МІНІСТЕРСТВА ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

С. М. Гребенюк,
Н. М. Д'яченко

МЕТОДИ ОБЧИСЛЕНЬ

Навчальний посібник
для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра
спеціальності «Комп'ютерні науки» освітньо-професійної
програми «Комп'ютерні науки»

Затверджено вченою
радою ЗНУ
Протокол №

Запоріжжя
2025

УДК: 519.6(075.8)
Г79

Гребенюк С.М., Д’яченко Н.М. Методи обчислень : навчальний посібник для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра спеціальності «Комп’ютерні науки» освітньо-професійної програми «Комп’ютерні науки». Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2025. 92 с.

У навчальному посібнику систематизовано викладено програмний матеріал дисципліни «Методи обчислень» з урахуванням специфіки підготовки здобувачів спеціальності «Комп’ютерні науки». Особливу увагу приділено алгоритмічному представленню чисельних методів, що супроводжується детальними алгоритмами та блок-схемами їх реалізації, що є важливим для формування фахових компетентностей у галузі інформаційних технологій.

Посібник охоплює основи класичної теорії чисельних методів і містить теоретичні відомості, приклади застосування та пояснення щодо реалізації чисельних процедур у задачах прикладного характеру. Розглянуто такі розділи: чисельне розв’язання алгебраїчних рівнянь і систем, обчислення власних значень, апроксимація функцій, чисельне диференціювання та інтегрування, наближене розв’язання задачі Коші та крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь, чисельні методи для диференціальних рівнянь з частинними похідними та інтегральних рівнянь Фредгольма II роду. Вказані методи лежать в основі математичного моделювання широкого спектра природничих, фізичних, інженерних і економічних процесів.

Для забезпечення ефективного опанування матеріалу кожний розділ містить питання та завдання для самоконтролю, що сприяє розвитку навичок самостійної роботи та якісній підготовці здобувачів до підсумкового контролю.

Посібник призначений для студентів спеціальності «Комп’ютерні науки», але може бути корисним і для здобувачів інших спеціальностей, а також студентів магістерського рівня, які використовують чисельні методи у своїй навчальній або дослідницькій діяльності.

Рецензент
С. І. Гоменюк, доктор технічних наук, професор, декан математичного факультету

Відповідальний за випуск
С. М. Гребенюк, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри фундаментальної та прикладної математики

ЗМІСТ

ВСТУП 5
РОЗДІЛ 1 КЛАСИФІКАЦІЯ ПОХИБОК ТА ПРИЧИНИ ЇХ ВИНИКНЕННЯ. ПРЯМІ (ТОЧНІ) МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ 8
1.1. Класифікація похибок та причини їх виникнення 8
1.2. Метод Гауса розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь. 8
Питання для самоперевірки до тем 1.1 і 1.2 10
1.3. Метод Холецького розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь. 10
Питання для самоперевірки до теми 1.3 14
1.4. Розклад симетричних матриць. Метод квадратних коренів 14
1.5. Метод прогонки розв'язання систем із тридіагональними матрицями коефіцієнтів 16
Питання для самоперевірки до тем 1.4 і 1.5 17
РОЗДІЛ 2 НАБЛИЖЕНІ (ІТЕРАЦІЙНІ) МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ 26
2.1. Метод простих ітерацій 26
2.2. Метод Якобі 26
2.3. Метод Зейделя 31
2.4. Метод релаксації 31
Питання для самоконтролю до розділе 2 32
РОЗДІЛ 3 ЛОКАЛІЗАЦІЯ КОРЕНІВ НЕЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ ТА ТРАНСЦЕНДЕНТНИХ РІВНЯНЬ. НАБЛИЖЕНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ ТА ТРАНСЦЕНДЕНТНИХ РІВНЯНЬ 38
3.1. Загальні положення 38
3.2. Методи дихотомії 40
3.3. Метод поділу навпіл 40
3.4. Метод пропорційних частин (метод хорд) 41
3.5. Метод Ньютона (дотичних) 41
Питання для самоконтролю до розділу 3 43
РОЗДІЛ 4 НАБЛИЖЕНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ 44
4.1. Методи спуску 44
4.2. Метод градієнтного спуску 45
Питання для самоконтролю до розділу 4 48
РОЗДІЛ 5 ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ ВИЗНАЧЕННЯ ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ ТА ВЛАСНИХ ВЕКТОРІВ МАТРИЦЬ 53
5.1. Проблема власних значень 53
5.2. Пошук власних значень і власних векторів матриць методом простих ітерацій 53
Питання для самоконтролю до розділу 5 55
РОЗДІЛ 6 АПРОКСИМАЦІЯ ФУНКЦІЙ 58

6.1. Постановка задачі інтерполяції 58
6.2. Наближене відновлення функції за допомогою інтерполяційного многочлена Лагранжа 59
Питання для самоконтролю до тем 6.1 і 6.2 60
6.3. Чисельне диференціювання функцій за допомогою інтерполяції кубічним сплайном 61
Питання для самоконтролю до теми 6.3 62
РОЗДІЛ 7 МЕТОДИ ЧИСЕЛЬНОГО ІНТЕГРУВАННЯ 63
7.1. Загальні положення 63
7.2. Квадратурна формула Гауса 63
Питання для самоконтролю до розділу 7 66
РОЗДІЛ 8 НАБЛИЖЕНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ 68
8.1. Метод Ейлера розв'язання задачі Коші 68
Питання для самоконтролю до теми 8.1 69
8.2. Метод Рунге-Кутта четвертого порядку точності 69
Питання для самоконтролю до теми 8.2 70
8.3. Метод Адамса 70
Питання для самоконтролю до теми 8.3 72
РОЗДІЛ 9 НАБЛИЖЕНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ 73
9.1. Постановка крайової задачі 73
9.2. Метод колокацій 73
9.3. Метод Гальоркіна 74
Питання для самоконтролю до теми 9.1 75
9.4. Метод скінченних різниць 76
Питання для самоконтролю до теми 9.2 77
РОЗДІЛ 10 ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ 79
10.1. Різницевий метод розв'язання задачі Діріхле для рівняння Пуассона 79
Питання для самоконтролю до розділу 10 82
РОЗДІЛ 11 ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ФРЕДГОЛЬМА ІІ РОДУ 85
11.1. Квадратурний метод розв'язання інтегрального рівняння Фредгольма ІІ роду 85
Питання для самоконтролю до теми 11.1 86
11.2. Розв'язання інтегрального рівняння Фредгольма ІІ роду методом послідовних наближень 86
Питання для самоконтролю до теми 11.2 88
ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА 90
РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА 90

