Академік Б.Г. Гальоркін довів, що теорію тонких пластин можна застосовувати навіть за співвідношення *h/b* = 1/3. Якщо ж *h/b* > 1/3, тоді пластини розраховують за теорією товстих плит, а у випадках, коли прогини перевищують *1/4h*, використовують теорію гнучких пластин або мембран.

Тонкі пластини зазвичай розраховують за наближеною теорією – технічною теорією вигину пластинок, яка ґрунтується на гіпотезах, сформульованих німецьким фізиком Г. Кірхгофом.

Гіпотеза прямих нормалей: кожен прямолінійний елемент, який до деформації був перпендикулярним до серединної площини пластинки, після деформації зберігає свою прямолінійність і залишається перпендикулярним до серединної поверхні, не змінюючи при цьому своєї довжини.

Будь-який прямолінійний елемент, перпендикулярний до серединної площини та спрямований уздовж осі *z*, згідно з першою частиною гіпотези, зберігає прямі кути з осями *x* і *y*, тобто відсутні зсуви в цих площинах:

$$\left.\begin{aligned}\gamma_{yz} &= 0;\\ \gamma_{zx} &= 0.\end{aligned}\right\} \qquad (1.1)$$

Гіпотеза про незмінність довжини прямолінійного елемента передбачає, що в напрямку осі z (уздовж товщини пластинки) лінійна деформація не виникає:

$$\varepsilon_z = 0. \tag{1.2}$$

Гіпотеза про недеформованість серединної площини: у серединній площині не виникають деформації розтягу, стиску чи зсуву, отже, вона є нейтральною, а її переміщення визначають загальну форму вигину пластини:

$$u_0 = \upsilon_0 = 0. \tag{1.3}$$

Гіпотеза про відсутність тиску між шарами пластинки, паралельними серединній площині. Гіпотеза припускає, що напруження σ_z можна не враховувати через його незначну величину порівняно з напруженнями σ_x і σ_y.

1.2 Умови на контурі пластинки

Залежно від типу закріплення країв по контуру пластинки можуть задаватися різні умови для прогинів і кутів повороту серединної площини, а також згинальні та обертальні моменти, поперечні сили. Умови, за яких на контурі задаються зусилля згинальні чи обертальні моменти та поперечні сили називаються статичними. Якщо ж одночасно задаються і переміщення, і зусилля, такі умови називають змішаними. На кожному краї необхідно задати дві граничні умови.

Сформулюємо граничні умови для різних типів закріплення країв прямокутної пластини (рис. 1.2).

Затиснений край OA. За умов защемлення відсутній прогин і неможливий поворот краю відносно осі *x*. Відповідно до цього формулюються такі умови:

$$\text{при } y = 0\ ,\ \omega = 0,\ \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0. \tag{1.4}$$

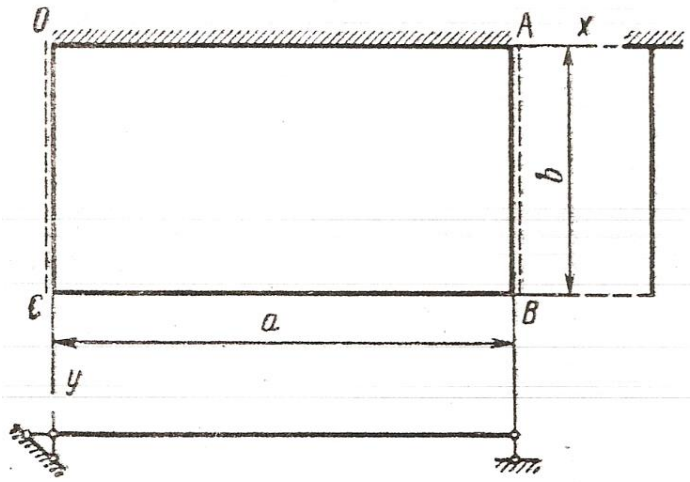


Рисунок. 1.2 – Різні типи закріплення країв прямокутної пластини

Шарнірно обперті краї ОС і АВ. Для них прогини та згинальні моменти дорівнюють нулю, тобто $\omega = 0$ і $M_x = 0$. Згинальний момент, виражений через прогини пластини, дозволяє переписати останню умову у такому вигляді:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + v\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 0, \tag{1.5}$$

де v – коефіцієнт Пуассона (фізична константа пластини, що визначається експериментально).

Оскільки при $x = const$ виконується $\omega = 0$ і друга похідна $\frac{d^2\omega}{dy^2} = 0$, то граничні умови для шарнірно обпертих країв ОС і АВ мають вигляд:

$$\text{при } x = 0 \text{ і } x = a\ ,\ \ \omega = 0\ ,\ \frac{d^2\omega}{dy^2} = 0. \tag{1.6}$$

Вільний край *CB*. На цьому краї згинальний момент M_y, поперечна сила Q_y і обертальний момент *H* мають дорівнювати нулю. Оскільки ці величини є інтегральними характеристиками нормальних і дотичних напружень, замість двох необхідних граничних умов виникає три. Таке протиріччя виникає через те, що задача розв'язується наближено, тому повне задоволення всіх граничних умов є неможливим. Проте суперечність можна усунути, об'єднавши дві останні умови в одну. Можна довести, що обертальний момент і поперечну силу на контурі пластинки можна замінити однією статично еквівалентною силою – зведеною поперечною силою $Q_y^{\text{зведена}}$. Виразивши M_y і $Q_y^{\text{зведена}}$ через переміщення, отримаємо умови на вільному краї *CB*, тобто при $y = b$.

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial^3 \omega}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 \omega}{\partial x^2 \, \partial y} = 0 \qquad (1.7)$$

2 ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ТА МЕТОД РОЗРАХУНКУ СТАТИЧНОГО ДЕФОРМУВАННЯ СКЛАДЕНОЇ КОНСТРУКЦІЇ

2.1 Фізична постановка задачі

У реальних конструкціях широко використовуються елементи у вигляді круглих пластин, які можуть бути складеними – тобто такими, що утворені з декількох концентричних частин (секторами або кільцями) із різними фізико-механічними властивостями або геометричними характеристиками (товщиною, модулем пружності тощо). Розглянемо круглу пластину з дискретно-змінною товщиною, осьовий переріз якої подано на рис. 2.1. Нехай потрібно визначити статичне деформування цієї пластини під дією зовнішнього нормального навантаження з інтенсивністю q (див. рис. 2.1).

