Міністерство освіти і науки України
Запорізький національний університет

І. В. Зіновєєв, Н. І.-В. Манько, І. Г. Ткаченко

ПРАКТИКУМ ІЗ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ В ПРОФІЛЬНІЙ ШКОЛІ

Методичні рекомендації до лабораторних занять
для здобувачів ступеня вищої освіти магістра
спеціальності «Середня освіта» освітньо-професійної програми
«Середня освіта (Математика)»

Затверджено
вченою радою ЗНУ
Протокол № 12 від 01.07.2025

Запоріжжя
2025

УДК 51(076.5)+373.5.016:51
З-634

Зіновєєв І. В., Манько Н. І.-В., Ткаченко І. Г. Практикум із розв’язування задач підвищеної складності в профільній школі: методичні рекомендації до лабораторних занять для здобувачів ступеня вищої освіти магістра спеціальності «Середня освіта» освітньо-професійної програми «Середня освіта (Математика)». Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2025. 77 с.

Методичний посібник «Практикум з розв’язування задач підвищеної складності в профільній школі» призначений для студентів спеціальності Середня освіта (Математика), а також учителів математики, які прагнуть підвищити фахову компетентність у розв’язуванні та методичному аналізі задач підвищеного рівня складності.

Посібник охоплює систему лабораторних занять, що реалізують лінії «Функції» та «Рівняння й нерівності» шкільного курсу алгебри та початків аналізу. Матеріал структуровано відповідно до чинної шкільної програми з математики для профільного рівня та спрямований на поглиблення знань і вдосконалення методичних умінь майбутніх учителів.

У першій частині розглядаються ключові теми алгебраїчного змісту: множини та функції, степеневі, тригонометричні, показникові та логарифмічні функції, а також ірраціональні, тригонометричні, показникові й логарифмічні рівняння та нерівності. До кожного розділу подано приклади розв’язування типових завдань, методичні коментарі, а також завдання для самостійного опрацювання, що сприяють розвитку дослідницьких та аналітичних навичок студентів.

Практикум має прикладний і методичний характер: він допомагає студентам не лише поглибити розуміння математичних закономірностей, а й навчитися добирати ефективні способи пояснення матеріалу учням профільної школи, аналізувати типові помилки, організовувати диференційоване навчання.

Посібник може бути використаний у навчальному процесі як доповнення до вивчення дисциплін «Методика навчання математики в профільній школі», «Курс математики в профільній школі», «Підготовка до олімпіад, конкурсів і наукової роботи з математики в профільній школі », а також у процесі підготовки до педагогічної практики та при написанні кваліфікаційної роботи магістра.

Рецензент
С. М. Гребенюк, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри фундаментальної та прикладної математики

Відповідальний за випуск
І. В. Зіновєєв, кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри загальної математики

ЗМІСТ

Вступ 5
Лабораторне заняття 1. Лінія функцій в профільній школі: Множини та функції. Степенева функція. 6
1.1 Множини та функції: Приклади розв'язків типових завдань. 6
1.1.1 Функція та її властивості. 6
1.1.2 Побудова графіків функцій за допомогою геометричних перетворень. 9
1.1.3 Обернена функція. 10
1.1.4 Метод інтервалів. 11
1.2 Степенева функція. Приклади розв'язків типових завдань. 13
1.2.1 Степенева функція з натуральним показником. 13
1.2.2 Корінь n-го степеня. Функція $y = \sqrt[n]{x}$. Властивості кореня n-го степеня.. 14
Завдання до лабораторної роботи 1 16
Лабораторне заняття 2 Лінія функцій в профільній школі: Тригонометричні функції. Обернені тригонометричні функції. 17
2.1 Тригонометричні функції. Властивості та графіки. 17
2.1.1 Періодичність функцій. 17
2.1.2 Властивості та графіки основних тригонометричних функцій $y = sinx$, $y = cosx$, $y = tgx$, $y = ctgx$. 18
2.1.3 Властивості та графіки основних тригонометричних функцій $y = arcsinx$, $y = arccosx$, $y = arctgx$, $y = arcctgx$. 21
2.2 Основні співвідношення між тригонометричними функціями одного й того самого аргументу. 22
Завдання до лабораторної роботи 2 26
Лабораторне заняття 3 Лінія функцій в профільній школі: Показникова та логарифмічна функції 27
Завдання до лабораторної роботи 3 35
Лабораторне заняття 4 Лінія рівнянь та нерівностей в профільній школі: ірраціональні рівняння та нерівності. 36
4.1 Ірраціональні рівняння та системи рівнянь 36
4.1.1 Ірраціональні рівняння. 36
Різні прийоми розв'язування ірраціональних рівнянь та систем ірраціональних рівнянь. 41
4.1.3 Ірраціональні нерівності. 42
Завдання до лабораторної роботи 4 48
Лабораторне заняття 5 Лінія рівнянь та нерівностей в профільній школі: тригонометричні рівняння та нерівності.. 50
5.1 Тригонометричні рівняння. 50

5.2 Системи тригонометричних рівнянь. 57
5.3 Тригонометричні нерівності. 60
Завдання до лабораторної роботи 5 64
Лабораторне заняття 6 Лінія рівнянь та нерівностей в профільній школі: показникові та логарифмічні рівняння та їх системи. 65
6.1 Показникові рівняння та їх системи. 65
6.2 Логарифмічні рівняння та їх системи. 69
Завдання до лабораторної роботи 6 74
Список рекомендованої літератури 75

ВСТУП

Освітній компонент (ОК) «Практикум із розв'язування задач підвищеної складності в профільній школі» є обов’язковою дисципліною підготовки здобувачів ступеня вищої освіти магістра спеціальності «Середня освіта» освітньо-професійної програми «Середня освіта (Математика)».

Метою викладання ОК «Практикум із розв’язування задач підвищеної складності в профільній школі» є фахова методична підготовка майбутнього вчителя математики відповідно до потреб сучасної освіти, формування його методичної культури, вдосконалення рівня володіння студентами досягненнями в області теорії і практики навчання математики, підготовка студентів до реалізації завдань, визначених законом України «Про повну загальну середню освіту», Державним стандартом профільної середньої освіти, що відображає вимоги до математичної освітньої галузі та інших галузей, що формують математичні компетентності .

Основними ***завданнями*** вивчення дисципліни «Практикум із розв’язування задач підвищеної складності в профільній школі» є: сформувати у майбутнього вчителя математики знання, вміння і навички, необхідні для творчого навчання шкільного курсу математики, раціонального добору методів, форм і засобів навчання математики; ознайомити зі змістом сучасної математичної освіти профільного рівня у школах і задачами підвищеної складності, що пропонуються методичними та навчальними посібниками, підручниками та збірниками задач; ознайомити з основними методами розв’язання основних типів задач підвищеної складності, розвинути здатність і відчуття необхідності до постійної самоосвіти і самовдосконалення.

Знання, отримані при вивченні ОК «Практикум із розв'язування задач підвищеної складності в профільній школі», мають широке практичне застосування в різних сферах, а саме: в освітній діяльності (фахове та компетентне навчання математики у старшій школі, зокрема за профільним рівнем, підготовка учнів до олімпіад, конкурсів та НМТ/ЗНО, створення збірників задач, методичних посібників з математики, керівництво гуртками та позакласною роботою з математики); у науковій та дослідницькій роботі (аналітичне мислення для розв'язання складних дослідницьких завдань, математичне моделювання в різних галузях знань, консультування з методики розв'язування задач різних типів нестандартних задач математики); у сфері ІТ (алгоритмічне мислення, пошук більш ефективних, оптимальних рішень, застосування математичних методів до аналізу даних); в економічній сфері (застосування аналітичного підходу при розв'язанні бізнес-задач, задач керування економічними проєктами); особистому розвитку (критичне мислення в повсякденному житті, систематизація знань та ефективність діяльності, зокрема навчання, розвиток логіки та здатності до абстрактного мислення).

Лабораторне заняття 1. Лінія функцій в профільній школі: Множини та функції. Степенева функція.

1.1 Множини та функції: Приклади розв'язків типових завдань.

1.1.1 Функція та її властивості.

1.1 (2.16¨, див. [5]) Знайдіть $\max\limits_{M} f(x)$ і $\min\limits_{M} f(x)$, якщо:

$$1)\ f(x) = x^2 - 6x + 10,\ M = R;\ 2)\ f(x) = \sqrt{16 - x^2},\ M = D(f).$$

Розв'язання:

1) Дано квадратичну функцію $f(x) = x^2 - 6x + 10$. Виділимо в ній повний квадрат за змінною x. Отримаємо $f(x) = (x-3)^2 + 1$. Графіком цієї функції є парабола з гілками вгору. Тому максимального значення на множині дійсних чисел функція $f(x)$ не має, а мінімальне досягатиметься в вершині при $x = 3$. Таким чином, $\min\limits_{M} f(x) = f(3) = 1$.

Відповідь: максимального значення на $M = R$ функція $f(x)$ не має; $\min\limits_{M} f(x) = 1$.

2) Визначимо множину M – область визначення функції $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$:

$$16 - x^2 \geq 0;\ \ (4-x)(4+x) \geq 0.$$

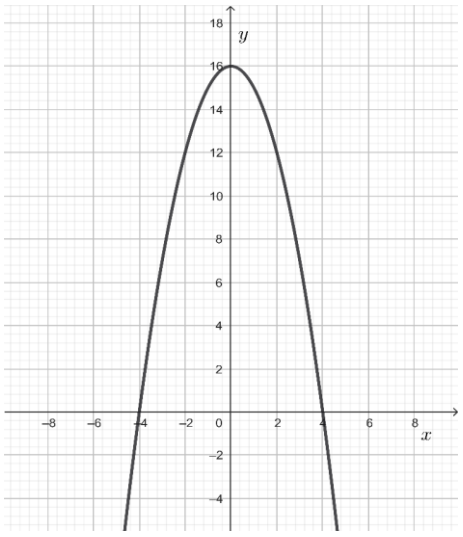


Рисунок 1.1 – Ілюстрація до задачі 1.1

Згідно з наведеним графіком функції $y(x) = 16 - x^2$ нерівність $(4-x)(4+x) \geq 0$ виконується при $x \in [-4; 4]$, що і визначає $D(f)$. Тоді

очевидно, що $\min\limits_{M} f(x) = f(-4) = f(4) = \sqrt{16-16} = 0$; $\max\limits_{M} f(x) = f(0) = \sqrt{16-0} = 4$.

Відповідь: $\max\limits_{M} f(x) = 4$; $\min\limits_{M} f(x) = 0$.

1.2 (2.22˙˙, див. [5]) Функція $f(x)$ є парною, $\min\limits_{[1;3]} f(x) = 2$ і $\max\limits_{[1;3]} f(x) = 5$. Знайдіть $\min\limits_{[-3;-1]} f(x)$ і $\max\limits_{[-3;-1]} f(x)$.

Розв'язання:

Так як функція є парною, то вона має однакові відповідні максимальні і мінімальні значення на симетричних відносно початку координат проміжках. Тому $\min\limits_{[1;3]} f(x) = \min\limits_{[-3;-1]} f(x) = 2$, $\max\limits_{[1;3]} f(x) = \max\limits_{[-3;-1]} f(x) = 5$.

Відповідь: $\min\limits_{[-3;-1]} f(x) = 2$, $\max\limits_{[-3;-1]} f(x) = 5$.

1.3 (2.24(3)˙˙, див. [5]) Знайдіть область значень функції $y = \frac{x}{x^2-1}$.

Розв'язання:

Нехай a – довільний елемент області значень функції, тобто $a \in E(y)$. Тоді задача зводиться до знаходження всіх значень параметра a, при яких рівняння $\frac{x}{x^2-1} = a$ має розв'язки.

Це рівняння рівносильне такому: $ax^2 - x - a = 0$. Очевидно, що $x = 1$, $x = -1$ не є його коренями при жодному значенні параметра. Тобто область допустимих значень функції $y = \frac{x}{x^2-1}$, а саме $x \neq 1$, $x \neq -1$, виконується.

Якщо $a = 0$, то отримане рівняння має корінь $x = 0$. Отже, число 0 входить в область значень функції.

Якщо $a \neq 0$, то це рівняння є квадратним і наявність коренів визначається умовою $D \geq 0$:

$$(-1)^2 - 4 \cdot a \cdot (-a) \geq 0,$$

$$1 + 4a^2 \geq 0.$$

Остання умова виконується для будь-якого дійсного значення параметра a. Тому $E(y) = R$.

Для ілюстрації отриманого факта наведемо графік функції $y = \frac{x}{x^2-1}$:

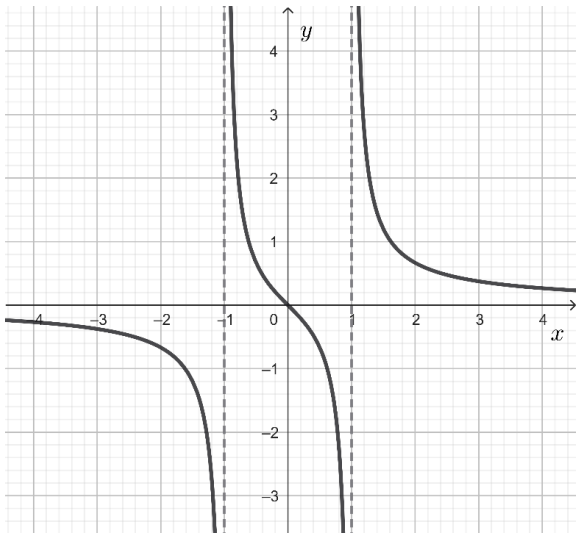


Рисунок 1.2 – Ілюстрація до задачі 1.3

Відповідь: $E(y) = R$.

1.4 (2.26(1)⁚, див. [5]) Знайдіть $\max\limits_{R}(|x-1|+|x-3|)$.

Розв'язання:

Розглянемо функцію $y = |x-1|+|x-3|$. Її можна представити у вигляді кусочної за формулою $y = \begin{cases} -2x+4, & x < 1; \\ 2, & 1 \le x \le 3; \\ 2x-4, & x > 3. \end{cases}$

Побудуємо графік цієї функції:

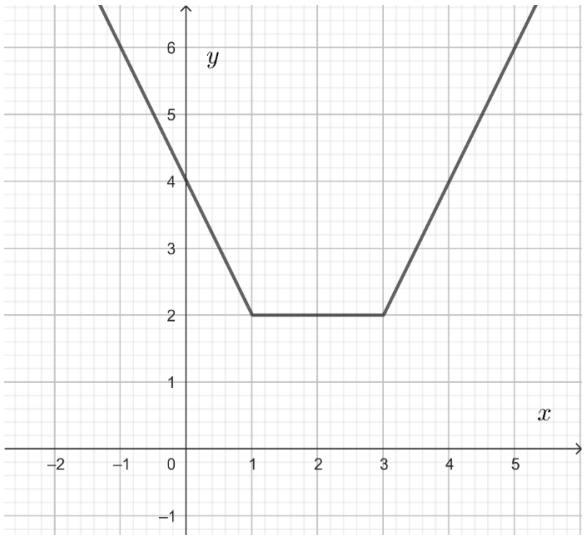


Рисунок 1.3 – Ілюстрація до задачі 1.4

Очевидно, що максимуму дана функція не має.
Тому $\max\limits_{R}(|x-1|+|x-3|)$ не існує.

Відповідь: $\max\limits_{R}(|x-1|+|x-3|)$ не існує.

1.1.2 Побудова графіків функцій за допомогою геометричних перетворень.

1.5 (3.15¨, див. [5]) При яких значеннях параметра a рівняння $\big||x-1|-1\big| = x - a$ має безліч коренів?

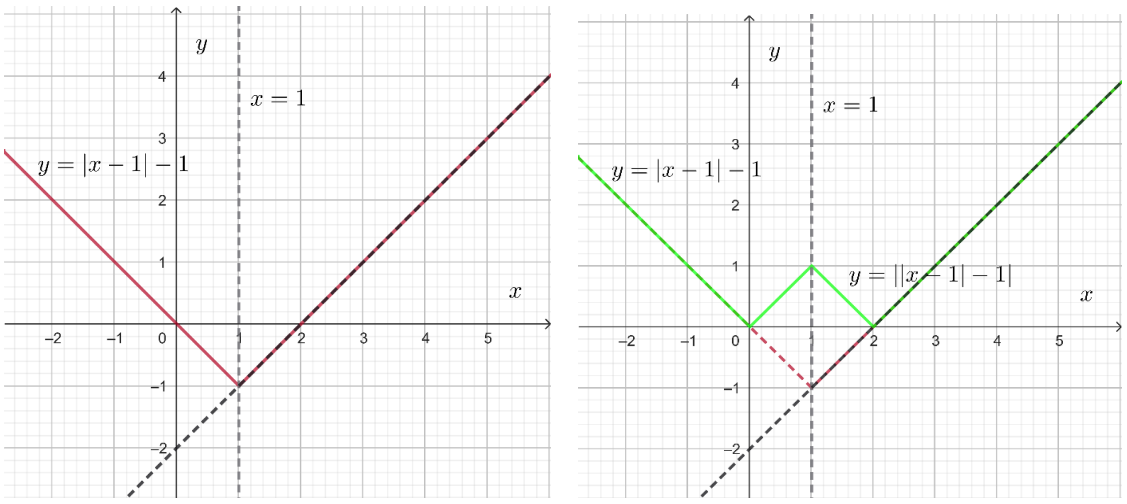
Розв'язання:

Переформулюємо задачу. При яких значеннях параметра a графіки функцій $y = \big||x-1|-1\big|$ і $y = x - a$ мають нескінченну кількість спільних точок?

Побудуємо графік функції $y = \big||x-1|-1\big|$. Для цього спочатку побудуємо графік функції $y = x - 2$.

Потім відносно прямої $x = 1$ симетрично відобразимо праву частину цього графіка, а ліву виключимо з розгляду. Отримаємо графік функції $y = |x-1|-1$ (на рис. 1.4 (а) позначений червоним).

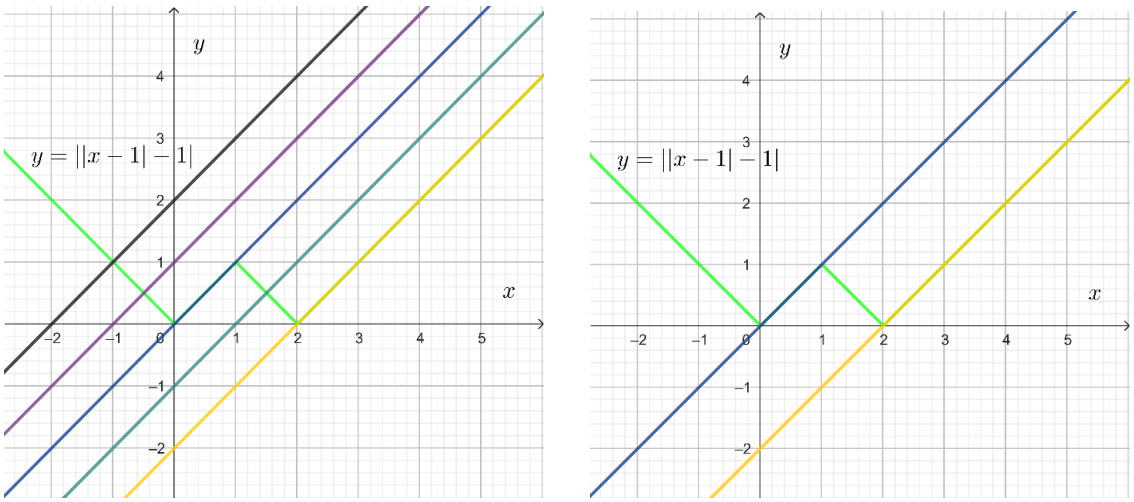
Далі відобразимо знизу вгору частину графіка функції, що знаходиться нижче осі абсцис. Отримаємо необхідний графік функції $y = \big||x-1|-1\big|$ (на рис. 1.4 (б) позначений зеленим).



(а) (б)

Рисунок 1.4 – Ілюстрація до задачі 1.5

Множиною графіків функцій $y = x - a$ при різних значеннях параметра є паралельні прямі з кутовим коефіцієнтом $k = 1$:



(а) (б)

Рисунок 1.5 – Ілюстрація до задачі 1.5

Зрозуміло, що графіки функцій $y = \big||x-1|-1\big|$ і $y = x - a$ матимуть нескінченну кількість спільних точок при $a = 0$ і $a = 2$.

Відповідь: $a = 0$, $a = 2$.

1.1.3 Обернена функція.

1.6 (4.11$^{\cdot\cdot}$, див. [5]) Нехай $g(x)$ – функція, обернена до функції $f(x) = x^5 + 6x^3$. 1) Знайдіть $g(7)$. 2) Розв'яжіть рівняння $g(x) = -1$.
3) Скільки коренів має рівняння $g(x) = c$ в залежності від значення параметра c?

Розв'язання:

1) Так як функції $f(x)$ і $g(x)$ оберені одна до одної, то область визначення першої функції є областю значень другої і навпаки. Так як функція $f(x)$ є сумою двох степеневих функцій з непарними показниками, то $D(f) = E(f) = R$, причому функція є взаємно однозначною. Такі самі властивості притаманні і функції $g(x)$. Тому для знаходження $g(7)$ треба розв'язати рівняння $f(x) = 7$. Легко бачити, що розв'язком рівняння $x^5 + 6x^3 = 7$ є $x = 1$. Тому $g(7) = 1$.

2) У випадку, коли $g(x) = -1$, треба знайти $f(-1)$:

$$f(-1) = (-1)^5 + 6 \cdot (-1)^3 = -1 - 6 = -7.$$

Тому коренем рівняння $g(x) = -1$ буде $x = -7$.

3) Так як вище зясовано, що функція $g(x)$ є взаємно однозначною, то в залежності від значення параметра c рівняння $g(x) = c$ матиме єдиний розв'язок при будь-якому значенні параметра.

Для наочності проілюструємо отримані результати на рис. 1.6:

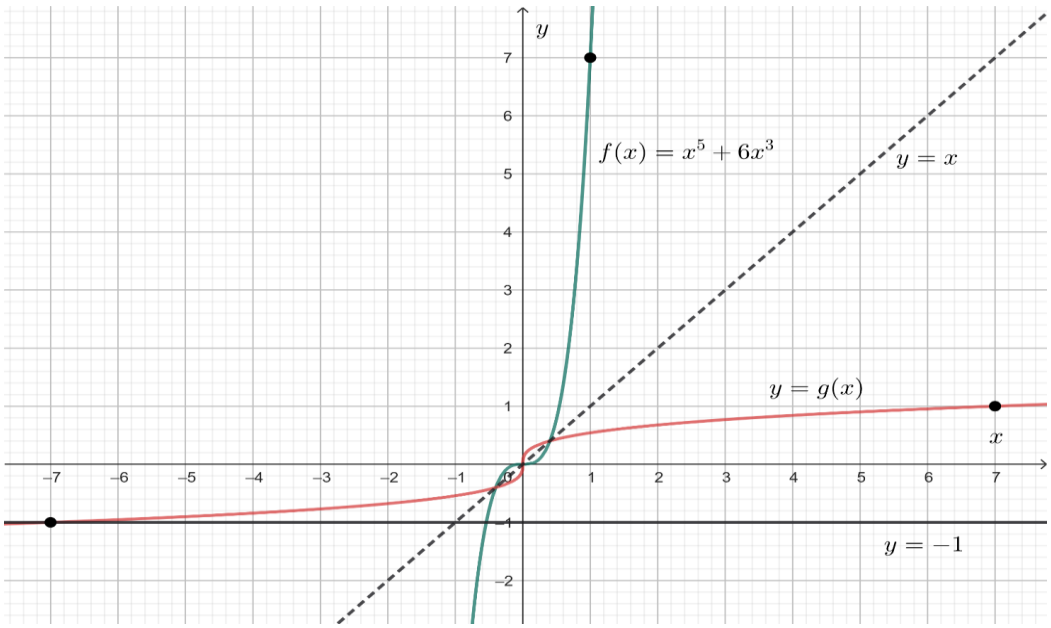


Рисунок 1.6 – Ілюстрація до задачі 1.6

Відповідь: 1) $g(7) = 1$, 2) $x = -7$, 3) один.