ВСТУП

Сучасний розвиток обчислювальної техніки та математичного моделювання відкриває можливість замінювати дорогі, тривалі та ресурсомісткі натурні експерименти на ефективні обчислювальні дослідження. Такі дослідження ґрунтуються на побудові математичних моделей реальних процесів та їх розв'язанні чисельними методами із застосуванням засобів комп'ютерної техніки. У центрі обчислювального експерименту лежить опрацювання рівнянь математичної моделі, що потребує реалізації алгоритмів чисельного розв'язання.

Методи обчислень (чисельні методи) – це сукупність методів наближеного чи точного розв'язання задач, що передбачають виконання скінченних обчислювальних процедур над скінченними множинами чисел, результатом яких є числові дані. Реальні інженерні, фізичні чи технологічні задачі часто потребують виконання мільйонів і навіть мільярдів операцій, що робить застосування комп'ютера необхідною умовою отримання результатів.

Серед чисельних методів виділяють точні (прямі) та наближені. Використання комп'ютерної техніки при реалізації прямих методів забезпечує одержання розв'язку за скінченну кількість кроків за точними формулами, проте через округлення проміжних результатів навіть такі методи фактично дають наближені значення, причому похибки мають властивість накопичуватись у процесі обчислень.

Одним із шляхів створення наближених методах є побудова ітераційного процесу, який ґрунтуються на багаторазовому повторенні певної послідовності операцій, де кожна нова ітерація використовує результати попередньої. Точність отриманого розв'язку залежить від кількості ітерацій: збільшення числа кроків, як правило, зменшує похибку. Іншим шляхом створення наближених методів є заміна «складних» точних співвідношень «простими» наближеними співвідношеннями, що і обумовлює наявність похибок у остаточному результаті.

Застосовуючи будь-який чисельний метод, важливо враховувати вимоги до його збіжності та стійкості, оскільки саме ці характеристики визначають рівень достовірності отриманих результатів. Дослідження точності методів зазвичай здійснюють на задачах, для яких відомий аналітичний розв'язок або існують експериментальні дані.

Для розв'язання складних прикладних задач створюються спеціалізовані чисельні алгоритми та програмні реалізації, що утворюють бібліотеки стандартних процедур, пакети прикладних програм і багатофункціональні програмні комплекси. Їхнє використання дозволяє ефективно застосовувати сучасні чисельні методи в інженерії, науці та інформаційних технологіях.

Метою викладання навчальної дисципліни «Методи обчислень» є надання студентам систематичних знань про основні чисельні методи розв'язання алгебраїчних рівнянь і систем, інтерполяцію і наближення функцій, чисельне інтегрування; чисельні методи розв'язання задачі Коші та крайової задачі для звичайних диференціальних рівнянь та рівнянь з частинними похідними та чисельні методи розв'язку інтегральних рівнянь.

Основними завданнями вивчення дисципліни «Методи обчислень*» є:*

- ознайомлення з принципами побудови та програмної реалізації методів обчислень для розв’язання алгебраїчних рівнянь і систем;
- засвоєння підходів до побудови та програмної реалізації методів обчислень для інтерполяції і наближення функцій;
- ознайомлення з принципами побудови та програмної реалізації методів обчислень для чисельного інтегрування;
- засвоєння підходів до побудови та програмної реалізації методів обчислень для розв’язання задачі Коші та крайової задачі для звичайних диференціальних рівнянь та рівнянь з частинними похідними;
- ознайомлення з принципами побудови та програмної реалізації методів обчислень для розв’язання інтегральних рівнянь;
- вироблення навичок застосування цих методів до розв’язання конкретних задач.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен набути таких результатів навчання (знання, уміння тощо) та компетентностей:

результати навчання:

- застосовувати знання основних форм і законів абстрактно-логічного мислення, основ методології наукового пізнання, форм і методів вилучення, аналізу, обробки та синтезу інформації в предметній області комп'ютерних наук;
- використовувати сучасний математичний апарат неперервного та дискретного аналізу, лінійної алгебри, аналітичної геометрії, в професійній діяльності для розв’язання задач теоретичного та прикладного характеру в процесі проектування та реалізації об’єктів інформатизації;
- проектувати, розробляти та аналізувати алгоритми розв’язання обчислювальних та логічних задач, оцінювати ефективність та складність алгоритмів на основі застосування формальних моделей алгоритмів та обчислюваних функцій;
- використовувати методи чисельного диференціювання та інтегрування функцій, розв'язання звичайних диференціальних та інтегральних рівнянь, особливостей чисельних методів та можливостей їх адаптації до інженерних задач, мати навички програмної реалізації чисельних методів;

компетентності:

- здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу;
- здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях;
- здатність вчитися і оволодівати сучасними знаннями;
- здатність до математичного формулювання та досліджування неперервних та дискретних математичних моделей, обґрунтовування вибору методів і підходів для розв’язування теоретичних і прикладних задач у галузі комп’ютерних наук, аналізу та інтерпретування;
- здатність до логічного мислення, побудови логічних висновків, використання формальних мов і моделей алгоритмічних обчислень, проектування,

розроблення й аналізу алгоритмів, оцінювання їх ефективності та складності, розв’язності та нерозв’язності алгоритмічних проблем для адекватного моделювання предметних областей і створення програмних та інформаційних систем;

– здатність використовувати сучасні методи математичного моделювання об’єктів, процесів і явищ, розробляти моделі й алгоритми чисельного розв’язування задач математичного моделювання, враховувати похибки наближеного чисельного розв’язування професійних задач.