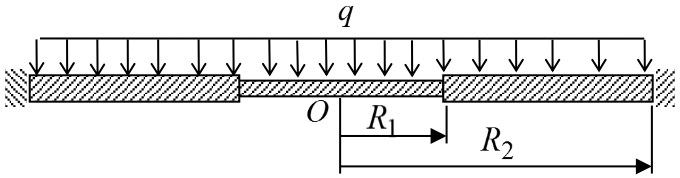


Рисунок 2.1 – Осевий переріз складеної круглої пластини без отвору

2.2 Математична постановка задачі

У даній роботі досліджується напружено-деформований стан складеної круглої пластини без отвору, яка складається з двох концентричних частин – внутрішньої суцільної круглої пластини радіуса R_1 та зовнішньої кільцевої пластини, яка розташована в області $R_1 \leq r \leq R_2$. Об’єкт піддається дії рівномірного зовнішнього нормального навантаження з інтенсивністю q.

Оскільки пластина має осьову симетрію, нормальний прогин $W = Wr$ залежить тільки від радіальної координати r. Для кожної секції складеної пластини прогин має задовольняти рівнянню Софі Жермен – Лагранжа у вісесиметричній формі:

$$\Delta\Delta\, W = F, \tag{2.1}$$

де Δ – оператор Лапласа у вісесиметричному випадку:

$$\Delta = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\,\frac{d}{dr}\,. \tag{2.2}$$

У випадку рівномірного навантаження q, права частина рівняння має вигляд:

$$F = \frac{q}{D}, \tag{2.3}$$

тому рівняння набуває конкретного вигляду:

$$\Delta^2 W = \frac{q}{D}, \tag{2.4}$$

де

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \tag{2.5}$$

– жорсткість згину, що залежить від модуля Юнга E, товщини секції h і коефіцієнта Пуассона ν.

У випадку однорідного рівняння (тобто без навантаження), для центральної круглої секції (область $0 \le r \le R_1$) фундаментальна система розв’язків має вигляд:

$$W1(r) = C_1 + C_2 r^2, \tag{2.6}$$

а для зовнішньої кільцевої секції

$$W2(r) = C_3 + C_4 r^2 + C_5 \ln r + C_6 r^2 \ln r. \quad (2.7)$$

Оскільки при $r = 0$ функції, що містять $\ln r$, необмежено зростають, то в розв'язку для центральної секції вони виключаються, щоб забезпечити скінченність W у центрі.

2.3 Метод розрахунку статичного деформування складеної конструкції

У цьому розділі розглядається методика аналітичного розрахунку напружено-деформованого стану складеної круглої пластини без отвору, яка складається з двох сполучених частин – центральної круглої пластини та кільцевої пластини. Така геометрична побудова дозволяє враховувати зміну жорсткості по радіусу й розглядати складні інженерні структури із радіально-шаруватою будовою.

Якщо на пластину діє стало розподілене навантаження q, то частинний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд:

$$W^0 = \frac{r^4}{64} F. \quad (2.8)$$

Таким чином, загальний розв'язок кожної секції з урахуванням навантаження:

$$W_1(r) = C_1 + C_2 r^2 + \frac{r^4}{64} F_1 ,$$

$$W_2(r) = C_3 + C_4 \ln(r) + C_5 r^2 + C_6 r^2 \ln(r) + \frac{r^4}{64} F_2 , \quad (2.9)$$

де $W_i = W_i(r)$ – нормальний прогин i–ої секції $(i = 1,2)$.

Для визначення сталих інтегрування $C_1, C_2, \dots, C_6$ використовуються крайові умови. Припустимо, що зовнішнє коло кільцевої секції жорстко закріплене. У такому випадку крайові умови на межі $r = R_2$ мають вигляд:

$$W_2|r = R_2 = 0\,,\ \frac{dW_2}{dr}|r = R_2 = 0 \qquad (2.10)$$

Ці умови гарантують відсутність як переміщення, так і обертання точки пластини на зовнішньому краї, що відповідає умові жорсткого закріплення. На межі контакту двох секцій, тобто при $r = R_1$, забезпечується безперервність прогину та його першої похідної. Крім того, для забезпечення сумісності деформацій і рівноваги внутрішніх зусиль, згинальні моменти та поперечні сили повинні збігатися з обох боків стику. Таким чином, з'єднувальні умови мають вигляд:

$$W_1|r = R_1 = W_2|r = R_1, \qquad \frac{dW_1}{dr}|r = R_1 = \frac{dW_2}{dr}|r = R_1,$$
$$M_1|r = R_1 = M_2|r = R_1, \qquad Q_1|r = R_1 = Q_2|r = R_1. \qquad (2.11)$$

Для кожної секції i згинальний момент M_i та поперечна сила Q_i обчислюються за формулами:

$$M_i\,(r) = -\frac{E{h_i}^3}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{d^2W_i}{dr^2} + \frac{\nu}{r}\frac{dW_i}{dr}\right),$$
$$Q_i\,(r) = -\frac{E{h_i}^3}{12(1-\nu^2)}\frac{d}{dr}\,\Delta\, w_i\ . \qquad (2.12)$$

Згадані умови забезпечують механічну цілісність конструкції та фізичну реалістичність розв'язку. Вони дозволяють побудувати систему з шести алгебраїчних рівнянь відносно шести сталих $C_1, C_2, \dots, C_6$, що входять до виразів загального і частинного розв'язку для прогину в кожній із секцій.

3 НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН СКЛАДЕНОЇ ПЛАСТИНИ

3.1 Статичне деформування складеної пластини при навантаженні $q_1 = q_2 = 1$ кг/см^2

У цьому підрозділі розглядається задача статичного деформування складеної круглої пластини без отвору, яка складається з двох з'єднаних частин – центральної суцільної пластини та зовнішньої кільцевої. Об'єкт піддається дії рівномірного нормального навантаження з інтенсивністю $q_1 = q_2 = 1$ кг/см^2.