1.1.4 Метод інтервалів.

1.7 (5.14(2)¨, див. [5])
Розв'яжіть нерівність $(x^2 + 2x - 15)(x^2 - 4x + 3)(x - 1) \leq 0$.

Розв'язання:

Застосуємо метод інтервалів. Для початку визначимо корені рівняння:

$$(x^2 + 2x - 15)(x^2 - 4x + 3)(x - 1) = 0;$$

$$\left[\begin{array}{c} x^2 + 2x - 15 = 0, \\ x^2 - 4x + 3 = 0, \\ x - 1 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x = -5, \\ x = 3; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 3; \end{array}\right. \\ x = 1. \end{array}\right.$$

Як бачимо, рівняння має два двократних корені $x = 1$ і $x = 3$ та один однократний $x = -5$. Нанесемо їх на координатний промінь і визначимо знаки виразу $(x^2 + 2x - 15)(x^2 - 4x + 3)(x - 1)$ на отриманих проміжках:

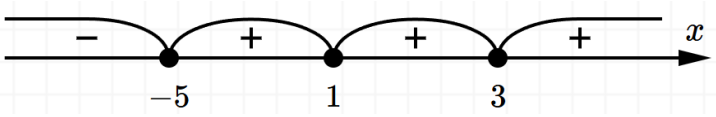


Рисунок 1.7 – Ілюстрація до задачі 1.7

Таким чином, нерівність $(x^2+2x-15)(x^2-4x+3)(x-1)\le 0$ виконується при $x\in(-\infty;-5]\cup\{1;3\}$.

Відповідь: $x\in(-\infty;-5]\cup\{1;3\}$.

1.8 (5.20(1,2)¨, див. [5])
Розв'яжіть нерівність: 1) $(x^2-1)\sqrt{x^2-4}\le 0$; 2) $(x^2-1)\sqrt{x^2-4}\ge 0$.

Розв'язання:

Для розуміння різниці між нестрогими та строгими нерівностями такого типу додамо ще дві: 3) $(x^2-1)\sqrt{x^2-4}<0$, 4) $(x^2-1)\sqrt{x^2-4}>0$. Наведемо без розв'язання сукупності/системи нерівностей, еквівалентних даним:

$$(x^2-1)\sqrt{x^2-4}\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-4=0,\\ \begin{cases} x^2-4>0,\\ x^2-1\le 0; \end{cases}\end{array}\right.$$

$$(x^2-1)\sqrt{x^2-4}\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-4=0,\\ \begin{cases} x^2-4>0,\\ x^2-1\ge 0; \end{cases}\end{array}\right.$$

$$(x^2-1)\sqrt{x^2-4}<0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4>0,\\ x^2-1<0; \end{cases}$$

$$(x^2-1)\sqrt{x^2-4}>0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4>0,\\ x^2-1>0. \end{cases}$$

Відповідь: 1) $x\in\{-2;2\}$; 2) $x\in(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$; 3) $x\in\emptyset$; 4) $x\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$.

1.9 (5.22(4)¨, див. [5]) Для кожного значення a розв'яжіть нерівність:

$$(x-a)(x+5)^2<0.$$

Розв'язання:

Знайдемо нулі функції $f(x)=(x-a)(x+5)^2$. Це $x=a, x=-5$. Розв'яжемо нерівність методом інтервалів, розглянувши випадки:

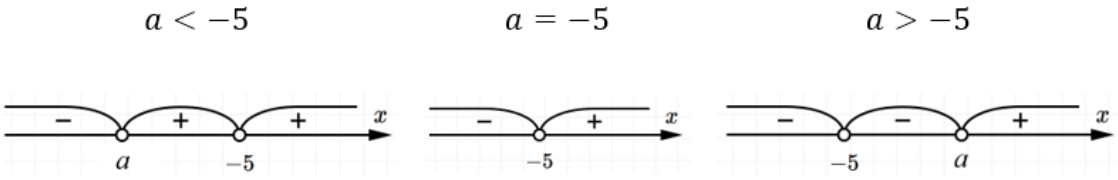


Рисунок 1.8 – Ілюстрація до задачі 1.9

Отже, сформулюємо відповідь: при $a < -5$: $x \in (-\infty; a)$; при $a = -5$: $x \in (-\infty; -5)$; при $a > -5$: $x \in (-\infty; -5) \cup (-5; a)$, але можна сформулювати коротше.

Відповідь: при $a \leq -5$: $x \in (-\infty; a)$; при $a > -5$: $x \in (-\infty; -5) \cup (-5; a)$.

1.2 Степенева функція. Приклади розв'язків типових завдань.

1.2.1 Степенева функція з натуральним показником.

1.10 (8.12¨, див. [5]) Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^8$ на проміжку $[-1; a]$, де $a > -1$.

Розв'язання:

Побудуємо графік функції $f(x) = x^8$ при $x \geq -1$.Множиною прямих $x = a, a > -1$ є сімейство вертикальних паралельних прямих.

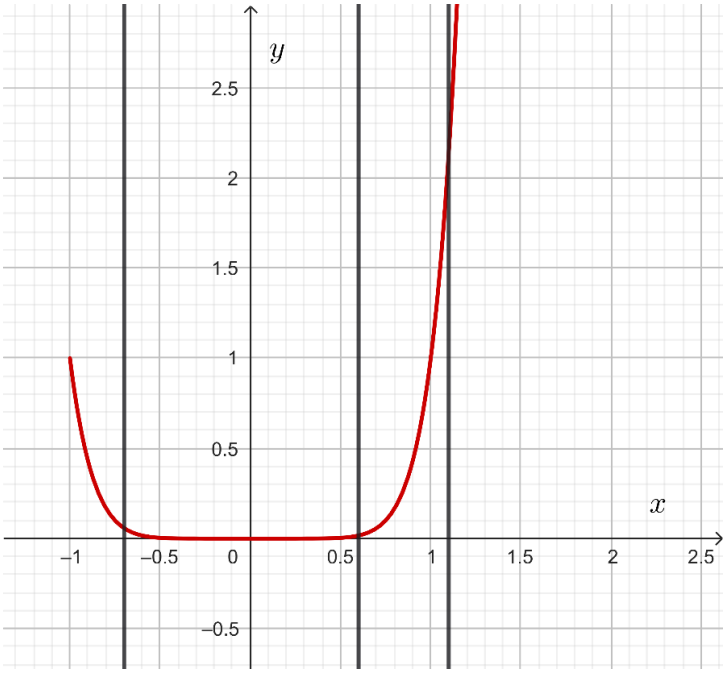


Рисунок 1.9 – Ілюстрація до задачі 1.10

З графіка зрозуміло, що при $a \in (-1; 0)$: $f_{max} = 1, f_{min} = a^8$; при $a \in [0; 1]$: $f_{max} = 1, f_{min} = 0$; при $a \in (1; +\infty)$: $f_{max} = a^8, f_{min} = 0$.

Відповідь: при $a \in (-1; 0)$: $f_{max} = 1, f_{min} = a^8$; при $a \in [0; 1]$: $f_{max} = 1$, $f_{min} = 0$; при $a \in (1; +\infty)$: $f_{max} = a^8, f_{min} = 0$.

1.2.2 Корінь n-го степеня. Функція $y = \sqrt[n]{x}$. Властивості кореня n-го степеня.

1.11 Спростити вираз $\frac{\left(x^{-1}\sqrt{y^3}\right)^{-2}}{x^{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt[2]{x^5}} \cdot y^2$.

Розв'язання:

Застосовуємо властивості степенів та коренів, а саме:

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}},\ x^{-n} = \frac{1}{x^n},\ (x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n,$$

$$(x^m)^n = x^{m \cdot n},\ x^m \cdot x^n = x^{m+n},\ \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}.$$

Отже, використовуючи зазначені властивості, перепишемо заданий вираз:

$$\frac{\left(x^{-1}\sqrt{y^3}\right)^{-2}}{x^{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt[2]{x^5}} \cdot y^2 = \frac{y^2}{\left(x^{-1}y^{\frac{3}{2}}\right)^2 \cdot x^{\frac{3}{4}} \cdot x^{\frac{5}{2}}} = \frac{y^2}{(x^{-1})^2 \cdot \left(y^{\frac{3}{2}}\right)^2 \cdot x^{\frac{3}{4}+\frac{5}{2}}} = \frac{y^2}{x^{-2} \cdot y^3 \cdot x^{\frac{13}{4}}} =$$

$$= \frac{y^{2-3}}{x^{-2+\frac{13}{4}}} = \frac{y^{-1}}{x^{\frac{5}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{x^5} \cdot y^1} = \frac{1}{\sqrt[4]{x^5} \cdot y}.$$

Відповідь: $\frac{1}{\sqrt[4]{x^5} \cdot y}$.

1.12 (12.25¨, див. [5])
Спростіть вираз $(a^{0,125} + b^{0,75})(a^{0,25} + b^{1,5})(a^{0,5} + b^3)(a + b^6)$.

Розв'язання:

Помножимо і поділимо даний вираз на $(a^{0,125} - b^{0,75})$. Отримаємо:

$$(a^{0,125} + b^{0,75})(a^{0,25} + b^{1,5})(a^{0,5} + b^3)(a + b^6) =$$

$$= \frac{(a^{0,125} - b^{0,75})(a^{0,125} + b^{0,75})(a^{0,25} + b^{1,5})(a^{0,5} + b^3)(a + b^6)}{(a^{0,125} - b^{0,75})} =$$

$$= \frac{(a^{0,25} - b^{1,5})(a^{0,25} + b^{1,5})(a^{0,5} + b^3)(a + b^6)}{(a^{0,125} - b^{0,75})} =$$

$$= \frac{(a^{0,5} - b^3)(a^{0,5} + b^3)(a + b^6)}{(a^{0,125} - b^{0,75})} = \frac{(a - b^6)(a + b^6)}{(a^{0,125} - b^{0,75})} = \frac{a^2 - b^{12}}{a^{0,125} - b^{0,75}}.$$

Відповідь: $\frac{a^2 - b^{12}}{a^{0,125} - b^{0,75}}$.

1.13 (11.29(2)¨, див. [5]) Доведіть, що значення виразу $\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10}-\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}$ є раціональним числом.

Розв'язання:

Розглянемо суму $6\sqrt{3}+10$ та спробуємо представити її у вигляді кубу суми:

$$6\sqrt{3}+10=3\sqrt{3}+9+3\sqrt{3}+1=\left(\sqrt{3}\right)^3+3\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2\cdot 1+3\cdot\sqrt{3}\cdot 1^2+1^3=$$

$$=\left(\sqrt{3}+1\right)^3 \Rightarrow \sqrt[3]{6\sqrt{3}+10}=\sqrt[3]{\left(\sqrt{3}+1\right)^3}=\sqrt{3}+1.$$

Аналогічно, $6\sqrt{3}-10=\left(\sqrt{3}-1\right)^3 \Rightarrow \sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}=\sqrt{3}-1$. Отже, маємо:

$$\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10}-\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}=\sqrt{3}+1-\left(\sqrt{3}-1\right)=2\in R,$$

що і треба було довести. ■

1.14 (10.26¨, див. [5]) Використовуючи властивості монотонності функції розв'яжіть рівняння $\sqrt[4]{x-26}+\sqrt[3]{x}=4$.

Розв'язання:

Знайдемо ОДЗ: $x-26\geq 0$, тобто $x\geq 26$.

При $x\geq 26$ функція $f(x)=\sqrt[4]{x-26}+\sqrt[3]{x}$ монотонно зростає, тому приймає кожне своє значення рівно один раз. Легко бачити, що $f(x)=4$ при $x=27$. Отже, $x=27$ – корінь рівняння.

Відповідь: $x=27$.

1.15 (10.28¨, див. [5]) Використовуючи властивості монотонності функції розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x+\sqrt[6]{x}=y+\sqrt[6]{y}, \\ x^2+xy+y^2=27. \end{cases}$

Розв'язання:

Розглянемо функцію $f(t)=t+\sqrt[6]{t}$. Вона монотонно зростає при $t\geq 0$, тому приймає кожне своє значення рівно один раз. Оскільки з першого рівняння системи випливає, що $f(x)=f(y)$, то $x=y$. Тому вихідна система рівнянь перетворюється на таку:

$$\begin{cases} x=y, \\ 3x^2=27 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1=3, \\ y_1=3; \end{cases} \\ \begin{cases} x_2=-3, \\ y_2=-3. \end{cases} \end{array}\right.$$

Відповідь: $(3;3), (-3;-3)$.

Завдання до лабораторної роботи 1

1. Знайдіть $\max\limits_{M} f(x)$ і $\min\limits_{M} f(x)$, якщо:
1) $f(x) = -x^2 - 8x - 3$, $M = R$; 2) $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$, $M = D(f)$.
2. Функція $f(x)$ є непарною, $\min\limits_{[2;5]} f(x) = 1$ і $\max\limits_{[2;5]} f(x) = 3$.
Знайдіть $\min\limits_{[-5;-2]} f(x)$ і $\max\limits_{[-5;-2]} f(x)$.
3. Знайдіть область значень функції $y = \frac{2x-1}{5x+4}$.
4. Знайдіть $\max\limits_{R}(|x+2| - |x|)$.
5. При яких значеннях параметра a рівняння $|3|x+1| - 2| = a - x$ має 3 корені?
6. Нехай $g(x)$ – функція, обернена до функції $f(x) = x^3 + \sqrt{x-2}$.
1) Знайдіть $g(28)$.
2) Розв'яжіть рівняння $g(x) = 1$.
3) Чи існує таке значення c, що рівняння $g(x) = c$ має два корені?
7. Спростіть вираз $\left(\frac{\sqrt[3]{mn^2}+\sqrt[3]{m^2n}}{\sqrt[3]{m^2}+2\sqrt[3]{mn}+\sqrt[3]{n^2}} - 2\sqrt[3]{n} + \frac{m-n}{\sqrt[3]{m^2}-\sqrt[3]{n^2}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt[6]{m}+\sqrt[6]{n}}$.
8. Доведіть, що значення виразу є цілим числом. $\frac{1}{\sqrt[3]{1^2}+\sqrt[3]{1\cdot 2}+\sqrt[3]{2^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2\cdot 3}+\sqrt[3]{3^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{999^2}+\sqrt[3]{999\cdot 1000}+\sqrt[3]{1000^2}}$.
9. Використовуючи властивості монотонності функції розв'яжіть рівняння $\sqrt[4]{x+6} + \sqrt[3]{x-9} = 3$.
10. Доведіть рівність $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2}+\sqrt{\ldots+\sqrt{2+\sqrt{6}}}}}_{\text{10 радикалів}} = \sqrt[1024]{2+\sqrt{3}} + \sqrt[1024]{2-\sqrt{3}}$.

!!! ЗАУВАЖЕННЯ !!!

1. Для завдань 1, 3, 4, 9 крім повного розв'язку підготуйте графічну ілюстрацію (Desmos, GeoGebra тощо).
2. Для завдання 5 крім повного розв'язку підготуйте в GeoGebra динамічну графічну презентацію-ілюстрацію. До відповіді додайте посилання на розроблену презентацію.
3. Для завдання 6 крім повного розв'язку наведіть на одному рисунку графічну ілюстрацію прямої і оберненої функцій та бісектрис координатних чвертей (Desmos, GeoGebra тощо).

Лабораторне заняття 2 Лінія функцій в профільній школі: Тригонометричні функції. Обернені тригонометричні функції.

2.1 Тригонометричні функції. Властивості та графіки.
2.1.1 Періодичність функцій.

2.1 Знайдіть період функції $y = cos\frac{6x}{5} + tg\frac{6x}{7}$.

Розв'язання:

Якщо ми знайдемо спільний період функцій $f(x) = cos\frac{6x}{5}$ і $g(x) = tg\frac{6x}{7}$, то цим самим знайдемо період даної функції.

Знайдемо періоди кожної з функцій. $T_f = 2\pi{:}\frac{6}{5} = \frac{5}{3}\pi,\ T_g = \pi{:}\frac{6}{7} = \frac{7}{6}\pi.$

Якщо існують період функції $f(x)$ і період функції $g(x)$ такі, що числа T_f і T_g є сумірними, то ці функції $f(x)$ і $g(x)$ мають спільний період

$$T_{\text{спільн}} = a \cdot T_g = b \cdot T_f, \text{ де } \frac{a}{b} = \frac{T_f}{T_g}.$$

Тоді, $\frac{T_f}{T_g} = \frac{10}{7}$. Тому $T_{\text{спільн}} = 10 \cdot \frac{7}{6}\pi = \frac{35}{3}\pi.$

Вдповідь: $T_{\text{спільн}} = \frac{35}{3}\pi.$

2.2 (19.14¨, див. [5]) При яких значеннях параметра a число π є періодом функції $f(x) = \frac{sinx}{a-cosx}$?

Розв'язання:

Так як число π є періодом функції $f(x) = \frac{sinx}{a-cosx}$, то для будь-якого значення змінної x: $f(x) = f(x+\pi)$.

$$\frac{sinx}{a-cosx} = \frac{sin(x+\pi)}{a-cos(x+\pi)} \Leftrightarrow \frac{sinx}{a-cosx} = \frac{-sinx}{a+cosx},$$

$$sinx(a+cosx) = -sinx(a-cosx),$$

$$a\ sinx + sinx\ cosx = -a\ sinx + sinx\ cosx,$$

$$2a\ sinx = 0.$$

З означення періоду та останньої рівності випливає, що $a = 0$.

Відповідь: $a = 0$.

2.1.2 Властивості та графіки основних тригонометричних функцій $y = sinx, y = cosx, y = tgx, y = ctgx.$

2.3 Побудуйте графік функції $y = \sin\left|2x - \frac{\pi}{3}\right|$.

Розв'язання:

Проведемо такі перетворення:

1. $y = \sin x \rightarrow y = \sin|x|$ - симетрія відносно осі ординат частини графіка, яка лежить у півплощині $x \geq 0$;
2. $y = \sin|x| \rightarrow y = \sin|2x|$ - стискання до осі ординат у 2 рази;

$y = \sin|2x| \rightarrow y = \sin\left|2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right|$ паралельне перенесення вздовж осі абсцис вправо на $\frac{\pi}{6}$ одиниць.

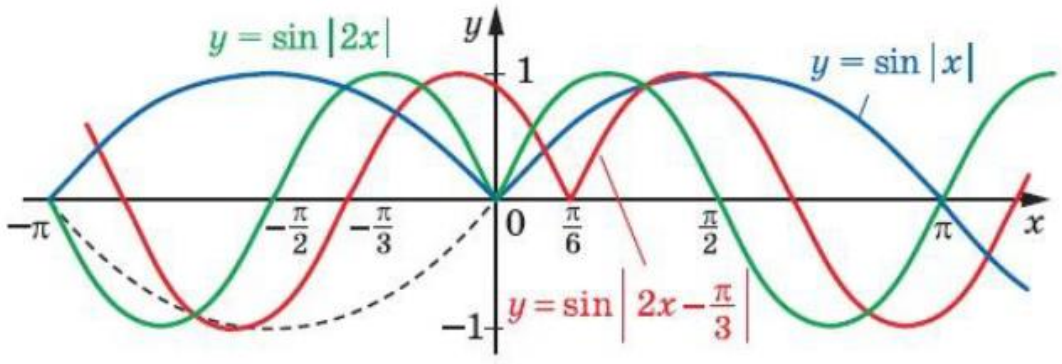


Рисунок 2.1 – Ілюстрація до задачі 2.3

2.4 (20.16(2)⁚, див. [5]) Побудуйте графік функції $y = \left|cos\left|2x - \frac{\pi}{3}\right|\right|$.

Розв'язання:

Представимо функцію у вигляді $y = \left|cos\ 2\left|x - \frac{\pi}{6}\right|\right|$. Виконаємо побудови за наступним планом:

1. $y = cosx$.
2. Графік функції $y = cos2x$ утворюється з графіка попередньої функції стисканням у 2 рази вздовж осі Ox.
3. Графік функції $y = cos2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ утворюється з графіка попередньої функції паралельним перенесенням на $\frac{\pi}{6}$ вправо вздовж осі Ox.
4. Графік функції $y = cos2\left|x - \frac{\pi}{6}\right|$ утворюється з графіка попередньої функції симетрією відносно прямої $x = \frac{\pi}{6}$ правої частини графіка з відкиданням його лівої частини.

5. Графік функції $y = \left|cos2\left|x - \frac{\pi}{6}\right|\right|$ утворюється з графіка попередньої функції симетрією відносно прямої $y = 0$ нижньої його частини вгору зі збереженням верхньої частини.

Проілюструємо кроки побудови на рисунку:

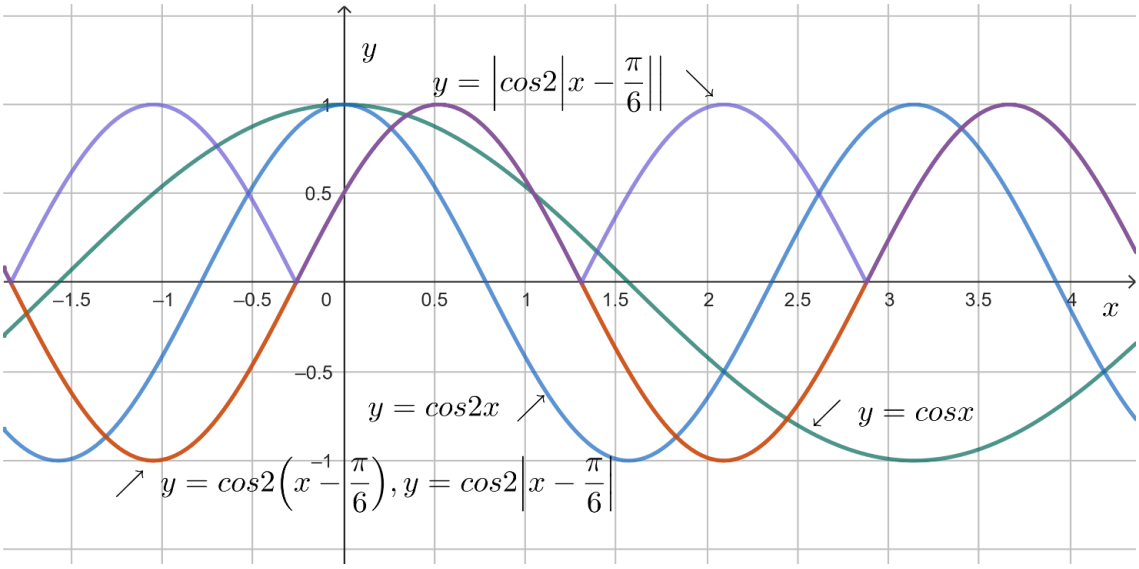


Рисунок 2.2 – Ілюстрація до задачі 2.4

2.5 (21.10(5)¨, див. [5]) Побудуйте графік функції $y = ctgx - \sqrt{ctg^2x}$.

