МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ІНЖЕНЕРНИЙ НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ІНСТИТУТ ІМ. Ю.М. ПОТЕБНІ
ЗАПОРІЗЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Кафедра промислового та цивільного будівництва

Кваліфікаційна робота/проект

другий магістерський рівень
(рівень вищої освіти)

на тему: **Теоретичні основи розрахунку елементів будівельних конструкцій з підкріпленнями.**

Виконав: студент 2 курсу, групи 8.1923-пцб-дн
спеціальності 192 Будівництво та цивільна інженерія
(код і назва спеціальності)
освітньої програми промислове і цивільне будівництво
(код і назва освітньої програми)
Пожуєв А.В.
(призвище та ініціали)

Керівник доц., к.т.н. Данкевич Н.О.
(посада, вчене звання, науковий ступень, призвище та ініціали)

Рецензент проф., д.т.н. Радкевич А.В.
(посада, вчене звання, науковий ступень, призвище та ініціали)

Запоріжжя
2024

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НЖЕНЕРНИЙ НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ІНСТИТУТ ІМ. Ю.М. ПОТЕБНІ
ЗАПОРІЗЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Кафедра **Промислового та цивільного будівництва**

Рівень вищої освіти **другий магістрський рівень**
(другий (магістерський) рівень)

Спеціальність **192 "Будівництво та цивільна інженерія"**
(шифр і назва)

Освітньо-професійна програма **"Промислове і цивільне будівництво"**
(шифр і назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри ПЦБ
проф. Арутюнян І.А.
"_____"_____20___ року

З А В Д А Н Н Я
НА КВАЛІФІКЦІЙНУ РОБОТУ /ПРОЄКТ СТУДЕНТОВІ (СТУДЕНТЦІ)

Пожуєв Андрій Володимирович
(прізвище, ім`я по батькові)

1. Тема роботи (проекту) Теоретичні основи розрахунку елементів будівельних конструкцій з підкріпленнями.

керівник роботи Данкевич Н.О., доцент кафедри ПЦБ, к.т.н.
(прізвище, ім`я по батькові, науковий ступень, вчене звання)

затверджені наказом ЗНУ від "30" 09 2024 року №1360 - с

2. Строк подання студентом роботи 01 грудня 2024 р.

3. Вихідні дані до роботи Основні принципи розрахунку будівельних конструкцій з підкріпленнями, аналітичні та чисельні методи розвязку систем диференціальних рівнянь, основні засади з охорони праці, охорони навколишнього середовища та техниці безпеки, науково-технічна, навчальна, нормативна та періодична література

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити) Вступ. Загальні відомості про армовані богатошарові конструкції, Аналіз наукових досліджень з нестаціонарної динаміки аромваних конструкцій. Побудова математичної моделі нестаціонарної поведінки багатошарового композиту, Отримання чиельних результатів, аналіз, проведення чисельних експермиентів.

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов`язкових креслень) вступ, основні питання дослідження, аналіз методів і способів побудови моделей, розробка чисельно-аналітичного алгоритму досліджння поведінки моделі у часі

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийня
Розділ 1	Данкевич Н.О., к.т.н., доц.		
Розділ 2	Данкевич Н.О., к.т.н., доц.		
Розділ 3	Данкевич Н.О., к.т.н., доц.		
Розділ 4	Данкевич Н.О., к.т.н., доц.		
Розділ 5	Данкевич Н.О., к.т.н., доц.		

7. Дата видачі завдання 02 березня 2024 р.

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№ з/п	Назва етапів кваліфкаційної роботи	Строк виконання етапів роботи	Приміт
1.	Аналіз стану та розвитку питання виробництва	10.03.2024	
	композитних матеріалів		
2.	Дослідення научних публікацій про нестаціонарну	25.05.2024	
	поведінку багатошарових конструкцій		
3.	Порівняння існуючих моделей поведінки	10.06.2024	
4.	Побудова математичної моделі	15.07.2024	
5.	Аналіз результатів та чисельні експерименти	20.09.2024	
6.	Розробка заходів з охорони праці і техніці безпеки	21.11.2024	
	при виконання робіт		
7.	Оформлення та підготовка до захисту	20.11.2024	

Студент _____ (підпис) Пожуєв А.В. (прізвище та ініціали)

Керівник роботи/проекту _____ (підпис) Данкевич Н.О. (прізвище та ініціали)

Нормоконтроль пройдено _____ (підпис) Данкевич Н.О. (прізвище та ініціали)

АНОТАЦІЯ

Пожуєв А.В. Теоретичні основи розрахунку елементів будівельних конструкцій з підкріпленнями.

Кваліфікаційна випускна робота для здобуття ступеня вищої освіти магістра за спеціальністю 192 Будівництво та цивільна інженерія, науковий керівник Н.О. Данкевич. Запорізький національний університет. Інженерний навчально-науковий інститут ім. Ю.М. Потебні, кафедра промислового та цивільного будівництва, 2024.

Побудована математична модель нестаціонарної поведінки багатошарового композиту під дією рухомого навантаження. За допомогою інтегральних перетворень та розкладу у ряди Фур'є отримано розв'язки та розглянуто картини розподілу компонент напружено-деформованого стану за часом та просторовими координатами. Проведені чисельні експерименти для знаходження границь застосування та забезпечення достатньої точності розрахунків. Досліджено час встановлення нестаціонарного процесу та проаналізовано ступінь перенавантаження. Досліджено вплив кількості армувань та механічних параметрів шарів на динаміку багатошарової конструкції.

Ключові слова: матриця, армування, напружено-деформований стан, нестаціонарний процес, перетворення Лапласа, ряди Фур'є.

Список публікацій магістранта:

1. А.В. Пожуєв, В.І. Пожуєв, М. Жибігай, О.М. Міхайлуца. Два підходи до аналізу нестаціонарного процесу в системі циліндрична оболонка–пружне середовище. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*, т, 1, 36. 2024. С. 95-104.

2. О.В. Кійко, А.В. Пожуєв, О.М. Міхайлуца. Нестаціонарна динаміка циліндричної оболонки з в’язкопружним заповнювачем під дією рухомого навантаження. *Прикладні питання математичного моделювання*, т.7, 1, 2024. С. 71-82.

ABSTRAKT

Pozhuyev A.V. Theoretical Bases of Calculation of Elements in Building Structures with Reinforcements.

Qualifying final work for obtaining a higher education master's degree in specialty 192 Construction and civil engineering, scientific supervisor N.O. Dankevych. Zaporizhzhya National University, Y.M Potebnya Engineering Educational and Scientific Institute, Department of Industrial and Civil Engineering, 2024.

A mathematical model of non-stationary behavior of a multilayer composite under a moving load is constructed. Using integral transformations and expansion in Fourier series, solutions are obtained and patterns of distribution of stress-strain state components over time and spatial coordinates are considered. Numerous experiments are conducted to find the application limits and ensure sufficient calculation accuracy. The establishment time of a non-stationary process is studied and the degree of overload is analyzed. The effect of the number of reinforcements and mechanical parameters of layers on the dynamics of a multilayer structure is studied.

Keywords: matrix, reinforcement, stress-strain state, non-stationary process, Laplace transform, Fourier series.

List of postgraduate publications

1. А.В. Пожуєв, В.І. Пожуєв, М. Жибігай, О.М. Міхайлуца. Два підходи до аналізу нестаціонарного процесу в системі циліндрична оболонка–пружне середовище. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*, т, 1, 36. 2024. С. 95-104.

2. О.В. Кійко, А.В. Пожуєв, О.М. Міхайлуца. Нестаціонарна динаміка циліндричної оболонки з в’язкопружним заповнювачем під дією рухомого навантаження. *Прикладні питання математичного моделювання*, т.7, 1, 2024. С. 71-82.

ЗМІСТ

ВСТУП…… 7
1 КОМПОЗИТНІ ПЛИТИ У СУЧАСНОМУ БУДІВНИЦТВІ. ІСТОРІЯ ТА ПЕРСПЕКТИВИ …… 12
2 ОГЛЯД НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ З ДИНАМІКИ АРМОВАНИХ КОНСТРУКЦІЙ …… 20
2.1 Історія розвитку математичних моделей та методів дослідження поведінки композиційних матеріалів …….. 20
2.2 Сучасні дослідження поведінки та задачі моделювання армованих матеріалів……..…….. 26
3 МАТЕМАТИЧНІ ЗАСАДИ ПОБУДОВИ МОДЕЛІ АРМОВАНОГО КОМПОЗИТУ …….. 31
3.1 Порівняльний аналіз моделей динамічної поведінки тонких пластин…… 31
3.2 Застосування рівнянь пружності для моделювання руху товстого шару …… 35
3.3 Інтегральні перетворення як спосіб переходу у простір зображень ……..…….. 37
3.4 Рівняння руху шару в потенціальних функціях …… 40
4 ТЕОРЕТИЧНІ РОЗРАХУНКИ АРМОВАНОЇ КОНСТРУКЦІЇ…. 44
4.1 Побудова математичної моделі …… 44
4.2 Знаходження аналітичного розв’язку рівнянь руху пластини... 48
4.3 Побудова аналітичної системи рівнянь для композиту…….. 51
4.4 Побудова матриці розв'язків…….. 54
4.5 Чисельні результати……... 63
5 РОЗРОБКА ЗАХОДІВ З ОХОРОНИ ПРАЦІ І ТЕХНІКИ БЕЗПЕКИ ПРИ ВИКОНАННІ РОБІТ……. 71
5.1 Аналіз шкідливих та небезпечних факторів…… 71
5.2 Заходи з усунення шкідливих та небезпечних факторів ...…… 73
5.3 Пожежна безпека в лабораторії……. 73
5.4 Дослідження ефективності та якості освітлення……. 75
ВИСНОВКИ……... 79
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ…….. 80

ВСТУП

Актуальність теми дослідження. Динаміка пластин та оболонок, що взаємодіють з пружними інерційними середовищами, є одним із важливих завдань механіки деформованого твердого тіла, що пов'язано з широким використанням конструкцій подібного виду в будівництві інженерних споруд, сучасній космічній та авіаційній техніці та ін. Зокрема, шаруваті пластини та оболонки широко використовуються для звуко- та віброізоляції, передачі звуку, а оболонки із заповнювачем є найважливішим елементом твердопаливних реактивних двигунів. Тому цілком природним є інтерес, який виявляють дослідники до такого роду механічних об'єктів.

Основна увага при цьому приділялася побудові різного роду математичних моделей взаємодії тонкостінної конструкції з пружним тілом (підставою або заповнювачем) при можливо більш точному обліку механізму взаємодії, а також розробці методів вирішення рівнянь, що виходять при такому моделюванні, у приватних похідних. Останнім часом у зв'язку з широким використанням у техніці композиційних матеріалів з'явилися нові завдання, пов'язані з вивченням поширення хвиль та коливань у шаруватих композитах. При цьому найчастіше в механіці розглядаються спрямовано-армовані композити (рис. 1) [3]: волокнисті композити з прямокутною (рис. 1а) або квадратичним (рис.1б) укладанням волокон, композит волокнистий з гексагональної укладанням волокон (рис. 1в) і шарувате середовище, що складається з шарів, що чергуються, ізотропних матеріалів різної товщини і жорсткості (рис. 1г) – матриці та армування.

Будемо аналізувати просторовий композит останнього виду, причому динаміка такого середовищ розглянута в точній постановці, коли рух кожного з шарів описується динамічними рівняннями теорії пружності при точному урахуванні механізму контакту між шарами. Необхідно побудувати математичну модель взаємодії пластини з такими спрямовано армованим композитом, розробити алгоритми розрахунку динамічного напружено –

деформованого стану, які будуть реалізовані у вигляді програм розрахунку на ЕОМ конкретних пластин. При цьому основну увагу приділено розвитку алгоритмів, що дозволяють проводити розрахунки для моментів часу, близьких до початку навантаження (перехідні процеси), оскільки саме в цей час визначається значення коефіцієнта динамічності.

У такій постановці завдання раніше не розглядалися і отримані в роботі результати можуть бути використані як еталонні при побудові спрощених моделей взаємодії пластин з композитами такого роду, зокрема при побудові моделей трансверсально-ізотропного середовища і застосуванні теорії ефективних пружних модулів.

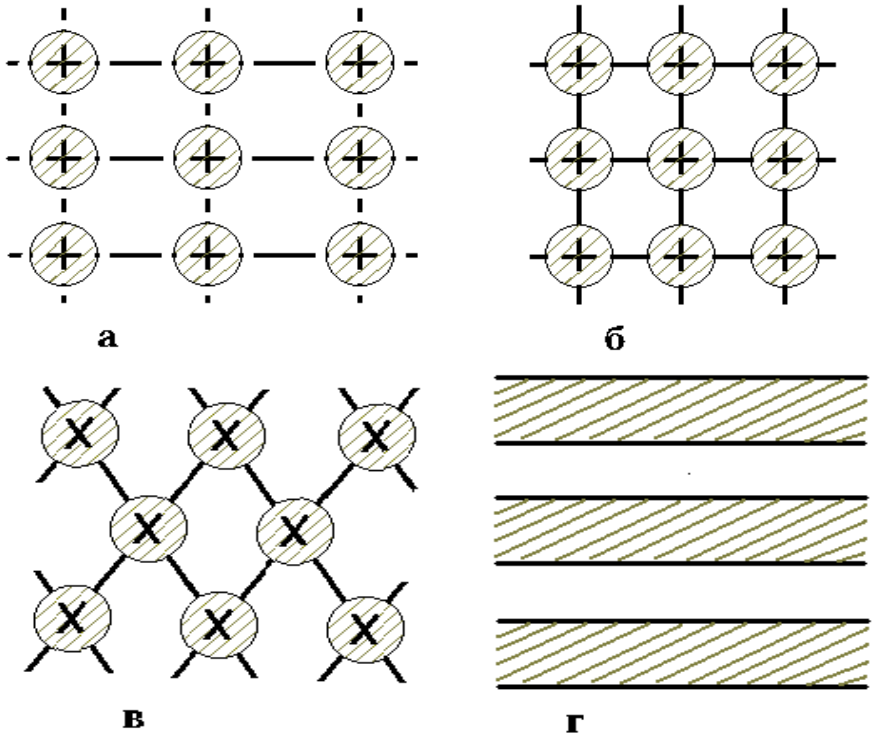


Рисунок 1 - Спрямовано-армовані композити

Актуальність дослідження теоретичних основ розрахунку елементів будівельних конструкцій з підкріпленнями є надзвичайно високою з огляду на кілька ключових факторів.

По-перше, необхідно відзначити зростання вимог до міцності та надійності будівель. Сучасні будівлі піддаються все більшим навантаженням, як статичним (власна вага, корисні навантаження), так і динамічним (вітер,

сейсміка). Для забезпечення безпеки та довговічності конструкцій необхідно розробляти ефективніші методи розрахунку та проектування.

По-друге, швидкий розвиток нових матеріалів і технологій: поява нових будівельних матеріалів (композити, легкі бетони) та технологій (3D-друк) відкриває нові можливості для створення конструкцій з нестандартною геометрією та підвищеними характеристиками. Однак, для їх раціонального використання необхідні відповідні теоретичні основи.

Необхідно також відзначити такий фактор, як оптимізація витрат на будівництво. Розрахунок конструкцій з підкріпленнями дозволяє оптимізувати витрати на матеріали, зменшивши їхню кількість без втрати міцності. Це особливо актуально в умовах зростання вартості будівельних ресурсів.

Крім того, це дозволяє проводити моделювання складних конструкцій, оскільки сучасні програмні комплекси дозволяють проводити детальний аналіз роботи конструкцій з підкріпленнями, враховуючи різноманітні фактори, такі як нелінійність матеріалів, вплив температурних деформацій тощо.

До основних напрямків досліджень відносяться наступні:

1) Розробка нових моделей матеріалів. Створення більш точних моделей поведінки матеріалів з урахуванням їх неоднорідності, анізотропії та нелінійних властивостей.

2) Розробка нових методів розрахунку або модифікація відомих. Розробка чисельних та чисельно-аналітичних методів для аналізу складних конструкцій з підкріпленнями, включаючи методи скінченних елементів, граничних елементів та дискретних елементів.

3) Експериментальні дослідження. Проведення експериментів на моделях (чисельні) і реальних конструкціях (практичні) для верифікації теоретичних моделей і розрахункових методів.

Метою магістерської роботи є побудова точної математичної моделі поведінки конструкції пластина-композитний шар у нестаціонарній

постановці та аналіз отриманих результатів розробленими чисельно-аналітичними методами.

Для досягнення поставленої в процесі дослідження мети вирішені **наступні завдання:**

1) Провести аналіз існуючих наукових досліджень на тему поведінки пластин на шарі, що складається з матриці та армування, огляд існуючих літературних джерел про стаціонарну поведінку подібних конструкцій.

2) Виконати порівняльний аналіз існуючих методів опису поведінки пластин та шаруватих конструкцій у вигляді систем диференціальних рівнянь у часткових похідних та методів їх розв'язку.

3) Побудувати математичну модель композиту у нестаціонарній постановці з урахування контакту між пластиною та композитом та між шарами композиту (матриця та армування).

4) Розробити чисельно-аналітичний алгоритм розв'язку системи диференціальних рівнянь з урахуванням початкових та граничних умов.

5) Отримати чисельні результати та провести аналіз та необхідні експерименти для перевірки їх адекватності практичним експериментам.

Об'єкт дослідження – математична модель поведінки складеної армованої конструкції скінчених розмірів на жорсткій основі під дією рухомого навантаження.

Предмет дослідження – напружено-деформований стан армованої конструкції у моменти часу, близькі до початку навантаження, а також залежність коефіцієнту перенавантаження від фізичних та механічних параметрів конструкції.

Методами дослідження є розроблені чисельно-аналітичні алгоритми сумісного обернення комплексних інтегральних перетворень Лапласу та Фур'є, а також обернення перетворення Лапласу та підсумовування подвійних рядів Фур'є.

Наукова новизна роботи полягає у розробці еталонних моделей, за допомогою яких можна розраховувати поведінку багатошарових армованих

конструкцій у моменти часу, наближені до початку навантаження з урахуванням кількості армувань та їх механічних і геометричних параметрів.

Практична цінність роботи полягає у тому, що розроблені чисельно-аналітичні алгоритми можуть застосовуватись при розрахунку складених армованих конструкцій з урахуванням коефіцієнту перенавантаження та реальних механічних та геометричних параметрів матриці та армування. За допомогою запропонованих алгоритмів можна знаходити час встановлення процесу та вихід поведінки конструкції на стаціонарний режим.

Апробація результатів магістерської роботи. Окремі положення магістерської роботи були застосовані до побудови та розрахунку поведінки подібних моделей та знайшли відображення у наступних наукових роботах:

1. А.В. Пожуєв, В.І. Пожуєв, М. Жибігай, О.М. Міхайлуца. Два підходи до аналізу нестаціонарного процесу в системі циліндрична оболонка–пружне середовище. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*, т, 1, 36. 2024. С. 95-104.

2. О.В. Кійко, А.В. Пожуєв, О.М. Міхайлуца. Нестаціонарна динаміка циліндричної оболонки з в’язкопружним заповнювачем під дією рухомого навантаження. *Прикладні питання математичного моделювання*, т.7, 1, 2024. С. 71-82.

Структура і об'єм магістерської роботи. Магістерська робота складається з вступу, п'яти розділів, висновків, списку використаних джерел. Повний об'єм магістерської роботи складає 82 сторінок тексту, у тому числі 19 рисунків. Список використаних джерел містить 26 найменувань.

1 КОМПОЗИТНІ ПЛИТИ У СУЧАСНОМУ БУДІВНИЦТВІ. ІСТОРІЯ ТА ПЕРСПЕКТИВИ

Останнім часом композитні матеріали у будівництві стали невід'ємною частиною інноваційного прогресу, відкриваючи нові можливості порівняно з традиційними будівельними матеріалами. Вони поєднують унікальні властивості різних компонентів, що дозволяють створювати конструкції, що виділяються високою міцністю, легкістю та тривалістю експлуатації. Численні переваги композитних матеріалів не лише покращують функціональні характеристики будівель та споруд, а й розширюють можливості для дизайну. Архітектори та інженери активно використовують композити для створення інноваційних та ефективних конструкцій, що відрізняються від класичних рішень за своїми технічними та естетичними якостями.

Композитні матеріали формуються шляхом поєднання двох або більше різних матеріалів із відмінними фізичними або хімічними характеристиками. Їх можна уявити, як стіну з цегли: разом компоненти створюють міцну структуру, яка набагато стійкіша, ніж окрема цегла або цемент. Аналогічно і композити поєднують найкращі властивості своїх складових матеріалів, наприклад, легкість пластику та міцність скла. Ці матеріали широко використовуються в різних галузях промисловості, включаючи будівництво, завдяки їх легкості та високій міцності.

Композитні матеріали для будівництва є сучасними матеріалами з властивостями, що відрізняються від характеристик кожного їх окремого компонента. Процес виробництва композитних матеріалів призводить до синергії чи взаємного посилення властивостей, що дозволяє використовувати найкращі сторони кожного компонента. Наприклад, композит може мати підвищену міцність при зменшенні ваги.

Історія композитних матеріалів починається з давнього минулого. Хоча композитні матеріали звучать сучасно, їх використання у будівництві

насправді має давню історію. Ці матеріали свідчать, що у давнину люди прагнули поліпшити характеристики будівельних матеріалів, комбінуючи різні складові задля досягнення необхідних властивостей.

Один із найдавніших прикладів композитних матеріалів у будівництві — це саманна цегла Стародавнього Єгипту, що виготовлялася з глини та соломи. Ці матеріали поєднували міцність та легкість, що дозволяло створювати стійкі та довговічні споруди. Стародавні римляни також зробили вагомий внесок у розвиток композитних матеріалів, придумавши бетон. Його використовували для будівництва величезних споруд, наприклад, Пантеону, купол якого залишається найбільшим неармованим бетонним куполом у світі досі.



Рисунок 1.1 - Саманна цегла Стародавнього Єгипту

Крім саманної цегли та римського бетону, у давній Месопотамії використовували очерети та дерево для зміцнення глиняних стін. У Китаї, починаючи з династії Хань, лак та папір використовувалися для створення водонепроникних та міцних матеріалів. Навіть в Америці до приходу європейців корінні народи застосовували смолу та деревні волокна для будівництва каное, які вирізнялися неймовірною міцністю та легкістю.

У середні віки, разом із розвитком технологій, з'явилися нові композитні матеріали у будівництві: керамічні плитки, армовані металевими елементами. Це дозволяло створювати складніші та міцніші архітектурні форми. У Візантії застосовували колони з каменю та металу, які служили для зміцнення великих склепінь та куполів церков.