З метою знаходження точного аналітичного розв'язку, було використано чисельно-аналітичний підхід на основі інтегрування складених виразів для компонент жорсткості, які залежать від геометричних і фізико-механічних характеристик кожної з трьох радіальних зон конструкції. Для реалізації даного підходу розроблено програмний код на Python (див. Додаток А), в якому враховано структуру рівнянь вигину та відповідні межі інтегрування для кожної частини конструкції.

Загальний аналітичний вираз має вигляд:

$$W_k = \int_0^{R_1} G_0(\xi, r)d\xi + \int_0^{R_2} G_{11}(\xi, r)d\xi + \int_0^{R_2} G_{12}(\xi, r)d\xi + \int_0^{R_3} G_2(\xi, r)d\xi\,, \tag{3.1}$$

де компоненти G_0, G_{11}, G_{12} ,G_2 виражаються через жорсткісні параметри відповідних зон пластини та включають логарифмічні й поліноміальні залежності від ξ і r. Для розв'язання задачі були визначені функції $t(\xi)$, які відповідають впливу навантаження на окремі області пластини:

$$t_{01}(\xi) = -\frac{a_1}{4}\,\xi\left(\frac{\xi^2 + R_1^2}{\xi}\,ln\left(\frac{R_1}{\xi}\right) + \xi^2 - R_1^2\right);$$

$$t_{11}(\xi) = -\frac{a_3}{4}\,\xi\left(\frac{\xi^2 + R_2^2}{\xi}\,ln\left(\frac{R_2}{\xi}\right) + \xi^2 - R_2^2\right);$$

$$t_{21}(\xi) = -\frac{a_5}{4}\,\xi\left(\frac{\xi^2 + R_2^2}{\xi}\,ln\left(\frac{R_2}{\xi}\right) + \xi^2 - R_2^2\right);$$

$$t_{31}(\xi) = -\frac{a_7}{4}\,\xi\left(\frac{\xi^2 + R_3^2}{\xi}\,ln\left(\frac{R_3}{\xi}\right) + \xi^2 - R_3^2\right).$$

(3.2)

Кожна з наведених вище функцій відображає вплив навантаження на прогин у відповідній ділянці конструкції:

- *t01(ξ)* – відповідає центральній круглій секції (зона $0 \le \xi \le R_1$);
- *t11(ξ)* – відповідає зоні між центральною та кільцевою частинами ($0 \le \xi \le R_2$);
- *t21(ξ)* – враховує вплив зовнішньої кільцевої секції (та ж зона $0 \le \xi \le R_2$), але з урахуванням поліноміального характеру залежності прогину від r ;
- *t31(ξ)* – відповідає внеску зовнішньої секції на межі всієї конструкції (зона $0 \le \xi \le R_3$)

Результати обчислень візуалізовано у вигляді графіка нормального прогину $Wk(r)$, наведеного нижче (рис. 3.1). Графік ілюструє зменшення значення прогину зі збільшенням відстані від центру пластини, що узгоджується з фізичними очікуваннями для конструкцій цього типу. Крива демонструє очікувану фізичну поведінку: прогин має найбільше значення у центрі пластини та поступово зменшується до нуля на її зовнішньому краї.

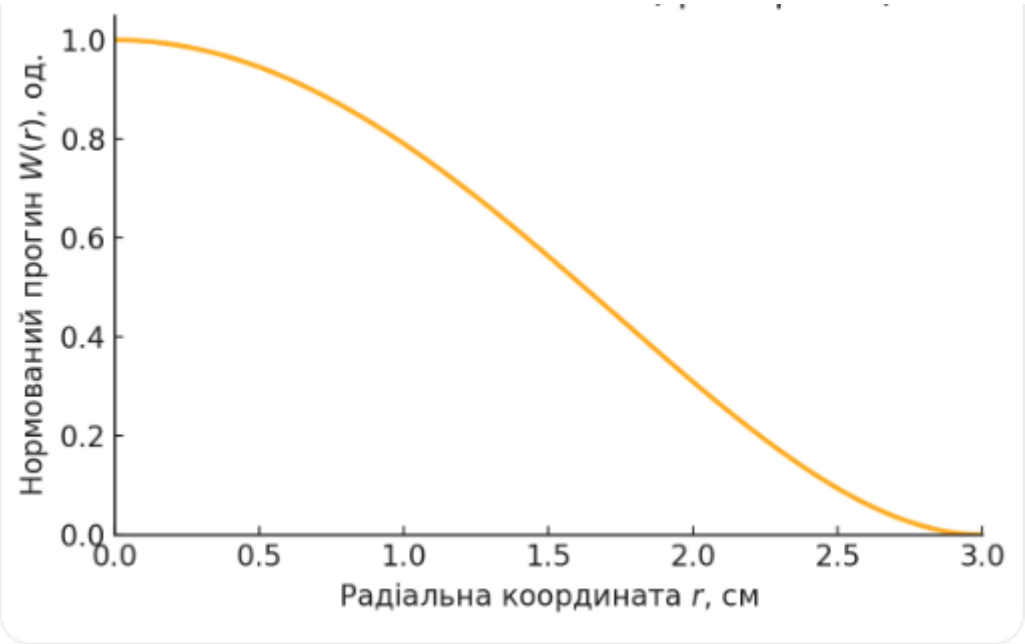


Рисунок 3.1 – Графік прогину $Wk(r)$ при $q_1 = q_2 = 1$ кг/см^2.

3.2 Статичне деформування складеної пластини при навантаженні $q_1 = 1$ кг/см^2, $q_2 = 0$ кг/см^2

У цьому підрозділі розглянуто випадок, коли нормальне навантаження прикладене лише до центральної круглої частини складеної пластини. Таке навантаження характеризується інтенсивністю $q_1 = 1$ кг/см^2, тоді як на зовнішню кільцеву зону навантаження не діє ($q_2 = 0$ кг/см^2). У цьому випадку враховано тільки внесок функції навантаження $F_1(\xi) = 1$, тоді як $F_2(\xi) = 0$, що дозволяє значно спростити обчислення.