Розв'язання:

Перетворимо функцію: $y = ctgx - \sqrt{ctg^2x}, => \quad y = ctgx - |ctgx|, \quad =>$

$$=> \left[\begin{cases} ctgx \geq 0, \\ y = 0; \end{cases} \right. \left. \begin{cases} ctgx < 0, \\ y = 2ctgx; \end{cases} \right. .$$ Отримаємо $$\left[\begin{cases} x \in \left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right], k \in Z, \\ y = 0; \end{cases} \right. \left. \begin{cases} x \in \left(\frac{\pi}{2} + \pi k, \pi + \pi k\right), k \in Z, \\ y = 2ctgx. \end{cases} \right.$$

Проілюструємо це на рисунку:

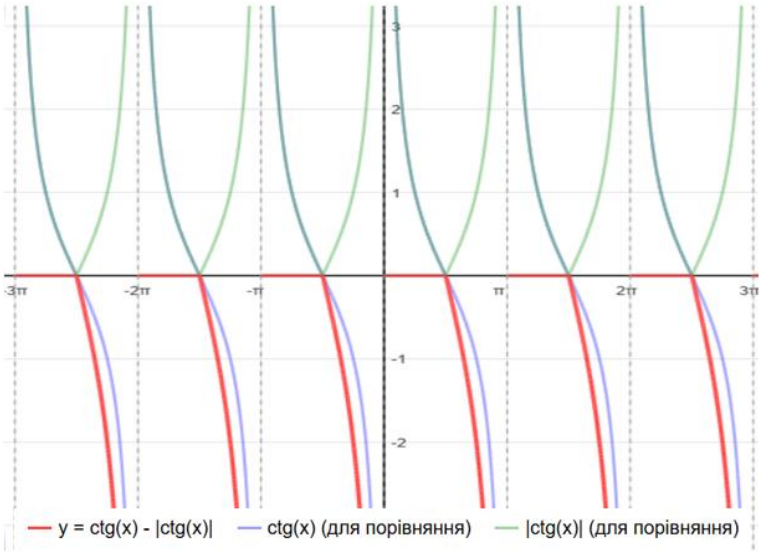


Рисунок 2.3 – Ілюстрація до задачі 2.5

2.6 (23.32(1)¨, див. [5]) Побудуйте графік функції $y = \frac{tg2x-tgx}{1+tg2xtgx}$.

Розв'язання:

За формулою тангенса різниці можна записати, що $y = tg(2x - x)$, тобто $y = tgx$. При цьому крім звичайних обмежень для існування тангенса кута $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$ і тангенса подвійного кута $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z$ треба додати умову $1 + tg2xtgx \neq 0$:

$$1 + tg2xtgx \neq 0,$$

$$1 + \frac{2tgx}{1 - tg^2x} \cdot tgx \neq 0,$$

$$\frac{2tg^2x + 1 - tg^2x}{1 - tg^2x} \neq 0,$$

$$\frac{tg^2x + 1}{1 - tg^2x} \neq 0,$$

що виконується при попередніх умовах. Таким чином, вихідну умову можна переписати як $y = tgx, x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z$. Побудуємо графік цієї функції:

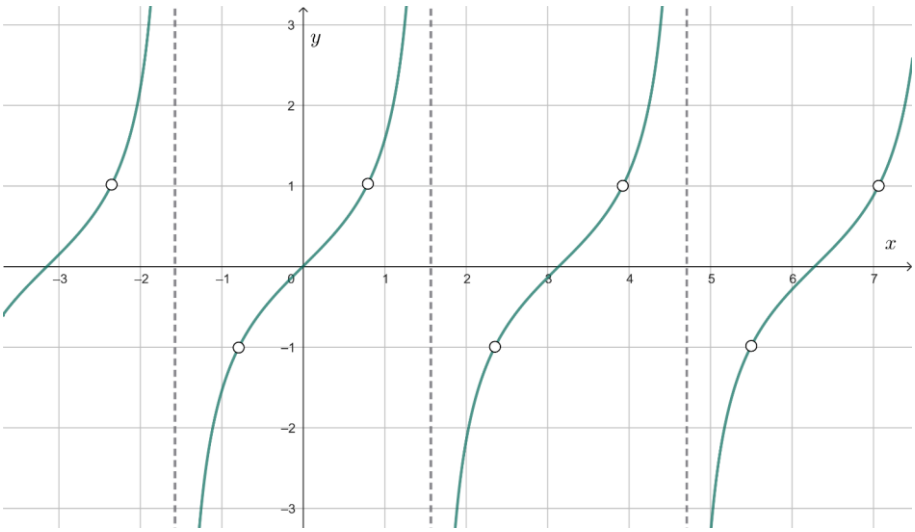


Рисунок 2.4 – Ілюстрація до задачі 2.6

2.1.3 Властивості та графіки основних тригонометричних функцій $y = arcsinx, y = arccosx, y = arctgx, y = arcctgx.$

2.7 (30.33(3)¨, див. [5]) Побудуйте графік функції $y = sin(arcsinx + arccosx)$.

Розв'язання:

Областю визначення обох функцій $y = arcsinx, y = arccosx$ є відрізок $[-1; 1]$, а областю визначення $y = sinx$ є вся числова пряма, тому функція $y = sin(arcsinx + arccosx)$ визначена на $[-1; 1]$.

$$sin(arcsinx + arccosx) =$$

$$= sin(arcsinx) \cdot cos(arccosx) + cos(arcsinx) \cdot sin(arccosx) =$$

$$= x \cdot x + \sqrt{1 - x^2} \cdot \sqrt{1 - x^2} = x^2 - (1 - x^2) = -1.$$

Таким чином, треба побудувати $y = -1$ при $x \in [-1; 1]$.

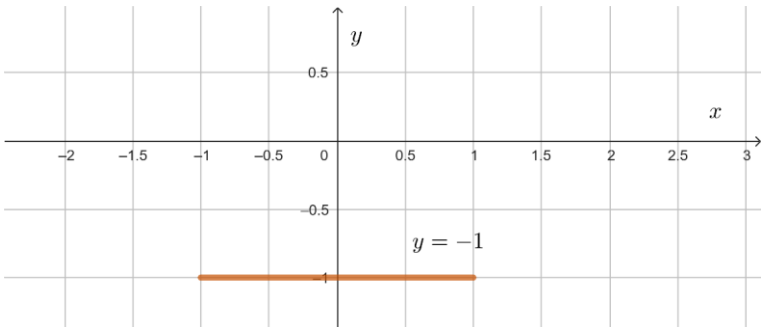
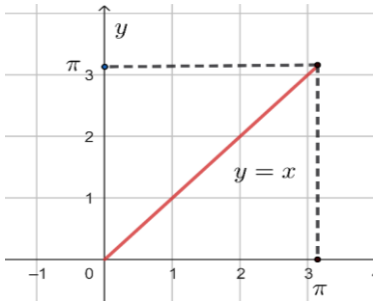


Рисунок 2.4 – Ілюстрація до задачі 2.6

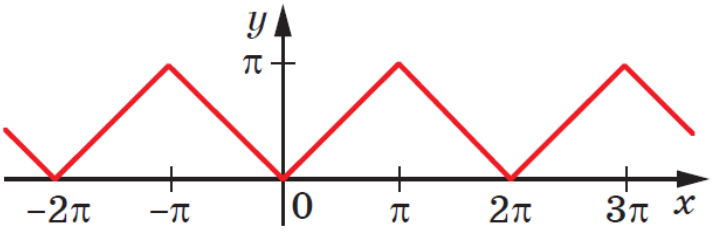
2.8 (30.37¨, див. [5]) Побудуйте графік функції $y = arccos(cosx)$.

Розв'язання:

Функція $y = cosx$ визначена на всій числовій прямій, але приймає значення виключно з відрізка $[-1; 1]$. Цей відрізок є областю визначення функції $y = arccosx$. Отже областю визначення функції $y = arccos(cosx)$ є вся числова пряма. Але областю значень функції $y = arccos(cosx)$ є відрізок $[0; \pi]$. Отже, побудуємо $y = x$ при $x \in [0; \pi]$.



(а)



(б)

Рисунок 2.5 – Ілюстрація до задачі 2.7

2.2 Основні співвідношення між тригонометричними функціями одного й того самого аргументу.

2.9 (22.15(2)¨, див. [5])
Знайдіть найбільше і найменше значення виразу $tg^2\alpha + \frac{1}{cos\alpha}$.

Розв'язання:

Перетворимо вираз:

$$tg^2\alpha + \frac{1}{cos\alpha} = \frac{1}{cos^2\alpha} - 1 + \frac{1}{cos\alpha} = \frac{1}{cos^2\alpha} + \frac{1}{cos\alpha} - 1 = \left(\frac{1}{cos\alpha} + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}.$$

Так як $-1 \le cos\alpha \le 1$, то $\frac{1}{cos\alpha} \le -1$ або $\frac{1}{cos\alpha} \ge 1$. Знайдемо, які значення може приймати вираз $\left(\frac{1}{cos\alpha} + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$:

$$\frac{1}{cos\alpha} \le -1 \Rightarrow \frac{1}{cos\alpha} + \frac{1}{2} \le -\frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{cos\alpha} + \frac{1}{2}\right)^2 \ge \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{cos\alpha} + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} \ge -1;$$

$$\frac{1}{cos\alpha} \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{cos\alpha} + \frac{1}{2} \geq \frac{3}{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{cos\alpha} + \frac{1}{2}\right)^2 \geq \frac{9}{4},$$

$$\left(\frac{1}{cos\alpha} + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} \geq 1.$$

Таким чином, найменше значення виразу $tg^2\alpha + \frac{1}{cos\alpha}$ дорівнює -1, а найбільшого значення не існує.

Відповідь: найменше значення виразу $tg^2\alpha + \frac{1}{cos\alpha}$ дорівнює -1, а найбільшого значення не існує.

2.10 (24.5(2)⁚, див. [5])
Обчисліть значення виразу: $tg20^\circ + tg40^\circ + tg60^\circ + \cdots + tg160^\circ + tg180^\circ$.

Розв'язання:

Застосуємо формули зведення. Згідно з ними:

$$tg160^\circ = tg(180^\circ - 20^\circ) = -tg20^\circ;$$

$$tg140^\circ = tg(180^\circ - 40^\circ) = -tg40^\circ;$$

$$tg120^\circ = tg(180^\circ - 60^\circ) = -tg60^\circ;$$

$$tg100^\circ = tg(180^\circ - 80^\circ) = -tg80^\circ.$$

Отже, даний вираз набуває вигляду:

$$tg20^\circ + tg40^\circ + tg60^\circ + \cdots + tg160^\circ + tg180^\circ =$$

$$= tg20^\circ + tg40^\circ + tg60^\circ + \cdots - tg60^\circ - tg40^\circ - tg20^\circ - 0 = 0.$$

Відповідь: 0.

2.11 (24.7(1)⁚, див. [5])
Доведіть тотожність $\frac{cos^2\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}{tg^2\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)} + sin^2\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right) tg^2\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right) = 1.$

Доведення:

Для початку помітимо, що $\frac{\pi}{3} + \alpha = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)$. Тоді за формулами зведення:

$$tg^2\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = ctg^2\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right).$$

Підставимо у ліву частину тотожності та перетворимо її:

$$\frac{cos^2\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}{ctg^2\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}+sin^2\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)ctg^2\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=$$

$$=\frac{cos^2\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}{\frac{cos^2\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}{sin^2\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}}+sin^2\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\frac{cos^2\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}{sin^2\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}=$$

$$=sin^2\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)+cos^2\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=1,$$

що і треба було довести.■

2.12 (25.33(3)¨, див. [5]) Доведіть, що: $cos\frac{\pi}{7}cos\frac{4\pi}{7}cos\frac{5\pi}{7}=\frac{1}{8}$.

Доведення:

За формулами зведення запишемо: $\cos\frac{5\pi}{7}=cos\left(\pi-\frac{2\pi}{7}\right)=-cos\frac{2\pi}{7}$. При цьому ліва частина виразу перетвориться так:

$$-cos\frac{\pi}{7}cos\frac{2\pi}{7}cos\frac{4\pi}{7}.$$

Помножимо і поділимо останній вираз на $2sin\frac{\pi}{7}$ та кілька разів застосуємо формулу синуса подвійного кута, за необхідности помножуючи ще чисельник і знаменник утвореного дробу на 2:

$$-\frac{2sin\frac{\pi}{7}cos\frac{\pi}{7}cos\frac{2\pi}{7}cos\frac{4\pi}{7}}{2sin\frac{\pi}{7}}=-\frac{sin\frac{2\pi}{7}cos\frac{2\pi}{7}cos\frac{4\pi}{7}}{2sin\frac{\pi}{7}}=$$

$$=-\frac{2sin\frac{2\pi}{7}cos\frac{2\pi}{7}cos\frac{4\pi}{7}}{4sin\frac{\pi}{7}}=-\frac{sin\frac{4\pi}{7}cos\frac{4\pi}{7}}{4sin\frac{\pi}{7}}=-\frac{2sin\frac{4\pi}{7}cos\frac{4\pi}{7}}{8sin\frac{\pi}{7}}=$$

$$=-\frac{sin\frac{8\pi}{7}}{8sin\frac{\pi}{7}}=-\frac{sin\left(\pi+\frac{\pi}{7}\right)}{8sin\frac{\pi}{7}}=-\frac{-sin\frac{\pi}{7}}{8sin\frac{\pi}{7}}=\frac{1}{8},$$

що і треба було довести.

2.13 (25.35(1)¨, див. [5]) Виразіть через $cos4\alpha$: $sin^4\alpha + cos^4\alpha$.

Розв'язання:

Перепишемо вираз у вигляді суми квадратів та застосуємо формули пониження степеня:

$$sin^4\alpha + cos^4\alpha = (sin^2\alpha)^2 + (cos^2\alpha)^2 = \left(\frac{1 - cos2\alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 + cos2\alpha}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1 - 2cos2\alpha + cos^2 2\alpha + 1 + 2cos2\alpha + cos^2 2\alpha}{4} =$$

$$= \frac{2 + 2cos^2 2\alpha}{4} = \frac{1 + cos^2 2\alpha}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos^2 2\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + cos4\alpha}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos4\alpha\right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}cos4\alpha.$$

Відповідь: $\frac{3}{4} + \frac{1}{4}cos4\alpha$.

2.14 Відомо, що $cos\,\alpha = \frac{5}{13}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Обчислити значення інших тригонометричних функцій.

Розв'язання:

Маємо, що

$$sec\,\alpha = \frac{1}{cos\,\alpha} = \frac{1}{\frac{5}{13}} = \frac{13}{5}.$$

З основної тригонометричної тотожності $sin^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1$:

$$sin^2\,\alpha = 1 - cos^2\,\alpha \quad \Rightarrow \quad sin\,\alpha = \pm\sqrt{1 - cos^2\,\alpha}.$$

Оскільки за умовою $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, тобто α – кут IV чверті, в якій синус від'ємний, то перед коренем залишаємо знак «–»:

$$sin\,\alpha = -\sqrt{1 - cos^2\,\alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = -\sqrt{1 - \frac{25}{169}} = -\sqrt{\frac{144}{169}} = -\frac{12}{13}.$$

Тоді $\text{cosec}\alpha = \frac{1}{sin\,\alpha} = \frac{1}{-\frac{12}{13}} = -\frac{13}{12}$.

Відомо, що

$$tg\alpha = \frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha} = \frac{-\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}} = -\frac{12}{5} \quad \Rightarrow \quad ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha} = \frac{1}{-\frac{12}{5}} = -\frac{5}{12}.$$

Відповідь $sin\,\alpha = -\frac{12}{13}$, $\text{tg}\alpha = -\frac{12}{5}$, $\text{ctg}\alpha = -\frac{5}{12}$, $sec\,\alpha = \frac{13}{5}$, $\text{cosec}\alpha = -\frac{13}{12}$.

Завдання до лабораторної роботи 2

1. При яких значеннях параметра a число $\frac{\pi}{2}$ є періодом функції $f(x) = \frac{\cos(2x)}{3a+\sin(2x)}$?

2. Побудуйте графік функції $y = \left|sin\ \left(2|x| + \frac{\pi}{6}\right)\right|$/

3. Побудуйте графік функції $y = \frac{|ctgx|}{ctgx}$/

4. Побудуйте графік рівняння $tgx \cdot tgy = 0$.

5. Знайдіть найбільше і найменше значення виразу $1 - \sqrt{cos^2\alpha} - 2sin^2\alpha$.

6. Доведіть нерівність $\sin(\alpha + \beta) < \cos\alpha + \cos\beta$, де $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$.

7. Обчисліть значення виразу $cos^2\frac{\pi}{8} + cos^2\frac{3\pi}{11} + cos^2\frac{3\pi}{8} + cos^2\frac{5\pi}{22}$.

8. Спростіть вираз $\sqrt{0{,}5 + 0{,}5\sqrt{0{,}5 + 0{,}5\sqrt{0{,}5 + 0{,}5cos\alpha}}}$, якщо $0 \le \alpha \le \pi$.

9. Знайдіть найбільше значення функції $f(x) = sin^{14}\alpha + cos^{14}\alpha$.

10. Знайдіть усі раціональні значення параметра a, при яких функції $f(x) = sin\frac{2ax}{a^2+\sqrt{12}}$ і $g(x) = tg\frac{2x}{1-2a+\sqrt{108}}$ мають спільний період.

!!! ЗАУВАЖЕННЯ !!!

1. Для завдань 2, 3, 4 крім повного розв'язку підготуйте графічну ілюстрацію (Desmos, GeoGebra тощо).
2. Для завдань 1, 10 крім повного розв'язку підготуйте в GeoGebra динамічну графічну презентацію-ілюстрацію. До відповіді додайте посилання на розроблену презентацію.

Лабораторне заняття 3 Лінія функцій в профільній школі: Показникова та логарифмічна функції

3.1 (1.42(2)¨, див. [6]) Дослідіть на парність функцію

$$y = \left(\sqrt{2}+1\right)^x - \left(\sqrt{2}-1\right)^x.$$

Розв'язання:

Областю визначення функції є множина дійсних чисел. Далі

$$y(-x) = \left(\sqrt{2}+1\right)^{-x} - \left(\sqrt{2}-1\right)^{-x} = \frac{1}{\left(\sqrt{2}+1\right)^x} - \frac{1}{\left(\sqrt{2}-1\right)^x} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^x}{\left(\sqrt{2}+1\right)^x\left(\sqrt{2}-1\right)^x} - \frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^x}{\left(\sqrt{2}-1\right)^x\left(\sqrt{2}-1\right)^x} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^x}{(2-1)^x} - \frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^x}{(2-1)^x} = \left(\sqrt{2}-1\right)^x - \left(\sqrt{2}+1\right)^x =$$

$$= -\left(\left(\sqrt{2}+1\right)^x - \left(\sqrt{2}-1\right)^x\right) = -y(x),$$

отже, функція непарна.

Відповідь: функція непарна.

3.2 (1.40(1)¨, див. [6]) Розв'яжіть нерівність $2^{x^2} > cosx$.

Розв'язання:

Зрозуміло, що при $x \in R$: $x^2 \geq 0$. Тоді із властивостей показникової функції $y = a^x,\ a^x > 0, \forall x \in R,\ a^x > 1$ при $a > 1,$ маємо $2^{x^2} \geq 2^0 = 1$. Із властивостей тригонометричної функції $y = \cos(x)\,, -1 \leq \cos(x) \leq 1$. Таким чином $2^{x^2} > 1,$ при $x \neq 0\,,\ \cos(x) \leq 1\,,$тому нерівність $2^{x^2} > cosx$ виконується при $x \neq 0$. При $x = 0$ виконується рівність $2^{0^2} = cos0 = 1$. Отже, $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Відповідь: $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

3.3 Розв'яжіть нерівність $3^x + 4^x > 5^x$.

Розв'язання:

Поділимо обидви частини нерівності на 5^x. Отримаємо:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x > 1.$$

Розглянемо функцію $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x$. Зауважимо, що $f(2) = 1$.

Оскільки функція f – падна, то при $x < 2$ виконується нерівність$f(x) > f(2)$, а при $x > 2$виконується нерівність $f(x) < f(2)$. Отже, множиною розв'язків нерівності $f(x) > f(2)$, тобто нерівності $f(x) > 1$, є проміжок $(-\infty; 2)$.

Відповідь: $(-\infty; 2)$.

3.4 Обчисліть значення виразу: 1) 10^{2+2lg7}; 2) $9^{log_3 4-0,5}$.

Розв'язання:

1) Застосовуючи властивості степеня та основну логарифмічну тотожність, отримуємо:

$$10^{2+2lg7} = 10^2 \cdot 10^{2lg7} = 100 \cdot (10^{lg7})^2 = 100 \cdot 7^2 = 4900.$$

2) Маємо:

$$9^{log_3 4-0,5} = (3^2)^{log_3 4-0,5} = (3^2)^{log_3 4} : (3^2)^{0,5} = (3^{log_3 4})^2 : 3 = 4^2 : 3 = \frac{16}{3}.$$

Відповідь: 1) 4900; 2) $\frac{16}{3}$.

3.5 При якому значенні x виконується рівність: 1) $log_{\frac{1}{2}} x = -5$; 2) $log_x 16 = 4$?

Розв'язання:

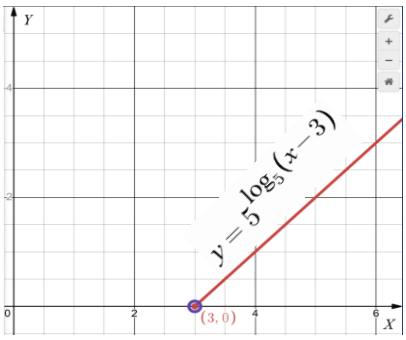
1) Вираз $log_{\frac{1}{2}} x$ визначено при $x > 0$. З означення логарифма випливає, що $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = x$, тобто $x = 32$.

2) Вираз $log_x 16$ визначено при $x > 0$ і $x \neq 1$. Згідно з означенням логарифма маємо: $x^4 = 16$. Звідси $x = 2$.

Відповідь: 1) $x = 32$; 2) $x = 2$.

3.6 Побудуйте графік функції $f(x) = 5^{log_5(x-3)}$.

Розв'язання:



Дана функція визначена на множині $D(f) = (3; +\infty)$.
Оскільки $5^{log_5(x-3)} = x - 3$ для всіх значень $x \in D(f)$, то приходимо до висновку, що графіком функції $f(x)$ є частина прямої $y = x - 3, x > 3$ (див. рис.).

Рисунок 3.1 – Ілюстрація до задачі 3.6

3.7 (4.31$^{\cdot\cdot}$, див. [6]) Обчисліть значення виразу $5^{\frac{4}{log_{\sqrt{3}}5}+\frac{1}{2}log_5 4} + 36log_2 \sqrt[4]{2\sqrt[3]{2}}$.

Розв'язання:

$$5^{\frac{4}{log_{\sqrt{3}}5}+\frac{1}{2}log_5 4} = 5^{4log_5\sqrt{3}} \cdot (5^{log_5 4})^{\frac{1}{2}} = \left(5^{log_5\sqrt{3}}\right)^4 \cdot 4^{\frac{1}{2}} = \left(\sqrt{3}\right)^4 \cdot 2 = 9 \cdot 2 = 18;$$

$$36log_2 \sqrt[4]{2\sqrt[3]{2}} = 36 \cdot \frac{1}{4} log_2 \sqrt[3]{2^3 \cdot 2} = 9 \cdot \frac{1}{3} log_2 2^4 = 3 \cdot 12;$$

$$18 + 12 = 30.$$

Відповідь: 30.

3.8 (4.36$^{\cdot\cdot}$, див. [6]) Доведіть, що значення виразу $log_{9-4\sqrt{5}}(9 + 4\sqrt{5})$ є цілим числом.