Основою для курсу «Методи обчислень» є знання, що отримуються на таких курсах як «Алгебра та геометрія», «Математичний аналіз», «Диференціальні рівняння» та інші. В свою чергу матеріали, що надаються у курсі «Методи обчислень» знаходять подальше застосування при вивченні курсів «Логічне програмування та штучний інтелект», «Дослідження операцій», «Паралельні та розподілені обчислення», а також можуть бути використаними при написанні кваліфікаційних робіт бакалаврів.

РОЗДІЛ 1 КЛАСИФІКАЦІЯ ПОХИБОК ТА ПРИЧИНИ ЇХ ВИНИКНЕННЯ. ПРЯМІ (ТОЧНІ) МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

1.1. Класифікація похибок та причини їх виникнення

При чисельному розв'язання математичних та прикладних задач майже неминуча поява на тому чи іншому етапі їх розв'язання похибок таких трьох типів:

1) *Похибка задачі.* Пов'язана з наближеним характером вихідної змістовної моделі, а також її математичного опису, параметрами якого є, зазвичай, наближені числа. Для розраховувача похибка задачі можна вважати неусувною, хоча постачальник задачі інколи може її змінити.

2) *Похибка методу*. Ця похибка, пов'язана із способом розв'язання заданої математичної задачі, й з'являється в результаті підміни вихідної математичної моделі іншою або скінченною послідовністю інших моделей. При конструюванні чисельних методів закладається можливість відслідковування таких похибок й доведення їх до скільки завгодно малого рівня. Звідси похибка методу вважається усувною.

3) *Похибка округлень*. Цей тип похибок обумовлений необхідністю виконувати арифметичні операції над числами, усіченими до кількості розрядів, що залежить від обчислювальної техніки, яка застосовується, та типу даних, що використовується.

Усі три описаних типи похибок в сумі дають повну похибку результату розв'язання задачі.

Нехай A та a – два «близьких» числа; припустимо, що A є точним, а a – наближеним.

Величина $\Delta a = |A - a|$ називається абсолютною похибкою наближеного числа a, а $\delta a = \Delta a/|a|$ – його відносною похибкою (або $\delta a = \Delta a/|A|$).

Значущими цифрами числа називають всі його цифри, починаючи з першої ненульової цифри.

Значущу цифру наближеного числа називають правильною, якщо абсолютна похибка числа не перевищує одиниці розряду, в якому стоїть ця цифра.

1.2. Метод Гауса розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Цей метод є точним. Він заснований на зведенні матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) до трикутного вигляду.

Нехай потрібно розв'язати систему $A\bar{x} = \bar{b}$; тут $A = [a_{ij}]$ – матриця коефіцієнтів системи розмірності $n \times n$, $det\, A \neq 0$, $\bar{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$ і $\bar{b} = [b_1, b_2, \ldots, b_n]^T$ – вектори.

Віднімемо від другого рівняння системи

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = b_i, \qquad (1)$$
$$1 \le i \le n$$

перше, помножене на таке число, щоб обернувся на нуль коефіцієнт при x_1. Потім, у такий же спосіб, віднімемо перше рівняння з третього, четвертого і інших Тоді виключаються всі коефіцієнти першого стовпця, що лежать нижче головної діагоналі.

Потім, за допомогою другого рівняння виключимо з третього, четвертого і інших рівнянь коефіцієнти другого стовпця. Послідовно продовжуючи цей процес, виключимо з матриці A всі коефіцієнти, що лежать нижче головної діагоналі.

Запишемо загальні формули процесу. Нехай проведено виключення коефіцієнтів з $(k-1)$-го стовпця. Тоді залишилися такі рівняння з ненульовими елементами нижче головної діагоналі:

$$\sum_{j=k}^{n} a_{ij}^{(k)} x_j = b_i^{(k)}, \qquad (2)$$
$$k \le i \le n.$$

Помножимо k-й рядок на число

$$c_{mk} = \frac{a_{ij}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}, \qquad (3)$$
$$m > k$$

і віднімемо його від m-го рядка. Перший ненульовий елемент цього рядка обернеться на нуль, а інші зміняться за формулами

$$a_{ml}^{(k+1)} = a_{ml}^{(k)} - c_{mk} a_{kl}^{(k)},$$
$$b_m^{(k+1)} = b_m^{(k)} - c_{mk} b_k^{(k)}, \qquad (4)$$
$$k < m,\ l \le n.$$

Виконуючи обчислення за цими формулами при всіх зазначених індексах, виключимо елементи k-го стовпця. Назвемо таке виключення циклом процесу. Виконання всіх циклів називається прямим ходом виключення.

У результаті виконання прямого ходу одержимо систему з матрицею трикутного вигляду

$$\sum_{j=i}^{n} a_{ij}^{(i)} x_j = b_i^{(i)}, \qquad (5)$$
$$1 \le i \le n.$$

Така система легко розв’язується за допомогою так званого зворотного ходу, суть якого така. З останнього рівняння визначаємо x_n. Підставляючи його в передостаннє рівняння, знаходимо x_{n-1} і т.д. Загальні формули зворотного ходу мають вигляд

$$x_i = \frac{1}{a_{ij}^{(i)}}\left[b_i^{(i)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i)} x_j\right], \quad (6)$$
$$i = n, n-1, \ldots, 1.$$

Виключення за формулами прямого ходу (3) – (4) не можна проводити, якщо в ході розрахунку на головній діагоналі виявиться нульовий елемент $a_{kk}^{(k)} = 0$. Але в першому стовпці проміжної системи (2) всі елементи не можуть бути нулями: це означало б, що $det\, A = 0$. Перестановкою рядків можна перемістити ненульовий елемент на головну діагональ і продовжити розрахунок.