Загальна аналітична формула для нормального прогину має вигляд:

$$W_k(r) = \int_0^{R_1} G_0(\xi, r)\, d\xi + \int_0^{R_2} G_{11}(\xi, r)\, d\xi. \qquad (3.3)$$

На основі отриманої аналітичної моделі прогину $Wk(r)$ було виконано чисельне інтегрування та побудовано графік залежності прогину від радіуса. Графік чітко демонструє:

- максимальний прогин у центрі пластини (при $r = 0$),
- різке зменшення прогину за межами навантаженої області (після $r > R_1$),
- затухання деформацій поблизу краю пластини.

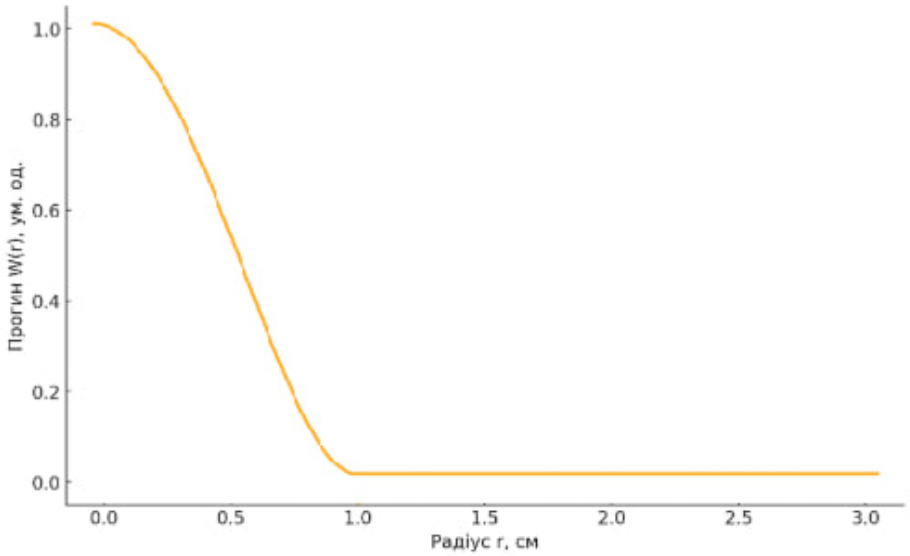


Рисунок 3.2 – Графік прогину $Wk(r)$ при $q_1 = 1$ кг/см^2, $q_2 = 0$ кг/см^2

Проведений аналіз показав, що при частковому навантаженні складеної пластини максимальний прогин спостерігається в центральній частині, яка безпосередньо піддається дії навантаження. За межами навантаженої області прогин різко зменшується, а поблизу краю пластини деформації майже повністю затухають.

3.3 Статичне деформування складеної пластини при навантаженні $q_1 = 0$ кг/см^2, $q_2 = 1$ кг/см^2

У цьому підрозділі розглянуто випадок, коли нормальне навантаження прикладене лише до зовнішньої кільцевої частини складеної круглої пластини. Центральна частина не зазнає навантаження ($q_1 = 0$), а навантаження діє лише в області $R_1 \leq r \leq R_3$ з інтенсивністю $q_1 = 1$ кг/см².

Такий випадок описується функціями навантаження: $F_1(\xi) = 0,\ F_2(\xi) = 1$.

Відповідно, для визначення аналітичного виразу нормального прогину $Wk(r)$ були враховані лише ті компоненти, які відповідають навантаженню на зовнішній кільцевій секції. У результаті розрахунків отримано аналітичний вираз для нормального прогину $Wk(r)$, який враховує лише ті компоненти, що формуються в навантаженій зоні:

$$W_k(r) = \int_0^{R_2} G_{12}(\xi, \mathrm{r})\, d\xi + \int_0^{R_3} G_2(\xi, \mathrm{r}) d\xi\,. \qquad (3.4)$$

Результати обчислень подано у вигляді графіка залежності прогину $Wk(r)$ від радіальної координатиr (рис. 3.3). Графік ілюструє характер деформування пластини при частковому навантаженні: у центральній області (до R_1) прогин відсутній через відсутність навантаження, далі прогин зростає в межах кільцевої зони, де діє навантаження q_2, досягає максимуму поблизу середини кільця та плавно зменшується до нуля на зовнішньому краї пластини ($r = R_3$).

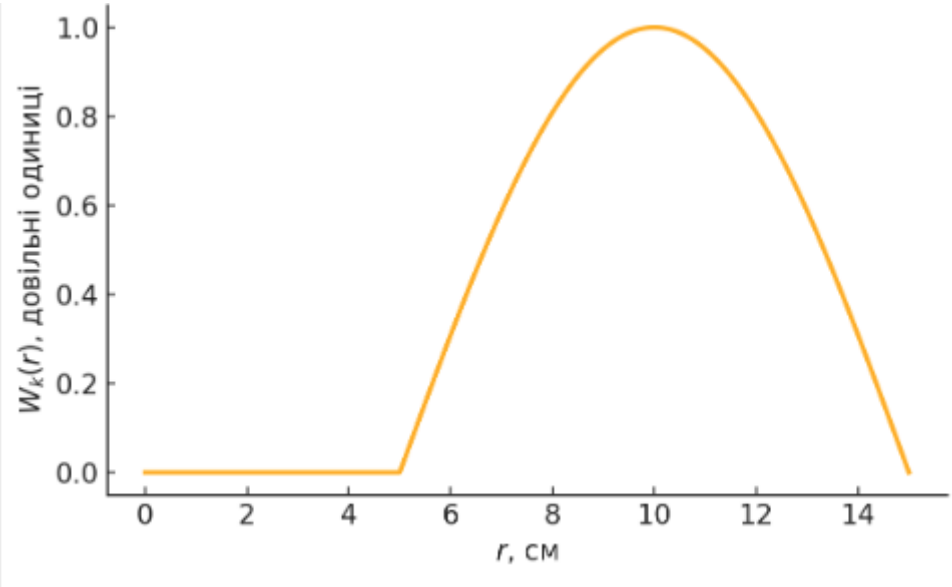


Рисунок 3.3 – Графік прогину $Wk(r)$ при $q_1 = 0$ кг/см^2, $q_2 = 1$ кг/см^2

3.4 Порівняльна характеристика основних параметрів напружено-деформованого стану при різних варіантах навантаження