Доведення:

$$log_{9-4\sqrt{5}}\left(9 + 4\sqrt{5}\right) = log_{9-4\sqrt{5}} \frac{(9 + 4\sqrt{5})(9 - 4\sqrt{5})}{(9 - 4\sqrt{5})} =$$

$$= log_{9-4\sqrt{5}} \frac{9^2 - (4\sqrt{5})^2}{(9 - 4\sqrt{5})} = log_{9-4\sqrt{5}} \frac{81 - 80}{(9 - 4\sqrt{5})} = log_{9-4\sqrt{5}} \frac{1}{(9 - 4\sqrt{5})} =$$

$$= log_{9-4\sqrt{5}}(9 - 4\sqrt{5})^{-1} = -1 \in Z.$$

Що і треба було довести.■

3.9 (4.38(1)$^{\cdot\cdot}$, див. [6]) Чому дорівнює значення виразу

$$lgsin1^\circ \cdot lgsin2^\circ \cdot lgsin3^\circ \cdot \ldots \cdot lgsin89^\circ \cdot lgsin90^\circ?$$

Розв'язання:

Як правило, вирази з великою кількістю множників (доданків) мають містити якусь особливість. Спробуємо її знайти.

Зрозуміло, що нам відомі лише табличні значення синуса. Отже, так як $sin90^\circ = 1$, то $lgsin90^\circ = lg1 = 0$. А так як один з множників добутку дорівнює нулю, то і весь добуток дорівнює нулю.

Відповідь: 0.

3.10 (4.41(8)$^{\cdot\cdot}$, див. [6]) Побудуйте графік функції $y = log_{\frac{1}{2}} log_{3-x}(3-x)^4$.

Розв'язання:

Знайдемо область визначення функції:

$$\begin{cases} (3-x)^4 > 0, \\ 3-x > 0, \\ 3-x \neq 1, \\ log_{3-x}(3-x)^4 > 0; \end{cases} \begin{cases} 3-x \neq 0, \\ -x > -3, \\ -x \neq -2, \\ x \in R; \end{cases} \begin{cases} x \neq 3, \\ x < 3, \\ x \neq 2; \end{cases} \quad x \in (-\infty; 2) \cup (2; 3).$$

Спростимо вираз:

$$log_{\frac{1}{2}} log_{3-x}(3-x)^4 = log_{\frac{1}{2}} 4 = -2.$$

Таким чином, треба побудувати графік функції $y = -2$ при $x \in (-\infty; 2) \cup (2; 3)$ (рис. 3.2).

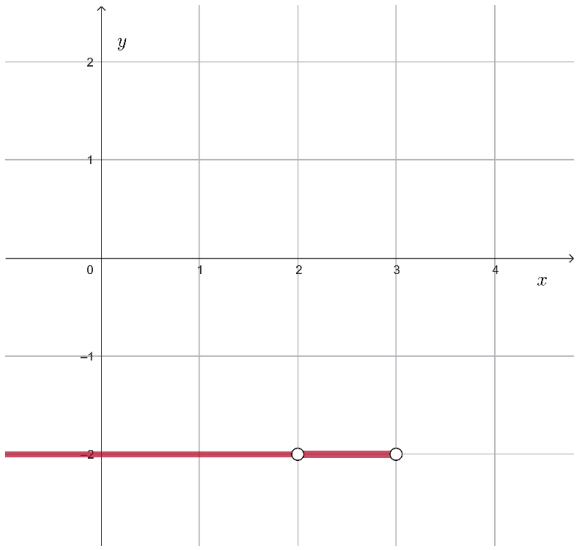


Рисунок 3.2 – Ілюстрація до задачі 3.10

3.11 (4.50(1)$^{\cdot\cdot}$, див. [6]) Знайдіть $log_8 9$, якщо $log_{12} 18 = a$.

Розв'язання:

Позначимо $log_8 9 = x$, тоді $\frac{2}{3} log_2 3 = x$, $log_2 3 = \frac{3}{2}x$, $3 = 2^{\frac{3x}{2}}$. З умови $log_{12} 18 = a$ отримаємо:

$$12^a = 2^{2a} \cdot 3^a, \qquad 18 = 2 \cdot 3^2;$$

$$2^{2a-1} \cdot 3^{a-2} = 1;$$

$$2^{2a-1} \cdot \left(2^{\frac{3x}{2}}\right)^{a-2} = 1;$$

$$2^{2a-1+\frac{3x(a-2)}{2}} = 1;$$

$$2a - 1 + \frac{3x(a-2)}{2} = 0;$$

$$\frac{3x(a-2)}{2} = 1 - 2a;$$

$$x = \frac{2(1-2a)}{3(a-2)}.$$

Відповідь: $x = \frac{2(1-2a)}{3(a-2)}$.

3.12 Знайдіть область визначення функцій:

$$1)\ f(x) = log_{0,3}(x^2 + 3x);\ \ 2)\ f(x) = \frac{\lg(9-x^2)}{\lg(x+2)};\ 3)\ f(x) = log_{x-4}(16 - x).$$

Розв'язання:

1) Оскільки областю визначення логарифмічної функції є множина додатних чисел, то областю визначення даної функції є множина розв'язків нерівності $x^2 + 3x > 0$. Маємо $x(x+3) > 0$; $x < -3$ або $x > 0$.Отже, $D(f) = (-\infty; -3) \cup (0; +\infty)$.

2) Вираз $\lg(9 - x^2)$ має зміст при $9 - x^2 > 0$, вираз $\lg(x+2)$ – при $x + 2 > 0$. Крім того, знаменник дробу не може дорівнювати нулю, тому $\lg(x+2) \neq 0$. Таким чином, область визначення $D(f)$ данної функції є множиною розвязків системи нерівностей

$$\begin{cases} 9 - x^2 > 0, \\ x + 2 > 0, \\ x + 2 \neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 < 9, \\ x > -2, \\ x \neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} -3 < x < 3, \\ x > -2, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

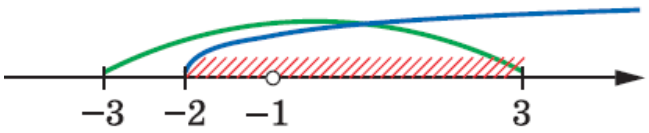


Рисунок 3.3 – Ілюстрація до задачі 3.12(2)

Звернувшись до рисунка, доходимо висновку, що остання система рівносильна сукупності $\left[\begin{array}{l} -2 < x < -1, \\ -1 < x < 3. \end{array}\right.$

Отже, $D(f) = (-2; -1) \cup (-1; 3)$.

3) Область визначення даної функції знайдемо, розв'язавши систему нерівностей:

$$\begin{cases} 16-x>0, \\ x-4>0, \\ x-4\neq 1; \end{cases} \begin{cases} x<16, \\ x>4, \\ x\neq 5; \end{cases} \left[\begin{array}{l} 4<x<5, \\ 5<x<16. \end{array}\right.$$

Звідси $D(f)=(4;5)\cup(5;16)$.

Відповідь: 1) $D(f)=(-\infty;-3)\cup(0;+\infty)$; 2) $D(f)=(-2;-1)\cup(-1;3)$; 3) $D(f)=(4;5)\cup(5;16)$.

3.13 (2.24¨, див. [6]) При яких значеннях параметра a рівняння $9^x-(a+1)\cdot 3^x+3a-6=0$ має єдиний корінь?

Розв'язання:

Введемо заміну $3^x=t>0$. Тоді рівняння перетвориться до вигляду:

$$t^2-(a+1)\cdot t+3a-6=0;$$

$$D=(a+1)^2-4(3a-6)=a^2+2a+1-12a+24=$$

$$=a^2-10a+25=(a-5)^2.$$

При $a=5$ дискримінант $D=0$, $t=\frac{5+1}{2}=3, x=1$. При $a\neq 5$:

$$t_1=\frac{a+1+(a-5)}{2}=\frac{2a-4}{2}=a-2;$$

$$t_1=\frac{a+1-(a-5)}{2}=\frac{6}{2}=3.$$

Для того, щоб рівняння мало єдиний корінь, треба, щоб $a-2\leq 0$, $a\leq 2$. Тоді $a\in(-\infty;2]\cup\{5\}$.

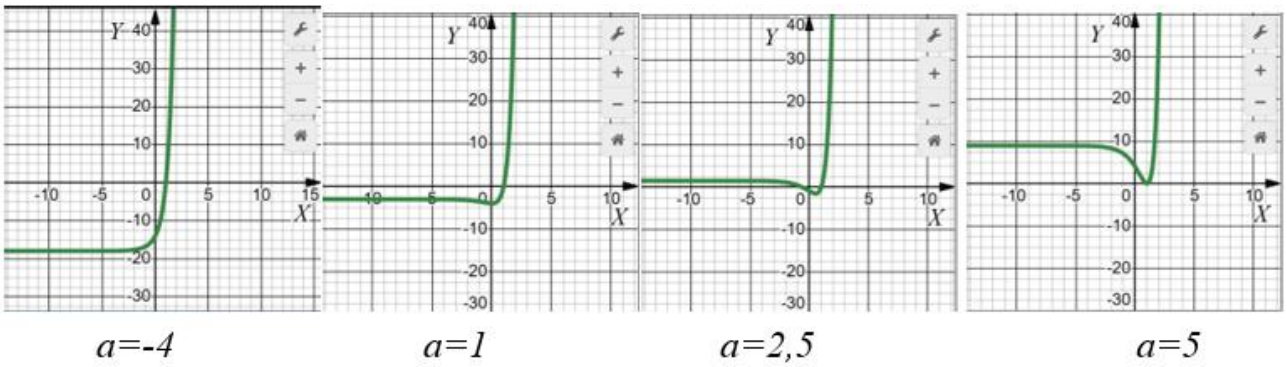


Рисунок 3.4 – Ілюстрація до задачі 3.13

Відповідь: $a\in(-\infty;2]\cup\{5\}$.

3.14 Знайти область визначення функції $y = log_{x-1}\frac{x+3}{x-2} + arcsin\frac{x-2}{x+4} - \sqrt{x}$.

Розв'язання:

Задана функція є суперпозицією трьох функцій: логарифмічної, арксинуса та степеневої. Тому знайдемо область визначення кожної з них окремо, а результати перетнемо.

Логарифмічна функція визначена тоді, коли основа логарифма додатна та не дорівнює одиниці, а підлогарифмічний вираз більший, ніж нуль, тобто

$$\begin{cases} x-1>0, \\ x-1\neq 1, \\ \dfrac{x+3}{x-2}>0. \end{cases}$$

1. $x-1>0 \;\Rightarrow\; x>1 \;\Rightarrow\; x\in(1;\ +\infty)$.

2. $x-1\neq 1 \;\Rightarrow\; x\neq 2 \;\Rightarrow\; x\in(-\infty;\ 2)\cup(2;\ +\infty)$.

3. $\frac{x+3}{x-2}>0 \;\Rightarrow\; x\in(-\infty;\ -3)\cup(2;\ +\infty)$.

Тоді остаточно маємо $x\in(2;\ +\infty)$.

Для функції $y = arcsin\, x$ областю визначення є відрізок $[-1;\ 1]$, тоді на аргумент функції, що розглядається, накладається наступне обмеження:

$$\frac{x-2}{x+4}\in[-1;\ 1] \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \dfrac{x-2}{x+4}\geq -1, \\ \dfrac{x-2}{x+4}\leq 1. \end{cases}$$

1. $\frac{x-2}{x+4}\geq -1 \;\Rightarrow\; \frac{x-2}{x+4}+1\geq 0 \;\Rightarrow\; \frac{x-2+x+4}{x+4}\geq 0 \;\Rightarrow x\in(-\infty;\ -4)\cup[-1;\ +\infty)$.

2. $\frac{x-2}{x+4}\leq 1 \;\Rightarrow\; \frac{-6}{x+4}\leq 0 \;\Rightarrow\; x+4>0 \;\Rightarrow\; x>-4 \;\Rightarrow\; x\in(-4;\ +\infty)$.

В перетині будемо мати: $x\in[-1;\ +\infty)$

Функція $y=\sqrt{x}$ визначена, коли $x\in[0;\ +\infty)$.

Отже, шукану область визначення для заданої функції знаходимо як перетин множин:

$$\begin{cases} x\in(2;\ +\infty), \\ x\in[-1;\ +\infty), \\ x\in[0;\ +\infty). \end{cases}$$

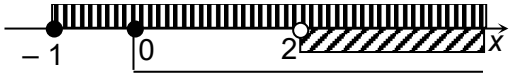


Рисунок 3.5 – Ілюстрація до задачі 3.14

Остаточно, шукана область визначення $D(y)$: $x\in(2;\ +\infty)$.

Відповідь: $D(y)$: $x\in(2;\ +\infty)$.

3.15 Побудуйте графік функції $f(x) = \begin{cases} |x+3|,\ x \le 0; \\ (x-2)^3,\ 0 < x < 2; \\ 1,\ x = 2; \\ log_2(x-2),\ x \in (2;\ 4]; \\ 2^{x-4},\ x > 4. \end{cases}$

Розв'язання:

Задана функція являє собою кусково-неперервну функцію, яка на різних проміжках задана різними аналітичними виразами. Тому побудуємо наведені графіки функцій та залишимо ті їх частини, які належать зазначеним проміжкам.

1) $y_1(x) = |x+3|,\ x \in (-\infty;\ 0]$. Цю функцію побудуємо за допомогою наступних ланцюжків елементарних перетворень (рис. 3.6): $x \to |x| \to |x+3|$.

2) $y_2(x) = (x-2)^3,\ x \in (0;\ 2)$ (рис. 3.6): $x^3 \to (x-2)^3$.

3) $y_3(x) = 1,$ при $x = 2$, тобто маємо точку $(2;\ 1)$ координатної площини.

4) $y_4(x) = log_2(x-2),\ x \in (2;\ 4]$ (рис. 3.7): $log_2 x \to log_2(x-2)$.

5) $y_5(x) = 2^{x-4},\ x \in (4;\ +\infty)$ (рис. 3.7): $2^x \to 2^{x-4}$.

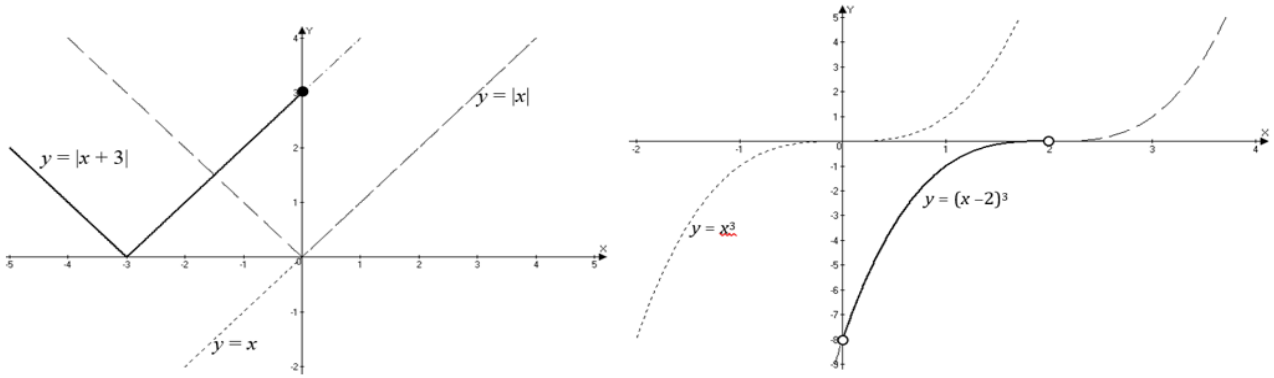


Рисунок 3.6 – Ілюстрація до задачі 3.15

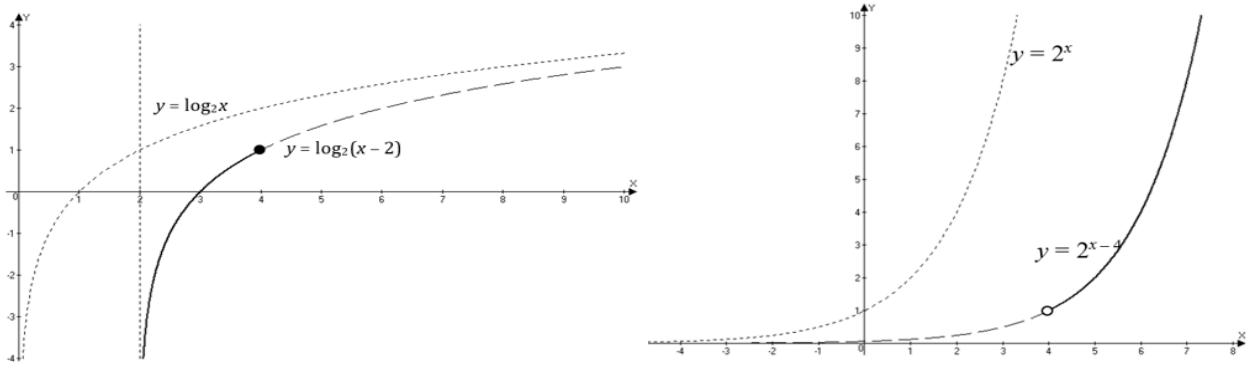


Рисунок 3.7 – Ілюстрація до задачі 3.15

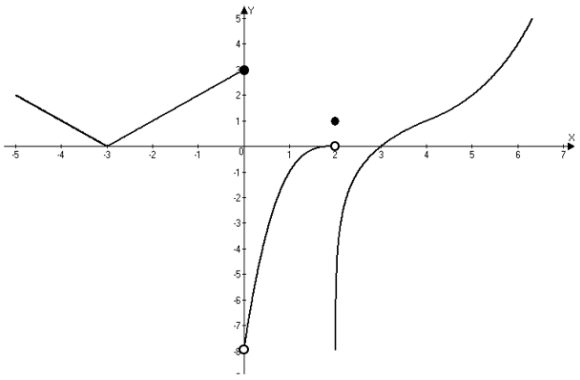


Рисунок 3.8 – Ілюстрація до задачі 3.15

Після побудови всіх графіків п.1-5, що зображені на рис. 3.6, 3.7, в одній системі координат отримаємо графік для заданої функції $f(x)$ (рис. 3.8).

Завдання до лабораторної роботи 3

1. Дослідить на парність функцію 1) $y = \frac{2^x - 3^x}{2^x + 3^x}$; 2) $y = \left(2 + \sqrt{3}\right)^x + \left(2 - \sqrt{3}\right)^x$; 3) $y = lg\left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right)$.
2. Знайдіть область значень функції $y = \frac{3^x}{3^x - 3^2}$.
3. Розв'яжіть нерівність
   1) $2^{x^2} \geqslant \sin x$; 2) $2^{-x^2} \geqslant |\sin x| + 1$; 3) $2^{\sqrt{x}} \geqslant 1 - x^2$.
4. Розв'яжіть нерівність $5^x + 12^x > 13^x$, користуючись властивостями показникової функції.
5. Обчисліть значення виразу $6^{\frac{6}{log_{\sqrt{2}}6} + \frac{1}{3}log_6 27} - 12log_7 \sqrt[5]{7\sqrt[4]{7}}$.
6. Побудуйте графік функції 1) $y = log_3 log_{x+1}(x+1)^{27}$; 2) $y = log_x x$;
   3) $y = \begin{cases} 2 - x, \ x < 0; \\ -1, \ x = 0; \\ x^2 + 2, \ 0 < x \leq 2; \\ 3^{x-4}, \ 2 < x \leq 4; \\ lg(x-4), \ x > 4; \end{cases}$
7. Знайдіть $\log_{30} 8$, якщо $lg\ 5 = a,\ lg\ 3 = b$.
8. Чому дорівнює значення виразу 1) $log_4 5 \cdot log_5 6 \cdot log_6 7 \cdot log_7 32$;
   2) $\lg \operatorname{tg} 1^\circ + \lg \operatorname{tg} 2^\circ + \lg \operatorname{tg} 3^\circ + \ldots + \lg \operatorname{tg} 88^\circ + \lg \operatorname{tg} 89^\circ$?
9. Використовуючи елементарні перетворення графіків функцій, побудуйте графіки функцій $y(x)$: 1) $y = \left|log_{\frac{1}{2}}|x+1|\right|$; 2) $y = -|log_2|3x+3| - 1|$.
10. При яких значеннях параметра a рівняння $\left(\sqrt{x} - a\right)(9^x - 4 \cdot 3^x + 3) = 0$ має два різних корені?

!!! ЗАУВАЖЕННЯ !!! Для завдань 1, 2, 6, 9 крім повного розв'язку підготуйте графічну ілюстрацію (Desmos, GeoGebra тощо), для завдання10 крім повного розв'язку підготуйте в GeoGebra (Desmos) динамічну графічну ілюстрацію.

Лабораторне заняття 4 Лінія рівнянь та нерівностей в профільній школі: ірраціональні рівняння та нерівності.

4.1 Ірраціональні рівняння та системи рівнянь

4.1.1 Ірраціональні рівняння.

Найпростіші ірраціональні рівняння.

При розв'язанні такі рівняння доцільніше за все привести до одного з виглядів

$$\sqrt[n]{f(x)} = g(x) \text{ або } \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)},$$

та користуватись наступними твердженнями:

Твердження 4.1 $\sqrt[2n]{f(x)} = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = [g(x)]^{2n}. \end{cases}$

Твердження 4.2 $\sqrt[2n]{f(x)} = \sqrt[2n]{g(x)} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) \geq 0 (\text{або } g(x) \geq 0), \\ f(x) = g(x). \end{cases}$

Перша умова системи обирається з врахуванням того, яка з нерівностей $f(x) \geq 0$ або $g(x) \geq 0$ є більш простою.

Твердження 4.3 $\sqrt[2n+1]{f(x)} = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = [g(x)]^{2n+1}.$

Твердження 4.4 $\sqrt[2n+1]{f(x)} = \sqrt[2n+1]{g(x)} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = g(x).$

4.1 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x+1} - \sqrt{9-x} = \sqrt{2x-12}$.

Розв'язання:

Знайдемо ОДЗ (підкореневі вирази повинні бути невід'ємні):

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x + 1 \geq 0, \\ 9 - x \geq 0, \\ 2x - 12 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -1, \\ x \leq 9, \\ x \geq 6 \end{cases} \Rightarrow \quad x \in [6;\ 9].$$

Перенесемо вираз $\sqrt{9-x}$ з лівої частини рівняння в праву:

$$\sqrt{x+1} = \sqrt{2x-12} + \sqrt{9-x}.$$

Оскільки після цього права та ліва частини нерівності є невід'ємними, то піднесемо їх до квадрату:

$$\left(\sqrt{x+1}\right)^2 = \left(\sqrt{2x-12} + \sqrt{9-x}\right)^2,$$

$$x + 1 = 2x - 12 + 2 \cdot \sqrt{2x-12}\sqrt{9-x} + 9 - x.$$

Після спрощення будемо мати:

$$2\sqrt{(2x-12)(9-x)}=4,\ \Big|:2\ \Rightarrow\ \sqrt{-2x^2+30x-108}=2.$$

Ще раз підносимо до квадрату:

$$-2x^2+30x-108=4\quad\Rightarrow\quad x^2-15x+56=0.$$

Коренями отриманого квадратного рівняння є $x_1=7,\ x_2=8.$

Обидва значення належать ОДЗ.

Відповідь: $x_1=7,\ x_2=8.$

4.2 Знайдіть корені рівняння $\sqrt{x^2+2x+10}=2x-1.$

Розв'язання:

Згідно з твердженням 4.1, задане рівняння еквівалентне наступній системі:

$$\begin{cases}2x-1\geq 0,\\ x^2+2x+10=(2x-1)^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geq\dfrac{1}{2},\\ x^2+2x+10=4x^2-4x+1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x\geq\frac{1}{2},\\ 3x^2-6x-9=0\ \ |:3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geq\frac{1}{2},\\ x^2-2x-3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geq\frac{1}{2},\\ \left[\begin{array}{l}x_1=-1,\\ x_2=3\end{array}\right.\end{cases}\Rightarrow\quad x=3.$$

Відповідь: $x=3.$

Розв'язання ірраціональних рівнянь методом заміни.