Згодом, наприкінці XIX століття, було винайдено залізобетон, який став першим «офіційним» композитним матеріалом і навіть зараз широко використовується в будівництві.

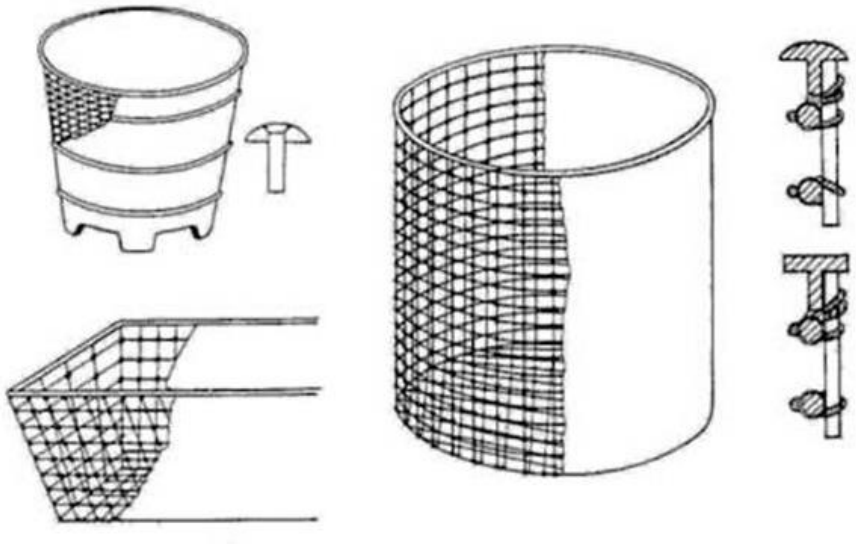


Рисунок 1.2 - Перші залізобетонні кадки та ванни Жозефа Моньє

Отже, історія композитних матеріалів для будівництва – це своєрідна хроніка пошуку балансу між міцністю, вагою та тривалістю служби. Ці матеріали були і залишаються важливими для розвитку цивілізації, дозволяючи будувати складніші та функціональніші споруди. Застосування композитних матеріалів у будівництві в давнину наголошує на дивовижній здатності людини до інновацій, яка досі надихає на нові відкриття та розробки в сучасному світі.

Композитні матеріали – це справжній прорив у сучасному будівництві. Вони поєднують в собі найкращі властивості різних матеріалів, створюючи нові можливості для архітекторів та інженерів. Композит – це матеріал, що складається з двох або більше компонентів, які мають різні фізичні та хімічні властивості. Один компонент, як правило, є матрицею (наповнювачем), а

інший – армуючим елементом. Завдяки такому поєднанню композити отримують унікальні характеристики, які відрізняються від властивостей окремих компонентів.

Переваги композитних матеріалів у будівництві:

- Висока міцність при невеликій вазі: Композити дозволяють створювати конструкції, які є набагато міцнішими за традиційні матеріали, такі як бетон або сталь, але при цьому мають значно меншу вагу.
- Коррозійна стійкість: Композити не піддаються корозії, що робить їх ідеальними для використання в агресивних середовищах, таких як морська вода або хімічно активні речовини.
- Довговічність: Композити мають високу стійкість до зношування, впливу ультрафіолетового випромінювання та інших негативних факторів.
- Гнучкість: Широкий спектр композитних матеріалів дозволяє створювати конструкції будь-якої форми та складності.
- Екологічність: Багато композитних матеріалів виготовляються з перероблених матеріалів або природних компонентів.

Композитні матеріали мають велике значення у сучасному будівництві, пропонуючи інноваційні рішення для підвищення міцності, довговічності та ефективності конструкцій. В даний час композити широко використовуються для армування більшості конструкцій, що будуються на стійких твердих підставах, таких як стрічкові фундаменти, монолітні армуючі пояси, підлоги промислових будівель, бетонні дороги, а також промислові майданчики, паркінги, автозаправні станції та інші зони обслуговування комерційних об'єктів. Це допомагає покращити якість будівельних конструкцій та зробити будівництво більш стійким та економічно ефективним.

Один із найпопулярніших композитних матеріалів у будівництві – це армувальна сітка. Вона цінується за свої добрі технічні властивості, а саме легкість, міцність та стійкість до корозії. Цей матеріал часто використовується замість традиційної сталевої сітки, що дозволяє знизити

загальну вагу конструкцій та спростити процес їх монтажу. Крім того, композитні матеріали не піддаються корозії, завдяки чому значно продовжується термін експлуатації армованих конструкцій, що дуже важливо в умовах високої вологості чи агресивних середовищ.



Рисунок 1.3 - Плити з композитною арматурою

Композитна армована сітка застосовується у різних сферах будівництва:

- для посилення зовнішніх шарів стяжок бетонних конструкцій, таких як колони, балки та плити, для підвищення їх міцності та стійкості;
- у кладці стін будинків, котеджів та інших будівель для посилення їхньої структури;
- при армуванні фундаментів, створенні каркасів, посиленні дорожніх конструкцій для забезпечення їхньої міцності та довговічності;
- у стяжці підлог на малих та великих площах при будівництві, ремонті та реконструкції, щоб забезпечити стійкість та надійність підлогового покриття.

У дорожньому будівництві композитна сітка використовується для зміцнення асфальтового покриття, що допомагає підвищити його тривалість служби та стійкість до деформацій. Таким чином використання композитних матеріалів для будівництва мостів та доріг сприяє підвищенню якості та

довговічності конструкцій, а також дозволяє ефективно використовувати ресурси та прискорює процеси.

Армовані плити - це універсальний будівельний матеріал, який широко застосовується в різних типах будівель і споруд. Їхня міцність, довговічність і відносно простий монтаж роблять їх незамінними елементами багатьох конструкцій.

До основних сфер застосування у будівництві відноситься наступне:

1. Фундаменти:
– Плити основи: Служать основою для стін та інших конструкцій, забезпечуючи рівномірний розподіл навантаження на ґрунт.
– Ростверки: Використовуються для поєднання окремих фундаментів у єдину систему.
- Стіни підвалів: У деяких випадках армовані плити можуть використовуватися для будівництва стін підвальних приміщень.
2. Перекриття:
– Межповерхові перекриття: Забезпечують поділ поверхів у будинках різного призначення.
– Перекриття дахів: Можуть застосовуватися як несучі елементи дахів.
– Перекриття балконів та лоджій.
3. Сходи:
– Марші сходів: Служать основою для сходів.
– Сходові майданчики.
4. Дорожнє будівництво:
– Аеродромні плити: Використовуються для влаштування злітно-посадкових смуг.
– Дорожні плити: Застосовуються для будівництва тимчасових шляхів та під'їзних шляхів.
5. Промислові об'єкти:

– Підлоги промислових приміщень: Забезпечують міцність та довговічність підлоги в умовах інтенсивної експлуатації.
– Естакади та мости: Використовуються як несучі елементи.

6. Гідротехнічні споруди:

– Стіни басейнів та резервуарів.
– Причальні споруди.



Рисунок 1.4 - Композитні плити для дорожнього покриття

До переваг армованих плит можна віднести наступне:

Висока міцність та надійність: Завдяки армуванню плити здатні витримувати значні навантаження.

Довговічність: При правильній експлуатації термін служби армованих плит становить десятки років.

Швидкість монтажу: Готові плити легко укладаються на підготовлену основу.

Можливість створення монолітних конструкцій: Плити можуть з'єднуватися між собою у різний спосіб, утворюючи єдину конструкцію.

Широкий асортимент: Існують плити різних розмірів, товщини та з різними характеристиками, що дозволяє підібрати оптимальний варіант для кожного конкретного випадку.

Наразі існує декілька видів армування:

Сталева арматура: Традиційний та найпоширеніший вид армування.

Композитна арматура: Має ряд переваг, таких як корозійна стійкість, легка вага та висока міцність.

Базальтова арматура: Також має високу міцність і корозійну стійкість, але менш поширена, ніж сталева та композитна арматура.

Перспективи розвитку армованих плит відкривають перед будівельною галуззю широкі обрії. Використання новітніх матеріалів та технологій дозволить створювати плити з покращеними характеристиками: підвищеною міцністю, довговічністю та стійкістю до різних впливів. Індивідуалізація виробництва дозволить архітекторам реалізовувати найсміливіші проекти, створюючи унікальні та естетично привабливі будівлі. Зниження ваги плит спростить їхнє транспортування та монтаж, а покращені теплоізоляційні властивості дозволять скоротити енерговитрати на опалення та кондиціювання. Застосування екологічно чистих матеріалів та технологій зробить виробництво плит безпечнішим для навколишнього середовища.

У подальшій перспективі застосування 3D-друку відкриває нові горизонти у створенні армованих плит складної геометрії з високою точністю. Розробка матеріалів, що самовідновлюються, дозволить значно підвищити довговічність конструкцій, знижуючи витрати на ремонт і обслуговування. Вбудовування в плити датчиків і сенсорів створює основу для створення інтелектуальних будівель, здатних самостійно адаптуватися до умов експлуатації, що змінюються. Постійний розвиток технологій у галузі виробництва армованих плит дозволяє говорити про широкі перспективи їх застосування в різних галузях будівництва та промисловості.

2 ОГЛЯД НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ З ДИНАМІКИ АРМОВАНИХ КОНСТРУКЦІЙ

2.1 Історія розвитку математичних моделей та методів дослідження поведінки композиційних матеріалів

Динамічні завдання теорії пружності почали розглядатися ще в минулому столітті і стан цього питання відображено у класичних монографіях з теорії пружності [16, 18, 20, 21]. З середини цього століття почали досліджуватися питання поширення пружних хвиль у шаруватих середовищах, а також вивчатися завдання про динамічну взаємодію пластин та оболонок із суцільними інерційними середовищами. Стан останнього питання досить докладно відображено в оглядах та монографіях А.Г. Горшкова, М.А. Ільгамова, В.І. Пожуєва [15, 16, 24].

В останні десятиліття значну увагу приділяють побудові математичних моделей статистичної та динамічної поведінки композиційних матеріалів. Тут насамперед треба відзначити роботи київської школи механіків під керівництвом академіка О.М. Гузя [4, 5, 21].

Цьому питанню присвячено дуже багато публікацій американських механіків, зокрема, близькими до теми даної дисертації є статті Пагано Н.Дж., Мун Ф., Ахенбах Дж.Д. [1] і проведений у цих роботах широкий огляд досліджень зі статики та динаміки шаруватих композитів.

У монографії Н.А. Шульги [18] викладено теоретичні дослідження лінійних процесів деформування регулярно – шаруватих суцільних середовищ. За допомогою методу кінцевих різниць у точній постановці досліджено закономірності поширення поверхневих та об'ємних хвиль, а також вивчено явище відображення та заломлення.

У монографії В.В. Болотіна, Ю.М. Новичкова на основі єдиного підходу викладено теорію багатошарових конструкцій при довільному числі шарів і за досить загальних припущень про властивості окремого шару.

Одним з можливих додатків, крім тонкостінних шаруватих конструкцій, є побудова теорії шаруватих композиційних матеріалів, яка отримана шляхом граничного переходу до систем дрібношарової структури.

Методи аналізу міцності циліндричних оболонок із шаруватих композитів при динамічних навантаженнях, що стискають, запропоновані в монографії А.Є. Богдановича [20]. Тут, як зазвичай це робиться в більшості робіт, для опису руху композитної оболонки застосовується теорія циліндричних ортотропних оболонок, яка враховує армування інтегральним чином.

Динаміка ортотропних конічних оболонок вивчена в монографії І.М. Преображенського, В.З. Грищака, динамічні завдання для тришарових пластин при дії локальних рухомих імпульсів розглянуті у статті В.П. Ольшанського [14].

У роботі Л.П. Хорошуна [17] запропоновано нову математичну модель для опису неоднорідної деформації композитів, засновану на стохастичних рівняннях статики пружного двокомпонентного середовища. З цієї теорії як окремі випадки випливають теорія ефективних модулів і теорія двокомпонентної суміші. Побудові моделі односпрямованого волокнистого композиційного матеріалу, що враховує наявність перехідної зони між пружними компонентами, присвячено роботу Душека Ю.А. В рамках цієї моделі отримано аналітичні залежності для інтегральних характеристик таких трансверсально-ізотропних матеріалів.

А.В. Марчуком [12] побудовано математичну модель розрахунку багатошарових плит у просторовій постановці, яка дає можливість описувати як жорсткий, так і ковзний контакт між шарами. Показано можливість моделювання процесу розшарування тонкого низькомодульного прошарку та розрахунку таких конструкцій на підставі моделей, чутливих до зсуву.

Вивченню простих поздовжніх хвиль у неоднорідному твердому тілі, що має мікроструктуру як гранул в матриці, присвячена стаття дослідника Рушицького Я.Я. Для опису гранульованого композиту використовуються

три мікроструктурні моделі. Отримано еволюційні рівняння для амплітуд та резонансні умови.

У статті Головчан В.Т. [5] з урахуванням точного рішення системи рівнянь теорії пружності у сфері елементарної доби побудована теорія макроскопічно однорідного напруженого стану композиту. Рішення представлено у вигляді рядів. Л.П. Хорошун [17], Л.В. Довгалюк досліджували динаміку напівобмежених та обмежених тіл із шаруватих матеріалів за умови, що на кордоні задаються гармонійні за часом переміщення. В основу покладено детерміновані рівняння четвертого порядку за координатою, які отримані зі стохастичних рівнянь коливань шаруватого середовища методом зведення їх до стохастичних інтегральних рівнянь та наступним умовним середовищем.

О.Н Гузь [21], В.М. Чехов, В.С. Стукотилів в рамках плоскої деформації на основі моделі шматково-однорідного середовища розглянули проблему поверхневої втрати стійкості в шаруватих напівобмежених тілах з ортотропними та трансверсально-ізотропними властивостями. Діяльність Ю.В. Коханенко [10] розглянуто завдання стійкості шаруватих композитів, які перебувають в умовах плоскої деформації та шматково-однорідного навантаженого стану. Поділом змінних двовимірні спектральні завдання зводяться до одновимірних. Отримано формули для власних значень вихідного завдання. Цим самим автором запропоновано варіант побудови алгебраїчних систем рівнянь, що апроксимують клас плоских основних завдань лінійної теорії пружності композитів на основі МКЕ з трикутними елементами. При цьому потрібно, щоб пласка область, що розглядається, допускала тріангуляцію прямокутними трикутниками, катети яких паралельні осям координат.

В.М. Шульга досліджував загальний випадок поширення хвиль неосьового спрямування в ортотропних циліндрах. Основна система рівнянь хвильової задачі в циліндричних координатах зводиться до шести рівнянь

гамільтонового виду за радіальною координатою. Для гармонійних хвиль вирішення узагальненої спектральної задачі є чисельними методами.

Н.А. Шульга щодо поширення вільних хвиль у волокнистих композитах з недосконалостями запропонував алгоритм, заснований на принципі суперпозиції разом із модифікованим методом А.Н. Гузя, що дозволило легше побудувати процедуру алгебризації завдання в узагальненому завданні на власні значення. У роботах Акбарова С.Д., Гузя О.М. [1] в рамках моделі кусково-однорідного тіла з використанням рівнянь теорії пружності та в'язкопружності запропоновано метод для аналізу напружено – деформованого стану у шаруватих та волокнистих композитних матеріалах зі скривленими структурами. При цьому матеріали шарів матриці та наповнювача можуть бути як ізотропними, так і анізотропними.

У роботах О.М. Гузя, Ю.В. Коханенко, В.М. Хоботова [4] при розрахунку напружено – деформованого стану шаруватих композитів використовуються рівняння лінійної теорії пружності анізотропних шматково-однорідних середовищ і спеціальна кінцево-різницева схема. Є.П. Єршов розглянув завдання про моделювання поведінки багатошарової композитної конструкції при динамічному навантаженні, при цьому кілька шарів описується рівняннями лінійної теорії в'язкопружності, а для інших шарів використовуються рівняння теорії пружності.

У статті Н.А. Шульги, А.П. Виштак запропонована раніше авторами методика вирішення одновимірних динамічних завдань для пружних тіл, утворених регулярним чергуванням циліндричних чи сферичних куль, узагальнюється у разі плоского деформування напівобмеженої середовища регулярного типу з циліндричними шарами. Проведено аналіз розподілу динамічних напруг углиб середовища, а також власних частот коливань регулярно-шарового порожнистого циліндра.

У статті А.Я. Григоренко, І.А. Лози [4] за допомогою циліндричних функцій побудовано аналітичні рішення в задачі про поширення приватних видів неосесиметричних пружних хвиль в ізотропному дво- та тришаровому

циліндрі. Крім того, запропоновано чисельний підхід на основі тривимірної теорії. О.М. Подліпенець, Н.А. Шульга досліджували поширення гармонійної хвилі зсуву а ортотропної регулярно-шарової пластини. При цьому вважається, що нескінченна пластина складається з довільного, але кінцевого числа шарів, тобто враховується вплив другого зовнішнього кордону. Запропоновано досить загальний спосіб обліку обумовленої структурою композиту геометричної дисперсії, яка для гармонійних хвиль проявляється залежно від фазової швидкості від довжини хвилі.

Є.Г. Янютін, Л.П. Дзюбак одержали розв'язання задачі про імпульсне навантаження багатошарового циліндра. Моделювання здійснюється з використанням лінійної теорії пружності, а результати отримані чисельним методом.

Питання динамічної взаємодії пластин та оболонок з інерційними середовищами розглядалися багатьма авторами. Зокрема, стаціонарні динамічні завдання оболонок з пружним заповнювачем досліджувалися Б.А. Корбут, Ю.В. Мастіновським, Ю.І. Нагірним, М.А. Ільгамовим, В.А. Івановим, Б.В. Гуліним, В.І. Пожуєвим [15, 16]. Навіть у стаціонарній постановці, коли з розгляду виключається перехідний процес і не враховуються початкові умови, виникають значні складнощі, тому багатьма авторами пропонувалися спрощені підходи для опису механізму взаємодії пластини або оболонки з пружною основою, а якщо цей механізм враховувався точно, то виникали математичні труднощі при обчисленні інтегралів обігу в інтегральних перетвореннях Фур'є чи Ханкеля.

В останні десятиліття узагальнення завдань даного класу йшло у напрямку обліку анізотропії та неоднорідності основи. Наприклад, у роботах С.Ю. Бабича, Ю.П. Глухова, О.М. Гузя [21] досліджувалося завдання про дію рухомого навантаження на пластину, що лежить на стисливому і стисливому напівпросторі, рух якого описувалося лінеаризованою теорією пружності тіл з початковими напругами. Scott R.A. досліджував завдання про рух поверхнею неоднорідного пружного напівпростору з постійною швидкістю

лінійного навантаження. Передбачалося, що щільність та параметри Ламе змінюються з глибиною за однаковими законами. В цьому випадку, як і для однорідного середовища, швидкості поширення пружних хвиль є постійними, і тоді в просторі зображень хвильові рівняння вирішуються аналогічно випадку однорідної основи.

У деяких роботах зроблено спробу врахувати можливість розшарування конструкції при дії рухомого навантаження. У статтях G.G. Adams досліджувалося завдання про розшарування конструкції під дією рухомого нормального навантаження. Рішення зводиться до двох інтегральних рівнянь типу Абеля, які потім перетворюються на рівняння Фредгольма. Чисельні результати отримані шляхом зведення інтегральних рівнянь до систем рівнянь алгебри. В.Д. Ламзюк, В.І. Пожуєв [16] розглянули завдання про неповний контакт пластин з багатошаровою основою при докритичних швидкостях нормального навантаження та оцінили вплив величини такої швидкості та співвідношення механічних параметрів конструкції на розміри майданчика контакту.

У більшості робіт про дію рухомих навантажень на складові конструкції розглядалися докритичні швидкості, коли інтеграли звернення не є особливими і можуть бути знайдені чисельними методами, наприклад методом Файлона. В.І. Пожуєв [15, 16] запропонував два методи, що дозволяють вирішувати задачі при довільних за величиною, у тому числі і закритичних, швидкостях руху навантажень. По-перше, у системах без диссипації енергії головне значення інтегралів по Коші знаходиться шляхом деформування контуру інтегрування, що дозволило оцінити вплив величини швидкості руху навантаження на стаціонарну динаміку пластини, що лежить на пружному шарі кінцевої товщини [24]. По-друге, за наявності диссипації використовується метод демпфування [16], у своїй фізична природа диссипації може бути різною. Аналогічний методу деформування контуру інтегрування підхід застосований для задачі про рух хвилі тиску по поверхні складового напівпростору, при цьому розгляд обмежено випадком, коли

швидкість хвилі тиску більша за швидкість поздовжніх і поперечних хвиль у верхньому шарі і менше цих же швидкостей у напівпросторі.

Надалі були спроби розглянути завдання динамічного взаємодії в нестаціонарної постановці з урахуванням початкових умов навантаження. Тут основні труднощі виникають через відсутність ефективних методів обігу перетворення Лапласа. Справа в тому, що в задачах, що розглядаються тут, підінтегральна функція сама є інтегралом Фур'є і навіть подвійним інтегралом Фур'є у разі просторових завдань. Тому основні результати тут можна отримати лише чисельно з допомогою ЕОМ. Основою для побудови чисельних алгоритмів може бути квадратурні формули, запропоновані мінської школою математиків під керівництвом В.І. Крилова. Вперше такий підхід до завдань механіки деформованого твердого тіла було застосовано у роботі І.Т. Селезова, В.А. Ткаченка, які розглянули нестаціонарне навантаження поверхні пружного напівпростору симетрично розподіленим імпульсом тиску. У роботах В.І. Пожуєва та його учнів [15, 16, 24] побудовано подібні алгоритми для спільного звернення перетворення Фур'є і Лапласа, Ханкеля і Лапласа, а роботах [15, 16] проведено узагальнення на випадок потрійних інтегральних перетворень: подвійного перетворення Фур'є за просторовими координатами та перетворення Лапласа за часом.

2.2 Сучасні дослідження поведінки та задачі моделювання армованих матеріалів

У роботі [13] відзначаються переваги та недоліки застосування неметалевої арматури їхнього полімерного композиційного матеріалу, некоректність застосування методики граничних станів до розрахунку конструкцій, армованих неметалевою арматурою. Вказується, що останнім часом розроблено низку нормативних документів щодо застосування неметалічної арматури у бетонних конструкціях, проте вони спираються на мінімальну експериментальну базу. Сформульовані фізичні співвідношення

для бетону з урахуванням нелінійності його деформування, розносопірності, впливу температури, а також для неметалевої арматури з використанням гіпотези про її лінійно пружне деформування. З використанням гіпотези прямих нормалей та деформаційної моделі бетону отримані нелінійні диференціальні рівняння, що описують вигин прямокутної пластини, армованою арматурою з композиційного полімерного матеріалу. При виведенні рівнянь враховано наявність пружної основи моделі Власова Леонтьєва.