Якщо елемент на головній діагоналі $a_{kk}^{(k)}$ малий, то цей рядок домножується на великі числа c_{mk}, що призводить до значних помилок округлення при обчисленнях. Щоб уникнути цього, кожен цикл завжди починають з перестановки рядків. Серед елементів стовпця $a_{mk}^{(k)}$, $m \geq k$ знаходять головний, тобто найбільший за модулем у k-ому стовпці, і перестановкою рядків переводять його на головну діагональ, після чого роблять виключення. У цьому суть методу Гауса з вибором головного елемента.

Блок-схему розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса наведено на рис.1, а її модифікацію – на рис.2. У блок-схемі: n – кількість рівнянь; b_i – елементи вектора вільних членів; a_{ij} – елементи матриці коефіцієнтів при невідомих; x_i – елементи вектора невідомих; c_{ij} – допоміжні коефіцієнти; s – допоміжна величина.

Питання для самоперевірки до тем 1.1 і 1.2

1. Сформулюйте постановку задачі.
2. Опишіть метод розв'язання, оцініть похибку методу.
3. У чому суть і переваги методу Гауса з вибором головного елемента?

1.3. Метод Холецького розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$A\bar{x} = \bar{b}, \quad (7)$$

де $A = [a_{ij}]$ – квадратна матриця порядку n і

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \bar{b} = \begin{bmatrix} a_{1,n+1} \\ \vdots \\ a_{n,n+1} \end{bmatrix}$$

– вектори-стовпці невідомих і вільних членів відповідно.

Представимо матрицю A у вигляді добутку нижньої трикутної матриці $B = [b_{ij}]$ і верхньої трикутної матриці $C = [c_{ij}]$ з одиничною діагоналлю, тобто

$$A = BC, \quad (8)$$

де $B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$ і $C = \begin{bmatrix} 1 & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$.

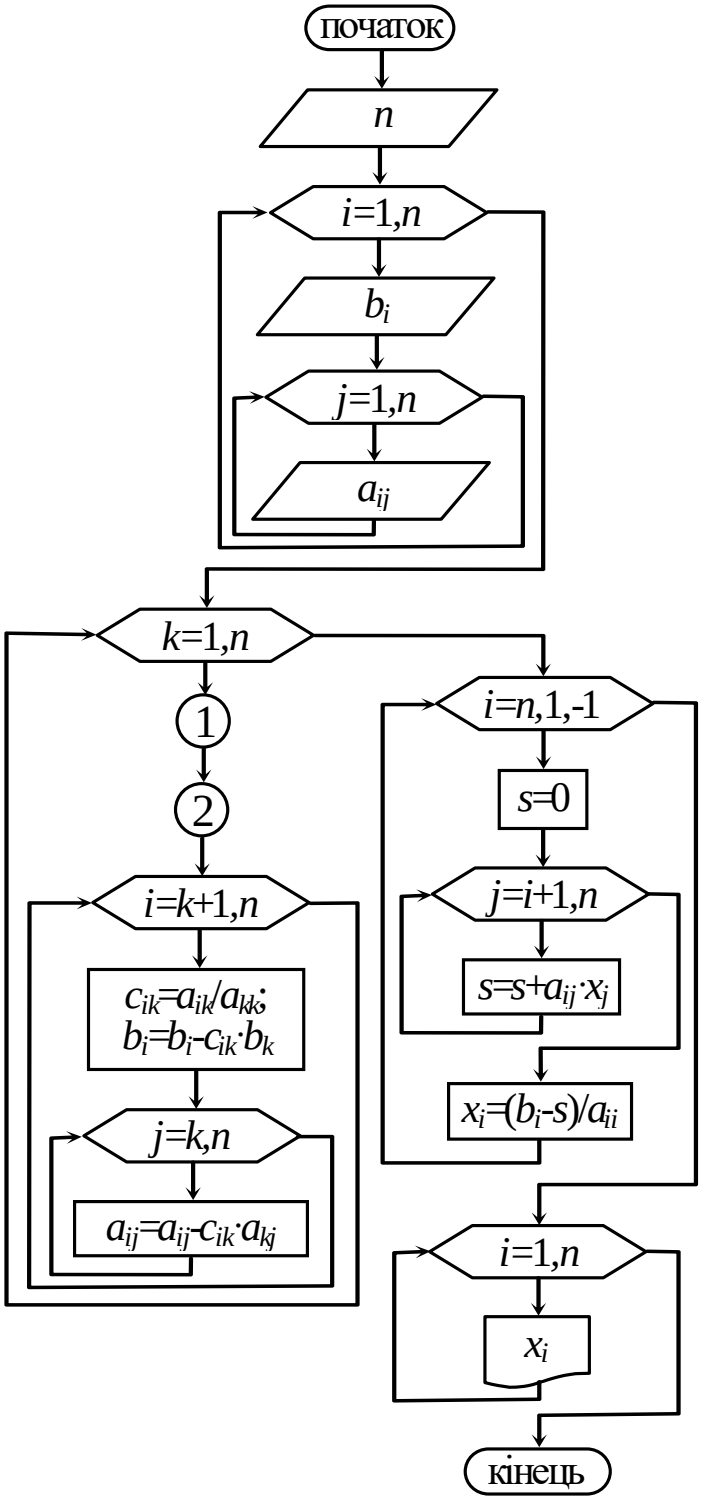


Рисунок 1 – Блок-схема розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь методо Гауса