4.3 Розв'яжіть рівняння $3x^2+15x+2\sqrt{x^2+5x+1}=2.$

Розв'язання:

Знаходимо ОДЗ:

$$x^2+5x+1\geq 0.$$

Розв'яжемо дану нерівність методом інтервалів. Для цього ліву частину нерівності потрібно розкласти на множники. Знайдемо корені рівняння $x^2+5x+1=0$:

$$D=5^2-4\cdot 1\cdot 1=25-4=21=\sqrt{21}^2\Rightarrow x_{1,\,2}=\frac{-5\pm\sqrt{21}}{2}.$$

Тоді нерівність приймає вигляд:

$$\left(x-\frac{-5+\sqrt{21}}{2}\right)\left(x-\frac{-5-\sqrt{21}}{2}\right)\geq 0\Rightarrow x\in\left(-\infty;\ \frac{-5-\sqrt{21}}{2}\right]\cup\left[\frac{-5+\sqrt{21}}{2};\ +\infty\right).$$

Переходимо тепер безпосередньо до розв'язання заданого рівняння. Зробимо заміну

$$\sqrt{x^2+5x+1}=y,\ y\geq 0.$$

Тоді

$$x^2+5x+1=y^2 \quad \Rightarrow \quad x^2+5x=y^2-1.$$

Отже, $3x^2+15x=3(x^2+5x)=3(y^2-1)=3y^2-3$.

Рівняння в нових змінних набуває вигляду:

$$3y^2-3+2y=2 \quad \Rightarrow \quad 3y^2+2y-5=0.$$

Знаходимо корені отриманого квадратного рівняння:

$$D=2^2-4\cdot 3\cdot(-5)=4+60=64=8^2 \quad \Rightarrow \quad y_{1,\,2}=\frac{-2\pm 8}{2\cdot 3}$$
$$=\begin{bmatrix}1,\\ -\frac{5}{3}<0\notin ОДЗ.\end{bmatrix}$$

Таким чином, маємо значення $y=1$.

Робимо обернену заміну:

$$\sqrt{x^2+5x+1}=1 \quad \Rightarrow \quad x^2+5x+1=1 \quad \Rightarrow \quad x^2+5x=0 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad x(x+5)=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=0,\ x_2=-5.$$

Обидва отриманих значення належать ОДЗ.

Відповідь: $x_1=0,\ x_2=-5$.

Ірраціональні рівняння виду $\sqrt[3]{f(x)}\pm\sqrt[3]{g(x)}=c$.

При розв'язанні рівнянь такого виду будемо користуватись формулами скороченого множення (ФСМ)

$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3.$$

4.4. Розв'яжіть рівняння $\sqrt[3]{2x+13}-\sqrt[3]{2x-13}=2$.

Розв'язання:

Піднесемо обидві частини заданого рівняння до куба:

$$\left(\sqrt[3]{2x+13}-\sqrt[3]{2x-13}\right)^3=2^3.$$

Тоді після використання ФСМ, будемо мати:

$$2x+13-3\cdot\left(\sqrt[3]{2x+13}\right)^2\cdot\sqrt[3]{2x-13}+3\cdot\sqrt[3]{2x+13}\cdot\left(\sqrt[3]{2x-13}\right)^2-$$
$$(2x-13)=8,$$

$$26 - 3 \cdot \sqrt[3]{2x+13} \cdot \sqrt[3]{2x-13} \cdot \underbrace{\left(\sqrt[3]{2x+13} - \sqrt[3]{2x-13}\right)}_{\text{дорівнює } 2 \text{ за умовою}} = 8.$$

Остання рівність еквівалентна системі:

$$\begin{cases} -3 \cdot \sqrt[3]{(2x+13)(2x-13)} \cdot 2 = -18, \\ \sqrt[3]{2x+13} - \sqrt[3]{2x-13} = 2. \end{cases}$$

Розв'яжемо перше її рівняння:

$$-6 \cdot \sqrt[3]{4x^2 - 169} = -18 \quad \big| : (-6),$$

$$\sqrt[3]{4x^2 - 169} = 3,$$

$$4x^2 - 169 = 3^3 \quad \Rightarrow \quad 4x^2 = 196 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 49 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 7.$$

Перевіримо, чи задовольнять отримані значення друге рівняння записаної вище системи:

$x_1 = 7$*:*

$$\sqrt[3]{2 \cdot 7 + 13} - \sqrt[3]{2 \cdot 7 - 13} = 2 \quad \Rightarrow \quad 3 - 1 = 2 \quad \Rightarrow \quad 2 = 2,$$

отримали правильну рівність, тобто значення $x_1 = 7$ є коренем вихідного рівняння;

$x_2 = -7$:

$$\sqrt[3]{2 \cdot (-7) + 13} - \sqrt[3]{2 \cdot (-7) - 13} = 2 \quad \Rightarrow \quad -1 - (-3) = 2 \quad \Rightarrow \quad 2 = 2,$$

тобто й друге значення $x_2 = -7$ є коренем.

Відповідь: $x_{1,\,2} = \pm 7$.

4.5 (10.24(3)$^{\cdot\cdot}$, див. [5]) В залежності від значення параметра a визначте кількість коренів рівняння $(x - a)\left(\sqrt[4]{x} - 1\right) = 0$.

Розв'язання:

Визначимо область допустимих значень рівняння. Так як рівняння мість корінь четвертого степеня, то $x \geq 0$. Розв'яжемо рівняння:

$$(x - a)\left(\sqrt[4]{x} - 1\right) = 0,$$

$$\left[\begin{array}{l} x - a = 0, \\ \sqrt[4]{x} - 1 = 0; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = a, \\ \sqrt[4]{x} = 1; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = a, \\ x = 1. \end{array}\right.$$

З урахуванням ОДЗ зрозуміло, що при $a < 0$ або $a = 1$ буде єдиний корінь $x = 1$; при $a \in [0; 1) \cup (1; +\infty)$ коренів буде два $x = 1$ та $x = a$.

Відповідь: при $a \in (-\infty; 0) \cup \{1\}$ один корінь; при $a \in [0; 1) \cup (1; +\infty)$ два корені.

4.6 (13.16(1)$^{\cdot\cdot}$, див. [5]) Розв'яжіть рівняння

$$\sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{x^2 + 2x - 8} = \sqrt{x^2 - 6x + 8}.$$

Розв'язання:

Запишемо ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2 - 4 \geq 0, \\ x^2 + 2x - 8 \geq 0, \\ x^2 - 6x + 8 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x+2) \geq 0, \\ (x-2)(x+4) \geq 0, \\ (x-2)(x-4) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty), \\ x \in (-\infty; -4] \cup [2; +\infty), \\ x \in (-\infty; 2] \cup [4; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty; -4] \cup \{2\} \cup [4; +\infty).$$

Розкладемо підкореневі вирази на множники:

$$\sqrt{(x-2)(x+2)} + \sqrt{(x-2)(x+4)} - \sqrt{(x-2)(x-4)} = 0.$$

Зрозуміло, що всі вони мають спільний множник, проте винести його без обмежень з огляду на ОДЗ неможливо. Тому розглянемо такі випадки:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in \{2\} \cup [4; +\infty), \\ \sqrt{x-2}\left(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+4} - \sqrt{x-4}\right) = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (-\infty; -4], \\ \sqrt{-x+2}\left(\sqrt{-x-2} + \sqrt{-x-4} - \sqrt{-x+4}\right) = 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2; \\ \begin{cases} x \in \{2\} \cup [4; +\infty), \\ \sqrt{x+2} + \sqrt{x+4} - \sqrt{x-4} = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (-\infty; -4], \\ \sqrt{-x-2} + \sqrt{-x-4} - \sqrt{-x+4} = 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Зрозуміло, що після дворазового піднесення до квадрату останні два ірраціональні рівняння легко можуть бути розв'язаними. Передостаннє рівняння коренів не має. Розв'язком останнього буде лише $x = \frac{-2-4\sqrt{13}}{3}$.

Відповідь: $\left\{2;\ \frac{-2-4\sqrt{13}}{3}\right\}$.

Різні прийоми розв'язування ірраціональних рівнянь та систем ірраціональних рівнянь.

4.7 (14.19$^{\cdot\cdot}$, див. [5]) Розв'яжіть рівняння $\sqrt{2-\sqrt{2-x}} = x$.

Розв'язання:

Визначимо ОДЗ:

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ 2-x \geq 0, \\ 2-\sqrt{2-x} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ x \leq 2, \\ \sqrt{2-x} \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ x \leq 2, \\ x \geq -2 \end{cases} \Rightarrow x \in [0;2].$$

Піднесемо обидві частини вихідного рівняння до квадрату:

$$2-\sqrt{2-x} = x^2.$$

Розглянемо функції $f(x) = 2-\sqrt{2-x}$ і $g(x) = x^2$. Побудуємо графіки цих функцій на відрізку $[0;2]$:

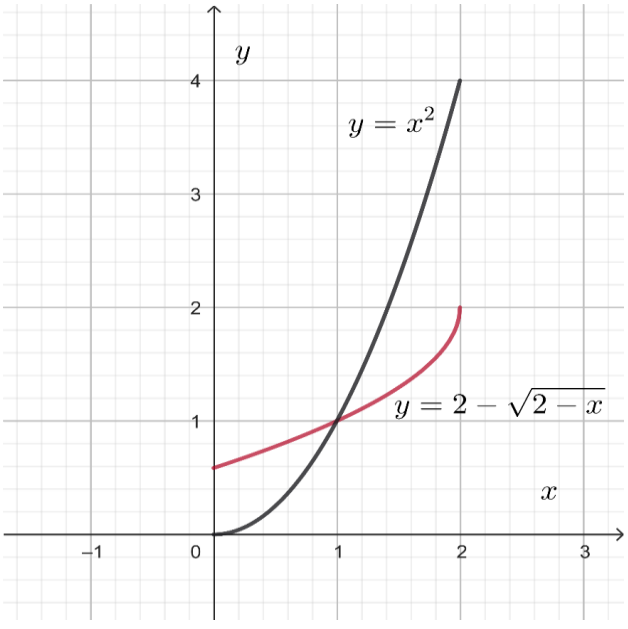


Рисунок 4.1 – Ілюстрація до задачі 4.3

Зрозуміло, що тільки при $x = 1$ має місце рівність $2 - \sqrt{2 - x} = x^2$. Отже, корінь заданого рівняння знайдено.

Відповідь: $x = 1$.

4.1.3 Ірраціональні нерівності.

4.8 (15.9(3, 4)¨, див. [5]) Розв'яжіть нерівність:
1) $\frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{x+10} \leq \frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{2x+9}$; 2) $\frac{\sqrt{x^2-3x-4}-3x+16}{6-x} > 1$.

Розв'язання:

1) Визначимо ОДЗ:

$$\begin{cases} 8 - 2x - x^2 \geq 0, \\ x + 10 \neq 0, \\ 2x + 9 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2 - x)(4 + x) \geq 0, \\ x \neq -10, \\ x \neq -4{,}5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [-4; 2], \\ x \neq -10, \\ x \neq -4{,}5 \end{cases} \Rightarrow x \in [-4; 2].$$

Перейдемо до розв'язання нерівності:

$$\frac{\sqrt{8 - 2x - x^2}}{x + 10} \leq \frac{\sqrt{8 - 2x - x^2}}{2x + 9},$$

$$\sqrt{8 - 2x - x^2}\left(\frac{1}{x + 10} - \frac{1}{2x + 9}\right) \leq 0,$$

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{8 - 2x - x^2} = 0, \\ \dfrac{1}{x + 10} - \dfrac{1}{2x + 9} \leq 0; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -4, \\ x = 2, \\ \dfrac{x - 1}{x + 10} \leq 0; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -4, \\ x = 2, \\ x \in (-10; 1] \end{array}\right. \Rightarrow x \in (-10; 1] \cup \{2\}.$$

При перетині з ОДЗ отримаємо відповідь задачі $x \in [-4; 1] \cup \{2\}$.

Відповідь: $x \in [-4; 1] \cup \{2\}$.

2) Визначимо ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 4 \geq 0, \\ 6 - x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+1)(x-4) \geq 0, \\ x \neq 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -1] \cup [4; +\infty), \\ x \neq 6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in (-\infty; -1] \cup [4; 6) \cup (6; +\infty).$$

Перейдемо до розв'язання нерівності:

$$\frac{\sqrt{x^2 - 3x - 4} - 3x + 16}{6 - x} - 1 > 0,$$

$$\frac{\sqrt{x^2 - 3x - 4} - 2x + 10}{6 - x} > 0.$$

З урахуванням ОДЗ:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in (-\infty; -1] \cup [4; 6), \\ \sqrt{x^2 - 3x - 4} - 2x + 10 > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (6; +\infty), \\ \sqrt{x^2 - 3x - 4} - 2x + 10 < 0; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in (-\infty; -1] \cup [4; 6), \\ \sqrt{x^2 - 3x - 4} > 2x - 10; \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (6; +\infty), \\ \sqrt{x^2 - 3x - 4} < 2x - 10; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x \in (-\infty; -1] \cup [4; 5), \\ \begin{cases} x \in [5; 6), \\ x^2 - 3x - 4 > (2x - 10)^2; \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (6; +\infty), \\ x^2 - 3x - 4 < (2x - 10)^2; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x \in (-\infty; -1] \cup [4; 5), \\ \begin{cases} x \in [5; 6), \\ 3x^2 - 37x + 104 < 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (6; +\infty), \\ 3x^2 - 37x + 104 > 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Знайдемо корені квадратного рівняння:

$$3x^2 - 37x + 104 = 0,$$

$$D = 37^2 - 4 \cdot 3 \cdot 104 = 121,$$

$$x_{1,2} = \frac{37 \pm 11}{2 \cdot 3} = \left[\begin{array}{l} 8, \\ \dfrac{13}{3} = 4\dfrac{1}{3}. \end{array}\right.$$

Тоді:

$$\left[\begin{array}{l} x \in (-\infty; -1] \cup [4; 5), \\ \begin{cases} x \in [5; 6), \\ x \in \left(4\dfrac{1}{3}; 8\right); \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (6; +\infty), \\ x \in \left(-\infty; 4\dfrac{1}{3}\right) \cup (8; +\infty). \end{cases} \end{array}\right.$$

Остаточна відповідь матиме вигляд $x \in (-\infty; -1] \cup [4; 6) \cup (8; +\infty)$.

Відповідь: $x \in (-\infty; -1] \cup [4; 6) \cup (8; +\infty)$.

4.9 (15.14¨, див. [5]) Розв'яжіть нерівність: $\sqrt[3]{x-2} + \sqrt{x^3+8} < 4$.

Розв'язання:

Визначимо ОДЗ:

$$x^3 + 8 \geq 0 \Longrightarrow x^3 \geq -8 \Longrightarrow x \geq -2.$$

Розглянемо функцію $f(x) = \sqrt[3]{x-2} + \sqrt{x^3+8}$. Вона є зростаючою на всій області визначення як сума двох зростаючих функцій. Значення 4 вона приймає при $x = 2$. Отже, нерівність $f(x) < 4$ виконуватиметься при $x \in [-2; 2)$,що і є множиною розв'язків вихідної нерівності.

Відповідь: $x \in [-2; 2)$.

4.10 Розв'яжіть нерівність $\sqrt{x+7} > x + 1$.

Розв'язання:

Задана нерівність еквівалентна сукупності систем нерівностей

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + 1 < 0, \\ x + 7 \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x + 1 \geq 0, \\ x + 7 > (x+1)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < -1, \\ x \geq -7, \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq -1, \\ x + 7 > x^2 + 2x + 1 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \in [-7;\ -1), \\ \begin{cases} x \geq -1, \\ x^2 + x - 6 < 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Розв'яжемо окремо останню квадратну нерівність:

$$x^2 + x - 6 < 0 \quad \Rightarrow \quad (x+3)(x-2) < 0 \quad \Rightarrow \quad x \in (-3;\ 2).$$

Отже, сукупність приймає вигляд:

$$\begin{bmatrix} x \in [-7;\ -1), \\ \begin{cases} x \geq -1, \\ x \in (-3;\ 2) \end{cases} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \in [-7;\ -1), \\ x \in [-1;\ 2) \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad x \in [-7;\ 2).$$

Відповідь: $x \in [-7;\ 2)$.

4.11 Розв'яжіть нерівність $\sqrt{1-x} + \sqrt{x+3} \geq \sqrt{x^2+x-6}$.

Розв'язання:

ОДЗ: підкореневі вирази повинні бути невід'ємними:

$$\begin{cases} 1-x \geq 0, \\ x+3 \geq 0, \\ x^2+x-6 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 1, \\ x \geq -3, \\ (x+3)(x-2) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty;\ 1], \\ x \in [-3;\ +\infty), \\ x \in (-\infty;\ -3] \cup [2;\ +\infty) \end{cases} \Rightarrow x = -3.$$

Отже, область визначення заданої нерівності складається з єдиного значення $x = -3$. Це означає, що якщо нерівність і має розв'язки, то це може бути єдине значення, що дорівнює (– 3).

Перевіримо, чи буде воно розв'язком нерівності, для цього підставимо $x = -3$ в нерівність:

$$\sqrt{1-(-3)} + \sqrt{-3+3} \geq \sqrt{(-3)^2+(-3)-6} \quad \Rightarrow \quad 2+0 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 2 \geq 0.$$

Отримали правильну числову нерівність, а тоді робимо висновок, що вказане значення її задовольняє, тобто $x = -3$ або $x \in \{-3\}$.

Відповідь: $x = -3$.

4.12 Розв'яжіть нерівність $\sqrt{5-2x} - \sqrt{2x+1} \leq \sqrt{x-1}$.

Розв'язання:

ОДЗ: підкореневі вирази повинні бути більшими нуля або дорівнювати нулю, тобто маємо систему

$$\begin{cases} 5-2x \geq 0, \\ 2x+1 \geq 0, \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x \leq \frac{5}{2}, \\ x \geq -\frac{1}{2}, \\ x \geq 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x \in \left(-\infty;\ \frac{5}{2}\right], \\ x \left[-\frac{1}{2};\ +\infty\right), \\ x \in [1;\ +\infty) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x \in \left[1;\ \frac{5}{2}\right].$$

Перейдемо до розв'язання заданої нерівності. Перенесемо другий корінь, що знаходиться в лівій частині цієї нерівності, в її праву частину:

$$\sqrt{5-2x} \le \sqrt{x-1} + \sqrt{2x+1}.$$

Обидві частини нерівності тепер є невід'ємними величинами, а тому їх можна піднести до квадрату $\left(\sqrt{5-2x}\right)^2 \le \left(\sqrt{x-1} + \sqrt{2x+1}\right)^2$. Отримаємо

$$5 - 2x \le x - 1 + 2\sqrt{x-1}\sqrt{2x+1} + 2x + 1 \Rightarrow 2\sqrt{x-1}\sqrt{2x+1} \ge -5x + 5,$$

$$2\sqrt{(x-1)(2x+1)} \ge -5x + 5 \Rightarrow 2\sqrt{2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)} \ge -5x + 5.$$

Отримана нерівність еквівалентна сукупності

$$\left[\begin{cases} -5x + 5 \le 0, \\ 2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right) \ge 0, \end{cases} \right. \Rightarrow \left[\begin{cases} 5x \ge 5, \\ x \in \left(-\infty;\ -\frac{1}{2}\right] \cup [1;\ +\infty), \end{cases} \right. \Rightarrow$$
$$\left. \begin{cases} -5x + 5 > 0, \\ 2x^2 - x - 1 \ge (-5x+5)^2 \end{cases} \right. \qquad \left. \begin{cases} 5x < 5, \\ 2x^2 - x - 1 \ge 25x^2 - 50x + 25 \end{cases} \right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{cases} x \in [1;\ +\infty), \\ x \in \left(-\infty;\ -\frac{1}{2}\right] \cup [1;\ +\infty), \end{cases} \right. \Rightarrow \left[\begin{cases} x \in [1;\ +\infty), \\ x \in (-\infty;\ 1), \\ 23(x-1)\left(x-\frac{26}{23}\right) \le 0 \end{cases} \right. \Rightarrow \left[\begin{cases} x \in [1;\ +\infty), \\ x \in (-\infty;\ 1), \\ x \in \left[1;\ \frac{26}{23}\right] \end{cases} \right. \Rightarrow \quad x \in [1;\ +\infty).$$

Знаходимо перетин отриманого розв'язку з ОДЗ. Маємо $x \in \left[1;\ \frac{5}{2}\right]$.

Відповідь: $x \in \left[1;\ \frac{5}{2}\right]$.

4.13 Для кожного значення параметра a розв`яжіть нерівність

$$\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} < a.$$

Розв'язання:

Легко бачити, що $a > 0$. Для таких a ОДЗ: $-a \le x \le a$.

Обидві частини нерівності є додатними. Піднесемо до квадратів ліву та праву частини. Отримаємо рівносильну нерівність.

$$\left(\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}\right)^2 < a^2 \left(\sqrt{a+x}\right)^2 + 2\sqrt{a+x} \cdot \sqrt{a-x} + \left(\sqrt{a-x}\right)^2 < a^2,$$

$$a + x + 2\sqrt{a+x} \cdot \sqrt{a-x} + a - x < a^2 \Rightarrow 2\sqrt{a+x} \cdot \sqrt{a-x} < a^2 - 2a\ ,$$

Ліва частина отриманої нерівності є невід'ємною. Тому $a^2 - 2a > 0$.

$$\begin{cases} a > 0, \\ a^2 - 2a > 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \in (0; +\infty), \\ a \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty), \end{cases} \Rightarrow a \in (2; +\infty).$$

Піднесемо до квадратів ліву та праву частини. Отримаємо

$$4(a^2 - x^2) < a^4 - 4a^3 + 4a^2 \Rightarrow -4x^2 < a^4 - 4a^3 \Rightarrow x^2 > \frac{a^3}{4}(4 - a).$$

Якщо права частина від'ємна, то розв'язком буде будь-яке значення x із ОДЗ, тобто $x \in [-a; a]$ при $a \in (4; +\infty)$

Якщо $a = 4$, то $-a \le x \le a \Rightarrow -4 \le x \le 4$, і при цьому $x^2 > 0 \Rightarrow x \in (-4; 0) \cup (0; 4)$.

Тому $x \in (-4; 0) \cup (0; 4)$ при $a = 4$.

Якщо $2 < a < 4$, то $x \in [-a; \frac{-a\sqrt{4a-a^2}}{2}) \cup (\frac{a\sqrt{4a-a^2}}{2}; a]$.

якщо $a > 0$, то $-a \le x \le a$;

Відповідь: $x \in [-a; a]$ при $a \in (4; +\infty)$; $x \in [-a; \frac{-a\sqrt{4a-a^2}}{2}) \cup (\frac{a\sqrt{4a-a^2}}{2}; a]$ при $a \in (2; 4]$; при інших значеннях a розв`язків немає.