Авторами у роботі [11] запропонована зручна для користування та математичного опрацювання апроксимативна функція діаграми деформування, що відображає зв’язок між напруженнями й деформаціями бетону за «жорсткого» силового режиму однорідного стиску. Її одночасне застосування з отриманою раніше діаграмою для м’якорежимного навантажування надає можливість отримати стабільну й вільну від зайвих чинників впливу діаграму стану бетону, придатну для базованих на деформаційній моделі перерізів розрахунків зігнутих залізобетонних елементів (конструкцій) за всіма групами граничних станів та оцінки неоднорідного напружено-деформованого стану перерізів елементів (конструкцій) на будь-якій стадії навантажування аж до руйнування.

У статті [23] представлені результати математичного моделювання впливу вибуху та відповідного напружено-деформованого стану у залізобетонних блоках захисних споруд. Метою роботи є встановлення безпеки розроблених захисних укриттів за умов вибуху при повітряних атаках. Після проведення розрахунків отримані результати, що дозволяють дослідити механізми руйнування або втрати цілісності конструкцій укриття та встановити зв'язок цих аспектів із забезпеченням виконання ним захисних функцій під час вибуху. Для дослідження механізмів руйнування чи втрати цілісності досліджувався вплив вибуху. Наукова новизна полягає у розробці нового підходу до розрахунків, заснованого на застосуванні величини бойової частини відповідного снаряда у тротиловому еквіваленті, дальності

вибуху та положення точки, де відбувається вибух. Визначений за цими параметрами тиск може бути використаний для дослідження його впливу на споруди. Практична значущість дослідження – на основі проведених досліджень отримано результати математичного моделювання поведінки захисних укриттів в умовах вибуху, що дозволяють дослідити механізми руйнування або втрати цілісності конструкцій укриття та встановити взаємозв'язок цих аспектів із забезпеченням виконання його захисних функцій під час вибуху.

У статті [26] досліджується структурна поведінка отворів у плитах перекриття станцій метрополітену за допомогою модельних експериментів та кінцево-елементного моделювання. У дослідженні аналізується вплив співвідношення сторін отвору, його розмірів та положення на характеристики напруг різних структурних компонентів. На основі рівнів напруг та характеристик відмов у різних місцях конструкції станції пропонуються три схеми армування: додавання кутових округлень, встановлення опорних колон та додавання кільцевих балок. Порівняльний аналіз із внутрішніми силами та схемами зміщення вихідної конструкції показує ефективність кожної схеми армування. Результати показують, що отвори зменшують момент інерції поперечного перерізу плити перекриття, послаблюючи жорсткість плити і роблячи область навколо отворів і стиків плита-колонна схильною до локальних пошкоджень. Збільшення співвідношення сторін отвору, збільшення його розмірів або близьке розташування кількох отворів діагоналі знижує локальну несучу здатність конструкції. Додавання кутових округлень може знизити максимальну еквівалентну напругу в плиті більш ніж на 15 %, пом'якшуючи концентрацію напруги, викликану отворами. Контрфорсні колони і кільцеві балки збільшують жорсткість бічних стін, розподіляють бічні сили, що викликають згинальні моменти стін, і підвищують стійкість конструкції до бічного зміщення.

В роботі [9] розглядається алгоритм моделювання напружено-деформованого стану сталебетонних плит, армованих зовнішніми

хвилястими листами. Влаштування арматури на найбільш напружених гранях несучого елемента дає змогу збільшити робочу висоту перерізу і отримати відповідний приріст міцності та жорсткості, або зменшивши висоту конструкції (за збереження міцнісних і деформівних показників) – зменшити її вартість і трудомісткість під час виготовлення. Зовнішня арматура, крім несучих функцій, виконує також роль опалубки, герметизуючого або загалом ізолюючого шару. Проведені дослідження показують, що конструкції із зовнішнім армуванням успішно конкурують з традиційними залізобетонними. Економія сталі тут найчастіше становить 12–15 %, а бетону – близько 10 %. Запропонована методика розрахунку на ЕОМ дає змогу з достатньою точністю визначати величину граничного зовнішнього навантаження та прогини. Результати проведених експериментальних досліджень добре узгоджуються з отриманими за числовою моделлю. Запропонований алгоритм вивчає такі конструкції під навантаженням за різних фізико-механічних характеристик бетону та листової сталі.

Також у роботі [19] розроблено та досліджено нову математичну модель чотириточкового згину залізобетонних балок. Модель враховує багатомодульну поведінку бетону, нелінійні залежності напруга-деформація та розвиток пошкоджень. Запропоновано алгоритм чисельної реалізації моделі. Відповідна крайова задача розв’язана hp-версією методу найменших квадратів у поєднанні з прискоренням ітераційного процесу на основі підпросторів Крилова та розпаралелення. Особливу увагу приділено впливу параметрів математичної моделі на результати чисельного моделювання. Результати порівнюються з експериментальними даними та тривимірним моделюванням. Показано задовільну згоду

У роботі [22] розглядається проблема точного прогнозування деформацій армованих ґрунтових конструкцій при діючому навантаженні. Спочатку подано короткий огляд існуючих рекомендацій і методів. По-друге, описано аналітичний підхід, розроблений в IBW PAN для розрахунку горизонтальних і вертикальних деформацій таких конструкцій. По-третє,

обговорюються результати верифікації запропонованої методології. Підхід до моделювання підтверджується результатами вимірювань з огляду літератури та оригінальної лабораторної програми. Для оцінки точності запропонованої методики проведено експериментальні дослідження в лабораторних умовах. У геотехнічній лабораторії була побудована модель стіни з армованого ґрунту (ГГ) висотою 0,5 м, яка була піддана зовнішньому навантаженню. Досліджено горизонтальні деформації стінки моделі RS в кінці будівництва та під час нанесення надбавки (післябудівельні зміщення). Проведено теоретичний аналіз результатів експерименту. Наведено порівняння теоретичних та експериментальних значень деформацій. Зроблено основні висновки.

Метою статті [25] є розробка загальної моделі деформації бетону бетонних і залізобетонних елементів і конструкцій під дією динамічних навантажень різної інтенсивності. Основна увага приділяється відомому коефіцієнту динамічного підвищення (DIF). Класифіковано та проаналізовано основні переваги та недоліки існуючих на сьогодні способів і методів його визначення. Отримано аналітично обґрунтовану залежність КВП бетону від швидкості деформації стиснутого бетону. Ефективність розробленої методики визначення DIF оцінено шляхом порівняння результатів теоретичних розрахунків з опублікованими експериментальними даними окремих дослідників.

3 МАТЕМАТИЧНІ ЗАСАДИ ПОБУДОВИ МОДЕЛІ АРМОВАНОГО КОМПОЗИТУ

3.1 Порівняльний аналіз моделей динамічної поведінки тонких пластин

Динамічні рівняння тонких пластин описують поведінку пластини під впливом змінних за часом навантажень. Вони дозволяють нам аналізувати коливання та вібрації пластини, що є вкрай важливим для багатьох інженерних завдань, таких як проектування конструкцій, що працюють у динамічних умовах (наприклад, крил літака, днищ суден, будівельних перекриттів).

Для опису динамічної поведінки тонких пластин найчастіше використовується рівняння руху Кірхгофа-Лява. Теорія Кірхгофа - Лява або теорія пластин Кірхгофа - Лява - двовимірна математична модель пружного тіла, яка використовується для визначення напруг і деформацій у тонких пластинах, схильних до дії сил і моментів при малих вигинах. Ця теорія є розширенням теорії балок Ейлера - Бернуллі і була розроблена в 1888 Лявом з використанням постулатів, запропонованих Кірхгофом. Теорія припускає, що серединна площина може використовуватися для представлення тривимірної пластини у двовимірній формі.

У цій теорії зроблено такі кінематичні припущення:

- прямі лінії, перпендикулярні до серединної поверхні, залишаються прямими після деформації;
- прямі лінії, перпендикулярні до середньої поверхні, залишаються нормальними до серединної поверхні після деформації;
- товщина пластини не змінюється при деформації.

Крім того, теорія базується також на наступних умовах:

- Пластина тонка (товщина значно менша від інших розмірів).
- Матеріал пластини однорідний та ізотропний.

– Деформації пластини малі.

Рівняння руху пластини Кірхгофа-Лява описує рівновагу елемента пластини під дією зовнішніх сил та моментів. Загалом воно записується наступним чином:

$$D\nabla^4 W(x,y,t) + \rho h \partial^2 W(x,y,t)/\partial t^2 = q(x,y,t)$$

де: $W(x,y,t)$ – прогинання пластини в точці з координатами (x, y) в момент часу t;

D – згинальна жорсткість пластини;

ρ – густина матеріалу пластини;

h – товщина пластини;

∇^4 – бігармонічний оператор;

$q(x,y,t)$ – розподілене навантаження, що діє на пластину.

Другий член у лівій частині рівняння описує інерційні сили, що виникають при коливаннях пластини. Він показує, що прискорення прогину пропорційне доданої силі і обернено пропорційне масі пластини.

Дана теорія має достатньо широке коло задач для свого застосування. До них відносяться:

Коливання та резонанс: Рівняння дозволяє визначити власні частоти та форми коливань пластини. Це важливо для запобігання резонансним явищам, які можуть призвести до руйнування конструкції.

Розповсюдження хвиль: Рівняння визначає поширення пружних хвиль у пластині. Це дозволяє аналізувати динамічні процеси, пов'язані з ударами, вибухами та іншими видами динамічних впливів.

Аеропружність: В аеродинаміці рівняння використовується для аналізу аеропружних явищ, таких як флаттер та дивергенція.

Віброізоляція: Рівняння застосовується для проектування елементів конструкцій, здатних поглинати та розсіювати вібрації.

Для вирішення динамічних рівнянь пластин використовують різні методи, включаючи:

1) метод поділу змінних: Дозволяє знайти аналітичні рішення для простих геометричних форм та граничних умов.
2) метод кінцевих елементів: Застосовується для аналізу пластин складної форми та з різними граничними умовами.
3) метод кінцевих різниць: Використовується для чисельного розв'язування рівнянь у сфері часу.

Незважаючи на свою широку застосовність, теорія пластин Кірхгофа-Лява має низку обмежень, серед яких можна виділите наступні: не враховує поперечних зрушень, не підходить для аналізу товстих пластин, не враховує пластичних деформацій матеріалу.

Для їх подолання та більш точного опису поведінки пластин вводяться різні узагальнення, найбільш поширеними з яких є наступні: теорія пластин Тимошенко (враховує поперечні зрушення, що важливо для товстих пластин та високих частот коливань), нелінійні теорії (описують поведінку пластин при великих прогинах та напругах) та теорії композитних пластин, які враховують анізотропність властивостей матеріалів.

Рівняння пластини типу Тимошенко – це система диференціальних рівнянь в частинних похідних, яка описує деформацію і напруження в тонких пластинах, враховуючи вплив поперечного зсуву. На відміну від класичної теорії пластин Кірхгофа, теорія Тимошенко дозволяє більш точно моделювати поведінку пластин при великих градієнтах згину та при дії високих частот.

Рівняння рівноваги пластини з теорії Тимошенко є системою двох диференціальних рівнянь у часткових похідних другого порядку. Вони описують зв'язок між зовнішніми навантаженнями, що діють на пластину, її прогином та кутами повороту нормальних перерізів. Основна відмінність теорії Тимошенко від класичної теорії полягає у врахуванні поперечного зсуву. Це означає, що нормалі до середньої поверхні пластини після

деформації залишаються прямими, але вже не обов'язково перпендикулярними до неї. Такий підхід дозволяє більш точно описувати поведінку пластин у випадках, коли товщина пластини не є дуже малою порівняно з іншими її розмірами.

Рівняння пластини типу Тимошенко можна представити у вигляді системи двох диференціальних рівнянь в частинних похідних четвертого порядку відносно прогину w і функції повороту ψ:

$$D\nabla^4 W = q - kGh\nabla^2(W - \psi)$$
$$D\nabla^2 \psi = kGh(\nabla^2 W - \nabla^2 \psi)$$

де: W – прогин пластини;

ψ – функція повороту нормалі до середньої поверхні пластини;

D – циліндрична жорсткість на згин;

G – модуль зсуву матеріалу пластини;

h – товщина пластини;

q – розподілене навантаження;

∇^2 – оператор Лапласа;

κ – коефіцієнт зсуву.

З аналізу цих рівнянь можна зробити наступні висновки. Перше рівняння описує рівновагу сил, що діють у напрямку, перпендикулярному до площини пластини. Друге рівняння висловлює умову рівноваги моментів.

Перший член у першому рівнянні описує опір пластини вигину, другий член у першому рівнянні представляє зовнішнє навантаження. Інерційний член у першому рівнянні враховує динамічні ефекти. Перший доданок у другому рівнянні характеризує згинальні моменти в пластині., а другий доданок у другому рівнянні враховує зсувні напруги.

Коефіцієнт корекції зсуву вводиться для обліку нерівномірного розподілу зсувних напруг по товщині пластини. Його точне значення залежить від обраної теорії розподілу зсувних напруг. Для вирішення рівнянь

теорії Тимошенко необхідно поставити відповідні граничні умови на краях пластини. Ці умови можуть бути різними залежно від конкретної задачі та можуть включати задані переміщення, кути повороту чи зусилля.

Рівняння пластини типу Тимошенко широко застосовується в різних областях інженерії таких, як будівництво (для розрахунку міцності і жорсткості плит перекриття, стін, фундаментів), авіація (для аналізу деформацій і напружень в панелях літаків), механіка суден (для аналізу міцності палуб і інших елементів судна) та інших. Отже, рівняння пластини типу Тимошенко є важливим інструментом для аналізу поведінки тонких пластин в різних інженерних задачах. Врахування поперечного зсуву дозволяє отримати більш точні результати розрахунків, особливо для пластин з великими градієнтами згину і при дії високих частот.

3.2 Застосування рівнянь пружності для моделювання руху товстого шару

Для моделювання руху товстого шару часто застосовують рівняння теорії пружності різного виду. Рівняння теорії пружності в переміщеннях є системою диференціальних рівнянь у приватних похідних, що описують деформований стан пружного тіла під дією зовнішніх сил. У цих рівняннях основними невідомими є компоненти вектору переміщень точок тіла.

При отриманні рівнянь теорії пружності в переміщеннях як незалежні змінні приймаються переміщення u, v, w. Очевидно, що при цьому немає необхідності звертатися до рівнянь Коші, оскільки за цими рівняннями, якщо знайдені переміщення, деформації завжди будуть визначені однозначно. Крім того, немає необхідності звертатися до рівнянь спільності деформацій Сен-Венана, оскільки вони потрібні щодо компонентів переміщення через задані компоненти деформації. Звідси випливає, що переміщення u, v, w потрібно підбирати таким чином, щоб задовольнити диференціальні рівняння рівноваги елемента.

До основних рівнянь теорії пружності у переміщеннях зазвичай відносять:

1. Рівняння рівноваги в переміщеннях (рівняння Ламе). Ці рівняння висловлюють умову рівноваги малого елемента тіла. У декартових координатах вони мають вигляд:

$$\mu\nabla^2 U + (\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial x} = \rho f_x$$

$$\mu\nabla^2 V + (\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial y} = \rho f_y$$

$$\mu\nabla^2 W + (\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial z} = \rho f_z$$

де: *U, V, W* – проекції вектору переміщення на осі координат;

λ та μ – коефіцієнти Ламе (характеризують пружні властивості матеріалу);

∇^2 – оператор Лапласа

$\Delta = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}$ – дивергенція вектору переміщень (об'ємна деформація);

ρ – щільність матеріалу;

f_x, f_y, f_z – проекції вектору об'ємних сил на осі координат.

2. Зв'язок між напругами та деформаціями (закон Гука). Цей закон встановлює лінійну залежність між тензором напруги і тензором деформацій. У разі ізотропного матеріалу він записується у вигляді:

$$\sigma_{ij} = \lambda\Delta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}$$

де: σ_{ij} – компоненти тензора напружень;

ε_{ij} – компоненти тензора деформацій;

δ_{ij} – символ Кронекера.

3. Співвідношення між деформаціями та переміщеннями. Ці співвідношення пов'язують компоненти деформацій тензора з похідними компонент вектору переміщень. Наприклад:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial U}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial V}{\partial y}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial W}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) / 2$$

Рівняння рівноваги виражають умову рівності нулю суми всіх сил, які діють нескінченно малий елемент тіла. Закон Гука встановлює лінійний зв'язок між напругою та деформаціями для пружних матеріалів. Співвідношення між деформаціями та переміщеннями пов'язують макроскопічні деформації з мікроскопічними переміщеннями частинок тіла.

3.3 Інтегральні перетворення як спосіб переходу у простір зображень

Інтегральне перетворення Фур'є – це один із найважливіших інструментів математичного аналізу, що дозволяє переходити від представлення функції у просторовій області до її подання у частотній області. Іншими словами, воно дозволяє розкласти функцію на суму (або інтеграл) гармонійних коливань із різними частотами. Якщо взяти до розгляду складну звукову хвилю, то ми маємо справу не з одним чистим тоном, а з сумішшю безлічі звуків різної висоти. Перетворення Фур'є дозволяє розкласти цю складну хвилю на окремі чисті тони (синусоїди) та

визначити, з якою інтенсивністю кожен із цих тонів присутній у вихідному сигналі.

Для функції *f(x)*, визначеної на всій числовій осі, її перетворення Фур'є *F(ω)* визначається наступним чином:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

де: ω – частота, *i* – уявна одиниця.

Зворотне перетворення Фур'є дозволяє відновити вихідну функцію за її спектром:

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

У випадку необхідності застосування зазначеного вище перетворення на скінченному проміжку (для конструкції скінчених розмірів) використовують розкладання заданих та шуканих функцій в ряди Фур’є.

Розкладання до низки Фур'є – це потужний математичний інструмент, що дозволяє уявити практично будь-яку періодичну функцію як суми нескінченного числа гармонійних коливань. Це означає, що будь-яку складну періодичну функцію можна розкласти на прості синусоїдальні та косинусоїдальні складові.

Якщо повернутися до розглянутого вище складного звукового сигналу, який складається з багатьох різних частот, кожна з яких відповідає певній ноті. Ряд Фур'є дозволяє розкласти цей складний сигнал на окремі чисті тони (синусоїди та косінусоїди) і визначити, з якою інтенсивністю кожен з цих тонів присутній у вихідному сигналі.

Будь-яку періодичну функцію *f(x)* з періодом 2π можна подати у вигляді ряду Фур'є:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum[a_n\,cos(nx)+b_n\,sin(nx)]$$

де: a_0, a_n, b_n – коефіцієнти Фур'є, що визначаються за формулами:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)cos(nx)dx,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)sin(nx)dx,$$

n – натуральне число.

Коефіцієнти Фур'є a_0, a_n та b_n мають наступний фізичний зміст, зокрема, a_0 – середнє значення функції у періоді, a_n – амплітуда косінусоїдальної складової з частотою n, b_n – амплітуда синусоїдальної складової із частотою n.

Інтегральне перетворення Лапласа – це ще один важливий математичний інструмент, подібно до перетворення Фур'є, що дозволяє переходити від представлення функції в часовій області до її представлення в комплексній площині (область зображення). Воно знайшло широке застосування у вирішенні диференціальних рівнянь, особливо у завданнях аналізу лінійних систем.

Перетворення Лапласа дозволяє переводити диференціальні рівняння на алгебраїчні, що спрощує їх вирішення. Воно особливо корисне під час аналізу систем із початковими умовами.

Пряме перетворення Лапласу функції $f(t)$ визначається як:

$$F(p)=\int_0^{\infty}f(t)e^{-st}dt$$

де: p – комплексна змінна,

$F(p)$ – зображення функції $f(t)$.

Зворотне перетворення Лапласа дозволяє відновити вихідну функцію її зображення:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}F(p)e^{pt}dp$$

де інтеграл береться вертикальною прямою в комплексній площині.

Перетворення Лапласа дозволяє звести диференціальні рівняння до алгебраїчних рівнянь у просторі зображень з подальшим поверненням у простір оригіналів.

3.4 Рівняння руху шару в потенціальних функціях

Потенціальні функції – це потужний математичний інструмент, який дозволяє описувати різноманітні фізичні поля, зокрема поля напружень і переміщень у деформованих тілах. Застосування потенціальних функцій значно спрощує розв’язання задач теорії пружності, особливо у випадку лінійно-пружних середовищ.

У залежності від специфіки поставленої задачі та розмірності побудованої математичної моделі доцільно застосовувати різні потенціальні функції. Наведемо приклади деяких з них.

Функція напружень Ейрі: У двовимірних задачах теорії пружності для плосконапруженого та плоскодеформованого стану вводиться функція Ейрі Ф, через яку виражаються всі компоненти тензора напружень:

$$\sigma_x=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}$$

$$\sigma_y=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$$

Підставляючи ці вирази в рівняння рівноваги, отримуємо рівняння бігармонічного типу для функції Ейрі:

$$\nabla^4 \Phi = 0$$

Функції напружень Ламе: У тривимірних задачах теорії пружності для ізотропних тіл вводяться три функції напружень Ламе, через які виражаються компоненти тензора напружень.

Функції переміщень: Поле переміщень пов'язане з функцією напружень через рівняння сумісності деформацій.

До основних переваг використання потенціальних функцій можна віднести наступне. Замість того, щоб розв'язувати складну систему рівнянь, що описують рівновагу та сумісність деформацій, метод потенціальних функцій пропонує нам елегантний вихід: ми переносимо увагу на єдине, але більш високого порядку рівняння, пов'язане з потенціальною функцією. Це подібно до того, як замість розв'язання системи лінійних рівнянь ми розв'язуємо одне поліноміальне рівняння.

Крім того, граничні умови, які часто є складними для прямих напружень, набувають простішої форми, коли ми виражаємо їх через похідні від потенціалу. Це дозволяє нам зосередитися на більш фундаментальних аспектах задачі. А найголовніше, потенціальні функції відкривають двері до застосування потужних інструментів математичної фізики. Методи розділення змінних, інтегральні перетворення та інші математичні прийоми, які добре розроблені і вивчені, стають доступними для розв'язання задач теорії пружності.

Широке розповсюдження потенціальні функції набули у задачах про рух плоских та просторових шарів. Для опису руху шарів у потенціальних

функціях необхідно враховувати не тільки статичні рівняння рівноваги, а й динамічні рівняння руху. Ці рівняння пов’язують між собою напруження, густину матеріалу та прискорення частинок середовища.