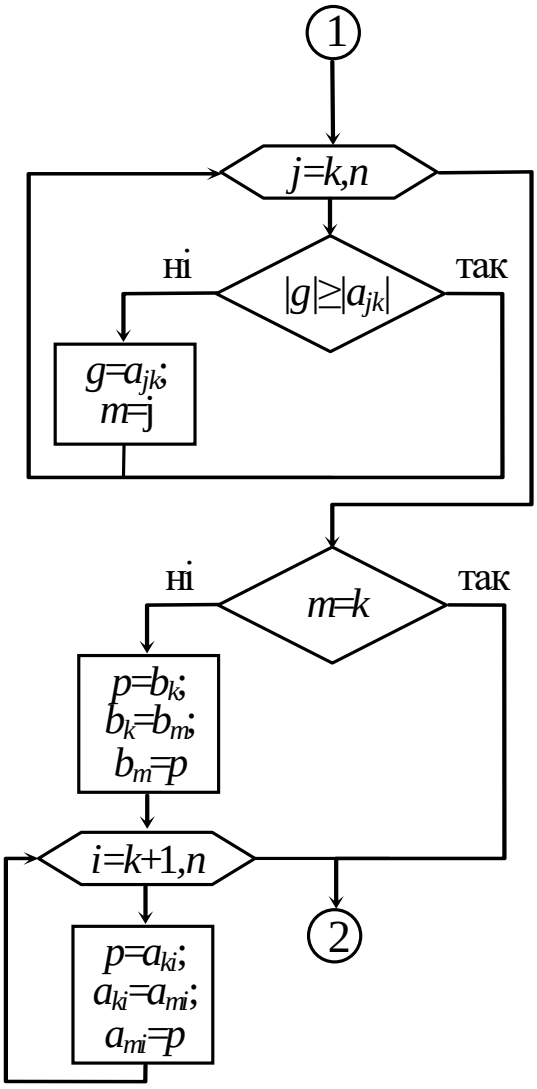


Рисунок 2 – Вибір головного елемента у методі Гауса

Тоді елементи b_{ij} і c_{ij} визначаються за формулами:

$$\left.\begin{aligned} b_{i1} &= a_{i1}; \\ b_{ij} &= a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{ik}c_{kj} (i \geq j > 1). \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

і

$$\left.\begin{aligned} c_{1j} &= \frac{a_{1j}}{b_{11}}; \\ c_{ij} &= \frac{1}{b_{ii}}\left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik}c_{kj}\right)(1 < i < j). \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Звідси шуканий вектор $\bar{x}$ може бути знайдений з ланцюга рівнянь

$$B\bar{y} = \bar{b}, C\bar{x} = \bar{y}. \quad (11)$$

Оскільки матриці B і C – трикутні, то системи (11) легко розв'язуються, а саме:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \frac{a_{1,n+1}}{b_{11}}; \\ y_i &= \frac{1}{b_{ii}}\left(a_{i,n+1} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik}y_k\right)(i > 1). \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

і

$$\left.\begin{aligned} x_n &= y_n; \\ x_i &= y_i - \sum_{k=i+1}^{n} c_{ik}x_k (i < n). \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

З формули (12) бачимо, що числа y_i зручно обчислювати разом з коефіцієнтами c_{ij}.

Схема Холецького зручна для роботи на комп'ютері, тому що в цьому випадку операції «нагромадження» (9) і (10) можна проводити без запису проміжних результатів. Метод є точним.

На рис. 3 наведена блок-схема програми розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Холецького.

В даній блок-схемі: n – кількість рівнянь; b_i – елементи вектору вільних членів; a_{ij} – елементи матриці сталих коефіцієнтів; x_i – елементи вектору невідомих; c_{ij} – елементи верхньої трикутної матриці; d_{ij} – елементи нижньої трикутної матриці; y_i – допоміжні числа.

Приклад.

Розв'язати методом Холецького систему рівнянь

$$\begin{cases} 1{,}35x_1 - 1{,}72x_2 - 0{,}62x_3 + 0{,}48x_4 = 0{,}93; \\ 1{,}08x_1 + 0{,}64x_2 - 0{,}95x_3 + 1{,}54x_4 = 1{,}64; \\ 0{,}88x_1 - 0{,}72x_2 + 1{,}36x_3 - 0{,}68x_4 = -0{,}85; \\ 0{,}64x_1 + 1{,}48x_2 + 0{,}82x_3 - 1{,}58x_4 = -1{,}32. \end{cases}$$