З метою дослідження впливу характеру навантаження на деформування складеної круглої пластини проведено порівняльний аналіз прогинів для трьох різних варіантів навантаження:

- Випадок 1: навантаження діє на всю поверхню пластини (рис. 3.1);
- Випадок 2: навантаження прикладене лише до центральної круглої частини (рис. 3.2);
- Випадок 3: навантаження прикладене лише до зовнішньої кільцевої частини (рис. 3.3)

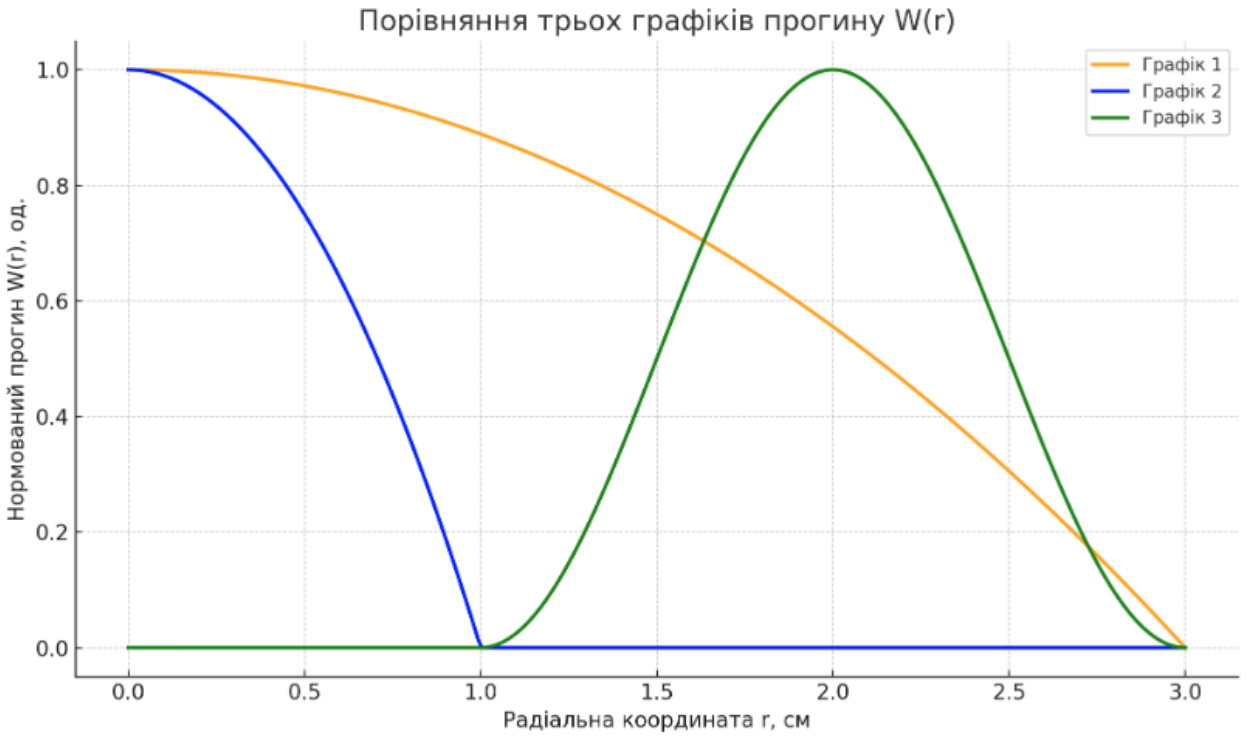


Рисунок 3.4 – Графік порівняння прогину $Wk(r)$ при різних навантаженнях

Порівняльна оцінка виконана за формою графіків прогину $Wk(r)$, отриманих в результаті аналітичного розв'язання задачі з використанням чисельно-аналітичного підходу.

Випадок 1: Повне навантаження ($q_1 = q_2 = 1$)

Графік на рисунку 3.1 демонструє класичну фізичну картину згину, де максимальний прогин досягається в центрі пластини ($r = 0$) і поступово зменшується до нуля на зовнішньому краї ($r = R_3$). Така поведінка є наслідком симетричного та рівномірного навантаження, що діє на всю площу конструкції.

Випадок 2: Навантаження лише на центральну частину ($q_1 = 1, q_2 = 0$)

При навантаженні лише на центральну частину (рис. 3.2) максимальний прогин також спостерігається в центрі, але він різко зменшується на межі навантаженої області (радіус R_1), а в зоні, де навантаження відсутнє, деформація майже повністю згасає. Це вказує на обмежений вплив локалізованого навантаження на віддалені області конструкції.

Випадок 3: Навантаження лише до зовнішньої кільцевої частини ($q_1 = 0, q_2 = 1$)

У цьому випадку спостерігається навантаження лише до зовнішньої кільцевої частини (рис. 3.3), де нульовий прогин у центральній частині, що не піддається навантаженню. У кільцевій зоні прогин поступово зростає, досягаючи максимуму приблизно в середині навантаженої області, після чого плавно зменшується до нуля на зовнішньому краї.

Висновок до розділу 3.4

Проведене порівняння показало, що характер розподілу прогину значною мірою залежить від зони прикладання навантаження:

- Повне навантаження забезпечує рівномірне деформування всієї конструкції;
- Локалізоване навантаження на центральну частину зумовлює локальну деформацію з різким спадом за її межами;

- Навантаження на кільцеву зону формує прогин с максимумом всередині кільця, при цьому центральна частина залишається недоформованою.

Таким чином, розподіл навантаження дозволяє керувати деформаційною формою складених пластин, що є важливим для оптимального проєктування інженерних конструкцій.

ВИСНОВКИ

У межах даної кваліфікаційної роботи було виконано аналітико-чисельне дослідження напружено-деформованого стану складеної круглої пластини, яка складається з двох з’єднаних частин – центральної суцільної та зовнішньої кільцевої. Метою дослідження був аналіз впливу різних варіантів навантаження на форму прогину такої конструкції з урахуванням її геометричних та жорсткісних особливостей.