При цьому виділяють наступні етапи знаходження розв'язку задач із застосуванням потенціальних функцій:

1. Вибір відповідної потенціальної функції: Залежно від геометрії тіла та характеру навантажень обирається відповідна потенціальна функція (Ейрі, Ламе та ін.).

2. Складання рівнянь: Складаються рівняння рівноваги та сумісності деформацій у термінах вибраної потенціальної функції.

3. Постановка граничних умов: Формулюються граничні умови для напружень і переміщень на границях тіла.

4. Розв’язання рівнянь: Розв’язується отримана система рівнянь з використанням обраного методу.

5. Визначення напружень і переміщень: За знайденою потенціальною функцією визначаються компоненти тензора напружень і вектор переміщень.

Розглянемо більш детально випадок просторового напружено-деформованого шару і застосування потенціалів Ламе.

Потенціали Ламе – це математичний інструмент, який використовується в теорії пружності для опису напруженого стану в тілах, що деформуються. Вони є скалярними функціями, через градієнти яких можна виразити компоненти тензора напружень.

Основна ідея використання потенціалів полягає в тому, що замість того, щоб вирішувати систему рівнянь рівноваги для напруги безпосередньо, ми вводимо нові функції – потенціали, які повинні задовольняти більш простим рівнянням. Потім, продиференціювавши ці потенціали певним чином, ми можемо отримати вирази для напруги.

Існує кілька форм запису потенціалів Ламе, але найпоширенішим є уявлення через дві скалярні функції Ф и Ψ (або скалярну і векторну):

$$\sigma_{ij} = \lambda \cdot \delta_{ij} \Delta\Phi + 2\mu \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{1}{2} \delta_{ij} \Delta\Phi \right) + \varepsilon_{ijk} \frac{\partial \Psi}{\partial x_k}$$

де: σ_{ij} – компоненти тензору напружень;

λ та μ – коефіцієнти Ламе (характеризують пружні властивості матеріалу);

δ_{ij} – символ Кронекера;

Δ – оператор Лапласа;

$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j}$ – другі похідні функції Ф за координатами і та j;

ε_{ijk} – символ Леві-Чівіта (використовується для опису обертання);

$\frac{\partial \Psi}{\partial x_k}$ – перші похідні функції Ψ за координатою x_k.

Тут функція Ф пов'язана з : об'ємною деформацією тіла, а функція Ψ пов'язана з деформаціями зсуву. Формула, наведена вище, є лише одним із можливих уявлень потенціалів Ламе. Залежно від конкретного завдання та обраної системи координат форма запису може змінюватись.

4 ТЕОРЕТИЧНІ РОЗРАХУНКИ АРМОВАНОЇ КОНСТРУКЦІЇ

4.1 Побудова математичної моделі

Розглядається пластина розмірів a на b, що спирається на композит завтовшки H. Початок координат вибрано на серединній поверхні пластини завтовшки h, вісь Z спрямована вгору. Композиційний матеріал складається з шарів, що чергуються: низькомодульної матриці товщиною h_1 і високомодульного армування товщиною h_2, нижня поверхня композиту склеєна з абсолютно жорстким напівпростором. Пластину, матрицю та армування вважаємо однорідними, ізотропними та лінійно-пружними. У момент часу $t<0$ система перебуває у стані спокою і вільна від напруги. Потім в момент часу $t=0$ в точці з координатами (0, 0, h/2) прикладається нормальне навантаження F, яке рухається з постійною швидкістю c у додатному напрямку осі X. Розглядаються швидкості руху навантаження, які менші швидкостей розповсюдження хвиль зсуву як у пластині, так і у композиті.

Основна увага приділяється вивченню перехідних процесів, які виникають у момент прикладення навантаження і наступні безпосередньо після цього моменту проміжки часу. Також визначається час встановлення процесу, після якого задача може розглядатися у стаціонарній постановці. У цій постановці завдання інерція об'єктів, що рухаються, з розгляду виключається, розглядаються системи без демпфування.

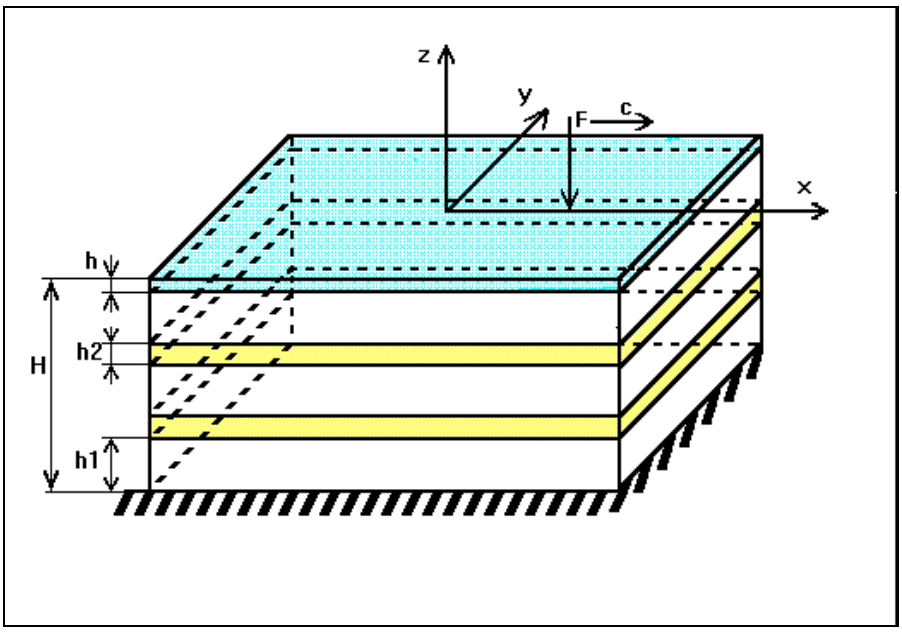


Рисунок 4.1 - Розрахункова схема задачі

Для опису руху пластини використовуються уточнені рівняння з урахуванням поперечного зсуву та інерції обертання (типу Тимошенко), які у просторовому випадку для жорсткого контакту мають вигляд [15]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\dfrac{1-\nu}{2}\cdot\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\dfrac{1+\nu}{2}\cdot\dfrac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}-\dfrac{1-\nu^2}{Eh}p_x-\rho\dfrac{1-\nu^2}{E}\cdot\dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2}=0 \\ \dfrac{1+\nu}{2}\cdot\dfrac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\dfrac{1-\nu}{2}\cdot\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}-\dfrac{1-\nu^2}{Eh}p_y-\rho\dfrac{1-\nu^2}{E}\cdot\dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2}=0 \\ k^2\dfrac{1-\nu}{2}\cdot\left(\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 W}{\partial y^2}-\dfrac{\partial\chi_x}{\partial x}-\dfrac{\partial\chi_y}{\partial y}\right)-\dfrac{1-\nu^2}{Eh}q_r-\rho\dfrac{1-\nu^2}{E}\cdot\dfrac{\partial^2 W}{\partial t^2}=\dfrac{1-\nu^2}{Eh}F \\ -\dfrac{\partial^2\chi_x}{\partial x^2}-\dfrac{1-\nu}{2}\cdot\dfrac{\partial^2\chi_x}{\partial y^2}-\dfrac{1+\nu}{2}\cdot\dfrac{\partial^2\chi_y}{\partial x\partial y}-6k^2\dfrac{1-\nu}{h^2}\cdot\left(\dfrac{\partial W}{\partial x}-\chi_x\right)+\rho\dfrac{1-\nu^2}{E}\cdot\dfrac{\partial^2\chi_x}{\partial t^2}=-\dfrac{3(1-\nu)}{Gh^2}p_x \\ -\dfrac{1+\nu}{2}\cdot\dfrac{\partial^2\chi_x}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2\chi_y}{\partial y^2}-\dfrac{1-\nu}{2}\cdot\dfrac{\partial^2\chi_y}{\partial x^2}-6k^2\dfrac{1-\nu}{h^2}\cdot\left(\dfrac{\partial W}{\partial y}-\chi_y\right)+\rho\dfrac{1-\nu^2}{E}\cdot\dfrac{\partial^2\chi_y}{\partial t^2}=-\dfrac{3(1-\nu)}{Gh^2}p_y \end{cases} \quad (4.1)$$

Тут: χ_x,χ_y – кути повороту поперечного перерізу пластини;

E,G,ν,ρ – модулі Юнга та зсуву, коефіцієнт Пуассона та масова щільність пластини;

U,V,W – переміщення точок серединної поверхні пластини в напрямку осей X, Y та Z;

q_r – нормальна напруга, що діє на поверхні розділу пластини та шару;

p_x, p_y – дотичні напруги, що діють на поверхні розділу пластини та армованого композиту у напрямку осей X та Y;

F – задане рухоме поверхневе навантаження.

Рух шарів матриці та армування описується динамічними рівняннями теорії пружності, які у векторній формі мають вигляд [24]:

$$(\lambda_k + 2\mu_k)graddiv\vec{U}_k - \mu_k rotrot\vec{U}_k = \rho_k \frac{\partial^2 \vec{U}_k}{\partial t^2} \tag{4.2}$$

U_k (U_{xk}, U_{yk}, U_{zk}) – вектор переміщення; k=1 відноситься до матриці, k=2 – до армування, λ_k, μ_k – параметри Ламе: $\lambda_k = \frac{2\nu_k G_k}{1-2\nu_k}$; $\mu_k = G_k$.

Напруги через переміщення виражаються наступним чином:

$$\sigma_{xk} = \frac{2G_k(1-\nu_k)}{1-2\nu_k} \cdot \frac{\partial U_{xk}}{\partial x} + \frac{2G_k\nu_k}{1-2\nu_k} \cdot \left(\frac{\partial U_{yk}}{\partial y} + \frac{\partial U_{zk}}{\partial z} \right)$$

$$\sigma_{yk} = \frac{2G_k(1-\nu_k)}{1-2\nu_k} \cdot \frac{\partial U_{yk}}{\partial y} + \frac{2G_k\nu_k}{1-2\nu_k} \cdot \left(\frac{\partial U_{xk}}{\partial x} + \frac{\partial U_{zk}}{\partial z} \right) \tag{4.3}$$

$$\sigma_{zk} = \frac{2G_k(1-\nu_k)}{1-2\nu_k} \cdot \frac{\partial U_{zk}}{\partial z} + \frac{2G_k\nu_k}{1-2\nu_k} \cdot \left(\frac{\partial U_{xk}}{\partial x} + \frac{\partial U_{yk}}{\partial y} \right)$$

$$\sigma_{yzk} = G_k \cdot \left(\frac{\partial U_{zk}}{\partial y} + \frac{\partial U_{yk}}{\partial z} \right) \qquad \sigma_{zxk} = G_k \cdot \left(\frac{\partial U_{xk}}{\partial z} + \frac{\partial U_{zk}}{\partial x} \right) \qquad \sigma_{xyk} = G_k \cdot \left(\frac{\partial U_{yk}}{\partial x} + \frac{\partial U_{xk}}{\partial y} \right)$$

Завдання зводиться до спільного інтегрування рівнянь руху пластини та композиту з одночасним виконанням граничних умов. Так як описана задача розглядається для випадку жорсткого контакту між пластиною і шаром, а так само між шаром і основою, то на поверхні розділу між ними та

між шарами армування та матриці в локальних системах координат $z_k = z + \left(h + h_1 + \left(k-1\right)\cdot\left(h_1 + h_2\right)\right)/2$ – для шарів матриці, k=1,3,…,n; $z_k = z + \left(h - h_2 + k\cdot\left(h_1 + h_2\right)\right)/2$ – для шарів армування, k=2,4,…,n-1; n – кількість шарів, граничні умови мають такий вид:

1). При $z_1 = h_1/2$:

$$U_{z1} = W \qquad U_{x1} = U + \frac{h}{2}\chi_x \qquad U_{y1} = V + \frac{h}{2}\chi_y \tag{4.4}$$

$$\sigma_{z1} = q_r \qquad \sigma_{xz1} = p_x \qquad \sigma_{yz1} = p_y$$

2). На границях розділу матриці та армування $z_k = \pm h_k/2$:

$$U_{z1} = U_{z2} \qquad U_{xz1} = U_{xz2} \qquad U_{yz1} = U_{yz2} \tag{4.5}$$

$$\sigma_{z1} = \sigma_{z2} \qquad \sigma_{xz1} = \sigma_{xz2} \qquad \sigma_{yz1} = \sigma_{yz2}$$

3). При $z_n = -h_1/2$

$$U_z = 0 \qquad U_x = 0 \qquad U_y = 0 \tag{4.6}$$

Рівняння руху кожного шару матриці та армування (4.2) у потенціальних функціях можуть бути записані наступним чином [16]:

$$\frac{\partial^2\Phi_k^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2\Phi_k^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2\Phi_k^*}{\partial z^{*2}} = \frac{c_{s1}^2}{c_{pk}^2}\cdot\frac{\partial\Phi_k^*}{\partial\tau^2}, \quad \frac{\partial^2\vec{\Psi}_k^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\vec{\Psi}_k^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2\vec{\Psi}_k^*}{\partial z^{*2}} = \frac{c_{s1}^2}{c_{sk}^2}\cdot\frac{\partial\vec{\Psi}_k^*}{\partial\tau^2} \tag{4.7}$$

$$\frac{\partial\Psi_{xk}^*}{\partial x^*} + \frac{\partial\Psi_{yk}^*}{\partial y^*} + \frac{\partial\Psi_{zk}^*}{\partial z^*} = 0 \tag{4.8}$$

або

$$\Delta\Phi_k = \frac{1}{c_{pk}^2}\cdot\frac{\partial^2\Phi_k}{\partial t^2} \qquad \Delta\vec{\Psi}_k = \frac{1}{c_{sk}^2}\cdot\frac{\partial^2\vec{\Psi}_k}{\partial t^2} \tag{4.9}$$

$$div\vec{\Psi}_k = 0 \tag{4.10}$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа, $c_{pk}^2 = \frac{2G_k(1-\nu_k)}{\rho_k(1-2\nu_k)}$, $c_{sk}^2 = \frac{G_k}{\rho_k}$.

4.2 Знаходження аналітичного розв'язку рівнянь руху пластини

Перейдемо до безрозмірних величин, відносячи всі лінійні змінні та невідомі функції до товщини пластини. Формули переходу запишуться так:

$$\begin{gathered}\{U^*, V^*, W^*, y^*, z^*\} = \frac{\{U, V, W, y, z\}}{h}, \quad \rho^* = \frac{\rho}{\rho_1}, \quad \beta_k = \frac{h_k}{h}, \\ \rho_1^* = \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad \gamma = \frac{G}{G_1}, \quad c_{s1}^2 = \frac{G_1}{\rho_1}, \quad c_k^* = \frac{c}{c_{sk}}, \quad \gamma_1 = \frac{G_1}{G_2} \\ \tau = \frac{c_S t}{h}, \qquad \beta_k = \frac{h_k}{h}, \qquad \delta = \frac{a}{h}, \qquad \varepsilon = \frac{b}{h}\end{gathered} \tag{4.11}$$

Для подальшого вирішення даної задачі розкладемо всі задані та шукані функції у подвійні ряди Фур'є за змінними x^* і y^* за формулою:

$$W_k(x^*, y^*, p) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} W_{mnk}(p) \cdot \sin\left[\frac{n\pi}{\delta} \cdot x^*\right] \cdot \sin\left[\frac{m\pi}{\varepsilon} \cdot y^*\right] \tag{4.12}$$

та застосуємо інтегральне перетворення Лапласа за безрозмірним часом τ:

$$\overline{f}(x^*, y^*, z^*, p) = \int_0^{+\infty} f(x^*, y^*, z^*, \tau) e^{-p\tau} d\tau \tag{4.13}$$

Переходячи до безрозмірних змінних (4.11) та застосовуючи розкладання в ряди Фур'є (4.12) та перетворення Лапласа (4.13) до рівнянь руху пластини, отримаємо:

$$\begin{cases} \left[2\xi^2\gamma+(1-\nu)(p^2\rho^*+\varpi^2\gamma)\right]\overline{U^*}+\xi\varpi\gamma(1+\nu)\overline{V^*}=-(1-\nu)\dfrac{\overline{p_x}}{G_1} \\ \xi\varpi\gamma(1+\nu)\overline{U^*}+\left[2\varpi^2\gamma+(1-\nu)(p^2\rho^*+\xi^2\gamma)\right]\overline{V^*}=-(1-\nu)\dfrac{\overline{p_y}}{G_1} \\ \left[k^2\gamma(\varpi^2+\xi^2)+p^2\rho^*\right]\overline{W^*}-ik^2\gamma(\xi\overline{\chi_x}+\varpi\overline{\chi_y})+\dfrac{q_r}{G_1}=-\dfrac{\overline{F}}{G_1} \\ \left[2\xi^2\gamma+(1-\nu)(\varpi^2\gamma+p^2\rho^*+12k^2\gamma)\right]\overline{\chi_x}+\xi\varpi\gamma(1+\nu)\overline{\chi_y}+12ik^2\xi\gamma(1-\nu)\overline{W^*}=-6(1-\nu)\dfrac{\overline{p_x}}{G_1} \\ \xi\varpi\gamma(1+\nu)\overline{\chi_x}+\left[2\varpi^2\gamma+(1-\nu)(\xi^2\gamma+p^2\rho^*+12k^2\gamma)\right]\overline{\chi_y}+12ik^2\omega\gamma(1-\nu)\overline{W^*}=-6(1-\nu)\dfrac{\overline{p_y}}{G_1} \end{cases} \quad (4.14)$$

де $\xi=\dfrac{n\pi}{\delta}, \quad \omega=\dfrac{m\pi}{\varepsilon}$

Для спрощення подальших викладок введемо додаткові змінні B_i за формулами:

$$B_1=\gamma(\xi^2+\omega^2+12k^2)+p^2\rho^* \qquad B_2=2\gamma(\xi^2+\omega^2)+(1-\nu)(12k^2\gamma+p^2\rho^*)$$

$$B_3=\frac{6\xi^2\gamma(1+\nu)}{B_1}+6(1-\nu) \qquad B_4=\frac{6\xi\omega\gamma(1+\nu)}{B_1}$$

$$B_5=12k^2\omega\gamma(1-\nu) \qquad B_6=\frac{B_3}{B_2}\cdot\frac{1+\nu}{1-\nu}\gamma\xi\omega-\frac{B_4}{B_2}\cdot\left(\frac{2\xi^2\gamma}{1-\nu}+p^2\rho^*+\omega^2\gamma\right)$$

$$B_7=\frac{B_3}{B_2}\cdot\left(\frac{2\omega^2\gamma}{1-\nu}+\xi^2\gamma+p^2\rho^*\right)-\frac{B_4}{B_2}\cdot\frac{1+\nu}{1-\nu}\gamma\xi\omega \qquad B_8=\frac{B_6\xi}{\omega}+\frac{6}{B_1}\left(\gamma(\xi^2+\omega^2)+p^2\rho^*\right)$$

$$B_9=\frac{B_7\xi}{\omega}-\frac{6}{B_1}\cdot\left(\gamma\xi\omega+\frac{\xi}{\omega}(\gamma\xi^2+p^2\rho^*)\right) \qquad B_{10}=-\frac{2\xi^2\gamma}{1-\nu}-p^2\rho^*-\omega^2\gamma$$

$$B_{11}=-\xi\omega\gamma\frac{1+\nu}{1-\nu} \qquad B_{12}=-\frac{2\omega^2\gamma}{1-\nu}-\xi^2\gamma-p^2\rho^*$$

$$B_{13}=k^2\gamma(\xi B_8+\omega B_6) \qquad B_{14}=k^2\gamma(\xi B_9+\omega B_7)$$

$$B_{15}=k^2\gamma\left(\omega^2+\xi^2-\frac{B_5}{B_2}\cdot\left(\frac{\xi^2}{\omega}+\omega\right)\right)+p^2\rho^*$$

Помножуючи четверте рівняння системи (4.14) на ω, а п'яте на – ξ і складаючи їх, виражаємо χ_x через χ_y та через компоненти напруги.

$$\overline{\chi_x} = \overline{\chi_y} \cdot \frac{\xi}{\omega} + \frac{6\overline{p_y}}{B_1 G_1} \cdot \frac{\xi}{\omega} - \frac{6\overline{p_x}}{B_1 G_1} \tag{4.15}$$

Після цього з п’ятого рівняння знаходимо

$$\overline{\chi_y} = -i \frac{B_5}{B_2} \overline{W^*} - \frac{B_3}{B_2} \cdot \frac{\overline{p_y}}{G_1} + \frac{B_4}{B_2} \cdot \frac{\overline{p_x}}{G_1} \tag{4.16}$$

Використовуючи перше та друге рівняння системи (4.14), виражаємо кути повороту поперечного перерізу пластини через компоненти переміщення:

$$\overline{\chi_y} = -i \frac{B_5}{B_2} \overline{W^*} + B_6 \overline{U^*} + B_7 \overline{V^*} \qquad \overline{\chi_x} = -i \frac{B_5}{B_2} \cdot \frac{\xi}{\omega} \overline{W^*} + B_8 \overline{U^*} + B_9 \overline{V^*} \tag{4.17}$$

Кінцеві вирази для усіх компонент напружено-деформованого стану пластини набудуть наступного вигляду

$$\overline{\chi_y} = -i \frac{B_5}{B_2} \overline{W^*} + B_6 \overline{U^*} + B_7 \overline{V^*} \qquad \chi_x = -i \frac{B_5}{B_2} \cdot \frac{\xi}{\omega} \overline{W^*} + B_8 \overline{U^*} + B_9 \overline{V^*} \tag{4.18}$$

$$\frac{\overline{p_x}}{G_1} = B_{10} \overline{U^*} + B_{11} \overline{V^*} \quad \frac{\overline{p_y}}{G_1} = B_{11} \overline{U^*} + B_{12} \overline{V^*} \qquad \frac{\overline{q_r}}{G_1} = -\frac{\overline{F}}{G_1} + iB_{13} \overline{U^*} + iB_{14} \overline{V^*} - B_{15} \overline{W^*}$$

4.3 Побудова аналітичної системи рівнянь для композиту

Переходячи до безрозмірних величин у рівняннях шарів композиційного матеріалу (4.2), (4.3) та застосовуючи розкладання в ряди Фур'є та перетворення Лапласу за часом, отримаємо прості диференціальні рівняння для знаходження компонент потенційних функцій:

$$\frac{\partial^2 \overline{\Phi_k^*}}{\partial z^{*2}} - \lambda_{1k} \overline{\Phi_k^*} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \overline{\vec{\Psi}_k^*}}{\partial z^{*2}} - \lambda_{2k} \overline{\vec{\Psi}_k^*} = 0 \tag{4.19}$$

$$-i\xi \overline{\Psi_{xk}^*} - i\omega \overline{\Psi_{yk}^*} + \frac{\partial \overline{\Psi_{zk}^*}}{\partial z^*} = 0 \tag{4.20}$$

в яких
$$\lambda_{11} = \xi^2 + \omega^2 + \Theta_1 p^2 \qquad \lambda_{21} = \xi^2 + \omega^2 + p^2$$
$$\lambda_{12} = \xi^2 + \omega^2 + \Theta_1 \frac{\gamma_1}{\rho_1^*} p^2 \qquad \lambda_{22} = \xi^2 + \omega^2 + p^2 \frac{\gamma_1}{\rho_1^*}$$

Розв’язок отриманої системи (4.19) має вигляд:

$$\begin{cases} \overline{\Phi_k^*} = C_{1k} \exp\left(z_k^* \sqrt{\lambda_{1k}}\right) + C_{2k} \exp\left(-z_k^* \sqrt{\lambda_{1k}}\right) \\ \overline{\Psi_{xk}^*} = C_{3k} \exp\left(z_k^* \sqrt{\lambda_{2k}}\right) + C_{4k} \exp\left(-z_k^* \sqrt{\lambda_{2k}}\right) \\ \overline{\Psi_{yk}^*} = C_{5k} \exp\left(z_k^* \sqrt{\lambda_{2k}}\right) + C_{6k} \exp\left(-z_k^* \sqrt{\lambda_{2k}}\right) \\ \overline{\Psi_{zk}^*} = C_{7k} \exp\left(z_k^* \sqrt{\lambda_{2k}}\right) + C_{8k} \exp\left(-z_k^* \sqrt{\lambda_{2k}}\right) \end{cases} \tag{4.21}$$

де $z_k^* = z_k / h$.