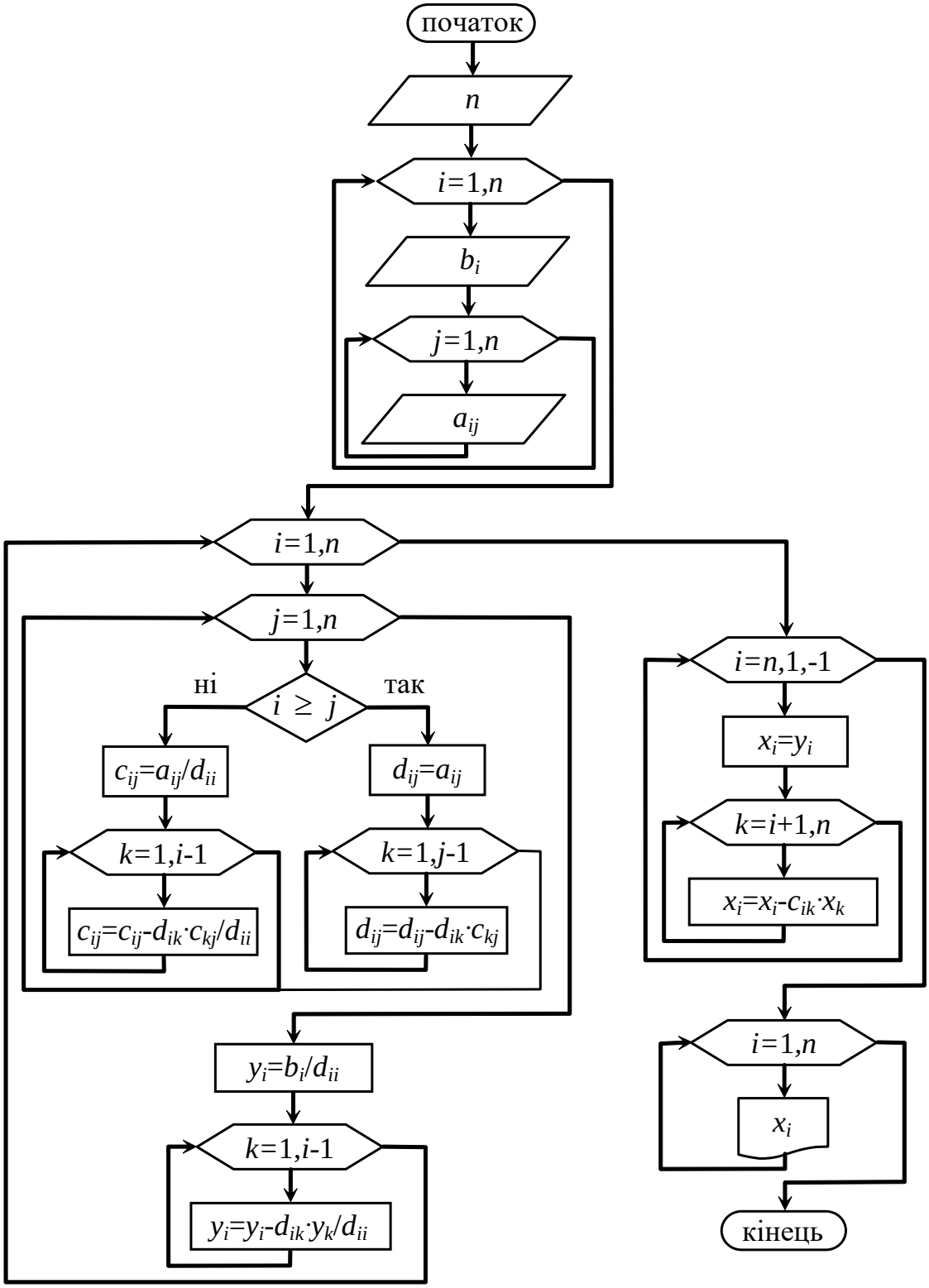


Рисунок 3 – Блок-схема розв’язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Холецького

Розв’язання.

Обчислення виконуємо за схемою, наведено в табл. 1

Таблиця 1 – Схема розв’язання задачі методом Холецького

x_1	x_2	x_3	x_4	Вільний член
1,35	-1,72	-0,62	0,48	0,93
1,08	0,64	-0,95	1,54	1,64
0,88	-0,72	1,36	-0,68	-0,85
0,64	1,48	0,82	-1,58	-1,32
1,35	-1,27410	-0,45926	0,35555	0,68888
1,08	2,01603	-0,22520	0,57341	0,44444
0,88	0,40121	1,85450	-0,65945	-0,88138
0,64	2,29542	1,63086	-2,04830	0,65598
			1	0,65598
		1		-0,44879
	1			-0,03277
1				0,20778

Відповідь: $x_1 = 0{,}2078;\ x_2 = -0{,}0328;\ x_3 = -0{,}4488;\ x_4 = 0{,}6560.$

Питання для самоперевірки до теми 1.3

1. Сформулюйте постановку задачі.
2. Опишіть метод розв’язання.
3. Оцініть похибку методу.
4. В чому полягають переваги схеми Холецького?

1.4. Розклад симетричних матриць. Метод квадратних коренів

Обсяг обчислень, необхідних для розв'язання лінійних алгебраїчних задач із симетричними матрицями, можна зменшити майже вдвічі, якщо враховувати симетрію в процесі трикутної факторизації матриць.

Нехай A з елементами $a_{ij},\ (i,j = 1,\dots,n)$ є заданою симетричною матрицею, тобто $a_{ij} = a_{ji}$. Будемо будувати його представлення у формі $A = U^T U$, де

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix},\ U^T = \begin{pmatrix} u_{11} & 0 & \dots & 0 \\ u_{12} & u_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{1n} & u_{2n} & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}.$$

Подібно до схеми Холецького, побудуємо систему $n(n+1)/2$ рівнянь для такої ж кількості невідомих:

$$u_{11}^2 = a_{11},\quad u_{12}u_{11} = a_{12},\dots,\qquad u_{11}u_{1n} = a_{1n},$$
$$u_{12}^2 + u_{22}^2 = a_{22},\dots,\quad u_{12}u_{1n} + u_{22}u_{2n} = a_{2n},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$u_{1n}^2 + u_{2n}^2 + \dots + u_{nn}^2 = a_{nn}.$$

З першого рядку рівнянь знаходимо спочатку $u_{11} = \sqrt{a_{11}}$, потім $u_{1j} = \frac{a_{1j}}{u_{11}}$ при $j = 2, \ldots, n$. З другого – $u_{22} = \sqrt{a_{22} - u_{12}^2}$, потім $u_{2j} = \frac{a_{2j} - u_{12}u_{1j}}{u_{22}}$ при $j = 3, \ldots, n$ і т.д.

$$u_{nn} = \sqrt{a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} u_{kn}^2}.$$

Отже, матрицю U можна визначити за допомогою набору формул:

$$u_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki}^2}, (i = 1,2, \ldots, n); \quad (14)$$

$$u_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki}u_{kj}}{u_{ii}}, (j = 2, \ldots, n), j > i; \quad (15)$$

$$(u_{ij} = 0 \text{ при } j < i).$$

Можливості виконання дійсного $U^T U$-розкладання дійсної симетричної матриці A за цими формулами, можуть завадити дві обставини: обернення у нуль елемента u_{ii} при будь-якому $i \in \{1,2, \ldots, n\}$ та від'ємність підкореневого виразу. Відомо, що для класу симетричних додатно визначених матриць розкладання за формулами (14), (15) можливе.