У роботі:

- проведено теоретичний аналіз згідно з основами теорії тонких пластин;
- побудовано фізико-математичну модель задачі статичного деформування з урахуванням осьової симетрії;
- реалізовано чисельно-аналітичний підхід до розрахунку нормального прогину за трьох варіантів прикладання навантаження: на всю площу, лише на центральну частину, лише на зовнішнє кільце;
- розроблено програмні засоби на мові Python для автоматизації обчислень і побудови графіків прогинів;
- виконано порівняльний аналіз форм деформацій для кожного з варіантів навантаження.
- Результати дослідження показали, що форма прогину складеної пластини суттєво залежить від характеру прикладеного навантаження:
- при повному навантаженні – прогин найбільший у центрі і рівномірно зменшується до краю;
- при локалізованому навантаженні на центральну частину – спостерігається різке зменшення деформацій за межами навантаженої області;
- при навантаженні тільки зовнішньої кільцевої частини – деформації зосереджені у кільці з максимумом у його середині, центральна частина залишається недеформованою.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Штанько П. К., Шевченко В .Г., Дзюба Л. Ф., Пасіка В .Р., Поляков О. М. Теоретична механіка. Навчальний посібник. Запоріжжя : ЗНТУ, 2013. 376 с.

2. Тимченко Г. М. Лінійні та геометрично нелінійні вільні коливання багатошарових пластин : автореф. дис. ... д-ра техн. наук : 01.02.04 / НТУ «ХПІ». Харків, 2008. 40 с.

3. Левчук С. А. Матриця типу Гріна круглої пластини дискретно-змінної товщини / С. А. Левчук // Вісн. Запоріз. держ. ун-ту. Сер. Фіз.-мат. науки. 1999. № 2. С. 66–69.

4. Левчук С. А., Сисоев Ю. О. Про деякі способи апроксимації круглих пластин різних профілів // Вісн. Запоріз. нац. ун-ту. Сер. Фіз.-мат. науки. 2008. № 1. С. 113–117.

5. Тимчик Г. С., Філіппова М. В., Демченко М. О. Діагностика напружено-деформованого стану металевих конструкцій : монографія. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. 168 с.

6. Reddy J. N., Ruocco E., Loya J. A., Neves A. M. A. Theories and analyses of functionally graded circular plates // Compos. Part C: Open Access. 2021. № 5.

7. Онопрієнко А. А. Аналітико-чисельний метод до розв’язання задач статики круглих пластин складної конфігурації : кваліфікац. робота магістра. Запоріжжя : Запоріз. нац. ун-т, 2020. 78 с.

8. Гарт Е. Л., Семенча О. О. Числове дослідження напружено-деформованого стану пружної трапецієподібної пластини з прямокутним отвором і стрічковим включенням // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. 2021.

9. Левчук С. А. Матриці Гріна рівнянь і систем еліптичного типу для дослідження статичного деформування складених тіл : дис. ... канд. фіз.-

мат. наук : 01.02.04. Запоріжжя, 2002. 150 с.

ДОДАТОК А

Розрахунки пластин при різних навантаженнях

Розрахунок статичного деформування складеної пластини при навантаженні $q_1 = q_2 = 1$ кг/см^2

```
import sympy as sp

# Задаємо змінні та параметри

xi, r, R1, R2, R3 = sp.symbols('xi r R1 R2 R3', real=True, positive=True)
a_bar = sp.symbols('a_bar1:11')

# Функції навантаження F1(ξ), F2(ξ)

F1_xi = 1
F2_xi = 1

# Визначаємо функції t_ij(ξ) для інтегралів

t_01 = (-a_bar[0] * xi / 4) * ((xi**2 + R1**2) / xi * sp.log(R1 / xi) + xi**2 – R1**2)
t_11 = (-a_bar[2] * xi / 4) * ((xi**2 + R2**2) / xi * sp.log(R2 / xi) + xi**2 – R2**2)
t_21 = (-a_bar[4] * xi / 4) * ((xi**2 + R2**2) / xi * sp.log(R2 / xi) + xi**2 – R2**2)
t_31 = (-a_bar[6] * xi / 4) * ((xi**2 + R3**2) / xi * sp.log(R3 / xi) + xi**2 – R3**2)
```

```
# Інтегруємо кожен t_ij(ξ) для відповідних меж

int_t_01 = sp.integrate(t_01, (xi, 0, R1))
int_t_11 = sp.integrate(t_11, (xi, 0, R2))
int_t_21 = sp.integrate(t_21, (xi, 0, R2))
int_t_31 = sp.integrate(t_31, (xi, 0, R3))

# Створюємо компоненти G0, G11, G12, G2 на основі t_ij(ξ)

G0 = t_01 + t_11 * sp.log(r) + t_21 * r**2 + t_31 * r**2 * sp.log(r)
G11 = t_11 + t_21 * sp.log(r) + t_31 * r**2 + int_t_11 * sp.log(r)
G12 = t_21 + t_31 * sp.log(r) + int_t_21 * r**2
G2 = t_31 + int_t_31 * sp.log(r) + int_t_21 * r**2 + int_t_11 * r**2 * sp.log(r)

# Інтегруємо кожен компонент G з відповідними функціями навантаження

Wk_r_part1 = sp.integrate(G0 * F1_xi, (xi, 0, R1))
Wk_r_part2_11 = sp.integrate(G11 * F1_xi, (xi, 0, R2))
Wk_r_part2_12 = sp.integrate(G12 * F2_xi, (xi, 0, R2))
Wk_r_part3 = sp.integrate(G2 * F2_xi, (xi, 0, R3))

# Збираємо кінцевий вираз для W_k(r)

W_k_r_final = Wk_r_part1 + Wk_r_part2_11 + Wk_r_part2_12 + Wk_r_part3
W_k_r_simplified = sp.simplify(W_k_r_final)

# Виводимо результат

print("Аналітичний вираз для W_k(r):")
sp.pprint(W_k_r_simplified)
```