Використовуючи додаткову умову (4.20), виразимо невідомі коефіцієнти C_{7k}, C_{8k} через інші коефіцієнти:

$$C_{7k} = \frac{i\xi}{\sqrt{\lambda_{2k}}} C_{3k} + \frac{i\omega}{\sqrt{\lambda_{2k}}} C_{5k}, \qquad C_{8k} = -\frac{i\xi}{\sqrt{\lambda_{2k}}} C_{4k} - \frac{i\omega}{\sqrt{\lambda_{2k}}} C_{6k} \tag{4.22}$$

Тоді:

$$\overline{\Psi^*_{zk}} = \frac{i}{\sqrt{\lambda_{2k}}} \cdot \left((\xi C_{3k} + \omega C_{5k}) \exp\left(z^*_k \sqrt{\lambda_{2k}}\right) - (\xi C_{4k} + \omega C_{6k}) \exp\left(- z^*_k \sqrt{\lambda_{2k}}\right) \right) \tag{4.23}$$

Тензор переміщення у кожному шарі композиту визначається наступним векторним рівнянням:

$$\vec{U} = grad\Phi + rot\vec{\Psi} \tag{4.24}$$

Для нашої задачі цей вираз у безрозмірному вигляді після застосування подвійного розкладання у ряди Фур'є за формулою (4.12) буде наступною системою:

$$\begin{aligned} &\overline{U^*_{xk}} = -\xi \overline{\Phi^*_k} - \omega \overline{\Psi^*_{zk}} - \frac{\partial \overline{\Psi^*_{yk}}}{\partial z^*} \qquad \overline{U^*_{yk}} = -\omega \overline{\Phi^*_k} + \frac{\partial \overline{\Psi^*_{xk}}}{\partial z^*} + \xi \overline{\Psi^*_{zk}} \\ &\overline{U^*_{zk}} = \frac{\partial \overline{\Phi^*_k}}{\partial z^*} - \xi \overline{\Psi^*_{yk}} + \omega \overline{\Psi^*_{xk}} \end{aligned} \tag{4.25}$$

Підставляючи рішення (4.21) з урахуванням (4.23) для потенційних функцій в отриману систему (4.25), отримуємо такі вирази для трансформант переміщень:

$$\begin{cases} \overline{U^*_{xk}} = -\xi \cdot \left(C_{1k} \exp\left(z^*_k \sqrt{\lambda_{1k}}\right) + C_{2k} \exp\left(- z^*_k \sqrt{\lambda_{1k}}\right) \right) + \dfrac{\omega \xi}{\sqrt{\lambda_{2k}}} \cdot \left(C_{3k} \exp\left(z^*_k \sqrt{\lambda_{2k}}\right) - \right. \\ \qquad \left. C_{4k} \exp\left(- z^*_k \sqrt{\lambda_{2k}}\right) \right) + \left(\dfrac{\omega^2}{\sqrt{\lambda_{2k}}} - \sqrt{\lambda_{2k}} \right) \cdot \left(C_{5k} \exp\left(z^*_k \sqrt{\lambda_{2k}}\right) - C_{6k} \exp\left(- z^*_k \sqrt{\lambda_{2k}}\right) \right) \\ \overline{U^*_{yk}} = -\omega \cdot \left(C_{1k} \exp\left(z^*_k \sqrt{\lambda_{1k}}\right) + C_{2k} \exp\left(- z^*_k \sqrt{\lambda_{1k}}\right) \right) + \left(\sqrt{\lambda_{2k}} - \dfrac{\xi^2}{\sqrt{\lambda_{2k}}} \right) \cdot \left(C_{3k} \exp\left(z^*_k \sqrt{\lambda_{2k}}\right) - \right. \\ \qquad \left. - C_{4k} \exp\left(- z^*_k \sqrt{\lambda_{2k}}\right) \right) - \dfrac{\omega \xi}{\sqrt{\lambda_{2k}}} \cdot \left(C_{5k} \exp\left(z^*_k \sqrt{\lambda_{2k}}\right) - C_{6k} \exp\left(- z^*_k \sqrt{\lambda_{2k}}\right) \right) \\ \overline{U^*_{zk}} = \sqrt{\lambda_{1k}} \cdot \left(C_{1k} \exp\left(z^*_k \sqrt{\lambda_{1k}}\right) - C_{2k} \exp\left(- z^*_k \sqrt{\lambda_{1k}}\right) \right) + \omega \cdot \left(C_{3k} \exp\left(z^*_k \sqrt{\lambda_{2k}}\right) + \right. \\ \qquad \left. + C_{4k} \exp\left(- z^*_k \sqrt{\lambda_{2k}}\right) \right) - \xi \cdot \left(C_{5k} \exp\left(z^*_k \sqrt{\lambda_{2k}}\right) + C_{6k} \exp\left(- z^*_k \sqrt{\lambda_{2k}}\right) \right) \end{cases} \tag{4.26}$$

Напруги через потенційні функції в безрозмірних змінних композиційному матеріалі визначаються за формулами:

$$\begin{aligned}
\frac{o^*_{zk}}{G_k} &= \frac{2\nu_k}{1-2\nu_k}\cdot\left(\frac{\partial^2\Phi^*_k}{\partial x^{*2}}+\frac{\partial^2\Phi^*_k}{\partial y^{*2}}+\frac{\partial^2\Phi^*_k}{\partial z^{*2}}\right)+2\cdot\left(\frac{\partial^2\Phi^*_k}{\partial x^{*2}}+\frac{\partial^2\Psi^*_{zk}}{\partial\eta\partial y^*}-\frac{\partial^2\Psi^*_{yk}}{\partial\eta\partial z^*}\right)\\
\frac{o^*_{yzk}}{G_k} &= 2\frac{\partial^2\Phi^*_k}{\partial y^*\partial z^*}-\frac{\partial^2\Psi^*_{xk}}{\partial y^{*2}}+\frac{\partial^2\Psi^*_{xk}}{\partial z^{*2}}+\frac{\partial^2\Psi^*_{yk}}{\partial x^*\partial y^*}-\frac{\partial^2\Psi^*_{zk}}{\partial x^*\partial z^*}\\
\frac{o^*_{xzk}}{G_k} &= 2\frac{\partial^2\Phi^*_k}{\partial x^*\partial z^*}-\frac{\partial^2\Psi^*_{xk}}{\partial x^*\partial y^*}+\frac{\partial^2\Psi^*_{yk}}{\partial x^{*2}}-\frac{\partial^2\Psi^*_{yk}}{\partial z^{*2}}+\frac{\partial^2\Psi^*_{zk}}{\partial y^*\partial z^*}
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Застосовуючи подвійне розкладання у ряди Фур'є (4.12), отримуємо:

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{\sigma^*_{zk}}}{G_k} &= \frac{2\nu_k}{1-2\nu_k}\cdot\left(-\xi^2\overline{\Phi^*_k}-\omega^2\overline{\Phi^*_k}+\frac{\partial^2\overline{\Phi^*_k}}{\partial z^{*2}}\right)+2\cdot\left(\frac{\partial^2\overline{\Phi^*_k}}{\partial z^{*2}}-\xi\frac{\partial\overline{\Psi^*_{yk}}}{\partial z^*}+\omega\frac{\partial^2\overline{\Psi^*_{xk}}}{\partial z^*}\right)\\
\frac{\overline{\sigma^*_{yzk}}}{G_k} &= -2\omega\frac{\partial\overline{\Phi^*_k}}{\partial z^*}+\omega^2\overline{\Psi^*_{xk}}+\frac{\partial^2\overline{\Psi^*_{xk}}}{\partial z^{*2}}-\xi\omega\overline{\Psi^*_{yk}}+\xi\frac{\partial\overline{\Psi^*_{zk}}}{\partial z^*}\\
\frac{\overline{\sigma^*_{xzk}}}{G_k} &= -2\xi\frac{\partial\overline{\Phi^*_k}}{\partial z^*}+\xi\omega\overline{\Psi^*_{xk}}-\xi^2\overline{\Psi^*_{yk}}-\frac{\partial^2\overline{\Psi^*_{yk}}}{\partial z^{*2}}-\omega\frac{\partial\overline{\Psi^*_{zk}}}{\partial z^*}
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Далі, використовуючи вирази (4.21), (4.23), маємо:

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{\sigma^*_{zk}}}{G_k} &= \frac{2}{1-2\nu_k}\cdot\left(\lambda_{1k}(1-\nu_k)-\nu_k(\xi^2+\omega^2)\right)\cdot\left(C_{1k}\exp\left(z^*_k\sqrt{\lambda_{1k}}\right)+C_{2k}\exp\left(-z^*_k\sqrt{\lambda_{1k}}\right)\right)+\\
&+2\omega\sqrt{\lambda_{2k}}\cdot\left(C_{3k}\exp\left(z^*_k\sqrt{\lambda_{2k}}\right)-C_{4k}\exp\left(-z^*_k\sqrt{\lambda_{2k}}\right)\right)-\\
&-2\xi\sqrt{\lambda_{2k}}\cdot\left(C_{5k}\exp\left(z^*_k\sqrt{\lambda_{2k}}\right)-C_{6k}\exp\left(-z^*_k\sqrt{\lambda_{2k}}\right)\right)
\end{aligned} \tag{4.29}$$

$$\frac{\overline{\sigma^*_{yzk}}}{G_k} = -2\omega\sqrt{\lambda_{1k}}\cdot\left(C_{1k}\exp\left(z_k^*\sqrt{\lambda_{1k}}\right) - C_{2k}\exp\left(-z_k^*\sqrt{\lambda_{1k}}\right)\right) + (-\xi^2+\omega^2+\lambda_{2k})\cdot$$
$$\cdot\left(C_{3k}\exp\left(z_k^*\sqrt{\lambda_{2k}}\right) + C_{4k}\exp\left(-z_k^*\sqrt{\lambda_{2k}}\right)\right) - 2\xi\omega\cdot\left(C_{5k}\exp\left(z_k^*\sqrt{\lambda_{2k}}\right) + C_{6k}\exp\left(-z_k^*\sqrt{\lambda_{2k}}\right)\right)$$
$$\frac{\overline{\sigma^*_{xzk}}}{G_k} = -2\xi\sqrt{\lambda_{1k}}\cdot\left(C_{1k}\exp\left(z_k^*\sqrt{\lambda_{1k}}\right) - C_{2k}\exp\left(-z_k^*\sqrt{\lambda_{1k}}\right)\right) + 2\xi\omega\cdot\left(C_{3k}\exp\left(z_k^*\sqrt{\lambda_{2k}}\right) +\right.$$
$$\left. + C_{4k}\exp\left(-z_k^*\sqrt{\lambda_{2k}}\right)\right) - (\xi^2-\omega^2+\lambda_{2k})\cdot\left(C_{5k}\exp\left(z_k^*\sqrt{\lambda_{2k}}\right) + C_{6k}\exp\left(-z_k^*\sqrt{\lambda_{2k}}\right)\right)$$

4.4 Побудова матриці розв'язків

Задовольняючи граничним умовам (4.4) – (4.6) і запроваджуючи необхідні позначення, виражаємо $\overline{U^*}$ через $\overline{V^*}$ і невідомі C_{ik}:

$$\overline{U^*} = \left(-\frac{B_9}{2}\overline{V^*} + \left(A_2C_{11}\exp\left(\beta_1\sqrt{\lambda_{11}}/2\right) + A_3C_{21}\exp\left(-\beta_1\sqrt{\lambda_{11}}/2\right)\right) + A_4C_{31}\exp\left(\beta_1\sqrt{\lambda_{21}}/2\right) + \right. \quad (4.30)$$
$$\left. + A_5C_{41}\exp\left(-\beta_1\sqrt{\lambda_{21}}/2\right) + A_6C_{51}\exp\left(\beta_1\sqrt{\lambda_{21}}/2\right) + A_7C_{61}\exp\left(-\beta_1\sqrt{\lambda_{21}}/2\right)\right)/A_1$$

$$A_1 = 1 + B_8/2 \qquad A_2 = -\xi + \frac{B_5\xi\sqrt{\lambda_{11}}}{2B_2\omega} \qquad A_3 = -\xi - \frac{B_5\xi\sqrt{\lambda_{11}}}{2B_2\omega} \qquad A_4 = \frac{\omega\xi}{\sqrt{\lambda_{21}}} - \frac{B_5\xi}{2B_2}$$

$$A_5 = -\frac{\omega\xi}{\sqrt{\lambda_{21}}} - \frac{B_5\xi}{2B_2} \qquad A_6 = \frac{\omega^2}{\sqrt{\lambda_{21}}} - \sqrt{\lambda_{21}} + \frac{B_5\xi^2}{2B_2\omega} \qquad A_7 = -\frac{\omega^2}{\sqrt{\lambda_{21}}} + \sqrt{\lambda_{21}} + \frac{B_5\xi^2}{2B_2\omega}$$

Аналогічно виражаємо $\overline{V^*}$ через C_{ik}:

$$\overline{V^*} = \left(\left(A_9C_{11}\exp\left(\beta_1\sqrt{\lambda_{11}}/2\right) + A_{10}C_{21}\exp\left(-\beta_1\sqrt{\lambda_{11}}/2\right)\right) + A_{11}C_{31}\exp\left(\beta_1\sqrt{\lambda_{21}}/2\right) + \right. \quad (4.31)$$
$$\left. + A_{12}C_{41}\exp\left(-\beta_1\sqrt{\lambda_{21}}/2\right) + A_{13}C_{51}\exp\left(\beta_1\sqrt{\lambda_{21}}/2\right) + A_{14}C_{61}\exp\left(-\beta_1\sqrt{\lambda_{21}}/2\right)\right)/A_8$$

$$A_8 = 1 + \frac{B_7}{2} - \frac{B_6B_9}{4A_1} \qquad A_9 = -\omega + \frac{B_5\sqrt{\lambda_{11}}}{2B_2} - \frac{B_6A_2}{2A_1} \qquad A_{10} = -\omega - \frac{B_5\sqrt{\lambda_{11}}}{2B_2} - \frac{B_6A_3}{2A_1}$$

$$A_{11} = \sqrt{\lambda_{21}} - \frac{\xi^2}{\sqrt{\lambda_{21}}} - \frac{B_5\omega}{2B_2} - \frac{B_6A_4}{2A_1} \qquad A_{12} = -\sqrt{\lambda_{21}} + \frac{\xi^2}{\sqrt{\lambda_{21}}} - \frac{B_5\omega}{2B_2} - \frac{B_6A_5}{2A_1}$$

$$A_{13} = -\frac{\xi\omega}{\sqrt{\lambda_{21}}} + \frac{B_5\xi}{2B_2} - \frac{B_6A_6}{2A_1} \qquad A_{14} = \frac{\xi\omega}{\sqrt{\lambda_{21}}} + \frac{B_5\xi}{2B_2} - \frac{B_6A_7}{2A_1}$$

Отже, підставляючи (4.31) в (4.30), отримуємо:

$$\begin{aligned}\overline{U^*} = {} & \left(A_{15}C_{11}\exp\left(\beta_1\sqrt{\lambda_{11}}/2\right) + A_{16}C_{21}\exp\left(-\beta_1\sqrt{\lambda_{11}}/2\right)\right) + A_{17}C_{31}\exp\left(\beta_1\sqrt{\lambda_{21}}/2\right) + \\ & + A_{18}C_{41}\exp\left(-\beta_1\sqrt{\lambda_{21}}/2\right) + A_{19}C_{51}\exp\left(\beta_1\sqrt{\lambda_{21}}/2\right) + A_{20}C_{61}\exp\left(-\beta_1\sqrt{\lambda_{21}}/2\right)\end{aligned} \tag{4.32}$$

Тут $A_{j+13} = -\dfrac{B_9A_{j+7}}{2A_1A_8} + \dfrac{A_j}{A_1} \qquad j = 2\ldots7$

Задовольняючи граничним умовам (4.4) – (4.6), отримуємо:

$$\begin{aligned}& D_1C_{11}\exp\left(\beta_1\sqrt{\lambda_{11}}/2\right) + D_2C_{21}\exp\left(-\beta_1\sqrt{\lambda_{11}}/2\right) + D_3C_{31}\exp\left(\beta_1\sqrt{\lambda_{21}}/2\right) + \\ & + D_4C_{41}\exp\left(-\beta_1\sqrt{\lambda_{21}}/2\right) + D_5C_{51}\exp\left(\beta_1\sqrt{\lambda_{21}}/2\right) + D_6C_{61}\exp\left(-\beta_1\sqrt{\lambda_{21}}/2\right) = -\frac{\overline{F}}{G_1}\end{aligned} \tag{4.33}$$

де $D_1 = \dfrac{2}{1-2\nu_1}\cdot\left(\lambda_{11}(1-\nu_1) - \nu_1(\xi^2+\omega^2)\right) + B_{13}A_{15} + \dfrac{A_9B_{14}}{A_8} + \sqrt{\lambda_{11}}B_{15}$

$$D_2 = \frac{2}{1-2\nu_1}\cdot\left(\lambda_{11}(1-\nu_1) - \nu_1(\xi^2+\omega^2)\right) + B_{13}A_{16} + \frac{A_{10}B_{14}}{A_8} - \sqrt{\lambda_{11}}B_{15}$$

$$D_3 = 2\omega\sqrt{\lambda_{21}} - B_{13}A_{17} - \frac{A_{11}B_{14}}{A_8} + \omega B_{15} \qquad D_4 = -2\omega\sqrt{\lambda_{21}} - B_{13}A_{18} - \frac{A_{12}B_{14}}{A_8} + \omega B_{15}$$

$$D_5 = -2\xi\sqrt{\lambda_{21}} - B_{13}A_{19} - \frac{A_{13}B_{14}}{A_8} - \xi B_{15} \qquad D_6 = 2\xi\sqrt{\lambda_{21}} - B_{13}A_{20} - \frac{A_{14}B_{14}}{A_8} - \xi B_{15}$$

$$\begin{aligned}& D_7C_{11}\exp\left(\beta_1\sqrt{\lambda_{11}}/2\right) + D_8C_{21}\exp\left(-\beta_1\sqrt{\lambda_{11}}/2\right) + D_9C_{31}\exp\left(\beta_1\sqrt{\lambda_{21}}/2\right) + \\ & + D_{10}C_{41}\exp\left(-\beta_1\sqrt{\lambda_{21}}/2\right) + D_{11}C_{51}\exp\left(\beta_1\sqrt{\lambda_{21}}/2\right) + D_{12}C_{61}\exp\left(-\beta_1\sqrt{\lambda_{21}}/2\right) = 0\end{aligned} \tag{4.34}$$

де $D_7 = -2\xi\sqrt{\lambda_{11}} - B_{10}A_{15} - \frac{B_{11}A_9}{A_8}$ $D_{10} = 2\xi\omega - B_{10}A_{18} - \frac{B_{11}A_{12}}{A_8}$

$D_8 = 2\xi\sqrt{\lambda_{11}} - B_{10}A_{16} - \frac{B_{11}A_{10}}{A_8}$ $D_{11} = \omega^2 - \xi^2 - \lambda_{21} - B_{10}A_{19} - \frac{B_{11}A_{13}}{A_8}$

$D_9 = 2\xi\omega - B_{10}A_{17} - \frac{B_{11}A_{11}}{A_8}$ $D_{12} = \omega^2 - \xi^2 - \lambda_{21} - B_{10}A_{20} - \frac{B_{11}A_{14}}{A_8}$

$$D_{13}C_{11}\exp\left(\beta_1\sqrt{\lambda_{11}}/2\right) + D_{14}C_{21}\exp\left(-\beta_1\sqrt{\lambda_{11}}/2\right) + D_{15}C_{31}\exp\left(\beta_1\sqrt{\lambda_{21}}/2\right) + \\ + D_{16}C_{41}\exp\left(-\beta_1\sqrt{\lambda_{21}}/2\right) + D_{17}C_{51}\exp\left(\beta_1\sqrt{\lambda_{21}}/2\right) + D_{18}C_{61}\exp\left(-\beta_1\sqrt{\lambda_{21}}/2\right) = 0 \quad (4.35)$$

де $D_{13} = -2\omega\sqrt{\lambda_{11}} - B_{11}A_{15} - \frac{B_{12}A_9}{A_8}$ $D_{16} = \omega^2 - \xi^2 + \lambda_{21} - B_{11}A_{18} - \frac{B_{12}A_{12}}{A_8}$

$D_{14} = 2\omega\sqrt{\lambda_{11}} - B_{11}A_{16} - \frac{B_{12}A_{10}}{A_8}$ $D_{17} = -2\omega\xi - B_{11}A_{19} - \frac{B_{12}A_{13}}{A_8}$

$D_{15} = \omega^2 - \xi^2 + \lambda_{21} - B_{11}A_{17} - \frac{B_{12}A_{11}}{A_8}$ $D_{18} = -2\omega\xi - B_{11}A_{20} - \frac{B_{12}A_{14}}{A_8}$

Після введення наступної заміни змінних:

$$C^*_{jk} = C_{jk}\frac{G_1}{F}\exp\left(\sqrt{\lambda_{jk}}\beta_k/2\right), \quad j = 1,2; \qquad C^*_{jk} = C_{jk}i\frac{G_1}{F}\exp\left(\sqrt{\lambda_{jk}}\beta_k/2\right), \quad j = 3\ldots6 \quad (4.36)$$