Залежно від наявності $U^T U$-розкладання, розв'язання симетричної системи $A\bar{x} = \bar{b}$ зводиться до послідовного розв'язання двох трикутних систем

$$U^T \bar{y} = \bar{b} \text{ та } U\bar{x} = \bar{y}.$$

Перша з них має форму

$$\begin{cases} u_{11}y_1 = b_1, \\ u_{12}y_1 + u_{22}y_2 = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{1n}y_1 + u_{2n}y_2 + \ldots + u_{nn}y_n = b_n. \end{cases}$$

З неї отримуємо допоміжні невідомі y_1, y_2, ..., y_n згідно з формулою

$$y_i = \frac{b_i - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki}y_k}{u_{ii}}, \quad (16)$$

вважаючи у ній $i = 1,2, \ldots, n$. З іншої системи

$$\begin{cases} u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \ldots + u_{1n}x_n = y_1, \\ u_{22}x_2 + \ldots + u_{2n}x_n = y_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{nn}x_n = y_n \end{cases}$$

знаходимо шукані значення x_i у зворотному порядку, тобто при $i = n, n - 1, \ldots, 1$, за формулою

$$x_i = \frac{y_i - \sum_{k=i+1}^{n} u_{ik}x_k}{u_{ii}}. \quad (17)$$

Розв'язок симетричних СЛАР за формулами (14) – (17) називається методом квадратного кореня.

1.5. Метод прогонки розв'язання систем із тридіагональними матрицями коефіцієнтів

Часто виникає потреба розв'язувати лінійні алгебраїчні системи, матриці яких, будучи слабо заповненими, тобто містять мало ненульових елементів, мають певну структуру. Серед таких систем виділимо системи з матрицями стрічкової структури, у яких ненульові елементи розташовані на головній діагоналі та на кількох сусідніх діагоналях. Для розв'язання систем із стрічковими матрицями коефіцієнтів метод Гаусса можна перетворити на більш ефективні методи.

Розглянемо найпростіший випадок стрічкових систем, до яких зводиться велика кількість задач. А саме, шукатимемо розв'язок такої системи, кожне рівняння якої з'єднує три «сусідні» невідомі:

$$b_i x_{i-1} + c_i x_i + d_i x_{i+1} = r_i, \tag{18}$$

де $i = 1,2,\dots,n;\ b_1 = 0;\ d_n = 0$. Такі рівняння називаються триточковими різницевими рівняннями другого порядку. Система (18) має тридіагональну структуру, що чітко видно з наступного еквівалентного (18) векторно-матричного представлення:

$$\begin{pmatrix} c_1 & d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & c_2 & d_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & c_3 & d_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & c_{n-1} & d_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_n & c_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \dots \\ r_{n-1} \\ r_n \end{pmatrix}.$$

Щоб позбутися ненульових елементів у піддіагональній частині матриці системи, припустимо, що існують такі множини чисел δ_i і λ_i $(i = 1,2,\dots,n)$, для яких виконується рівність

$$x_i = \delta_i x_{i+1} + \lambda_i, \tag{19}$$

тобто триточкове рівняння другого порядку (18) перетворюється на двоточкове рівняння першого порядку (19). Зменшимо індекс на одиницю у зв'язку (19) і підставимо отриманий вираз $x_{i-1} = \delta_{i-1} x_i + \lambda_{i-1}$ у вихідне рівняння (18):

$$b_i \delta_{i-1} x_i + b_i \lambda_{i-1} + c_i x_i + d_i x_{i+1} = r_i,$$

звідки отримаємо

$$x_i = -\frac{d_i}{c_i + b_i \delta_{i-1}} x_{i+1} + \frac{r_i - b_i \lambda_{i-1}}{c_i + b_i \delta_{i-1}}.$$

Останнє рівняння має форму рівності (19) і точно буде збігатися з нею, якщо для всіх $i = 1,2,\dots,n$ виконуються рекурентні співвідношення

$$\delta_i = -\frac{d_i}{c_i + b_i \delta_{i-1}}, \lambda_i = \frac{r_i - b_i \lambda_{i-1}}{c_i + b_i \delta_{i-1}}. \tag{20}$$

Зважаючи на умову $b_1 = 0$, процес обчислення δ_i, λ_i можна почати зі значень

$$\delta_1 = -\frac{d_1}{c_1}, \lambda_1 = \frac{r_1}{c_1}$$

і послідовно продовжити далі за формулами (20) при $i = 2,3,\dots,n$, і при $i = n$, за умови $d_n = 0$, отримуємо $\delta_n = 0$. Отже, припускаючи в (20) $i = n$, отримаємо

$$x_n = \lambda_n = \frac{r_n - b_n\lambda_{n-1}}{c_n + b_n\delta_{n-1}},$$

де λ_{n-1}, δ_{n-1} – це числа, вже відомі з попереднього кроку. Далі, згідно з формулами (19), послідовно знаходимо $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1$ при $i = n-1, n-2, \dots, 1$ відповідно.

Таким чином, розв'язання рівнянь виду (18) описаним способом, яке називається методом прогонки, зводиться до обчислень за трьома простими формулами: пошук так званих коефіцієнтів δ_i, λ_i за формулами (20) при $i = 1,2,\dots,n$ (пряма прогонка) і, потім, отримання невідомих x_i за формулою (19) при $i = n, n-1, \dots, 1$ (зворотна прогонка).

Для успішного застосування методу прогонки необхідно не мати випадків ділення на нуль у процесі обчислень, а при великих розмірах систем не спостерігалося швидкого зростання похибок округлень.

Будемо вважати прогонку коректною, якщо знаменники коефіцієнтів серії (20) не обертаються у нуль, а стійкою – якщо $|\delta_i| < 1$, при всіх $i \in \{1,2,\dots,n\}$.

Теорема 2. Нехай коефіцієнти b_i і d_i рівняння (18) при $i = 2,3,\dots,n-1$ є ненульовими і нехай

$$|c_i| > |b_i| + |d_i| \ \ \forall i \in \{1,2,\dots,n\}. \qquad (21)$$

Тоді прогонка (20), (19) є коректною та стійкою (тобто $c_i + b_i\delta_{i-1} \neq 0$, $|\delta_i| < 1$).

Питання для самоперевірки до тем 1.4 і 1.5

1. Сформулюйте постановку задачі.
2. Опишіть особливості методу квадратних коренів.
3. Опишіть особливості методу прогонки.