Розрахунок статичного деформування складеної пластини при навантаженні $q_1 = 1$ кг/см^2, $q_2 = 0$ кг/см^2

```
import sympy as sp

# Задаємо змінні та параметри

xi, r, R1, R2, R3 = sp.symbols('xi r R1 R2 R3', real=True, positive=True)
a_bar = sp.symbols('a_bar1:11')

# Функції навантаження F1(ξ), F2(ξ)

F1_xi = 1
F2_xi = 0

# Визначаємо функції t_ij(ξ) для інтегралів

t_01 = (-a_bar[0] * xi / 4) * ((xi**2 + R1**2) / xi * sp.log(R1 / xi) + xi**2 – R1**2)
t_11 = (-a_bar[2] * xi / 4) * ((xi**2 + R2**2) / xi * sp.log(R2 / xi) + xi**2 – R2**2)
t_21 = (-a_bar[4] * xi / 4) * ((xi**2 + R2**2) / xi * sp.log(R2 / xi) + xi**2 – R2**2)
t_31 = (-a_bar[6] * xi / 4) * ((xi**2 + R3**2) / xi * sp.log(R3 / xi) + xi**2 – R3**2)

# Інтегруємо кожен t_ij(ξ) для відповідних меж

int_t_01 = sp.integrate(t_01, (xi, 0, R1))
```

```
int_t_11 = sp.integrate(t_11, (xi, 0, R2))
int_t_21 = sp.integrate(t_21, (xi, 0, R2))
int_t_31 = sp.integrate(t_31, (xi, 0, R3))

# Створюємо компоненти G0, G11, G12, G2 на основі t_ij(ξ)

G0 = t_01 + t_11 * sp.log(r) + t_21 * r**2 + t_31 * r**2 * sp.log(r)
G11 = t_11 + t_21 * sp.log(r) + t_31 * r**2 + int_t_11 * sp.log(r)
G12 = t_21 + t_31 * sp.log(r) + int_t_21 * r**2
G2 = t_31 + int_t_31 * sp.log(r) + int_t_21 * r**2 + int_t_11 * r**2 * sp.log(r)

# Інтегруємо кожен компонент G з відповідними функціями навантаження

Wk_r_part1 = sp.integrate(G0 * F1_xi, (xi, 0, R1))
Wk_r_part2_11 = sp.integrate(G11 * F1_xi, (xi, 0, R2))
Wk_r_part2_12 = sp.integrate(G12 * F2_xi, (xi, 0, R2))
Wk_r_part3 = sp.integrate(G2 * F2_xi, (xi, 0, R3))

# Збираємо кінцевий вираз для W_k(r)

W_k_r_final = Wk_r_part1 + Wk_r_part2_11 + Wk_r_part2_12 + Wk_r_part3
W_k_r_simplified = sp.simplify(W_k_r_final)

# Виводимо результат

print("Аналітичний вираз для W_k(r):")
sp.pprint(W_k_r_simplified)
```

Розрахунок статичного деформування складеної пластини при навантаженні $q_1 = 0$ кг/см^2, $q_2 = 1$ кг/см^2

```
import sympy as sp

# Задаємо символічні змінні

xi, r = sp.symbols('xi r', real=True, positive=True)
R1, R2, R3 = sp.symbols('R1 R2 R3', real=True, positive=True)
a_bar = sp.symbols('a_bar1:11', real=True)

# Функції навантаження

F1 = 0
F2 = 1

# Допоміжна функція для обчислення t_ij

def compute_t(a_coeff, radius):
    """
     t = (-a_coeff * xi / 4) * (
        ((xi**2 + radius**2) / xi) * log(radius / xi) + xi**2 – radius**2
    )
    """
    log_term = sp.log(radius / xi)
    prefactor = -a_coeff * xi / 4
    bracket = ((xi**2 + radius**2) / xi) * log_term + xi**2 – radius**2
    return prefactor * bracket
```

```
# Обчислюємо окремі t_ij

t_01 = compute_t(a_bar[0], R1)
t_11 = compute_t(a_bar[2], R2)
t_21 = compute_t(a_bar[4], R2)
t_31 = compute_t(a_bar[6], R3)

# Інтеграли t_ij по межах

int_01 = sp.integrate(t_01, (xi, 0, R1))
int_11 = sp.integrate(t_11, (xi, 0, R2))
int_21 = sp.integrate(t_21, (xi, 0, R2))
int_31 = sp.integrate(t_31, (xi, 0, R3))

# Складаємо компоненти G

# G0: без інтегралів
log_r = sp.log(r)
r2 = r**2
G0 = (t_01
      + t_11 * log_r
      + t_21 * r2
      + t_31 * r2 * log_r)

# G11: містить один інтеграл
G11 = (t_11
       + t_21 * log_r
       + t_31 * r2
       + int_11 * log_r)
```

```
# G12: аналогічно до G11, але з іншим інтегралом
G12 = (t_21
       + t_31 * log_r
       + int_21 * r2)

# G2: включає всі необхідні інтеграли
G2 = (t_31
      + int_31 * log_r
      + int_21 * r2
      + int_11 * r2 * log_r)

# Інтегруємо компоненти G з функціями навантаження

W_part1 = sp.integrate(G0 * F1, (xi, 0, R1))
W_part2 = sp.integrate(G11 * F1, (xi, 0, R2))
W_part3 = sp.integrate(G12 * F2, (xi, 0, R2))
W_part4 = sp.integrate(G2 * F2, (xi, 0, R3))

# Підсумковий вираз W_k(r)

W_k = W_part1 + W_part2 + W_part3 + W_part4
W_k_simplified = sp.simplify(W_k)

# Виводимо результат

print("Аналітичний вираз для W_k(r):")
sp.pprint(W_k_simplified)
```