рівняння (4.33) – (4.35), а також граничні умови (4.4) – (4.6) з урахуванням (4.31), (4.32) перетворюються на систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно C^*_{jk}, стовпець вільних членів якої B=[-1,0,0 ,…,0], а ненульові коефіцієнти мають вигляд:

$$a_{11} = D_1 \qquad a_{12} = D_2 \cdot \exp\left(-\beta_1\sqrt{\lambda_{11}}\right) \qquad a_{13} = D_3 \qquad a_{14} = D_4 \cdot \exp\left(-\beta_1\sqrt{\lambda_{21}}\right) \quad (4.37)$$

$$a_{15} = D_5 \qquad a_{16} = D_6 \cdot \exp\left(-\beta_1\sqrt{\lambda_{21}}\right) \qquad a_{21} = -D_7 \qquad a_{22} = -D_8 \cdot \exp\left(-\beta_1\sqrt{\lambda_{11}}\right)$$

$$a_{23} = D_9 \qquad a_{24} = D_{10} \cdot \exp\left(-\beta_1 \sqrt{\lambda_{21}}\right) \qquad a_{25} = D_{11} \qquad a_{26} = D_{12} \cdot \exp\left(-\beta_1 \sqrt{\lambda_{21}}\right)$$

$$a_{31} = -D_{13} \qquad a_{32} = -D_{14} \cdot \exp\left(-\beta_1 \sqrt{\lambda_{11}}\right) \qquad a_{33} = D_{15} \qquad a_{34} = D_{16} \cdot \exp\left(-\beta_1 \sqrt{\lambda_{21}}\right)$$

$$a_{35} = D_{17} \qquad a_{36} = D_{18} \cdot \exp\left(-\beta_1 \sqrt{\lambda_{21}}\right)$$

$$a_{41} = \frac{2}{1-2\nu_1} \cdot \left(\lambda_{11}(1-\nu_1) - \nu_1\left(\xi^2 + \omega^2\right)\right) \cdot \exp\left(-\beta_1 \sqrt{\lambda_{11}}\right)$$

$$a_{42} = \frac{2}{1-2\nu_1} \cdot \left(\lambda_{11}(1-\nu_1) - \nu_1\left(\xi^2 + \omega^2\right)\right) \qquad a_{43} = 2\omega\sqrt{\lambda_{21}} \cdot \exp\left(-\beta_1 \sqrt{\lambda_{21}}\right)$$

$$a_{44} = -2\omega\sqrt{\lambda_{21}} \qquad a_{45} = -2\xi\sqrt{\lambda_{21}} \cdot \exp\left(-\beta_1 \sqrt{\lambda_{21}}\right)$$

$$a_{46} = 2\xi\sqrt{\lambda_{21}} \qquad a_{47} = -\frac{2}{\gamma_1(1-2\nu_2)} \cdot \left(\lambda_{12}(1-\nu_2) - \nu_2\left(\xi^2 + \omega^2\right)\right)$$

$$a_{48} = -\frac{2}{\gamma_1(1-2\nu_2)} \cdot \left(\lambda_{12}(1-\nu_2) - \nu_2\left(\xi^2 + \omega^2\right)\right) \cdot \exp\left(-\beta_2 \sqrt{\lambda_{12}}\right)$$

$$a_{49} = -\frac{2\omega\sqrt{\lambda_{22}}}{\gamma_1} \qquad a_{410} = \frac{2\omega\sqrt{\lambda_{22}}}{\gamma_1} \cdot \exp\left(-\beta_2 \sqrt{\lambda_{22}}\right)$$

$$a_{411} = \frac{2\xi\sqrt{\lambda_{22}}}{\gamma_1} \qquad a_{412} = -\frac{2\xi\sqrt{\lambda_{22}}}{\gamma_1} \cdot \exp\left(-\beta_2 \sqrt{\lambda_{22}}\right)$$

$$a_{51} = 2\xi\sqrt{\lambda_{11}} \cdot \exp\left(-\beta_1 \sqrt{\lambda_{11}}\right) \qquad a_{52} = -2\xi\sqrt{\lambda_{11}}$$

$$a_{53} = 2\xi\omega \cdot \exp\left(-\beta_1 \sqrt{\lambda_{21}}\right) \qquad a_{54} = 2\xi\omega$$

$$a_{55} = -(\xi^2 - \omega^2 + \lambda_{21}) \cdot \exp\left(-\beta_1 \sqrt{\lambda_{21}}\right) \qquad a_{56} = -(\xi^2 - \omega^2 + \lambda_{21})$$

$$a_{57} = -2\xi\sqrt{\lambda_{12}} \qquad a_{58} = 2\xi\sqrt{\lambda_{12}} \cdot \exp\left(-\beta_2 \sqrt{\lambda_{12}}\right)$$

$$a_{59} = -2\xi\omega \qquad a_{510} = -2\xi\omega \cdot \exp\left(-\beta_2 \sqrt{\lambda_{22}}\right)$$

$$a_{511} = \xi^2 - \omega^2 + \lambda_{22} \qquad a_{512} = (\xi^2 - \omega^2 + \lambda_{22}) \cdot \exp\left(-\beta_2 \sqrt{\lambda_{22}}\right)$$

$$a_{61} = 2\omega\sqrt{\lambda_{11}} \cdot \exp\left(-\beta_1\sqrt{\lambda_{11}}\right) \qquad a_{62} = -2\omega\sqrt{\lambda_{11}}$$

$$a_{63} = (\omega^2 - \xi^2 + \lambda_{21}) \cdot \exp\left(-\beta_1\sqrt{\lambda_{21}}\right) \qquad a_{64} = \omega^2 - \xi^2 + \lambda_{21}$$

$$a_{65} = -2\omega\xi \cdot \exp\left(-\beta_1\sqrt{\lambda_{21}}\right) \qquad a_{66} = -2\omega\xi$$

$$a_{67} = -2\omega\sqrt{\lambda_{12}} \qquad a_{68} = 2\omega\sqrt{\lambda_{12}}\exp\left(-\beta_2\sqrt{\lambda_{12}}\right)$$

$$a_{69} = -(\omega^2 - \xi^2 + \lambda_{22}) \qquad a_{610} = -(\omega^2 - \xi^2 + \lambda_{22})\exp\left(-\beta_2\sqrt{\lambda_{22}}\right)$$

$$a_{611} = 2\omega\xi \qquad a_{612} = 2\omega\xi\exp\left(-\beta_2\sqrt{\lambda_{22}}\right)$$

$$a_{71} = \sqrt{\lambda_{11}}\exp\left(-\beta_1\sqrt{\lambda_{11}}\right) \qquad a_{72} = -\sqrt{\lambda_{11}}$$

$$a_{73} = \omega\exp\left(-\beta_1\sqrt{\lambda_{21}}\right) \qquad a_{74} = \omega$$

$$a_{75} = -\xi\exp\left(-\beta_1\sqrt{\lambda_{21}}\right) \qquad a_{76} = -\xi$$

$$a_{77} = -\sqrt{\lambda_{12}} \qquad a_{78} = \sqrt{\lambda_{12}}\exp\left(-\beta_2\sqrt{\lambda_{12}}\right)$$

$$a_{79} = -\omega \qquad a_{710} = -\omega\exp\left(-\beta_2\sqrt{\lambda_{22}}\right)$$

$$a_{711} = \xi \qquad a_{712} = \xi\exp\left(-\beta_2\sqrt{\lambda_{22}}\right)$$

$$a_{81} = \xi\exp\left(-\beta_1\sqrt{\lambda_{11}}\right) \qquad a_{82} = \xi$$

$$a_{83} = \frac{\omega\xi}{\sqrt{\lambda_{21}}}\exp\left(-\beta_1\sqrt{\lambda_{21}}\right) \qquad a_{84} = -\frac{\omega\xi}{\sqrt{\lambda_{21}}}$$

$$a_{85} = \left(\frac{\omega^2}{\sqrt{\lambda_{21}}} - \sqrt{\lambda_{21}}\right) \cdot \exp\left(-\beta_1\sqrt{\lambda_{21}}\right) \qquad a_{86} = -\frac{\omega^2}{\sqrt{\lambda_{21}}} + \sqrt{\lambda_{21}}$$

$$a_{87} = -\xi \qquad a_{88} = -\xi\exp\left(-\beta_2\sqrt{\lambda_{12}}\right)$$

$$a_{89} = -\frac{\omega\xi}{\sqrt{\lambda_{22}}} \qquad a_{810} = \frac{\omega\xi}{\sqrt{\lambda_{22}}}\exp\left(-\beta_2\sqrt{\lambda_{22}}\right)$$

$$a_{811} = -\left(\frac{\omega^2}{\sqrt{\lambda_{22}}} - \sqrt{\lambda_{22}}\right) \qquad a_{812} = \left(\frac{\omega^2}{\sqrt{\lambda_{22}}} - \sqrt{\lambda_{22}}\right)\cdot\exp\left(-\beta_2\sqrt{\lambda_{22}}\right)$$

$$a_{91} = \omega\exp\left(-\beta_1\sqrt{\lambda_{11}}\right) \qquad a_{92} = \omega$$

$$a_{93} = \left(\sqrt{\lambda_{21}} - \frac{\xi^2}{\sqrt{\lambda_{21}}}\right)\exp\left(-\beta_1\sqrt{\lambda_{21}}\right) \qquad a_{94} = -\left(\sqrt{\lambda_{21}} - \frac{\xi^2}{\sqrt{\lambda_{21}}}\right)$$

$$a_{95} = -\frac{\xi\omega}{\sqrt{\lambda_{21}}}\exp\left(-\beta_1\sqrt{\lambda_{21}}\right) \qquad a_{96} = \frac{\xi\omega}{\sqrt{\lambda_{21}}}$$

$$a_{97} = -\omega \qquad a_{98} = -\omega\exp\left(-\beta_2\sqrt{\lambda_{12}}\right)$$

$$a_{99} = -\left(\sqrt{\lambda_{22}} - \frac{\xi^2}{\sqrt{\lambda_{22}}}\right) \qquad a_{910} = \left(\sqrt{\lambda_{22}} - \frac{\xi^2}{\sqrt{\lambda_{22}}}\right)\exp\left(-\beta_2\sqrt{\lambda_{22}}\right)$$

$$a_{911} = \frac{\xi\omega}{\sqrt{\lambda_{22}}} \qquad a_{912} = -\frac{\xi\omega}{\sqrt{\lambda_{22}}}\exp\left(-\beta_2\sqrt{\lambda_{22}}\right)$$

$$a_{107} = -\frac{2}{\gamma_1(1-2\nu_2)}\cdot\left(\lambda_{12}(1-\nu_2) - \nu_2\left(\xi^2+\omega^2\right)\right)\cdot\exp\left(-\beta_2\sqrt{\lambda_{12}}\right)$$

$$a_{108} = -\frac{2}{\gamma_1(1-2\nu_2)}\cdot\left(\lambda_{12}(1-\nu_2) - \nu_2\left(\xi^2+\omega^2\right)\right)$$

$$a_{109} = -\frac{2\omega\sqrt{\lambda_{22}}}{\gamma_1}\cdot\exp\left(-\beta_2\sqrt{\lambda_{22}}\right) \qquad a_{1010} = \frac{2\omega\sqrt{\lambda_{22}}}{\gamma_1}$$

$$a_{1011} = \frac{2\xi\sqrt{\lambda_{22}}}{\gamma_1}\cdot\exp\left(-\beta_2\sqrt{\lambda_{22}}\right) \qquad a_{1012} = -\frac{2\xi\sqrt{\lambda_{22}}}{\gamma_1}$$

$$a_{1013} = \frac{2}{1-2\nu_1}\cdot\left(\lambda_{11}(1-\nu_1) - \nu_1\left(\xi^2+\omega^2\right)\right)$$

$$a_{1014} = \frac{2}{1-2\nu_1}\cdot\left(\lambda_{11}(1-\nu_1) - \nu_1\left(\xi^2+\omega^2\right)\right)\cdot\exp\left(-\beta_1\sqrt{\lambda_{11}}\right)$$

$$a_{1015} = 2\omega\sqrt{\lambda_{21}} \qquad a_{1016} = -2\omega\sqrt{\lambda_{21}}\cdot\exp\left(-\beta_1\sqrt{\lambda_{21}}\right)$$

$$a_{1017} = -2\xi\sqrt{\lambda_{21}} \qquad a_{1018} = 2\xi\sqrt{\lambda_{21}} \cdot \exp\left(-\beta_1\sqrt{\lambda_{21}}\right)$$

$$a_{117} = -2\xi\sqrt{\lambda_{12}} \cdot \exp\left(-\beta_2\sqrt{\lambda_{12}}\right) \qquad a_{118} = 2\xi\sqrt{\lambda_{12}}$$

$$a_{119} = -2\xi\omega \cdot \exp\left(-\beta_2\sqrt{\lambda_{22}}\right) \qquad a_{1110} = -2\xi\omega$$

$$a_{1111} = (\xi^2 - \omega^2 + \lambda_{22}) \cdot \exp\left(-\beta_2\sqrt{\lambda_{22}}\right) \qquad a_{1112} = \xi^2 - \omega^2 + \lambda_{22}$$

$$a_{1113} = 2\xi\sqrt{\lambda_{11}} \qquad a_{1114} = -2\xi\sqrt{\lambda_{11}} \cdot \exp\left(-\beta_1\sqrt{\lambda_{11}}\right)$$

$$a_{1115} = 2\xi\omega \qquad a_{1116} = 2\xi\omega \cdot \exp\left(-\beta_1\sqrt{\lambda_{21}}\right)$$

$$a_{1117} = -(\xi^2 - \omega^2 + \lambda_{21}) \qquad a_{1118} = -(\xi^2 - \omega^2 + \lambda_{21}) \cdot \exp\left(-\beta_1\sqrt{\lambda_{21}}\right)$$

$$a_{127} = -2\omega\sqrt{\lambda_{12}} \cdot \exp\left(-\beta_2\sqrt{\lambda_{12}}\right) \qquad a_{128} = 2\omega\sqrt{\lambda_{12}}$$

$$a_{129} = -(\omega^2 - \xi^2 + \lambda_{22}) \cdot \exp\left(-\beta_2\sqrt{\lambda_{22}}\right) \qquad a_{1210} = -(\omega^2 - \xi^2 + \lambda_{22})$$

$$a_{1211} = 2\omega\xi \cdot \exp\left(-\beta_2\sqrt{\lambda_{22}}\right) \qquad a_{1212} = 2\omega\xi$$

$$a_{1213} = 2\omega\sqrt{\lambda_{11}} \qquad a_{1214} = -2\omega\sqrt{\lambda_{11}} \cdot \exp\left(-\beta_1\sqrt{\lambda_{11}}\right)$$

$$a_{1215} = \omega^2 - \xi^2 + \lambda_{21} \qquad a_{1216} = (\omega^2 - \xi^2 + \lambda_{21}) \cdot \exp\left(-\beta_1\sqrt{\lambda_{21}}\right)$$

$$a_{1217} = -2\omega\xi \qquad a_{1218} = -2\omega\xi \cdot \exp\left(-\beta_1\sqrt{\lambda_{21}}\right)$$

$$a_{137} = -\sqrt{\lambda_{12}} \cdot \exp\left(-\beta_2\sqrt{\lambda_{12}}\right) \qquad a_{138} = \sqrt{\lambda_{12}}$$

$$a_{139} = -\omega \cdot \exp\left(-\beta_2\sqrt{\lambda_{22}}\right) \qquad a_{1310} = -\omega$$

$$a_{1311} = \xi \cdot \exp\left(-\beta_2\sqrt{\lambda_{22}}\right) \qquad a_{1312} = \xi$$

$$a_{1313} = \sqrt{\lambda_{11}} \qquad a_{1314} = -\sqrt{\lambda_{11}} \cdot \exp\left(-\beta_1\sqrt{\lambda_{11}}\right)$$

$$a_{1315} = \omega \qquad a_{1316} = \omega \cdot \exp\left(-\beta_1\sqrt{\lambda_{21}}\right)$$

$$a_{1317} = -\xi \qquad a_{1318} = -\xi \cdot \exp\left(-\beta_1\sqrt{\lambda_{21}}\right)$$

$$a_{147} = -\xi \cdot \exp\left(-\beta_2 \sqrt{\lambda_{12}}\right) \qquad a_{148} = -\xi$$

$$a_{149} = -\frac{\omega\xi}{\sqrt{\lambda_{22}}} \cdot \exp\left(-\beta_2 \sqrt{\lambda_{22}}\right) \qquad a_{1410} = \frac{\omega\xi}{\sqrt{\lambda_{22}}}$$

$$a_{1411} = -\left(\frac{\omega^2}{\sqrt{\lambda_{22}}} - \sqrt{\lambda_{22}}\right) \cdot \exp\left(-\beta_2 \sqrt{\lambda_{22}}\right) \qquad a_{1412} = \left(\frac{\omega^2}{\sqrt{\lambda_{22}}} - \sqrt{\lambda_{22}}\right)$$

$$a_{1413} = \xi \qquad a_{1414} = \xi \cdot \exp\left(-\beta_1 \sqrt{\lambda_{11}}\right)$$

$$a_{1415} = \frac{\omega\xi}{\sqrt{\lambda_{21}}} \qquad a_{1416} = -\frac{\omega\xi}{\sqrt{\lambda_{21}}} \cdot \exp\left(-\beta_1 \sqrt{\lambda_{21}}\right)$$

$$a_{1417} = \left(\frac{\omega^2}{\sqrt{\lambda_{21}}} - \sqrt{\lambda_{21}}\right) \qquad a_{1418} = \left(-\frac{\omega^2}{\sqrt{\lambda_{21}}} + \sqrt{\lambda_{21}}\right) \cdot \exp\left(-\beta_1 \sqrt{\lambda_{21}}\right)$$

$$a_{157} = -\omega \cdot \exp\left(-\beta_2 \sqrt{\lambda_{12}}\right) \qquad a_{158} = -\omega$$

$$a_{159} = -\left(\sqrt{\lambda_{22}} - \frac{\xi^2}{\sqrt{\lambda_{22}}}\right) \cdot \exp\left(-\beta_2 \sqrt{\lambda_{22}}\right) \qquad a_{1510} = \left(\sqrt{\lambda_{22}} - \frac{\xi^2}{\sqrt{\lambda_{22}}}\right)$$

$$a_{1511} = \frac{\xi\omega}{\sqrt{\lambda_{22}}} \cdot \exp\left(-\beta_2 \sqrt{\lambda_{22}}\right) \qquad a_{1512} = -\frac{\xi\omega}{\sqrt{\lambda_{22}}}$$

$$a_{1513} = \omega \qquad a_{1514} = \omega \cdot \exp\left(-\beta_1 \sqrt{\lambda_{11}}\right)$$

$$a_{1515} = \left(\sqrt{\lambda_{21}} - \frac{\xi^2}{\sqrt{\lambda_{21}}}\right) \qquad a_{1516} = -\left(\sqrt{\lambda_{21}} - \frac{\xi^2}{\sqrt{\lambda_{21}}}\right) \cdot \exp\left(-\beta_1 \sqrt{\lambda_{21}}\right)$$

$$a_{1517} = -\frac{\xi\omega}{\sqrt{\lambda_{21}}} \qquad a_{1516} = \frac{\xi\omega}{\sqrt{\lambda_{21}}} \cdot \exp\left(-\beta_1 \sqrt{\lambda_{21}}\right)$$

$$a_{1613} = \sqrt{\lambda_{11}} \exp\left(-\beta_1 \sqrt{\lambda_{11}}\right) \qquad a_{1614} = -\sqrt{\lambda_{11}}$$

$$a_{1615} = \omega \exp\left(-\beta_1 \sqrt{\lambda_{21}}\right) \qquad a_{1616} = \omega$$

$$a_{1617} = -\xi \exp\left(-\beta_1 \sqrt{\lambda_{21}}\right) \qquad a_{1618} = -\xi$$

$$a_{1713} = \xi \exp\left(-\beta_1 \sqrt{\lambda_{11}}\right) \qquad a_{1714} = \xi$$

$$a_{1715} = \frac{\omega\xi}{\sqrt{\lambda_{21}}} \exp\left(-\beta_1 \sqrt{\lambda_{21}}\right) \qquad a_{1716} = \frac{\omega\xi}{\sqrt{\lambda_{21}}}$$

$$a_{1717} = \left(\frac{\omega^2}{\sqrt{\lambda_{21}}} - \sqrt{\lambda_{21}}\right) \exp\left(-\beta_1 \sqrt{\lambda_{21}}\right) \qquad a_{1718} = -\left(\frac{\omega^2}{\sqrt{\lambda_{21}}} - \sqrt{\lambda_{21}}\right)$$

$$a_{1813} = \varpi \exp\left(-\beta_1 \sqrt{\lambda_{11}}\right) \qquad a_{1814} = \omega$$

$$a_{1815} = -\left(\frac{\xi^2}{\sqrt{\lambda_{21}}} - \sqrt{\lambda_{21}}\right) \exp\left(-\beta_1 \sqrt{\lambda_{21}}\right) \qquad a_{1816} = \frac{\xi^2}{\sqrt{\lambda_{21}}} - \sqrt{\lambda_{21}}$$

$$a_{1817} = -\frac{\omega\xi}{\sqrt{\lambda_{21}}} \exp\left(-\beta_1 \sqrt{\lambda_{21}}\right) \qquad a_{1818} = \frac{\omega\xi}{\sqrt{\lambda_{21}}}$$

Вирішуємо цю систему методом Гауса та визначаємо чисельні значення невідомих коефіцієнтів. Компоненти нормального переміщення та напруги шукаються за формулами:

$$\overline{U^*_{zk}} = T_{1k} \frac{\overline{F}}{G_1} \qquad \frac{\overline{\sigma^*_{zk}}}{G_k} = T_{2k} \frac{\overline{F}}{G_1} \tag{4.38}$$

$$T_{1k} = \sqrt{\lambda_{1k}} \left(C^*_{1k} \exp\left(z^*_k \sqrt{\lambda_{1k}}\right) - C^*_{2k} \exp\left(-z^*_k \sqrt{\lambda_{1k}}\right)\right) + \omega \cdot \left(C^*_{3k} \exp\left(z^*_k \sqrt{\lambda_{2k}}\right) + C^*_{4k} \exp\left(-z^*_k \sqrt{\lambda_{2k}}\right)\right) -$$
$$- \xi \cdot \left(C^*_{5k} \exp\left(z^*_k \sqrt{\lambda_{2k}}\right) + C^*_{6k} \exp\left(-z^*_k \sqrt{\lambda_{2k}}\right)\right)$$
$$T_{2k} = \frac{2}{1-2\nu_k} \cdot \left(\lambda_{1k}(1-\nu_k) - \nu_k(\xi^2 + \omega^2)\right) \cdot \left(C^*_{1k} \exp\left(z^*_k \sqrt{\lambda_{1k}}\right) + C^*_{2k} \exp\left(-z^*_k \sqrt{\lambda_{1k}}\right)\right) +$$
$$+ 2\omega\sqrt{\lambda_{2k}} \left(C^*_{3k} \exp\left(z^*_k \sqrt{\lambda_{2k}}\right) - C^*_{4k} \exp\left(-z^*_k \sqrt{\lambda_{2k}}\right)\right) - 2\xi\sqrt{\lambda_{2k}} \left(C^*_{5k} \exp\left(z^*_k \sqrt{\lambda_{2k}}\right) - C^*_{6k} \exp\left(-z^*_k \sqrt{\lambda_{2k}}\right)\right)$$

Аналогічним чином знаходяться решта компонент напружено-деформованого стану конструкції, наприклад, дотичні напруження знаходяться так

$$\frac{\overline{\sigma^{*}_{xzk}}}{G_k} = T_{3k}\,\frac{\overline{F}}{G_1} \tag{4.39}$$

$$T_{3k} = 2\xi\sqrt{\lambda_{1k}}\left(C^{*}_{1k}\exp\left(z^{*}_{k}\sqrt{\lambda_{1k}}\right) - C^{*}_{2k}\exp\left(-z^{*}_{k}\sqrt{\lambda_{1k}}\right)\right) + 2\xi\omega\left(C^{*}_{3k}\exp\left(z^{*}_{k}\sqrt{\lambda_{2k}}\right) + C^{*}_{4k}\exp\left(-z^{*}_{k}\sqrt{\lambda_{2k}}\right)\right) - (\xi^2 - \omega^2 + \lambda_{2k})\cdot\left(C^{*}_{5k}\exp\left(z^{*}_{k}\sqrt{\lambda_{2k}}\right) + C^{*}_{6k}\exp\left(-z^{*}_{k}\sqrt{\lambda_{2k}}\right)\right)$$

Як приклад, було розглянуто нормальне навантаження, рівномірно розподілене вздовж відрізку довжиною 2r за координатою x та зосереджене у точці за координатою y, яке описується формулою:

$$\begin{aligned} &F_{\delta}(x,t) = F_0 h(x) H(t) \\ &h(x) = \begin{cases} 1, & c \le x \le c + 2r \\ 0, & 0 \le x < c \cup c + 2r < x \le a \end{cases} \end{aligned} \tag{4.40}$$

де $H(t)$ – функція Хевісайда.