4.14 Розв`яжіть систему рівнянь $\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt[3]{x-y} = 6, \\ \sqrt[6]{(x+y)^3(x-y)^2} = 8. \end{cases}$

Розв'язання:

ОДЗ: $x + y \ge 0$.

$$\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt[3]{x-y} = 6, \\ \sqrt[6]{(x+y)^3(x-y)^2} = 8. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt[3]{x-y} = 6, \\ \sqrt{x+y} \cdot \sqrt[3]{|x-y|} = 8, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{cases} x - y < 0, \\ \sqrt{x+y} + \sqrt[3]{x-y} = 6, \\ \sqrt{x+y} \cdot \sqrt[3]{x-y} = -8. \end{cases} \right. \left. \begin{cases} x - y \ge 0, \\ \sqrt{x+y} + \sqrt[3]{x-y} = 6, \\ \sqrt{x+y} \cdot \sqrt[3]{x-y} = 8. \end{cases} \right.$$

1) $\begin{cases} x - y < 0, \\ \sqrt{x+y} + \sqrt[3]{x-y} = 6, \\ \sqrt{x+y} \cdot \sqrt[3]{x-y} = -8. \end{cases}$ Зробимо заміну $\begin{cases} u = \sqrt{x+y}, u \ge 0, \\ v = \sqrt[3]{x-y}, \ v < 0. \end{cases}$

Тоді приходимо до системи $\begin{cases} u + v = 6, \\ uv = -8. \end{cases}$ Розв'язком отриманої системи є

$\begin{cases} u_1 = 3 - \sqrt{17}, \\ v_1 = 3 + \sqrt{17}, \end{cases}$ і $\begin{cases} u_2 = 3 + \sqrt{17}, \\ v_2 = 3 - \sqrt{17}. \end{cases}$ Умова $\begin{cases} u \geq 0, \\ v < 0, \end{cases}$ залишає $\begin{cases} u_2 = 3 + \sqrt{17}, \\ v_2 = 3 - \sqrt{17}. \end{cases}$

Зворотня підстановка дає $\begin{cases} \sqrt{x+y} = 3 + \sqrt{17}, \\ \sqrt[3]{x-y} = 3 - \sqrt{17}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 26 + 6\sqrt{17}, \\ x - y = 180 - 44\sqrt{17}. \end{cases}$

Розв'язком отриманої системи є $\begin{cases} x = 103 - 19\sqrt{17}, \\ y = -77 + 25\sqrt{17}. \end{cases}$

2) Аналогічно розвяжемо другу систему $\begin{cases} x - y \geq 0, \\ \sqrt{x+y} + \sqrt[3]{x-y} = 6, \\ \sqrt{x+y} \cdot \sqrt[3]{x-y} = 8. \end{cases}$

Робимо заміну $\begin{cases} u = \sqrt{x+y}, u \geq 0, \\ v = \sqrt[3]{x-y},\ v \geq 0. \end{cases}$ Приходимо до системи $\begin{cases} u + v = 6, \\ uv = 8. \end{cases}$

Розв'язком отриманої системи є $\begin{cases} u_1 = 4, \\ v_1 = 2, \end{cases}$ і $\begin{cases} u_2 = 2, \\ v_2 = 4. \end{cases}$ Обідва розв'язки заовольняють умові $\begin{cases} u \geq 0, \\ v \geq 0. \end{cases}$

Приходимо до систем $\begin{cases} x + y = 16, \\ x - y = 8, \end{cases}$ і $\begin{cases} x + y = 4, \\ x - y = 64, \end{cases}$ розв'язками яких є $\begin{cases} x = 12, \\ y = 4 \end{cases}$ та $\begin{cases} x = 34, \\ y = -30, \end{cases}$

Відповідь: $\{(103 - 19\sqrt{17}; -77 + 25\sqrt{17}), (34; -30), (12; 4)\}$.

Завдання до лабораторної роботи 4

1. Розв'яжіть рівняння: $\sqrt{15 - x} + \sqrt{3 - x} = 6$.

2. Розв'яжіть рівняння: $\sqrt{x + 8 + 2\sqrt{x+7}} + \sqrt{x + 11 - 4\sqrt{x+7}} = 4$.

3. Розв'яжіть рівняння: $\sqrt[4]{(x^2 - 6x + 9)^2} = 4 - 3|x - 3|$.

4. Розв'яжіть рівняння: $\sqrt{3x + 25} - \sqrt{x - 4} = \sqrt{2x + 9}$.

5. Розв'яжіть рівняння: $\sqrt{2x^3 + 2x^2 + 3x + 3} = x + 1$.

6. Розв'яжіть рівняння:

$$\sqrt[4]{x(2-x)} + \sqrt[3]{x^4(2-x)^7(x+3)^5} + \sqrt[6]{(x-2)(x+1)x^2} + \sqrt[5]{(x+2)(x+6)} = 2.$$

7. Розв`яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x - y + \sqrt{\frac{x-y}{x+y}} = \frac{12}{x+y} \\ x^2 + y^2 = 41. \end{cases}$

8. Розв'яжіть нерівність $|x + 1| \cdot \sqrt{x - 4} \leq 0$.

9. Для кожного значення параметра a розв`яжіть систему нерівностей

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 3 + a > 0, \\ x^2 - 4x + 3 + a < 0. \end{cases}$$

10. Підготуйте за матеріалами підручників [7, 8] дві презентації: «Приклад повного розв'язання системи ірраціональних рівнянь», «Приклад повного розв'язання системи ірраціональних нерівностей». Рівень задач (N$^{\cdot\cdot}$ або N*).

Лабораторне заняття 5 Лінія рівнянь та нерівностей в профільній школі: Тригонометричні рівняння та нерівності..

5.1 Тригонометричні рівняння.

5.1 (27.13¨, див. [5]) При яких додатних значеннях параметра a проміжок $[0; a]$ містить не менше, ніж три корені рівняння $cosx = \frac{1}{2}$?

Розв'язання:

З огляду на проміжок $[0; a]$, знайдемо преші три невід'ємні корені заданого рівняння:

$$cosx = \frac{1}{2};$$
$$x = \pm arccos\frac{1}{2} + \pi k, k \in Z;$$
$$x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z.$$

Легко зрозуміти, що це будуть: $\frac{\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}$; $\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}$. Отже, при $a = \frac{4\pi}{3}$ проміжок $[0; a]$ містить рівно три корені рівняння, а при $a > \frac{4\pi}{3}$ проміжок $[0; a]$ містить не менше, ніж три корені рівняння. Таким чином, умова задачі виконується при $a \geq \frac{4\pi}{3}$.

Відповідь: $a \geq \frac{4\pi}{3}$.

5.2 (28.17¨, див. [5]) Скільки коренів в залежності від папаметра a має рівняння $\left(cosx - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(sinx - a) = 0$ на проміжку $[0; 2\pi)$?

Розв'язання:

$$\left(cosx - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(sinx - a) = 0;$$
$$\left[\begin{array}{l} cosx - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0, \\ sinx - a = 0; \end{array}\right.$$
$$\left[\begin{array}{l} cosx = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ sinx = a. \end{array}\right.$$

Для наочності побудуємо графіки функцій $y = cosx$ і $y = sinx$. Як бачимо, на проміжку $[0; 2\pi)$ рівняння $cosx = \frac{\sqrt{2}}{2}$ має два корені.

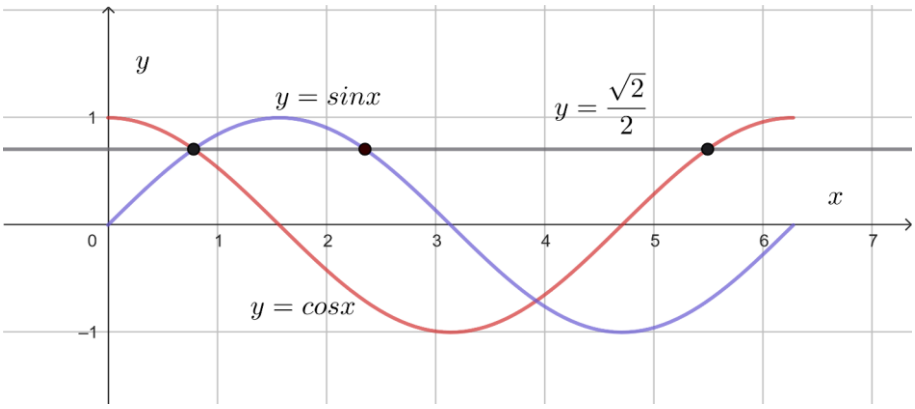


Рисунок 5.1 – Ілюстрація до задачі 5.2

Їх легко знайти, це $x = \frac{\pi}{4}$ і $x = \frac{7\pi}{4}$. Якщо $x = \frac{\pi}{4}$, то $sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Отже, при $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ на проміжку $[0; 2\pi)$ задане в умові рівняння буде мати три корені (див. вище). Також три корені будуть у випадках, коли $a = 1$ або $a = -1$.

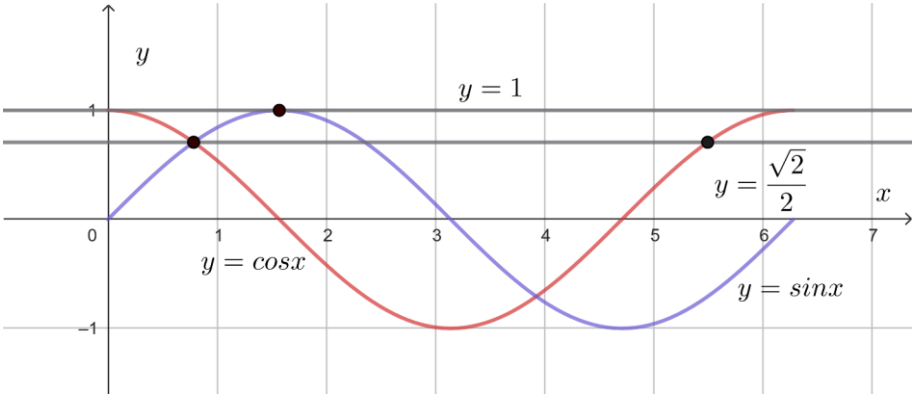


Рисунок 5.2 – Ілюстрація до задачі 5.2

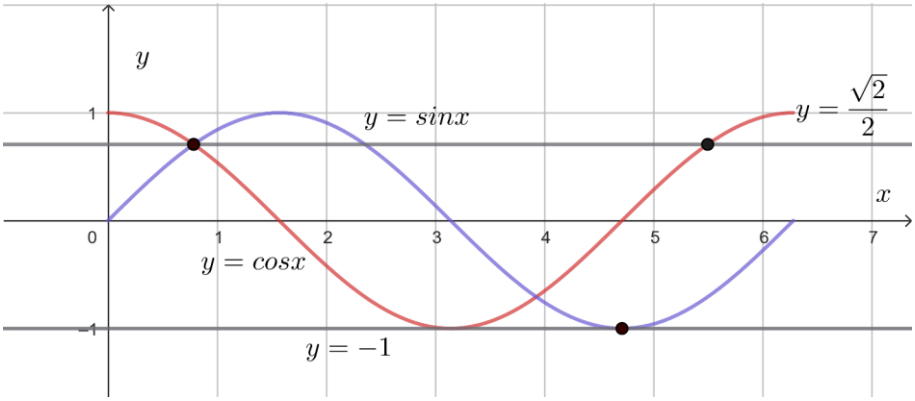


Рисунок 5.3 – Ілюстрація до задачі 5.2

З рисунка зрозуміло, що при $a \in (-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$ вихідне рівняння матиме тільки два корені. Якщо ж $a \in \left(-1;\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2};1\right)$ рівняння матиме чотири корені:

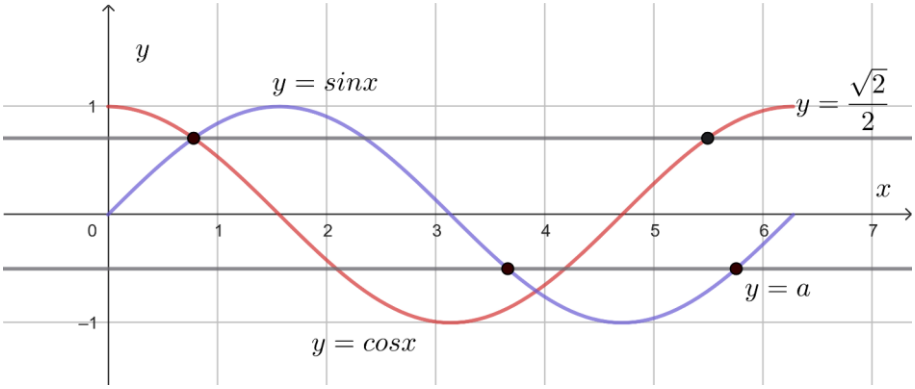


Рисунок 5.4 – Ілюстрація до задачі 5.2

Відповідь: при $a \in (-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$ рівняння має два корені; при $a \in \left\{-1;\frac{\sqrt{2}}{2};1\right\}$ – три корені; при $a \in \left(-1;\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2};1\right)$ – чотири корені.

Тригонометричні рівняння, які зводяться до алгебраїчних.

5.3 (31.29(2)¨, див. [5]) При яких значеннях параметра a проміжок $[0;a]$ містить рівно три корені рівняння $2cos^2x - \sqrt{3}cosx = 0$?

Розв'язання:

I спосіб
Розв'яжемо рівняння:

$$2cos^2x - \sqrt{3}cosx = 0,$$

$$cosx\left(2cosx - \sqrt{3}\right) = 0,$$

$$\left[\begin{array}{l} cosx = 0, \\ 2cosx - \sqrt{3} = 0; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} cosx = 0, \\ cosx = \dfrac{\sqrt{3}}{2}; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z, \\ x = \pm\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z. \end{array}\right.$$

Запишемо перші чотири недодатні корені вихідного рівняння: $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$. Тому при $a \in \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{11\pi}{6}\right)$ проміжок $[0; a]$ міститиме рівно три корені рівняння, а при $a \in \left[\frac{11\pi}{6}; +\infty\right)$ їх буде вже чотири, або більше.

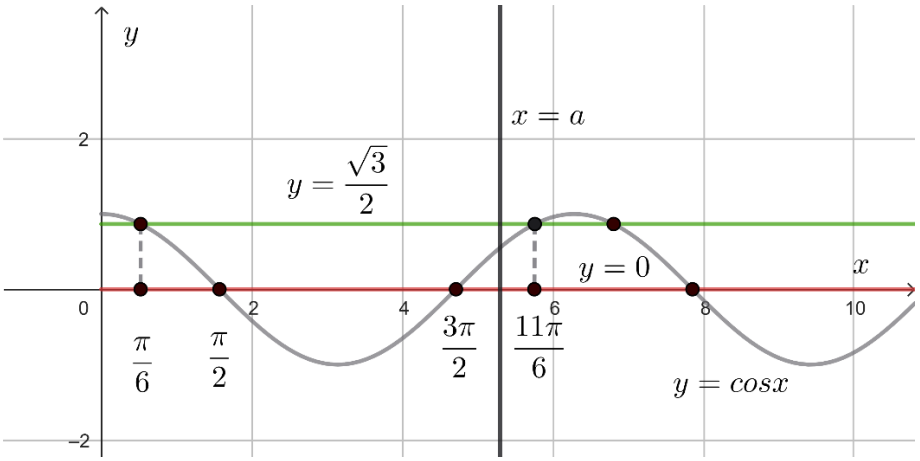


Рисунок 5.4 – Ілюстрація до задачі 5.3

Відповідь: $a \in \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{11\pi}{6}\right)$.

II спосіб

Розглянемо рівняння $2cos^2x - \sqrt{3}cosx = 0$. Зробимо заміну $\cos x = t$, та врахуємо, що $-1 \le \cos x \le 1$. Тоді можемо записати рівносильне вихідному рівняння. $2t^2 - \sqrt{3}t = 0, -1 \le t \le 1$.

$$\begin{cases} t = 0, \\ t = \frac{\sqrt{3}}{2}; \\ -1 \le t \le 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 0, \\ t = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$ Обернена заміна приводить до $$\begin{cases} cosx = 0, \\ cosx = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

Далі як в І способі.

Відповідь: $a \in \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{11\pi}{6}\right)$.

Розв'язування тригонометричних рівнянь методом розкладання на множники. Застосування обмеженості тригонометричних функцій

5.4 (32.21(2)¨, див. [5]) Розв'яжіть рівняння $sin6x + cos\frac{12x}{5} = -2$.

Розв'язання:

Так як обидва доданки в лівій частині рівняння приймають значення з проміжку $[-1; 1]$, то їх сума може дорівнювати -2 виключно у випадку, коли вони обидва дорівнюють -1. Отже, задане рівняння еквівалентно системі:

$$\begin{cases} sin6x = -1, \\ cos\dfrac{12x}{5} = -1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x = \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z, \\ \dfrac{12x}{5} = \pi + 2\pi n, n \in Z; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{3}, k \in Z, \\ x = \dfrac{5\pi}{12} + \dfrac{5\pi n}{6}, n \in Z. \end{cases}$$

Визначимо, при яких цілих k, n має місце остання система:

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{3} = \frac{5\pi}{12} + \frac{5\pi n}{6} \Rightarrow 3\pi + 4\pi k = 5\pi + 10\pi n \Rightarrow 3 + 4k = 5 + 10n,$$

$$4k = 2 + 10n \Rightarrow 2k = 1 + 5n \Rightarrow k = \frac{1 + 5n}{2}.$$

Отже, n – непарне число, $n = 2l + 1, l \in Z$ і $x = \frac{5\pi}{12} + \frac{5\pi(2l+1)}{6}, l \in Z$ або $x = \frac{5\pi}{4} + \frac{5\pi l}{3}, l \in Z$.

Відповідь: $x = \frac{5\pi}{4} + \frac{5\pi l}{3}, l \in Z$.

5.5 Розв'яжіть рівняння $\frac{\text{ctg}2x}{\text{ctg}x} + \frac{\text{ctg}x}{\text{ctg}2x} + 2 = 0$.

Розв'язання:

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \text{ctg}x \neq 0, \\ \text{ctg}2x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} cos\,x \neq 0, \\ sin\,x \neq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} cos\,2\,x \neq 0, \\ sin\,2\,x \neq 0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} cos\,x \neq 0, \\ sin\,x \neq 0, \\ cos\,2\,x \neq 0, \\ 2\,sin\,x\,cos\,x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} cos\,x \neq 0, \\ sin\,x \neq 0, \\ cos\,2\,x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \ k \in Z; \\ x \neq \pi m, \ m \in Z; \\ 2x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in Z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \ k \in Z; \\ x \neq \pi m, \ m \in Z; \\ x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \ n \in Z. \end{cases}$$

Знайдемо розв’язок системи за допомогою тригонометричного кола. Спочатку заповнимо таблицю:

$k=0$	$x \neq \frac{\pi}{2}$	$m=0$	$x \neq 0$	$n=0$	$x \neq \frac{\pi}{4}$
$k=1$	$x \neq \frac{3\pi}{2}$	$m=1$	$x \neq \pi$	$n=1$	$x \neq \frac{3\pi}{4}$
$k=-1$	$x \neq -\frac{\pi}{2}$	$m=-1$	$x \neq -\pi$	$n=-1$	$x \neq -\frac{\pi}{4}$
$k=2$	$x \neq \frac{5\pi}{2}$	$m=2$	$x \neq 2\pi$	$n=2$	$x \neq \frac{5\pi}{4}$
$k=-2$	$x \neq -\frac{3\pi}{2}$	$m=-2$	$x \neq -2\pi$	$n=-2$	$x \neq -\frac{3\pi}{4}$

Наносимо отримані значення на тригонометричне коло (рис. 5.5) та описуємо отримані точки однією формулою.

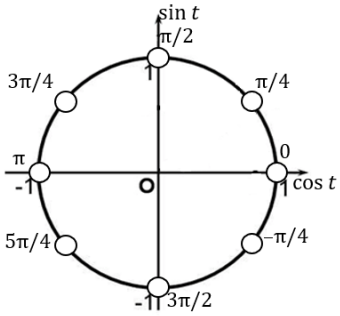


Рисунок 5.5 – Ілюстрація до задачі 5.5

Тоді остаточно маємо, що

$$\text{ОДЗ: } x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi l}{4},\ l \in Z.$$

Перейдемо тепер до розв’язування рівняння. Виразимо в ньому котангенс через синус та косинус відповідного кута:

$$\frac{\frac{\cos 2x}{\sin 2x}}{\frac{\cos x}{\sin x}} + \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{\cos 2x}{\sin 2x}} + 2 = 0, \Rightarrow \quad \frac{\cos 2x \sin x}{\cos x \sin 2x} + \frac{\cos x \sin 2x}{\cos 2x \sin x} + 2 = 0,$$

$$\frac{(\cos 2x \sin x)^2 + (\cos x \sin 2x)^2 + 2\cos x \sin 2x \cos 2x \sin x}{\cos x \sin 2x \cos 2x \sin x} = 0,$$

$$\frac{(\cos 2x \sin x + \sin 2x \cos x)^2}{\cos x \sin 2x \cos 2x \sin x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin^2 3x}{\cos x \sin 2x \cos 2x \sin x} = 0.$$

Дріб дорівнює нулю, коли чисельник дорівнює нулю, а знаменник ні (це вже

враховано в ОДЗ), тоді задане рівняння еквівалентне рівнянню

$$sin^2 3x = 0 \quad \Rightarrow \quad sin\, 3x = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x = \pi n,\ n \in Z \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi n}{3},\ n \in Z.$$

За допомогою тригонометричного одиничного кола знайдемо перетин множини отриманих значень (на колі зафарбовані точки) з ОДЗ (виколоті точки).

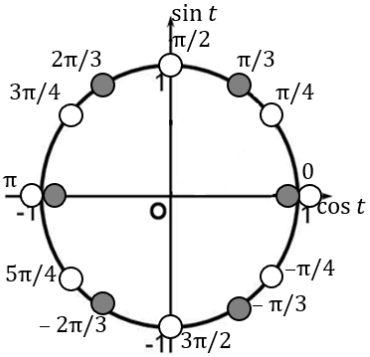


Рисунок 5.6 – Ілюстрація до задачі 5.5

Таким чином, $x = \frac{\pi n}{3},\ n \neq 3k,\ k \in Z,$ оскільки при $n = 3k,\ k \in Z$ маємо значення $x = \frac{\pi \cdot 3k}{3} = \pi k \notin$ОДЗ.

Відповідь: $x = \frac{\pi n}{3},\ n \neq 3k,\ k \in Z.$

5.6 Знайдіть всі значення параметра α, при кожному з яких рівняння

$$(\alpha^2 + 2)sin^2x + 4\alpha sinxcosx = \alpha^2 + 3$$

має розв'язки? Знайдіть ці розв'язки.

Розв'язання:

Рівняння зводиться до однорідного:

$$(\alpha^2 + 2)sin^2x + 4\alpha sinxcosx = (\alpha^2 + 3)(sin^2x + cos^2x) \iff$$

$$\Leftrightarrow \ sin^2x - 4\alpha sinxcosx + (\alpha^2 + 3)cos^2x = 0.$$

$cosx$=0 не є розв'язком останнього рівняння. Тому поділимо обидві частини рівняння на cos^2x $(cosx \neq 0)$, Отримаємо рівняння

$$tg^2x - 4\alpha tgx + \alpha^2 + 3 = 0.$$

Заміною $tgx = t$ рівняння зводиться до квадратного

$$t^2 - 4\alpha t + \alpha^2 + 3 = 0.$$

Це рівняння має розв'язки, якщо $D \geq 0$, тобто

$$\frac{D}{4} = 4\alpha^2 - \alpha^2 - 3 = 3(\alpha^2 - 1) \geq 0, \Longrightarrow |\alpha| \geq 1.$$

Отже, якщо $\alpha \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, то

$$tgx = t_1 = 2\alpha - \sqrt{3(\alpha^2 - 1)}, x = arctg\left(2\alpha - \sqrt{3(\alpha^2 - 1)}\right) + \pi k, k \in Z;$$

$$tgx = t_2 = 2\alpha + \sqrt{3(\alpha^2 - 1)}, x = arctg\left(2\alpha + \sqrt{3(\alpha^2 - 1)}\right) + \pi n, n \in Z;$$

якщо $\alpha = 1$, то $tgx = 2, x = arctg2 + \pi n, n \in Z;$

якщо $\alpha = -1$, то $tgx = -2, x = -arctg2 + \pi k, k \in Z;$

якщо $\alpha \in (-1; 1)$ то розв'ків не має.