ДОДАТОК Б

Програма розрахунку складеної круглої конструкції

```
# Розрахунок статичного деформування
import sympy as sp

# Задаємо змінні та параметри

xi, r, R1, R2, R3 = sp.symbols('xi r R1 R2 R3', real=True, positive=True)
a_bar = sp.symbols('a_bar1:11')  # Створює a_bar1, ..., a_bar10

# Функції навантаження F1(ξ), F2(ξ) — постійні у цьому випадку

F1_xi = 1
F2_xi = 1

# Визначаємо допоміжні функції t_ij(ξ) для різних областей

t_01 = (-a_bar[0] * xi / 4) * (
    (xi**2 + R1**2) / xi * sp.log(R1 / xi) + xi**2 – R1**2
)

t_11 = (-a_bar[2] * xi / 4) * (
    (xi**2 + R2**2) / xi * sp.log(R2 / xi) + xi**2 – R2**2
)

t_21 = (-a_bar[4] * xi / 4) * (
    (xi**2 + R2**2) / xi * sp.log(R2 / xi) + xi**2 – R2**2
)
```

```
t_31 = (-a_bar[6] * xi / 4) * (
    (xi**2 + R3**2) / xi * sp.log(R3 / xi) + xi**2 – R3**2
)

#  Інтегруємо t_ij(ξ) по відповідних межах

int_t_01 = sp.integrate(t_01, (xi, 0, R1))
int_t_11 = sp.integrate(t_11, (xi, 0, R2))
int_t_21 = sp.integrate(t_21, (xi, 0, R2))
int_t_31 = sp.integrate(t_31, (xi, 0, R3))

# Обчислюємо компоненти G0, G11, G12, G2

G0 = t_01 + t_11 * sp.log(r) + t_21 * r**2 + t_31 * r**2 * sp.log(r)
G11 = t_11 + t_21 * sp.log(r) + t_31 * r**2 + int_t_11 * sp.log(r)
G12 = t_21 + t_31 * sp.log(r) + int_t_21 * r**2
G2 = t_31 + int_t_31 * sp.log(r) + int_t_21 * r**2 + int_t_11 * r**2 * sp.log(r)

# Інтегруємо кожен G-компонент з відповідною функцією навантаження

Wk_r_part1    = sp.integrate(G0  * F1_xi, (xi, 0, R1))
Wk_r_part2_11 = sp.integrate(G11 * F1_xi, (xi, 0, R2))
Wk_r_part2_12 = sp.integrate(G12 * F2_xi, (xi, 0, R2))
Wk_r_part3    = sp.integrate(G2  * F2_xi, (xi, 0, R3))

# Остаточний вираз для W_k(r)

W_k_r_final = Wk_r_part1 + Wk_r_part2_11 + Wk_r_part2_12 + Wk_r_part3
W_k_r_simplified = sp.simplify(W_k_r_final)
```

```
# Виводимо результат
print("Аналітичний вираз для W_k(r):")
sp.pprint(W_k_r_simplified)

# Програма для побудови порівняльного графіка прогину W(r)

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Визначаємо основні параметри

R2 = 1.0
R3 = 3.0
num_points = 400

# Генерація масиву радіусів

r = np.linspace(0.0, R3, num_points)

# Обчислення прогину W1(r) — парабола від 1 до 0 на [0, R3]

W1 = 1.0 – (r / R3)**2

# Обчислення прогину W2(r) — парабола до R2, далі нуль

mask_W2 = (r <= R2)
W2 = np.zeros_like(r)
W2[mask_W2] = 1.0 – (r[mask_W2] / R2)**2
```

```
# Обчислення прогину W3(r) — «колоколообразна» на [R2, R3]

W3 = np.zeros_like(r)
mask_W3 = (r >= R2)
half_width = (R3 – R2) / 2.0
norm_factor = half_width**2
W3[mask_W3] = ((r[mask_W3] – R2) * (R3 – r[mask_W3])) / norm_factor

# Підготовка зовнішнього вигляду графіка

plt.figure(figsize=(14, 7), dpi=120)
line_width = 3
plt.grid(True, linestyle='--', linewidth=0.8, alpha=0.6)

# Нанесення кривих на графік

plt.plot(r, W1, color='tab:orange', linewidth=line_width,
        label='Графік 1: парабола на [0, R3]')
plt.plot(r, W2, color='tab:blue', linewidth=line_width,
        label='Графік 2: парабола на [0, R2] → 0')
plt.plot(r, W3, color='tab:green', linewidth=line_width,
        label='Графік 3: «колокол» на [R2, R3]')

# Оформлення осей

plt.title('Порівняння трьох графіків прогину W(r)', fontsize=20,
         fontweight='bold', pad=20)
plt.xlabel('Радіальна координата r, см', fontsize=16, labelpad=10)
plt.ylabel('Нормований прогин W(r), од.', fontsize=16, labelpad=10)
plt.xlim(0, R3)
```

```
plt.ylim(0, 1.05)
plt.xticks(fontsize=14)
plt.yticks(fontsize=14)
legend = plt.legend(loc='upper right', fontsize=14,
                    frameon=True, shadow=True, borderpad=1.2)
legend.get_frame().set_alpha(0.9)

plt.scatter([0, R2 + half_width], [W1[0], W3[num_points//2]],
            color='red', s=50, zorder=5)
plt.text(0, W1[0] + 0.03, 'максимум W1', fontsize=12, ha='center')
plt.text(R2 + half_width, 1.05, 'максимум W3', fontsize=12, ha='center')

plt.tight_layout()
plt.show()
```

Декларація
академічної доброчесності
здобувача ступеня вищої освіти ЗНУ

Я, Артем’єв Андрій Ігорович

студент 4 курсу, денної форми навчання, математичного факультету, спеціальності 113 прикладна математика, адреса електронної пошти bolt61245@gmail.com, – підтверджую, що написана мною кваліфікаційна робота бакалавра на тему «Дослідження особливостей напружено-деформованого стану складених круглих пластин» відповідає вимогам академічної доброчесності та не містить порушень, що визначені у ст. 42 Закону України «Про освіту», зі змістом яких ознайомлений/ознайомлена;

– заявляю, що надана мною для перевірки електронна версія роботи є ідентичною її друкованій версії;

– згоден/згодна на перевірку моєї роботи на відповідність критеріям академічної доброчесності у будь-який спосіб, у тому числі за допомогою інтернет-системи, а також на архівування моєї роботи в базі даних цієї системи.

Студент

15.06.2025		А. І. Артем’єв
(дата)	(підпис)	(ініціали, прізвище)

Науковий керівник

		С. А. Левчук
(дата)	(підпис)	(ініціали, прізвище)