Після переходу до безрозмірних змінних та застосування вищезазначених перетворень у просторі зображень функція навантаження буде мати вигляд

$$F^{L}_{\delta n}(p) = F_0\, f_k(p) \tag{4.41}$$

де $f_n(p) = \dfrac{1}{n\pi p}\cdot\left[\cos\left(\dfrac{n\pi}{\delta}\cdot c^{*}\right) - \cos\left(\dfrac{n\pi}{\delta}\cdot\left(2r^{*} + c^{*}\right)\right)\right], \quad r^{*} = r/h, \quad c^{*} = c/h$

Остаточний розв’язок задачі зводиться до підсумовування подвійних рядів Фур'є та звернення перетворення Лапласа. Запропоновано спеціальний чисельний алгоритм, що ґрунтується на залученні зміщених багаточленів

Лежандра. Оригінали шуканих величин за часом обчислюються за формулами [24]:

$$g(t)=\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)a_k P_k^*\left(e^{-t}\right), \tag{4.42}$$

$$a_k=\sum_{i=0}^{\infty}a_i^{(k)}G(i+1), \qquad a_i^{(k)}=(-1)^{k+i}\binom{k}{i}\cdot\frac{(k+i)!}{k!i!}\ . \tag{4.43}$$

$G(i+1)$ – зображення шуканої величини $g(t)$ за Лапласом, яке виходить після дворазового підсумовування рядів, $P_k^*(e^{-t})$ – зміщений багаточлен Лежандра.

Для отримання переміщень і напруг необхідно у формулах виду (4.42) і (4.43) замість $G(i+1)$ підставити відповідні зображення формул виду (4.38), (4.39). Кількість доданків у рядах Фур'є за кожною з двох просторових змінних, а також число членів у рядах (4.42) визначалися шляхом чисельних експериментів так, щоб забезпечувалася за всіма величинами відносна точність в 3 %.

4.3 **Чисельні результати**

Розрахунки було проведено для випадку одноармованого (рис. 4.2 – 4.10) та двоармованого (рис. 4.11 – 4.19) композиту. На рис. 4.2 – 4.4 зображено розподілення компонент напружено-деформованого стану у точці прикладання навантаження на межі розподілу пластини і композиту. Розглядалися різні швидкості руху навантаження, крива 1 відповідає c^* = 0.2, 2 – c^* = 0.5, 3 – c^* = 0.8. При цьому приймалися такі безрозмірні параметри: $\rho^*=1.5,\ \gamma=5,\ \rho_1=\gamma_1=0.2,\ \beta_1=10,\ \beta_2=2,\ a^*=0.5,\ \nu=\nu_1=\nu_2=0.3.$ Рис. 4.5 – 4.7 зображують розподіл компонент за просторовою координатою x у різні моменти часу, крива 1 відповідає τ^* = 0.25, 2 – τ^* = 1, 3 – τ^* = 4, при цьому швидкість $c^*=0.2.$

На рис.4.11 – 4.16 подано результати чисельних розрахунків напружено-деформованого стану двоармованої конструкції. Рис.4.11 – 4.13 ілюструють зміни переміщення та напруги для різних значень відносної жорсткості пластини, крива 1 – для $\rho^* = \gamma$ = 3, 2 – $\rho^* = \gamma$ = 5, 3 – $\rho^* = \gamma$ = 10, $\beta_1 = 3,\ \beta_2 = 1.5,\ c^* = 0.2$. Графіки зміни компонентів напруги та нормального переміщення за просторовою координатою Ox для різних моментів часу наведено на рис. 4.14 – 4.16 (γ = 3). Крива 1 відповідає τ^*= 0.5, 2 – τ^*= 1, 3 – τ^*= 4.

Для перевірки достовірності отриманих результатів було проведено порівняння з аналогічною конструкцією необмежених у плані розмірів для великих значень змінної часу. Через необмеженість даної конструкції і те, що швидкість руху навантаження постійна, досліджується стаціонарний режим, у якому картина деформування незмінна щодо спостерігача, що рухається разом із навантаженням. У такій постановці завдання отримані рішення є інваріантними щодо часу у рухомий системі координат, а швидкість руху входить у рішення як параметр. З фізичної точки зору, стаціонарна задача є наближеною постановкою для нестаціонарної з початковими умовами за більших значень часу. При вирішенні даної задачі зручно скористатися перетворенням Галілея $\eta = (x - ct)/h$, внаслідок чого виключається незалежна змінна - час t і задача розглядається в рухомій системі координат.

З огляду на необмеженість конструкції замість розкладання усіх заданих і шуканих функцій у подвійні ряди Фур’є необхідно застосувати метод комплексного перетворення Фур'є за просторовими змінними за формулою

$$\overline{f}(\xi, \omega, z^*) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta, y^*, z^*) e^{-i(\xi\eta + \omega y^*)} d\eta dy^* \qquad (4.44)$$

Подальший розв’язок співпадає з наведеним вище з точністю до коефіцієнтів. Повернення до простору оригіналів при знаходженні чисельних

результатів після підстановки виразу для навантаження відбувається за формулами виду

$$U_{zk}^{*} = \frac{4F_0}{G_1\pi^2}\int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty}\frac{T_{1k}\sin(\xi a^{*})}{\xi}\cos(\xi\eta)d\xi\right)\cdot\frac{\sin(\omega a^{*})}{\omega}\cdot\cos(\omega y^{*})d\omega \qquad (4.45)$$

$$\frac{\sigma_{zk}^{*}}{G_k} = \frac{4F_0}{G_1\pi^2}\int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty}\frac{T_{2k}\sin(\xi a^{*})}{\xi}\cos(\xi\eta)d\xi\right)\cdot\frac{\sin(\omega a^{*})}{\omega}\cdot\cos(\omega y^{*})d\omega$$

У якості прикладу наведено вирази для нормального переміщення та напруги. Невласні інтеграли були обчислені чисельно із застосуванням методу Файлона для сильно осцилюючих функцій.

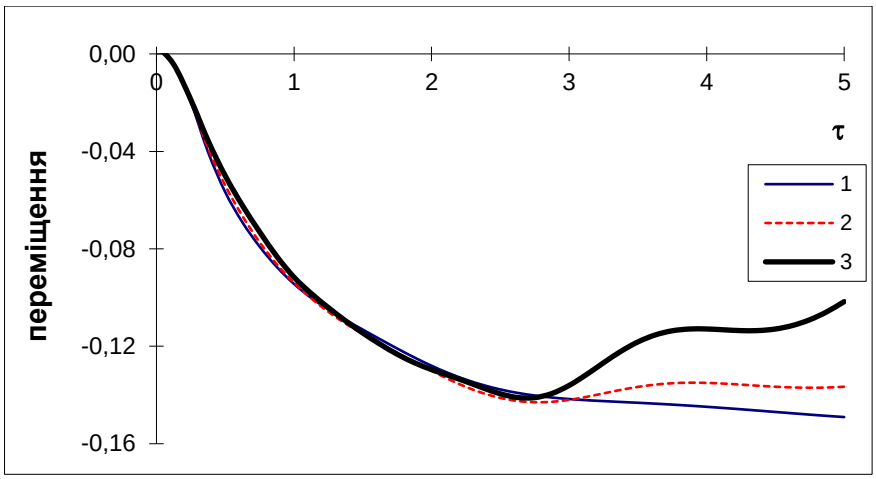


Рисунок 4.2 - Зміна переміщення за часом залежно від швидкості руху навантаження

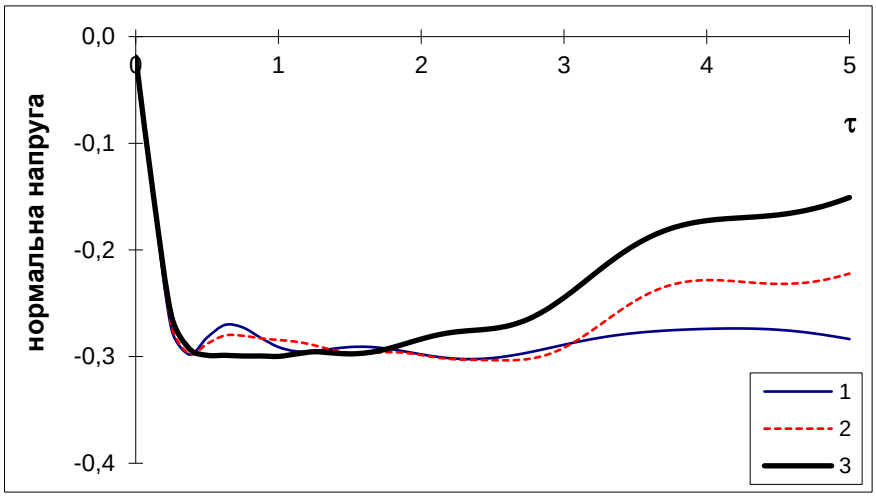


Рисунок 4.3 - Зміна нормальної напруги за часом залежно від швидкості руху навантаження

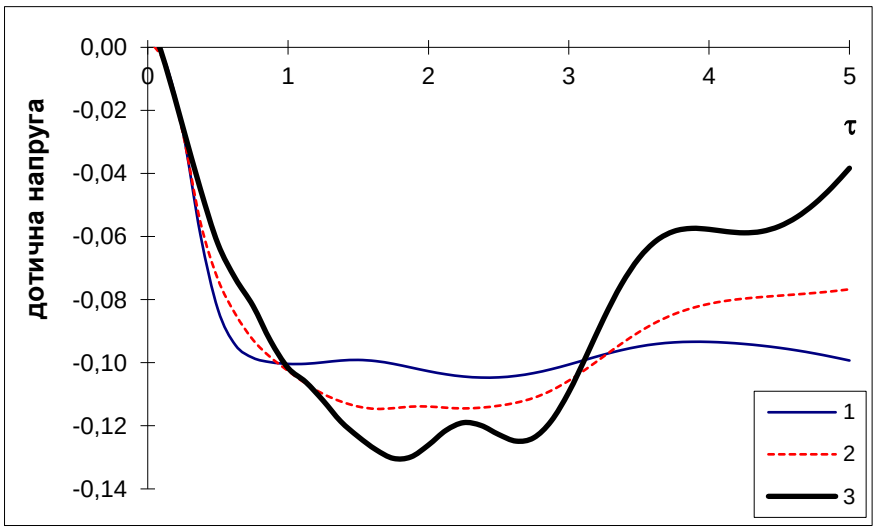


Рисунок 4.4 - Зміна дотичної напруги за часом залежно від швидкості руху навантаження