Відповідь:

якщо $\alpha \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, то $x = arctg\left(2\alpha \pm \sqrt{3(\alpha^2 - 1)}\right) + \pi n,$

якщо $\alpha = 1$, то $x = arctg2 + \pi n, n \in Z;$

якщо $\alpha = -1$, то $x = -arctg2 + \pi k, k \in Z;$

якщо $\alpha \in (-1; 1)$ то розв'ків не має.

5.2 Системи тригонометричних рівнянь.

5.7 Розв'яжіть систему $\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3}, \\ cos\, x + cos\, y = \frac{3}{2}. \end{cases}$

Розв'язання:

ОДЗ: $x,\ y \in R$.

Розв'яжемо задану систему методом підстановки. Для цього з першого рівняння виразимо одну змінну через іншу й отриманий вираз підставимо в друге рівняння системи, що розв'язується:

$$x = \frac{\pi}{3} + y \quad \Rightarrow \ cos\left(\frac{\pi}{3} + y\right) + cos\, y = \frac{3}{2} \Rightarrow \ 2\, cos\frac{\frac{\pi}{3} + y + y}{2} cos\frac{\frac{\pi}{3} + y - y}{2} = \frac{3}{2};$$

$$2\cos\left(\frac{\pi}{6}+y\right)\cos\frac{\pi}{6}=\frac{3}{2}\Rightarrow\ 2\cos\left(\frac{\pi}{6}+y\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2},\ \Rightarrow\cos\left(\frac{\pi}{6}+y\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Прийшли до найпростішого тригонометричного рівняння. Його розв'язки:

$$\frac{\pi}{6}+y=\pm arccos\frac{\sqrt{3}}{2}+2\pi n,\ n\in Z;\ \frac{\pi}{6}+y=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z,$$

тобто

$$y_1=-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}+2\pi n\quad\Rightarrow\quad y_1=2\pi n,\ n\in Z;$$

$$y_2=-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}+2\pi n\quad\Rightarrow\quad y_2=-\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z.$$

Тоді

$$x_1=\frac{\pi}{3}+y_1=\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z;$$

$$x_2=\frac{\pi}{3}+y_2=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}+2\pi n=2\pi n,\ n\in Z.$$

Відповідь:$\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ 2\pi n\right),\ \left(2\pi n;\ -\frac{\pi}{3}+2\pi n\right),\ n\in Z.$

5.8 Розв'яжіть систему $\begin{cases}\sin x\sin y=\frac{\sqrt{3}}{4},\\ \cos x\cos y=\frac{\sqrt{3}}{4}.\end{cases}$

Розв'язання:

ОДЗ: $x,\ y\in R.$

Знайдемо суму та різницю рівнянь заданої системи:

$$\cos x\cos y+\sin x\sin y=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad\Rightarrow\quad\cos(x-y)=\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos x\cos y-\sin x\sin y=0\quad\Rightarrow\quad\cos(x+y)=0.$$

Отже, система приймає вигляд:

$$\begin{cases}\cos(x-y)=\frac{\sqrt{3}}{2},\\ \cos(x+y)=0.\end{cases}$$

Прийшли до найпростіших тригонометричних рівнянь, тоді будемо мати:

$$\begin{cases} x - y = \pm\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z; \\ x + y = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z. \end{cases}$$

Почленно додамо та віднімемо рівняння отриманих систем:

$$\begin{cases} 2x_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} + 2\pi n + \pi k, \\ 2y_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} + \pi k - 2\pi n \end{cases} \text{або} \begin{cases} 2x_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} + 2\pi n + \pi k, \\ 2y_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} + \pi k - 2\pi n, \end{cases} \quad k, n \in Z;$$

звідки

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi(2n+k)}{2}, \\ y_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi(k-2n)}{2} \end{cases} \text{або} \begin{cases} x_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi(2n+k)}{2}, \\ y_2 = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi(k-2n)}{2}, \end{cases} \quad k, n \in Z.$$

Відповідь. $\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi(2n+k)}{2};\ \frac{\pi}{6} + \frac{\pi(k-2n)}{2}\right),\ \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi(2n+k)}{2};\ \frac{\pi}{3} + \frac{\pi(k-2n)}{2}\right),\ k, n \in Z.$

5.9 При яких значеннях а система $\begin{cases} \sin x + \cos y = 2a^2 \\ \sin x \cos y = a^2(a^2 - 4) \end{cases}$ має розв'язки?

Розв'язання:

Розв'яжемо систему, використовуючи обернену теорему Вієта. Тоді, $\sin x$ та $\cos y$ це розв'язки квадратного рівняння $t^2 - 2a^2 t + a^2(a^2 - 4) = 0$. Отримаємо,

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = 2a^2 \\ \sin x \cos y = a^2(a^2 - 4) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x = a^2 + 2a \\ \cos y = a^2 - 2a \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x = a^2 - 2a \\ \cos y = a^2 + 2a \end{cases} \end{array}\right.$$

Оскільки, $\sin x$ та $\cos y$ знаходяться в межах $[-1; 1]$, то система має розв'язки при всіх значеннях параметра а таких, що

$$\begin{cases} |a^2 + 2a| \le 1 \\ |a^2 - 2a| \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2a \le 1 \\ a^2 + 2a \ge -1 \\ a^2 - 2a \le 1 \\ a^2 - 2a \ge -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2a - 1 \le 0 \\ a^2 + 2a + 1 \ge 0 \\ a^2 - 2a - 1 \le 0 \\ a^2 - 2a + 1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2a - 1 \le 0 \\ a^2 - 2a - 1 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 - \sqrt{2} \le a \le -1 + \sqrt{2} \\ 1 - \sqrt{2} \le a \le 1 + \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow 1 - \sqrt{2} \le a \le -1 + \sqrt{2}.$$

Відповідь. $a \in \left[1 - \sqrt{2}; -1 + \sqrt{2}\right]$.

5.3 Тригонометричні нерівності.

Розв'язування нерівностей з тригонометричними функціями зводиться до розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей виду $sin\,x\,\{>,\ <,\ \geq,\ \leq\}a$, $cos\,x\,\{>,\ <,\ \geq,\ \leq\}a$, $\mathrm{tg}x\{>,\ <,\ \geq,\ \leq\}a$, $\mathrm{ctg}x\{>,\ <,\ \geq,\ \leq\}a$.

Найпростіші тригонометричні нерівності зазвичай розв'язуються за допомогою або тригонометричного кола, або графіка відповідної тригонометричної функції.

1. $sin\,x\,\{>,\ \geq\}a\ (|a| \leq 1)$:

$$arcsin\,a + 2\pi n\{<,\ \leq\}x\{<,\ \leq\}\pi - arcsin\,a + 2\pi n,\ n \in Z;$$

$sin\,x\,\{<,\ \leq\}a\ (|a| \leq 1)$:

$$-\pi - arcsin\,a + 2\pi n\{<,\ \leq\}x\{<,\ \leq\}\,arcsin\,a + 2\pi n,\ n \in Z.$$

5.10 (33.11(2)¨, див. [5]) Розв'яжіть нерівність $cos2xtgx > 0$.

Розв'язання:

Визначимо періоди функцій $y = cos2x, T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi$; $y = tgx, T_2 = \pi$. Тому періодом функції $y = cos2xtgx$ є $T = \pi$. Отже, знайдемо її нулі:

$$\left[\begin{array}{l} cos2x = 0, \\ tgx = 0; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} cos2x = 0, \\ \begin{cases} sinx = 0, \\ cosx \neq 0; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z, \\ \begin{cases} x = \pi n, n \in Z, \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi l, l \in Z; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z, \\ \begin{cases} x = \pi n, n \in Z, \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi l, l \in Z. \end{cases} \end{array}\right.$$

Розмістимо їх на проміжку [0;π] та визначимо знаки функції $y = cos2xtgx$ на отриманих проміжках:

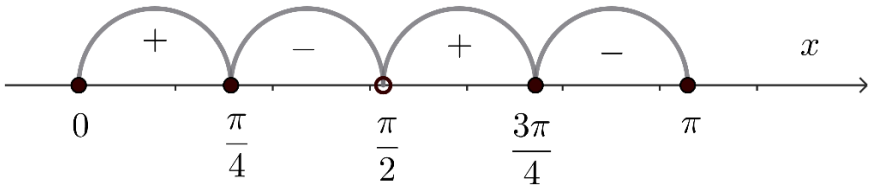


Рисунок 5.7 – Ілюстрація до задачі 5.10

Тоді очевидно, що $cos2xtgx > 0$ при $x \in \left[\pi k; \frac{\pi}{4} + \pi k\right] \cup \left(\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{3\pi}{4} + \pi k\right], k \in Z.$

Відповідь: $x \in \left[\pi k; \frac{\pi}{4} + \pi k\right] \cup \left(\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{3\pi}{4} + \pi k\right], k \in Z.$

5.11 Розв'яжіть нерівність $sin\,3\,x\,cos\,2\,x - sin\,2\,x\,cos\,3\,x < -\frac{1}{2}$.

Розв'язання:

ОДЗ: $x \in R$.

Застосуємо до лівої частини заданої нерівності формулу «синус різниці»:

$$sin(3x - 2x) < -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad sin\,x < -\frac{1}{2}.$$

Отриману найпростішу тригонометричну нерівність розв'яжемо за допомогою тригонометричного кола.

1. Будуємо тригонометричне коло та на осі синусів (вісь ординат) відмічаємо значення $\left(-\frac{1}{2}\right)$, оскільки нерівність строга, то відповідну точку виключаємо з розгляду (рис. 5.8). Проводимо пряму $sin\,x = -\frac{1}{2}$, її точки перетину з тригонометричним колом виколюємо, оскільки нерівність строга. Усі значення синуса, які менші від $\left(-\frac{1}{2}\right)$, знаходяться нижче цієї точки (виділяємо їх).

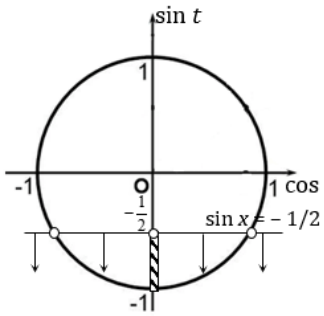


Рисунок 5.8

2. Відмічаємо всі точки (дуги, а точніше серії дуг) тригонометричного кола, для яких $sin\,x < -\frac{1}{2}$ (рис. 5.9), причому отриману дугу потрібно обходити в додатному напрямку, тобто проти руху годинникової стрілки (на рисунку напрямок обходу позначено під дугою стрілкою).

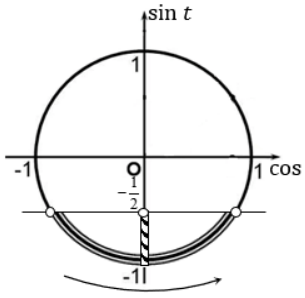


Рисунок 5.9

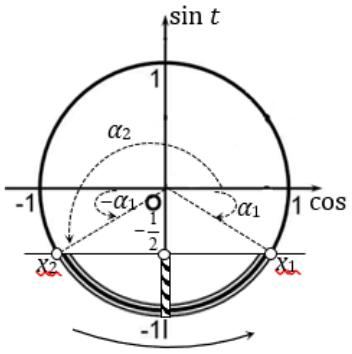


Рисунок 5.10

3. Визначимо значення x_1 та x_2 кінців виділеної дуги (рис. 5.10). Почнемо зі знаходження правого кінця, що відповідає меншому за модулем куту α_1. Оскільки поворот відбувається за рухом годинникової стрілки, то цей кут від'ємний. Значення x_1 відповідає куту α_1, синус якого дорівнює $\left(-\frac{1}{2}\right)$: $sin\,\alpha_1 = sin\,x_1 = -\frac{1}{2}$. А тоді

$$x_1 = arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\,arcsin\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6}.$$

Лівий кінець x_2 цієї дуги відповідає куту α_2, який складається з двох кутів: розгорнутого кута π (півкола) та кута $(-\alpha_1) = \frac{\pi}{6}$, бо цей кут відкладено за рухом годинникової стрілки. Отже,

$$x_2 = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}.$$

Оскільки для нашої нерівності $x_2 = \frac{7\pi}{6} > x_1 = -\frac{\pi}{6}$, то збільшуємо правий кінець, щоб рух по дузі відбувався від меншого значення до більшого,:

$$x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6}.$$

Оскільки всі точки виділеної дуги повторюють одна одну через повний обхід, то до кожного кінця додаємо ще $2\pi n,\ n \in Z$.

Отже, маємо, що шуканий розв'язок

$\frac{7\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{11\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$ або $x \in \left(\frac{7\pi}{6} + 2\pi n;\ \frac{11\pi}{6} + 2\pi n\right),\ n \in Z.$

Відповідь: $x \in \left(\frac{7\pi}{6} + 2\pi n;\ \frac{11\pi}{6} + 2\pi n\right),\ n \in Z.$

5.12 Розв'яжіть нерівність $ctg(2arccosx) \geq 0$.

Розв'язання:

ОДЗ: $\begin{cases} x \in [-1;1], \\ 2arccosx \neq \pi n, n \in Z, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [-1;1], \\ arccosx \neq \frac{\pi n}{2}, n \in Z. \end{cases}$ Знаходимо розв'язок тригонометричної нерівності. Із властивостей функції $y = ctg(\alpha)$, $ctg(\alpha) \geq 0$ при $\pi n < \alpha \leq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$. Тоді

$$\pi n < 2arccosx \leq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$$

звідки

$$\frac{\pi n}{2} < arccosx \leq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$$

Проте $0 \leq arccosx \leq \pi$. Тому при значеннях $n = 0$ та $n = 1$ маємо нерівності $0 < arccosx \leq \frac{\pi}{4}$ та $\frac{\pi}{2} < arccosx \leq \frac{3\pi}{4}$. Розв'язками останніх нерівностей є інтервали $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x < 1$ та $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x < 0$.

Відповідь: $x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}};0\right) \cup \left[\frac{1}{\sqrt{2}};1\right).$

5.13 Розв'яжіть нерівність $sin^2 x - sin\,2x - 3\,cos^2 x > 0.$

Розв'язання:

Запропоновану тригонометричну нерівність перетворимо до алгебраїчної нерівності відносно величини $y = tg\,x$:

$$sin^2 x - 2\,sin\,x \cdot cos\,x - 3\,cos^2 x > 0 |: \quad cos^2 x > 0,$$

$$tg^2 x - 2\,tg\,x - 3 > 0, \qquad y^2 - 2y - 3 > 0.$$

Розв'язком останньої нерівності є сукупність множин:

$$\begin{bmatrix} y < -1, \\ y > 3, \end{bmatrix} \quad \textit{або} \quad \begin{bmatrix} tg\,x < -1, \\ tg\,x > 3. \end{bmatrix}$$

Геометричний розв'язок тригонометричних нерівностей зображено на рис. 5.11 і рис. 5.12. Це дуги DmC, EpF, SpR і PmQ.

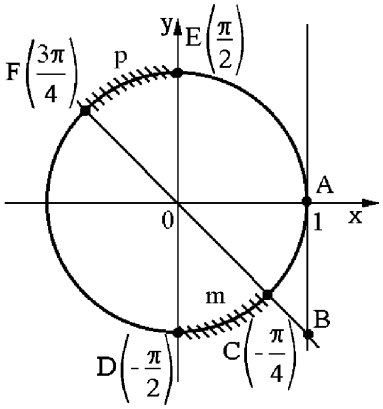


Рисунок 5.11

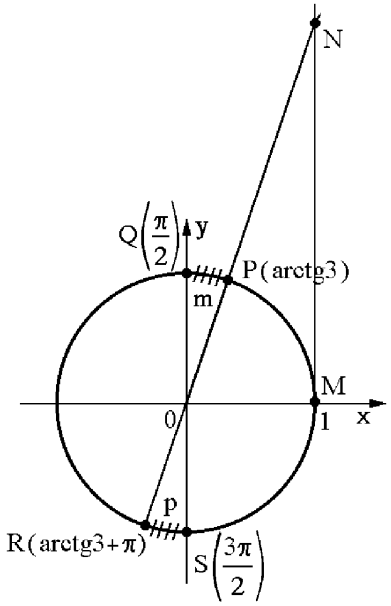


Рисунок 5.12

Аналітичним розв'язком наведеної нерівності буде множина

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n, -\frac{\pi}{4} + \pi n\right) \cup \left(arctg\,3 + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k\right), \quad n,\ k \in Z.$$

Відповідь: $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n, -\frac{\pi}{4} + \pi n\right) \cup \left(arctg\,3 + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k\right), \quad n,\ k \in Z.$

5.14 Розв'яжіть нерівність $\sqrt{tg\frac{x}{2}}(x^2 - 11x + 10) \le 0.$

Розв'язання:

Вихідна нерівність рівносильна сукупності:

$$\left[\begin{cases} tg\dfrac{x}{2} = 0, \\ tg\dfrac{x}{2} > 0, \\ x^2 - 11x + 10 \le 0, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x = 2\pi n, n \in Z, \\ x \in (2\pi k;\ \pi + 2\pi k), k \in Z, \\ x \in [1; 10]. \end{cases} \left[\begin{array}{c} x = 2\pi n, n \in Z, \\ x \in [1;\ \pi) \cup (2\pi; 3\pi). \end{array}\right.\right.\right.$$

Відповідь: $x \in [1;\ \pi) \cup [2\pi; 3\pi) \cup \{2\pi n, n \in Z\}.$

Завдання до лабораторної роботи 5

1. Розв'яжіть рівняння: $3\text{ctg}(x - 15°) - \sqrt{3} = 0.$

2. Розв'яжіть рівняння: $sin^3 x - cos^3 x = sin x - cos x.$

3. Розв'яжіть рівняння: $\sqrt{2}\, cos\, 1\, 3x = cos\, 5\, x + sin\, 5\, x.$

4. Розв'яжіть рівняння:. $arc\, t\, g\left(x^2 - 4x + 3 + \sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}.$

5. Розв`яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{3}, \\ sin\, x + sin\, y = 1. \end{cases}$

6. Розв'яжіть систему: $\begin{cases} sin\, x\, cos\, y = 0{,}25; \\ sin\, y\, cos\, x = 0{,}75. \end{cases}$

7. Розв'язати нерівність: $2\, sin^2 x - 5\, sin\, x + 2 > 0.$

8. Розв'яжіть нерівність: $cos\, 3\, x + \sqrt{3}\, sin\, x < -\sqrt{2}.$

9. Розв'яжіть нерівність:$arcsin\, x > arccos\, x.$

10. Для кожного значення параметра a розв`яжіть систему нерівностей

$$\begin{cases} a \le sin\, x \le -\dfrac{1}{2}, \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \le \cos x < 0. \end{cases}$$

11. Підготуйте за матеріалами підручників [7, 8] дві презентації: «Приклад повного розв'язання системи тригонометричних рівнянь», «Приклад повного розв'язання системи тригонометричних нерівностей». Рівень задач (N•• або N*).

Лабораторне заняття 6. Лінія рівнянь та нерівностей в профільній школі: Показникові та логарифмічні рівняння та їх системи.

6.1 Показникові рівняння та їх системи.

6.1 Розв'яжіть рівняння $4^{x+1} - 3 \cdot 2^x = 10$.

Розв'язання:

ОДЗ: $x \in R$.

Зведемо рівняння до однієї основи, а саме 2, використовуючи властивості степенів:

$$4^x \cdot 4 - 3 \cdot 2^x - 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4 \cdot (2^2)^x - 3 \cdot 2^x - 10 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$4 \cdot (2^x)^2 - 3 \cdot 2^x - 10 = 0.$$

Зробимо заміну $2^x = t,\ t > 0$, тоді дістанемо: $4t^2 - 3t - 10 = 0$.

Розв'язок отриманого квадратного рівняння знайдемо за допомогою дискримінанта:

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-10) = 9 + 160 = 169 = 13^2,$$

$$t_1 = \frac{3+13}{2 \cdot 4} = \frac{16}{8} = 2,\ t_2 = \frac{3-13}{2 \cdot 4} = -\frac{10}{8} = -\frac{5}{4} < 0 \notin \textit{ОДЗ}.$$

Після оберненої заміни приходимо до найпростішого показникового рівняння $2^x = 2$:

$$2^x = 2^1 \quad \Rightarrow \quad x = 1.$$

Відповідь: $x = 1$.

Однорідним рівнянням першого степеня називається рівняння виду

$$a^{f(x)} = b^{f(x)}.$$

Діленням обох частин цього рівняння на $a^{f(x)} > 0$ *(або на* $b^{f(x)} > 0$*), зводимо його до показникового рівняння*

$$\frac{a^{f(x)}}{b^{f(x)}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} = 1 \quad \Rightarrow \quad f(x) = 0.$$

6.2 Розв'яжіть рівняння $2^{x+1} = 3^{x+1}$.

Розв'язання:

ОДЗ: $x \in R$.

Поділимо обидві частини заданого рівняння на $3^{x+1} > 0$, в результаті

дістанемо

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} = 1.$$

Тоді $x + 1 = log_{\frac{2}{3}} 1 \quad \Rightarrow \quad x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1.$

Відповідь: $x = -1.$

Однорідним рівнянням другого степеня називається рівняння виду

$$A \cdot a^{2f(x)} + B \cdot a^{f(x)} \cdot b^{f(x)} + C \cdot b^{2f(x)} = 0.$$

Таке рівняння розв'язується за наступною схемою.

1) Ділимо обидві частини рівняння або на $b^{2f(x)} > 0$ *(або на* $a^{2f(x)} > 0$*), в результаті отримуємо рівняння*

$$A \cdot a^{2f(x)} + B \cdot a^{f(x)} \cdot b^{f(x)} + C \cdot b^{2f(x)} = 0, \ \big| : b^{2f(x)} > 0$$

$$A \cdot \frac{a^{2f(x)}}{b^{2f(x)}} + B \cdot \frac{a^{f(x)} \cdot b^{f(x)}}{b^{2f(x)}} + C = 0, \Rightarrow \ A \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{2f(x)} + B \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} + C = 0.$$

2) Заміною $\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} = t, \ t > 0$ *останнє рівняння зводиться до квадратного:*

$$At^2 + Bt + C = 0.$$

6.3 Розв'яжіть рівняння $4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x$.

Розв'язання:

ОДЗ: $x \in R$.

Перенесемо всі доданки в ліву частину рівняння та запишемо їх у вигляді:

$$(2^2)^x + (2 \cdot 3)^x - 2 \cdot (3^2)^x = 0,$$

$$(2^x)^2 + 2^x \cdot 3^x - 2 \cdot (3^x)^2 = 0, \ \big| : 3^{2x} > 0, \ \Rightarrow \left(\left(\frac{2}{3}\right)^x\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^x - 2 = 0.$$

Уведемо заміну $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t, \ t > 0$, тоді отримаємо квадратне рівняння

$$t^2 + t - 2 = 0,$$

корені якого за теоремою Вієта $t_1 = -2 < 0 \notin$ ОДЗ, $t_2 = 1$.

Після оберненої заміни маємо найпростіше показникове рівняння

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^0 \quad \Rightarrow \quad x = 0.$$

Відповідь: $x = 0$.

6.4 Розв'яжіть рівняння $1 + 3^{\frac{x}{2}} = 2^x$.

Розв'язання:

Поділимо рівняння на $2^x \neq 0$, дістанемо $\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x = 1$.

Оскільки $\frac{1}{2} = sin\frac{\pi}{6}$, $\frac{\sqrt{3}}{2} = cos\frac{\pi}{6}$, то рівність $\left(sin\frac{\pi}{6}\right)^x + \left(cos\frac{\pi}{6}\right)^x = 1$ справджується при *x* = 2. Доведемо, що інших розв'язків *рівняння*(99) не має. Дійсно, функції $\left(sin\frac{\pi}{6}\right)^x$ та $\left(cos\frac{\pi}{6}\right)^x$ монотонно спадні при всіх значеннях *x*, тому

при $x < 2$ виконується нерівність $\left(sin\frac{\pi}{6}\right)^x + \left(cos\frac{\pi}{6}\right)^x > 1$,

а при $x > 2$ - нерівність $\left(sin\frac{\pi}{6}\right)^x + \left(cos\frac{\pi}{6}\right)^x < 1$.

Отже, рівняння має єдиний розв'язок $x = 2$.

Відповідь: 2.

6.5 Розв'яжіть рівняння $\sqrt[2y]{\sqrt{26} - 5} - \sqrt[2y]{\sqrt{26} + 5} = 10$.

Розв'язання:

ОДЗ: $2y > 0 \quad \Rightarrow \quad y > 0 \quad \Rightarrow \quad y \in (0;\ +\infty)$.

Спочатку покажемо, що підкореневі вирази $\sqrt{26} - 5$ та $\sqrt{26} + 5$ є взаємно оберненими величинами (тобто потрібно показати, що їх добуток дорівнює одиниці):

$$\left(\sqrt{26} - 5\right) \cdot \left(\sqrt{26} + 5\right) = \left(\sqrt{26}\right)^2 - 5^2 = 26 - 25 = 1,$$

тобто $\sqrt{26} - 5 = \frac{1}{\sqrt{26}+5}$.

Отже, вихідне рівняння запишеться у вигляді:

$$\sqrt[2y]{\frac{1}{\sqrt{26}+5}} - \sqrt[2y]{\sqrt{26} + 5} = 10 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[2y]{\sqrt{26}+5}} - \sqrt[2y]{\sqrt{26} + 5} = 10.$$

Робимо заміну: $\sqrt[2y]{\sqrt{26} + 5} = t,\ t > 0$, тоді маємо:

$$\frac{1}{t} - t = 10, \text{ ОДЗ: } t \in (0;\ +\infty) \Rightarrow \frac{1-t^2}{t} - 10 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1-t^2-10t}{t} = 0 \quad \overset{\text{ОДЗ}}{\Rightarrow} \quad 1 - t^2 - 10t = 0 \quad \Rightarrow \quad t^2 + 10t - 1 = 0.$$

Розв'яжемо отримане квадратне рівняння:

$$\begin{cases} t_1 = -5 - \sqrt{26} < 0 \notin \text{ОДЗ}, \\ t_2 = -5 + \sqrt{26} = \sqrt{26} - 5. \end{cases}$$

Обернена заміна:

$$\sqrt[2y]{\sqrt{26}+5} = \sqrt{26} - 5 \quad \Rightarrow \quad \left(\sqrt{26}+5\right)^{\frac{1}{2y}} = \frac{1}{\sqrt{26}+5},$$

$$\left(\sqrt{26}+5\right)^{\frac{1}{2y}} = \left(\sqrt{26}+5\right)^{-1} \Rightarrow \frac{1}{2y} = -1 \Rightarrow 2y = -1 \Rightarrow y = -\frac{1}{2} < 0 \notin \text{ОДЗ}.$$

Відповідь: $y \in \emptyset$.

6.6 Розв'яжіть систему $\begin{cases} 3^x \cdot 4^y = 36, \\ 3^y \cdot 4^x = 48. \end{cases}$

Розв'язання:

ОДЗ: $x,\ y \in R$.

Поділимо перше рівняння системи на її друге рівняння:

$$\frac{3^x \cdot 4^y}{3^y \cdot 4^x} = \frac{36}{48} \quad \Rightarrow \quad 3^{x-y} \cdot 4^{y-x} = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{3}{4}\right)^{x-y} = \left(\frac{3}{4}\right)^1 \quad \Rightarrow \quad x - y = 1.$$

Тепер перше рівняння системи помножимо на її друге рівняння:

$$3^x \cdot 4^y \cdot 3^y \cdot 4^x = 36 \cdot 48 \quad \Rightarrow \quad 3^{x+y} \cdot 4^{y+x} = 1728 \quad \Rightarrow \quad 12^{x+y} = 12^3 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad x + y = 3.$$

Отже, початкова система еквівалентна наступній системі лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} x - y = 1, \\ x + y = 3, \end{cases}$$

яку ми розв'яжемо методом додавання. До першого рівняння системи додаємо друге: $2x = 4 \quad \Rightarrow \quad x = 2$.

Підставляємо отримане значення, наприклад, у перше рівняння системи: $2 - y = 1 \quad \Rightarrow \quad y = 2 - 1 = 1$.

Відповідь: $(2;\ 1)$.

6.7 Знайти розв'язки нерівності $2^{\frac{x}{x^2-1}} \geq 2^{\frac{1}{x-2}}$.

Розв'язання:

ОДЗ: знаменники дробів не дорівнюють нулю:

$$\begin{cases} x^2-1\neq 0, \\ x-2\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-1)(x+1)\neq 0, \\ x\neq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\neq \pm 1, \\ x\neq 2 \end{cases} \Rightarrow x\in R\backslash\{\pm 1;\ 2\}.$$

Згідно випадку 2.2 ($a=2>1$) для показникових нерівностей, отримуємо рівносильну дробово-раціональну нерівність

$$\frac{x}{x^2-1}\geq\frac{1}{x-2},$$

розв'язки якої знаходимо за допомогою методу інтервалів:

$$\frac{x}{x^2-1}-\frac{1}{x-2}\geq 0 \Rightarrow \frac{x(x-2)-(x^2-1)}{(x^2-1)(x-2)}\geq 0 \Rightarrow \frac{x^2-2x-x^2+1}{(x^2-1)(x-2)}\geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{-2x+1}{(x^2-1)(x-2)}\geq 0 \Rightarrow -2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)(x+1)(x-2)\geq 0 \ \Big|:(-2), \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x-\tfrac{1}{2}\right)(x-1)(x+1)(x-2)\leq 0,\ x\in \text{ОДЗ}.$$

Наносимо на координатну пряму нулі кожного з множників та визначаємо знак нерівності на кожному з отриманих проміжків (а також враховуємо ОДЗ).

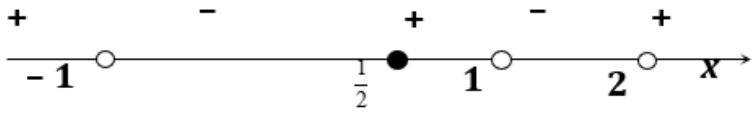


Рисунок 6.1 – Ілюстрація до задачі 6.7

Таким чином, $x\in\left(-1;\ \frac{1}{2}\right]\cup(1;\ 2)$.

Відповідь: $x\in\left(-1;\ \frac{1}{2}\right]\cup(1;\ 2)$.

6.2 Логарифмічні рівняння та їх системи.

6.8 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{log_2(2x^2)\cdot log_4(16x)}=log_4 x^3$.

Розв'язання:

ОДЗ: підлогарифмічні вирази повинні бути додатними:

$$\begin{cases} 2x^2>0, \\ 16x>0, \\ x^3>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\neq 0, \\ x>0, \\ x>0 \end{cases} \Rightarrow x\in(0;\ +\infty).$$

Задане рівняння є ірраціональним, рівносильна йому система

$$\sqrt{log_2(2x^2)\cdot log_4(16x)} = log_4 x^3 \Leftrightarrow \begin{cases} log_4 x^3 \geq 0, \\ log_2(2x^2)\cdot log_4(16x) = (log_4 x^3)^2. \end{cases}$$

Розв'яжемо нерівність та рівняння окремо. Для нерівності маємо:

$$log_4 x^3 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 3\,log_4 x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad log_4 x \geq 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; x \geq 4^0 = 1 \quad \Rightarrow \quad x \in [1;\; +\infty).$$

В рівнянні всі логарифми зведемо до однієї основи 2 та перетворимо логарифми за властивостями:

$$log_2(2x^2)\cdot log_{2^2}(16x) = (3\,log_{2^2} x)^2,$$

$$(log_2 2 + log_2 x^2)\cdot \frac{1}{2} log_2(16x) = \left(\frac{3}{2} log_2 x\right)^2,$$

$$(1 + 2\,log_2 x)\cdot \frac{1}{2}(log_2 1\,6 + log_2 x) = \frac{9}{4} log_2^2 x\,, \quad \Big| \times 4$$

$$2(1 + 2\,log_2 x)\cdot (4 + log_2 x) = 9\,log_2^2 x,$$

$$8 + 2\,log_2 x + 16\,log_2 x + 4\,log_2^2 x = 9\,log_2^2 x,$$

$$5\,log_2^2 x - 18\,log_2 x - 8 = 0.$$

Таким чином, прийшли до квадратного рівняння відносно $log_2 x$.

Для його розв'язання зробимо заміну $log_2 x = t$, тоді останнє рівняння прийме вигляд $5t^2 - 18t - 8 = 0$, $t \in R$. Його корені $t_1 = 4,\ t_2 = -\frac{2}{5}$.

Робимо обернену заміну й повертаємось до початкової змінної x

$$log_2 x = 4, \qquad \text{або} \qquad log_2 x = -\frac{2}{5},$$

$$x_1 = 2^4 = 16; \qquad x_2 = 2^{-\frac{2}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{4}}.$$

Отже, система (5.1) набуває вигляду

$$\begin{cases} x \geq 1, \\ \left[\begin{array}{l} x_1 = 16, \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt[5]{4}} \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \quad x = 16.$$

Відповідь: $x = 16$.

6.9 Розв'яжіть рівняння $log_{2x+1}(2x^2 - 8x + 15) = 2$.

Розв'язання:

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 2x^2 - 8x + 15 > 0, \\ 2x + 1 > 0, \\ 2x + 1 \neq 1. \end{cases}$$

Для розв'язання першої нерівності застосуємо метод інтервалів. Для цього її ліву частину потрібно розкласти на множники: $2x^2 - 8x + 15 = 0$; дискримінант $D = (-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 15 = -56 < 0$. Оскільки старший коефіцієнт $a = 2 > 0$, а дискримінант від'ємний, то вираз $2x^2 - 8x + 15 > 0 \ \ \forall x \in R$. Розв'язком другої нерівності $2x + 1 > 0$ є всі такі значення x, що $x > -\frac{1}{2}$, тобто $x \in \left(-\frac{1}{2};\ +\infty\right)$. Третя умова рівносильна тому, що $x \neq 0$ або $x \in (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$.

Отже, отримаємо $\begin{cases} x \in (-\infty;\ +\infty), \\ x \in \left(-\frac{1}{2};\ +\infty\right), \\ x \in (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty); \end{cases} \Rightarrow\ x \in \left(-\frac{1}{2};\ 0\right) \cup (0;\ +\infty).$

Задане рівняння, згідно означенню логарифма, рівносильне рівнянню

$$2x^2 - 8x + 15 = (2x + 1)^2,$$

після спрощення будемо мати: $x^2 + 6x - 7 = 0$.

Корені отриманого квадратного рівняння знайдемо за допомогою теореми Вієта: $x_1 = -7 \notin$ ОДЗ; $x_2 = 1$.

Відповідь: $x = 1$.

Рівняння виду $log_{\phi(x)} f\,(x) = log_{\phi(x)} g\,(x)$. *Таке рівняння рівносильне одній із систем*

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ \phi(x) > 0, \\ \phi(x) \neq 1, \\ f(x) = g(x) \end{cases} \text{ або } \begin{cases} g(x) > 0, \\ \phi(x) > 0, \\ \phi(x) \neq 1, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

Рівняння такого типу можна розв'язувати за наступним алгоритмом:

1) записати ОДЗ рівняння

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ \phi(x) > 0, \\ \phi(x) \neq 1; \end{cases} \text{ або } \begin{cases} g(x) > 0, \\ \phi(x) > 0, \\ \phi(x) \neq 1; \end{cases}$$

2) знайти розв'язки еквівалентного рівняння $f(x) = g(x)$*;*

3) виконати перевірку й у відповідь записати ті розв'язки з пункту 2, які задовольняють ОДЗ, що було знайдено у першому пункті.

6.10 Розв'яжіть рівняння $log_{x+1}(x^2 + 2x) = log_{x+1} 3$.

Розв'язання:

Скористаємося зауваженням 1.15, тоді задане рівняння еквівалентне системі

$$\begin{cases} x^2+2x>0, \\ x+1>0, \\ x+1\neq 1, \\ x^2+2x=3. \end{cases}$$

Перша нерівність в порівнянні з іншими умовами є складною, тому ми її розв'язувати не будемо. Знайдемо розв'язки трьох інших умов, а потім зробимо перевірку (отримані значення підставимо в першу нерівність):

$$\begin{cases} x>-1, \\ x\neq 0, \\ x^2+2x-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in(-1;\ +\infty), \\ x\neq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x_1=-3, \\ x_2=1 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \quad x=1.$$

Для отриманого $x=1$ перевіряємо виконання нерівності $x^2+2x>0$:

Відповідь: $x=1$.

6.11 Розв'яжіть систему $\begin{cases} 2^{2\sqrt{x}-\sqrt{y}}=16, \\ lg\sqrt{xy}=1+lg\,3\,. \end{cases}$

Розв'язання:

ОДЗ:

$$\begin{cases} x\geq 0, \\ y\geq 0, \\ \sqrt{xy}>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq 0, \\ y\geq 0, \\ xy\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq 0, \\ y\geq 0, \\ x\neq 0, \\ y\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0, \\ y>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in(0;\ +\infty), \\ y\in(0;\ +\infty). \end{cases}$$

Розглянемо перше рівняння системи, що розв'язується, та перетворимо його:

$$2^{2\sqrt{x}-\sqrt{y}}=16 \quad \Rightarrow \quad 2^{2\sqrt{x}-\sqrt{y}}=2^4 \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{x}-\sqrt{y}=4.$$

Для другого рівняння маємо:

$$lg\sqrt{xy}=1+lg\,3 \quad \Rightarrow \quad lg\sqrt{xy}=lg\,10+lg\,3 \quad \Rightarrow \quad lg\sqrt{xy}=lg\,30,$$

$$\sqrt{xy}=30 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x}\cdot\sqrt{y}=30.$$

Тобто задана система еквівалентна наступній

$$\begin{cases} 2\sqrt{x} - \sqrt{y} = 4, \\ \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = 30. \end{cases}$$

Робимо заміну $\sqrt{x} = u,\ \sqrt{y} = v;\ u, v > 0.$

На змінні $u,\ v$ потрібно було накладати обмеження $u, v \geq 0$, але оскільки, згідно з ОДЗ, $x, y \neq 0$, то нерівність стає строгою.

Після заміни приходимо до системи (ОДЗ: $u, v > 0$):

$$\begin{cases} 2u - v = 4, \\ u \cdot v = 30, \end{cases}$$

яку розв'яжемо методом підстановки. З першого рівняння системи отримуємо, що $v = 2u - 4$, тоді друге рівняння приймає вигляд: $u \cdot (2u - 4) = 30$ або $2u^2 - 4u - 30\ \ |: 2\ \ \Rightarrow\ \ u^2 - 2u - 15 = 0.$

Корені отриманого квадратного рівняння за теоремою Вієта $u_1 = -3 \notin$ ОДЗ, $u_2 = 5$. Звідси $v = 2 \cdot 5 - 4 = 6$.

Обернена заміна: $\sqrt{x} = 5\ \ \Rightarrow\ \ x = 5^2 = 25; \sqrt{y} = 6\ \ \Rightarrow\ \ y = 6^2 = 36.$

Відповідь: $(25;\ 36)$.

6.12 Для всіх значень параметра *a* Розв'яжіть нерівність:

$$2\log_4(x - a + 1) + \log_{\frac{1}{2}}(x - 3 - 2a)\ \geq 2.$$

Розв'язання:

$$\log_2(x - a + 1) - \log_2(x - 3 - 2a) \geq\ \log_2 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \log_2(x - a + 1) \geq \log_2 4(x - 3 - 2a) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - a + 1 \geq 4x - 12 - 8a, \\ x - a + 1 > 0, \\ x - 3 - 2a > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \dfrac{7a + 13}{3}, \\ x > a - 1, \\ x > 3 + 2a. \end{cases}$$

Порівняємо числа $t_1 = \frac{7a+13}{3}, t_2 = a - 1, t_3 = 3 + 2a$:

$$t_2 = t_3 \Leftrightarrow a - 1 = 3 + 2a \Leftrightarrow a = -4, t_1 = t_2 \Leftrightarrow a = -4,$$

якщо $a\ \geq\ -4$, то $t_2 \leq t_3 \leq t_{1,}$ якщо $a < -4$, то $t_1 < t_3 < t_2$.

Отже, при $a\ \geq -4$ система нерівностей має розвязки

$$3 + 2a \leq x \leq \frac{7a+13}{3},$$

при $a < -4, x \in \varnothing$.

Відповідь: $a \in (-\infty;-4): x \in \emptyset; a \in [-4;+\infty): x \in (3+2a;\ \frac{7a+13}{3}]$.

Завдання до лабораторної роботи 6

1. Розв'яжіть рівняння: $5^{\sqrt{x-3}+5-x}=1$
2. Розв'яжіть рівняння:. $3^{x+2}-4\cdot 5^{x^2-x}=5^{x^2-x+1}-16\cdot 3^3$
3. Розв'яжіть рівняння: $(\sqrt{5+\sqrt{24}})^x+(\sqrt{5-\sqrt{24}})^x=98.$
4. Розв'яжіть рівняння:. $\log_{\sqrt{x}}(x+|x-2|)=\log_x(5x-6+5|x-2|)$
5. Розв'яжіть рівняння $\log_{\frac{x+5}{4-x}}(8-|cosx|)\geq \log_{\frac{x+5}{4-x}}(\sqrt{5}+3)$
6. Розв'яжіть систему рівнянь: $\begin{cases}0,6^{x+y}\cdot 0,6^x=0{,}6;\\ 10^x\cdot 10^y=(0{,}01)^{-1}.\end{cases}$
7. Розв'яжіть систему рівнянь:. $\begin{cases}log_2(x-y)=5-log_2(x+y),\\ \frac{lg\,x-lg\,4}{lg\,y-lg\,3}=-1;\end{cases}$
8. Розв'яжіть нерівність:. $\mathrm{Log}_{|sinx|}(x^2-8x+23)>\frac{3}{\log_2|sinx|}$
9. Розв'яжіть нерівність:. Для всіх значень параметра *a* розв'язати нерівність:

$$2\log_4(x-a+1)+\log_{\frac{1}{2}}(x-3-2a)\ \geq 2.$$

10. Підготуйте за матеріалами підручників [7, 8] дві презентації: «Приклад повного розв'язання системи показникових рівнянь», «Приклад повного розв'язання системи логарифмічних рівнянь». Рівень задач (N•• або N*).

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Державний стандарт повної загальної середньої освіти. Постанова КМУ № 898 від 30.09.2020 року
2. Жерновникова О. А.,Сіра І. Т. Вибрані розділи алгебри: алгебраїчні та ірраціональні рівняння .Методичні рекомендації. – . Харків: ХНПУ імені Г. С. Сковороди, 2022. 75 с.
3. Зіновєєв І. В., Манько Н. І.-В. Розробка методичної стратегії з використанням GeoGebra, адаптованої до специфіки ЗНО/НМТ для навчання розв'язуванню задач з параметром. *«Педагогічна Академія: наукові записки»*. 2025. № 21. URL: https://pedagogical-academy.com/index.php/journal/article/view/1221.
4. Лов'янова І. В. Модуль числа. Розв'язування задач з параметрами (матеріали для факультативних занять та курсів за вибором). 10 клас / І. В. Лов'янова; за заг. ред. проф.Н. А. Тарасенкової. Черкаси: видавець Чабаненко Ю. А. 2014. 92 с.
5. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра і початки аналізу: проф. рівень: підручник для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків: Гімназія, 2018. 400 с.
6. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра і початки аналізу: проф. рівень: підручник для 11 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків: Гімназія, 2019. 352 с.
7. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б. та ін. Алгебра і початки аналізу : початок вивчення на поглиб. рівні з 8 кл., проф. рівень: підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків: Гімназія, 2019. 304 с.
8. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра і початки аналізу : початок вивчення на поглиб. рівні з 8 кл., проф. рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків: Гімназія, 2018. 512 с.
9. Навчальні програмі з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. URL: https://mon.gov.ua/osvita-2/zagalna-serednya-osvita/osvitni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv
10. Прус А. В., Швець В. О. Задачі з параметрами в шкільному курсі математики. Навчально-методичний посібник. Житомир: Видво «Рута», 2016. 468 с.
11. Сарана О. А. Конкурсні задачі підвищеної складності з математики: навч. посібник Київ : НТУУ "КПІ", 2005. 260 с.
12. Собкович Р., Кульчицька Н. Основні методи доведення нерівностей. Івано-Франківськ: Прикарпатський НУ ім. В. Стефаника, 2014. 100 с
13. Станжицький О. М., Собчук В. В., Кушніренко С. В., Курилко О. Б., Цань В. Б. Методичні вказівки та завдання для самостійної роботи з дисципліни «Методика навчання математики» Частина ІІІ «Функції в шкільному курсі математики» для студентів спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика) механіко-математичного факультету, 2022. 224 с.
14. Станжицький О. М., Собчук В. В., Кушніренко С. В., Цань В. Б. Методичні вказівки та завдання для самостійної роботи з дисципліни «Методика

навчання математики» Частина І «Алгебраїчні рівняння» для студентів спеціальності 014.04 «Середня освіта (Математика)» механіко-математичного факультету 2021. 62 с.
15. Станжицький О. М., Собчук В. В., Кушніренко С. В., Цань В. Б. Методичні вказівки та завдання для самостійної роботи з дисципліни «Методика навчання математики» Частина ІІ «Нерівності в шкільному курсі математики» для студентів спеціальності 014.04 «Середня освіта (Математика)» механіко-математичного факультету 2022. 123 с.
16. Тарасенкова Н. А. Організація навчання математики у старшій профільній школі : монографія / Н. А. Тарасенкова, І. А. Акуленко, І. В. Лов'янова, З. О. Сердюк; за ред. Н. А. Тарасенкової. Черкаси: Видавець ФОП Гордієнко, 2017. 216 с.
17. Фахове періодичне видання "Математика в школах України" (вид-во "Основа").
18. Фахове періодичне видання "Математика в школі", "Математика в сучасній школі" (вид-во "Педагогічна преса").
19. Фахове періодичне видання "Математика" (вид-во "Шкільний світ").
20. Федак І. В. Розв'язування задач підвищеної складності з математики. Спеціальний курс : навчальний посібник. Івано-Франківськ : 2010. 100 с.
21. Швець В. О., Соколовська І. С. Нерівності в шкільному курсі математики та їх доведення /– К.: Видавництво НПУ імені М.П.Драгоманова, 2022. 128 с.

Навчальне видання
(українською мовою)

Зіновєєв Ігор Валерійович
Манько Наталія Іванівна-Володимирівна
Ткаченко Ірина Григорівна

ПРАКТИКУМ ІЗ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ В ПРОФІЛЬНІЙ ШКОЛІ

Методичні рекомендації до лабораторних занять
для здобувачів ступеня вищої освіти магістра
спеціальності «Середня освіта» освітньо-професійної програми
«Середня освіта (Математика)»

Рецензент *С. М. Гребенюк*
Відповідальний за випуск *І. В. Зіновєєв*
Коректор *Н.І.-В. Манько*