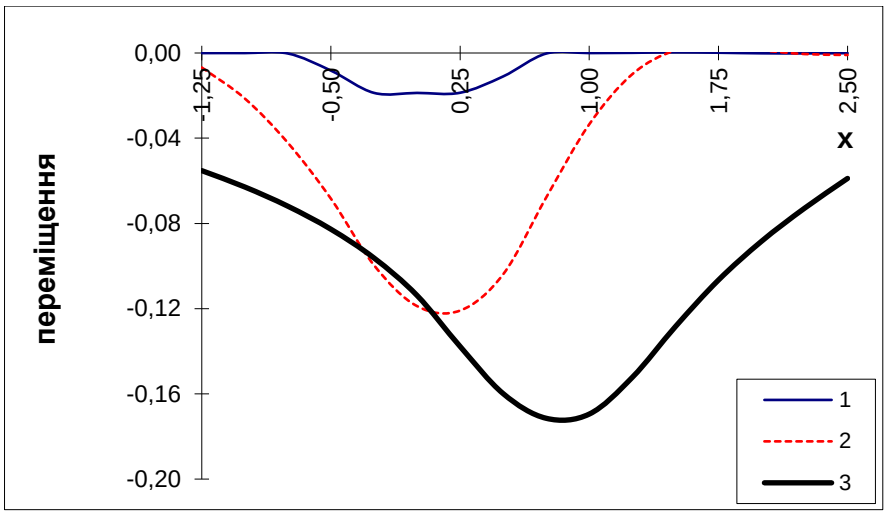


Рисунок 4.5 - Розподіл переміщення по x в одноармованому композиті

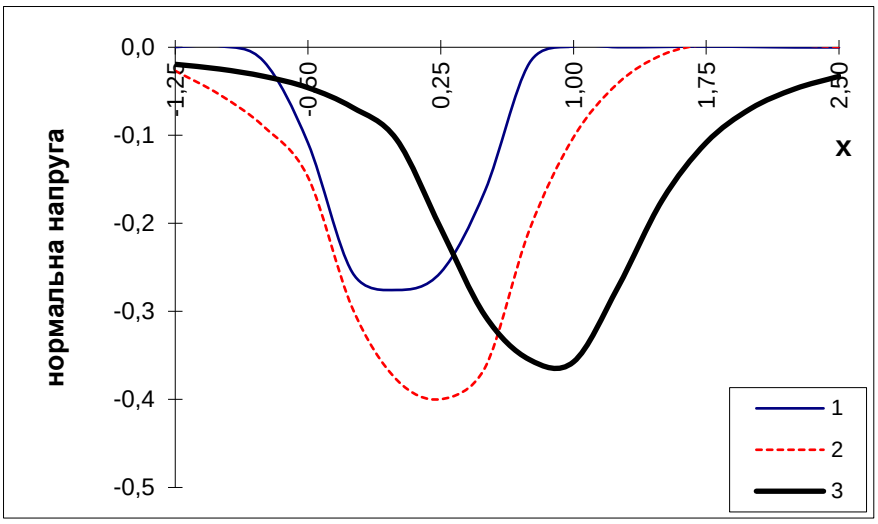


Рисунок 4.6 - Розподіл нормальної напруги по x в одноармованому композиті

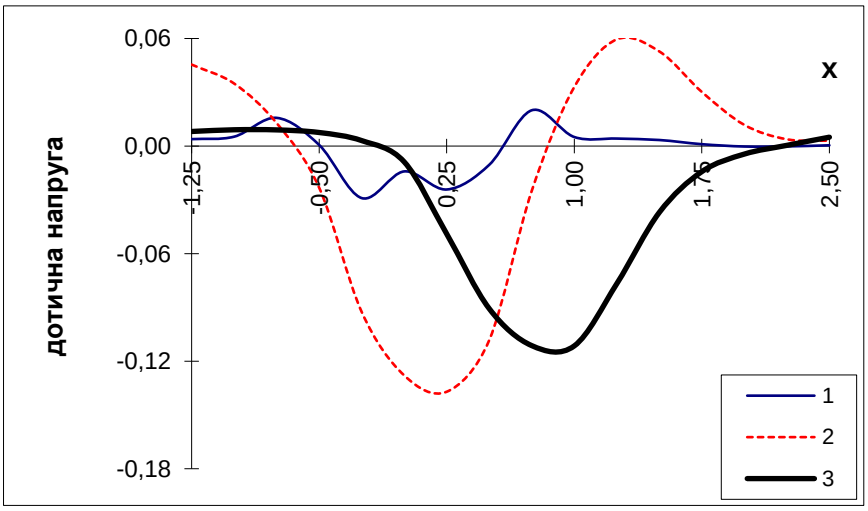


Рисунок 4.7 - Розподіл дотичної напруги по x в одноармованому композиті

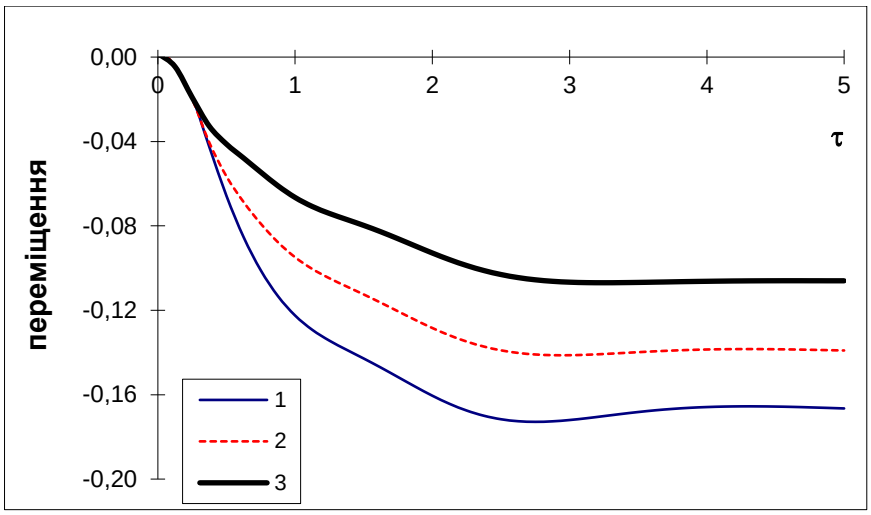


Рисунок 4.8 - Зміна переміщення за часом у двоармованій конструкції

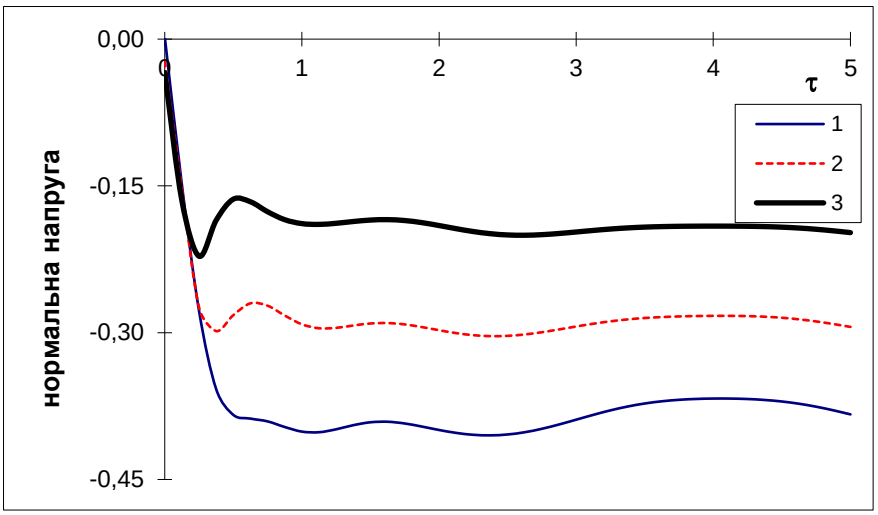


Рисунок 4.9 - Зміна нормальної напруги за часом у двоармованій конструкції

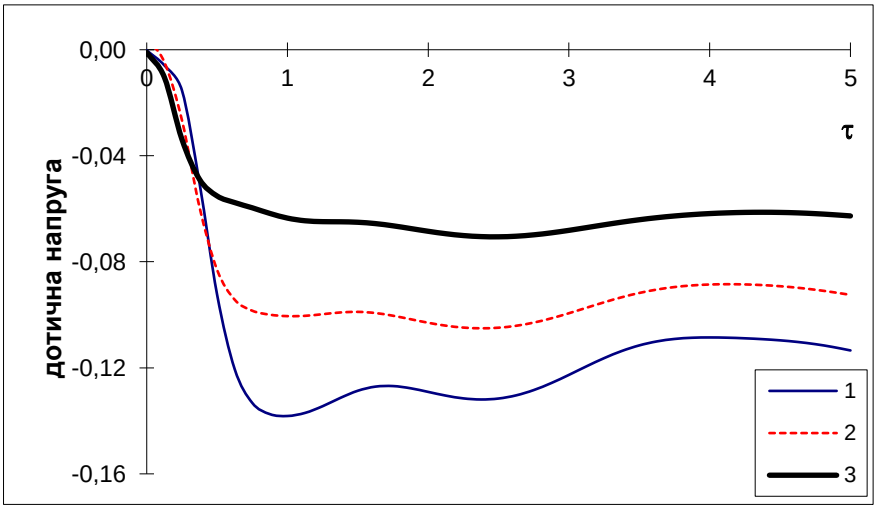


Рисунок 4.10 - Зміна дотичної напруги за часом у двоармованій конструкції

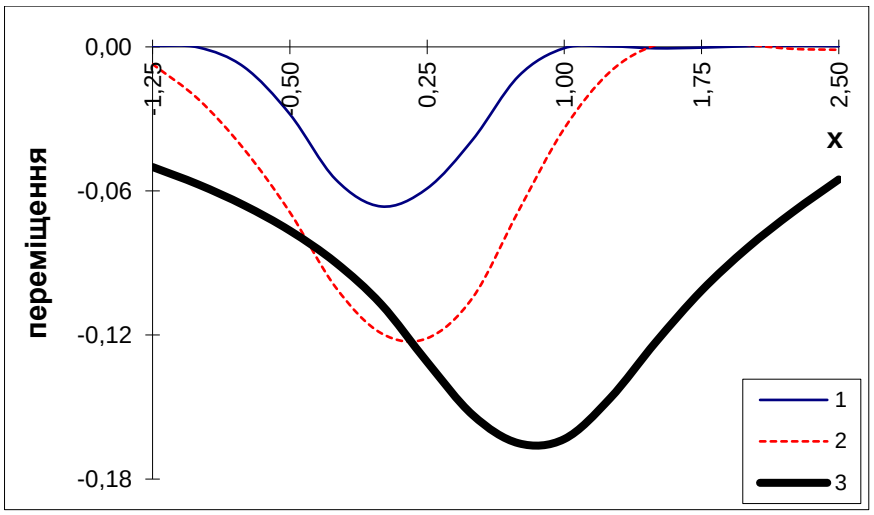


Рисунок 4.11 - Розподіл переміщення по x у двоармованому композиті

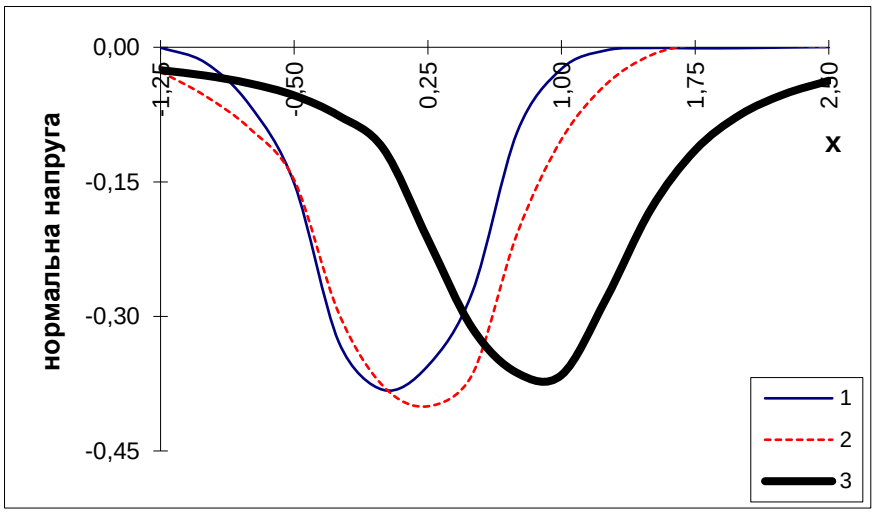


Рисунок 4.12 - Розподіл нормальної напруги по x у двоармованому композиті

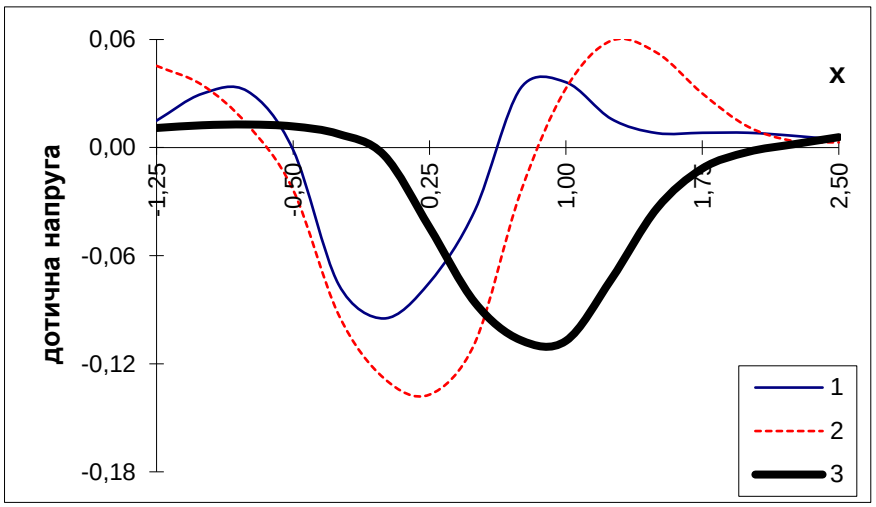


Рисунок 4.13 - Розподіл дотичної напруги по x у двоармованому композиті

5 РОЗРОБКА ЗАХОДІВ З ОХОРОНИ ПРАЦІ І ТЕХНІКИ БЕЗПЕКИ ПРИ ВИКОНАННІ РОБІТ

5.1 Аналіз шкідливих та небезпечних факторів

Забезпечення чистоти повітря – це ключовий аспект створення здорового та продуктивного робочого середовища. Повітря в лабораторії залишається чистим під час технологічного процесу, оскільки не відбувається викидів шкідливих речовин.

Роботи, що потребують спеціальних навичок, такі як зварювання та фарбування, виконуються кваліфікованими працівниками поза навчальним процесом.

Згідно з нормами, рівень шкідливих речовин у повітрі цих приміщень відповідає 4-й групі, тобто є незначним.

Умови праці в лабораторії можна охарактеризувати як помірні за фізичним навантаженням, але з підвищеною температурою навколишнього середовища.

Присутність імітатора сонячного світла є додатковим джерелом теплової енергії в лабораторії (інфрачервоне джерело теплоти).

Рівень теплового навантаження на людину визначається суб'єктивними відчуттями, тобто тим, наскільки сильно вона відчуває тепло. Дослідження показали, що людина здатна витримувати тривале опромінювання потужністю до 350 Вт/м2 без значних негативних наслідків. Це верхня межа комфортного теплового опромінення. Якщо рівень тепла перевищує це значення, то для забезпечення безпечних умов праці потрібно організувати додаткове охолодження повітря (див. табл).

Таблиця 5.1 – Залежність стану людини від часу випромінювання та його інтенсивності

Інтенсивність опромінення, Вт/м^2	Тривалість опромінення, с	Вплив
230-350	невизначено довго	Слабий
350-1050	180-300	Помірний
1050-1600	40-60	Середній
2000-2800	18-24	Сильний
3500	2-5	дуже високе

Система вентиляції лабораторії базується на природних процесах: свіже повітря надходить у приміщення самостійно, без використання механічних пристроїв.

Освітлення в приміщенні відповідає санітарним нормам, що забезпечує безпеку праці. Крім того, відсутність шкідливих вібрацій свідчить про дотримання вимог безпеки.

Рівень запиленості, вологості та концентрація шкідливих речовин у лабораторії знаходяться в межах допустимих норм, що свідчить про безпечні умови праці.

Для запобігання пожежі в приміщенні встановлено вогнегасник. Будівля побудована з матеріалів, які забезпечують перший ступінь вогнестійкості, що означає здатність чинити опір вогню протягом певного часу.

5.2 Заходи з усунення шкідливих та небезпечних факторів

З метою зниження ризиків для здоров’я та безпеки працівників впроваджують два види заходів: організаційні, які спрямовані на оптимізацію робочих процесів та підвищення обізнаності працівників, та інженерні, які передбачають застосування технічних рішень для усунення небезпечних факторів на виробництві.

Щоб уникнути небезпечних ситуацій необхідно суворо дотримуватися технологічних процесів і правил безпеки, а також постійно підвищувати кваліфікацію працівників та студентів.

Для безпечної роботи всі учасники процесу повинні бути ознайомлені з інструкціями з експлуатації обладнання та регулярно проходити навчання з питань охорони праці.

Студент може приступити до роботи тільки після того, як пройде два етапи інструктажу з техніки безпеки: вступний (проводить викладач) та на робочому місці. Проходження цих інструктажів має бути підтверджено відповідним записом.

5.3 Пожежна безпека в лабораторії

Забезпечення пожежної безпеки в навчальній лабораторії є одним з найважливіших завдань. Для цього необхідно здійснювати комплекс заходів, спрямованих на попередження пожежі та забезпечення швидкого реагування на випадок її виникнення.

Поняття пожежної профілактики охоплює широкий спектр заходів, спрямованих на запобігання виникненню пожежі, а також на зменшення її негативного впливу у випадку виникнення.

Активний пожежний захист – це комплекс заходів, які застосовуються безпосередньо під час пожежі для її локалізації та гасіння, а також для забезпечення безпечної евакуації людей. Щоб визначити необхідний рівень

активного пожежного захисту, слід провести оцінку пожежної небезпеки будівлі, яка дозволить встановити її категорію і, відповідно, ймовірність виникнення пожежі.

Лабораторне приміщення виконане з негорючих матеріалів (категорія Д), що знижує ризик розповсюдження вогню. Однак, основною потенційною причиною пожежі в лабораторії є коротке замикання в електричній мережі, яке може призвести до займання обладнання або інших горючих матеріалів, що знаходяться в приміщенні.

Головними горючими матеріалами в даній установці є ізоляційні матеріали, такі як ізолон та пластмаса. Це суттєво впливає на ступінь вогнестійкості споруди, яка відноситься до найнижчої категорії (ступінь 1).

Було розроблено детальний план заходів, спрямованих на запобігання пожежам та дії у разі їх виникнення. Кожен студент ознайомлюється з правилами пожежної безпеки та відпрацьовує свої дії у разі виникнення надзвичайної ситуації.

Для забезпечення пожежної безпеки в лабораторії встановлено як первинні, так і основні засоби пожежогасіння. Зважаючи на специфіку лабораторного обладнання, для гасіння пожежі в даному приміщенні застосовують вогнегасники, які не проводять електричний струм.

Порошкові вогнегасники є основним засобом ліквідації пожеж на нашому об'єкті. Для забезпечення пожежної безпеки в лабораторії ми використовуємо універсальний порошковий вогнегасник ОП-02, який ефективний при гасінні більшості видів пожеж, за винятком горіння речовин, що не потребують повітря для підтримки горіння, та придатний для гасіння електроустановок з напругою до 1 кВ.

Однією з важливих умов забезпечення пожежної безпеки є наявність автоматичних засобів виявлення пожежі, які дозволяють оперативно отримати інформацію про місце та час виникнення загоряння. Нажаль, аудиторія не обладнана системами, що автоматично сповіщають про виникнення пожежі.

5.4 Дослідження ефективності та якості освітлення

Раціональне освітлення є невід'ємною частиною створення комфортного та безпечного робочого середовища.

Умовна схема освітлення лабораторії зображена на рис. 3.1.

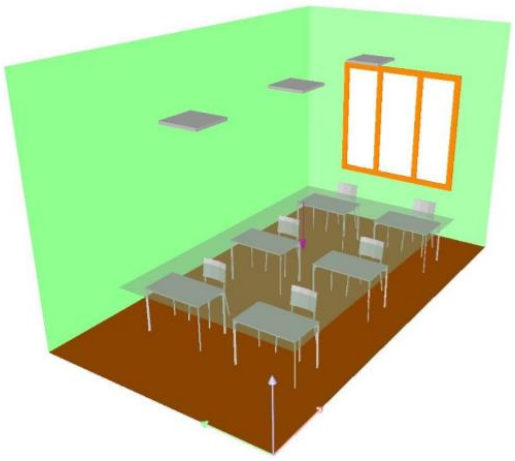


Рисунок 5.1 - Схема освітлення лабораторії

Згідно з ДБН В.2.5-28-2006, середній рівень освітленості на робочих поверхнях, розташованих на висоті 80 сантиметрів від підлоги, в навчальних лабораторіях має бути не нижче 400 люксів.

Для вирішення завдання створення комфортного світлового середовища в навчальній аудиторії проведено комп’ютерне моделювання, щоб оцінити ефективність використання різних типів світлодіодних світильників. При цьому головна увага була зосереджена на плоских моделях розміром 600х600 мм з молочним розсіювачем.

За допомогою комп’ютерної програми DIALux була створена віртуальна модель аудиторії та проаналізовано різні варіанти освітлення. Як основне джерело світла було обрано плоский панельний офісний світильник моделі ДПО 03LL-40-01, виготовлений українською компанією Ledlab

спільно з її партнерами з Південної Азії. Цей світильник обладнаний сучасними світлодіодами, що забезпечують високу ефективність освітлення.

Цей світильник можна віднести до категорії "бюджетних" (див. табл. 5.2). Його якість відповідає середньому рівню для виробів такого типу.

Таблиця 5.2 — Типи світильників з розподілом за класами

Класи	Характеристики	Вигляд
Клас 1 (бюджетний)	Р = 20...40 Вт Ф = 2500...3400 Вт Т = 25000...35000 годин Ціна...1200 грн	
Клас 2 (стандарт)	Р = 30...45Вт Ф = 3000...5000 Вт Т = 30000...40000 годин Ціна...2000 грн	
Клас 3 (преміум)	Р = 30...60 Вт Ф = 3000...7000 Вт Т = 35000...50000 годин Ціна...2000 грн	

Для аудиторії було розроблено 4 варіанти освітлення за допомогою світильників ДПО 03ll-40-01.

Відповідно до першого варіанту, в аудиторії висотою 4 метри встановлюється три світильники на підвісах довжиною 0,6 метра. Робоча поверхня розташована на висоті 0,8 метра від підлоги, а відстань від світильників до неї становить 2,6 метра.

Відповідно до другого варіанту, в аудиторії встановлюється на один світильник більше, ніж у першому варіанті, при цьому геометрія розміщення світильників залишається незмінною.

Третій варіант передбачає монтаж трьох світильників на відстані 10-20 см від стелі, що обумовлено необхідністю забезпечення достатнього простору для встановлення драйверів. Відстань від світильників до робочої поверхні становить 3 метри.

Відповідно до четвертого варіанту, кількість світильників збільшується до чотирьох, при цьому зберігаються всі параметри їхнього розташування, які були визначені для третього варіанту.

В таблиці 5.3 представлено порівняльний аналіз результатів світлотехнічних розрахунків для чотирьох варіантів освітлення аудиторії.

Таблиця 5. 3 — Основні результати світлотехнічного розрахунку

Варіант розрахунку	Освітленість		
	$E_{ср}$, лк	E_{min}, лк	E_{max}, лк
1 (n= 3 шт; H = 2,6 ; l = 2,3 м)	336	238	430
2 (n= 4 шт; H = 2,6 ; l = 1,75м)	445	307	533
3 (n= 3 шт; H = 3,0 ; l = 2,3 м)	308	240	354
4 (n= 4 шт; H = 3,0 ; l = 1,75м)	406	320	466

Висновки та пропозиції:

1. Використання чотирьох накладних світлодіодних світильників моделі ДПО 03LL-40-01 дозволить досягти відповідності світлового середовища приміщення встановленим нормам.

2. Для забезпечення достатнього рівня освітленості в аудиторії можна застосувати три плоскі світлодіодні панелі. Оптимальним буде зниження висоти їх підвісу на 10-15% та зменшення кроку між світильниками на таку ж величину. Крім того, відстань від центра крайнього світильника до вікна слід збільшити до 2,3-2,5 метрів.

3. Розрахунки показують, що перехід від старого проектного рішення освітлення на лампах розжарювання до нового варіанту з 4 світлодіодними світильниками ДПО 03LL-40-01 дозволить зменшити витрати на електроенергію на 85%.

$$E_1 = \frac{800\text{Вт} - 120\text{Вт}}{800\text{Вт}} \cdot 100 = 85$$

Тип освітлення залежить від джерела світла і може бути природним (сонячне світло), штучним (світло від ламп) або комбінованим (поєднання природного і штучного світла).

Для оцінки зорової роботи необхідно враховувати такі параметри, як розмір найменшого об’єкта, який людина може розрізнити, різниця між цим об’єктом і фоном, а також властивості фону.

Фактична освітленість робочих поверхонь у приміщенні залежить від таких факторів, як відбивна здатність стін, стелі та інших поверхонь, відстані від джерела світла до робочої поверхні, а також стану поверхні світильника. Значна частина світлового потоку, що випромінюється джерелом світла, втрачається внаслідок поглинання або розсіювання.

ВИСНОВКИ

1) Проведено аналіз наукових досліджень математичного моделювання поведінки композитних матеріалів під дією навантажень та нестаціонарної деформації армованих пластин скінченої товщини. Проаналізовано різні математичні підходи для опису руху кожного шару композиту та інтегральні перетворення для знаходження розв'язку систем диференціальних рівнянь.

2) Побудована математична модель динамічної поведінки армованої складеної конструкції скінчених розмірів під дією рухомого навантаження. Особлива увага приділена дослідженню напружено-деформованого стану конструкції у моменти часу безпосередньо після початку навантаження.

3) Шляхом застосування комплексних інтегральних перетворень та переходу у простір зображень знайдено чисельно-аналітичні розв'язки та побудовані картини зміни компонент переміщення і напруження за часом.

4) Розроблено та реалізовано алгоритм сумісного обернення перетворень Фур'є та Лапласа та обернення перетворення Лапласа та підсумовування рядів Фур'є.

5) Проведені чисельні експерименти для доведення адекватності моделі шляхом порівняння зі стаціонарним розв'язком та конструкцією нескінчених розмірів. Також знайдено величини коефіцієнта перенавантаження та час встановлення процесу для різних відносних фізичних та механічних параметрів складеної конструкції.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1 Ахенбах Дж.Д. Коливання та хвилі у спрямовано армованих композитах. Композиційні матеріали. К.: Кругозір. 2008. 400 с.

2 Головчан В.Т. Оцінка точності алгоритму послідовного обліку фаз з прикладу пористих волокнистих композитів регулярної структури. // Прикл. механ. 2007. 33. №8. С.57-63.

3 Григоренко О.Я., Лоза І.А. Неосесиметричні хвилі в шаруватих порожнистих циліндрах з п'єзокерамічними радіально поляризованими шарами // Прикладна механіка. 2013. Т. 49 № 6. С. 17-25.13

4 Гузь О.М., Коханенко Ю.В., Хоботов В.М. Визначення напруженого стану у шаруватій анізотропній багатоопорній плиті // Прикл. механ. 2019. 25. №4. С.64-68.

5 Гузь О.М. Механіка руйнування композитних матеріалів під час стиснення. Київ: Наук. думка. 2010. 628 с.

6 ДСТУ Б В.2.7-ХХ:202Х. Арматура композитна для армування бетонних конструкцій. Загальні технічні умови. [Проект. Перша редакція] Київ: ДП «УкрНДНЦ», 202Х. 42 с.

7 ДСТУ-Н Б В.2.6-185:2012 Настанова з проектування та виготовлення бетонних конструкцій з неметалевою композитною арматурою на основі базальто- і склоровінгу [Чинний від 2013-04-01] ДП "Укрархбудінформ", 2012. 28 с.

8 ДСТУ 9065: 2021 Арматура композитна для армування бетонних конструкцій. Загальні технічні умови [Чинний від 2021-01-28] ДП "УкрНДНЦ", 2021. 22 с.

9 Клименко Ф.Є., Шевчук С.Г., Білозір В.В., Шмиг Р.А. Теоретичні засади моделювання напружено-деформованого стану сталебетонних плит, армованих зовнішніми хвилястими листами // Львівський державний аграрний університет. 2007. 138 с.

10 Коханенко Ю.В. Чисельне дослідження крайових ефектів у шаруватих композитах при одновісному навантаженні // Прикл. механ. 2015. 46. № 12. С. 105-114.

11 Крусь Ю. Зв’язок між напруженнями і деформаціями бетону за різних силових режимів короткочасного осьового стиску // Технічні науки та технології. Будівництво та геодезія. 2022. № 1(27). С.54-68.

12 Марчук О.В. Тривимірне аналітичне рішення для шаруватих плит з урахуванням прослизання шарів // Прикл. механ. 2007. 33. №9. -С.10-14.

13 Овчінніков І.І., Овчінніков І.Г., Ільченко К.Д., Міхалдикін Є.С. Моделювання поведінки пластинчастих конструкцій з армованого бетону з неметалевою арматурою // Прикл. механ. 2019. 27. № 3. С. 72-84.

14 Ольшанський В.П. Аналітичні методи розрахунку локально навантажених тонких оболонок. Х.: ХНТУСГ, НТУ "ХПІ", 2009. 366 с.

15 Пожуєв А.В., Пожуєв В.І., Жибігай М., Міхайлуца О.М. Два підходи до аналізу нестаціонарного процесу в системі циліндрична оболонка – пружне середовище. // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. 2022, вип. 36. С. 95-104.

16 Фасоляк А.В., Пожуєв В.І., Пожуєв А.В. Математичні моделі та методи розрахунку нестаціонарної динаміки циліндричних оболонок у тривимірному пружному середовищі. Монографія, Кругозор, Запоріжжя, 2019. 151 с.

17 Хорошун Л.П. Про математичну модель неоднорідного деформування композитів // Прикл. механ. 2016. 32. №5. С.22-29.

18 Шульга Н.А. Основи механіки шаруватих середовищ періодичної структури. Київ: Наукова думка. 2011. 198 с.

19 Belyaev V., Bryndin L. Modelling and Simulation of Deformation and Failure of Reinforced Concrete Beams under Four-Point Bending // Journal of University Mathematics & Physics. 2021. 14(6). PP. 679-689.

20 Bogdanovich A.E. Nonlinear problems of dynamics of cylindrical composite shells. Riga: Zinatne. 2007. 295 p.

21 Guz, A.N., Altenbach, H., Bogdanov, V., Nazarenko, V.M. (eds)). Advances in Mechanics: Current Research Results of the NAS of Ukraine. Advanced Structured Materials, Springer Cham. vol. 191. 2023. 560 p.

22 Kazimierowicz-Frankowska K., Kulczykowski M. Deformation of model reinforced soil structures: Comparison of theoretical and experimental results // Geotextiles and Geomembranes. 2021. Vol. 49, I. 5. PP. 1176-1191.

23 Novhorodchenko A., Shnal T., Yakovchuk R. & Tur N. The Study of the Behavior of Reinforced Concrete Structures of Modular Shelter in Conditions of Explosion // Proceedings of CEE. 2023. PP. 286-294.

24 Pozhuev V.I., Fasoliak. A.V. Application of the bipolar coordinate system to modeling of the cylindrical shell dynamic in elastic medium with free surface // International Journal of Mechanical Engineering and Information Technology. 2018. V.6. 6. PP. 1820-1825.

25 Romashko-Maistruk O., Romashko V. Model of concrete deformation under the action of dynamic loads // Procedia Structural Integrity. 2024. Vol. 59. PP. 352-359.

26 Zhou D., Mei Y., Ke X., Liu Z., Xu W. Study on the structural behavior and reinforcement design of openings in subway station floor slabs // Journal of Building Engineering. 2024. Vol. 98. PP. 245-256.