Завдання 1 до розділу 1. Розв'язання СЛАР методом Гауса із постовпцевим вибором головного елементу

Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{j=1}^{6} a_{ij}\, x_j = b_i, i = 1,2,\dots,6$$

методом Гауса з вибором головного елемента відповідно зо індивідуального варіанту (див. табл. 2).

Таблиця 2 – Варіанти завдання 1 до розділу 1

№ варі-анта	Матриця коефіцієнтів системи A						Стовпець вільних членів $\bar{b}$
1	2,1	1,3	-5,2	1,4	3,3	4,6	14,35
	6,3	-0,4	-14,4	7,8	14,0	21,0	90,95
	2,1	-3,0	-1,7	9,2	7,8	24,6	129,28
	4,2	-1,7	-6,9	10,6	11,1	29,2	143,63
	-2,1	3,0	-0,6	-13,4	-0,5	0,0	-65,30
	4,2	2,6	-15,0	-5,6	13,5	0,6	-43,71
2	1,7	-3,1	2,2	0,6	1,8	-0,1	-7,31
	3,3	4,2	0,7	5,4	2,1	1,6	40,53
	-0,4	5,7	4,1	3,6	-0,5	2,7	26,42
	4,7	-0,6	3,3	7,1	1,9	-4,6	23,24
	-0,1	7,2	4,8	2,3	5,1	3,3	52,40
	2,6	3,1	7,4	-4,1	8,2	-0,1	31,99
3	-3,7	0,2	5,3	-1,4	2,2	3,4	-3,25
	0,6	2,4	-1,7	3,0	-7,1	0,7	-30,32
	4,8	-5,2	-2,3	1,6	0,8	3,5	19,01
	1,1	4,4	0,8	3,1	-2,8	-5,1	6,19
	-0,3	1,5	-1,4	6,2	1,7	0,4	7,04
	2,2	-0,1	4,5	-3,3	2,6	6,6	20,35
4	1,7	-0,1	8,2	-1,4	2,3	0,0	41,48
	-1,3	-0,9	2,1	6,7	0,0	1,1	6,27
	-0,1	-1,3	0,5	2,4	5,6	0,6	16,44
	6,1	-0,1	3,2	1,2	0,7	-0,4	40,62
	2,2	0,1	-0,2	0,4	-1,8	5,1	5,08
	0,4	7,6	2,0	-0,3	1,8	2,1	3,65
5	0,9	-1,7	0,3	6,9	1,2	-0,1	0,78
	-0,3	1,9	7,4	-1,1	0,9	0,2	-13,80
	7,2	0,2	-0,9	1,3	-2,0	1,9	12,35
	0,4	0,6	2,2	-1,2	-0,1	5,2	12,69
	1,6	8,8	-0,4	0,7	2,3	-1,1	10,57
	-1,3	-0,8	0,1	0,6	5,7	2,0	1,91
6	2,4	-1,0	0,2	0,0	1,4	6,8	13,12
	0,0	0,4	5,4	-1,0	-1,9	0,1	11,74
	-1,9	1,5	-0,7	0,3	7,4	0,0	18,81
	8,3	-1,4	0,0	1,0	2,1	-1,7	-6,40
	2,2	0,6	0,0	6,6	-0,1	0,4	4,64
	-0,5	7,8	1,1	0,1	0,0	2,4	13,78

Продовження таблиці 2

	-2,5	0,0	-0,4	0,0	6,7	1,2	4,13
	1,6	0,3	0,0	8,0	-1,1	-0,7	24,59
7	1,2	-1,0	0,7	-0,9	0,0	5,9	-5,39
	-1,0	8,4	0,2	-1,3	0,0	2,1	15,64
	9,0	0,7	-1,4	2,1	-0,2	-0,8	12,98
	0,2	-1,4	7,7	0,1	1,9	0,0	-10,12
	-0,9	0,3	-0,5	0,0	5,4	-1,2	-3,19
	0,7	-0,4	6,4	-2,0	1,4	0,0	-9,30
8	5,9	0,0	-0,8	1,1	0,3	0,7	3,83
	0,0	1,6	1,7	-2,1	0,0	6,6	19,43
	1,2	-1,0	0,0	7,9	-0,2	0,4	8,16
	-0,1	6,5	1,2	0,0	-0,9	-2,3	19,45
	-1,4	1,7	-0,1	8,2	2,3	0,0	-22,23
	0,4	-1,8	5,1	2,2	0,1	-0,2	1,65
9	0,7	-0,4	-2,0	0,0	1,4	6,4	19,00
	0,0	-0,8	1,1	0,3	5,9	0,7	3,17
	6,7	0,0	1,1	-1,3	2,1	-0,9	12,13
	1,2	7,9	0,0	-1,0	-0,2	0,4	0,72
	-0,4	0,7	1,2	3,2	6,1	-0,1	-22,40
	0,3	0,0	8,0	1,6	-1,1	-0,7	-9,39
10	-0,8	-0,2	2,1	-1,4	0,7	9,0	-3,09
	0,0	6,7	1,1	2,1	-0,9	-1,3	3,94
	5,6	2,4	0,5	-1,3	-0,1	0,6	-1,69
	1,8	-0,3	2,0	7,6	0,4	2,1	21,40
	2,1	1,8	-0,3	2,0	0,4	7,6	-1,52
	0,0	1,6	6,8	0,2	-1,0	2,4	10,34
11	1,9	2,0	1,3	-0,9	7,2	0,2	10,61
	0,6	5,6	2,4	-0,1	-1,3	0,5	-1,98
	6,9	1,2	-1,0	0,3	-1,7	0,7	22,74
	2,0	0,6	0,1	5,7	-0,8	-1,3	28,30
	-1,0	1,2	0,3	-1,7	6,9	0,9	-0,65
	-0,1	-1,2	5,2	2,2	0,6	0,4	-4,52
12	5,9	0,7	0,3	1,1	-0,8	0,0	6,23
	0,2	0,9	-1,1	1,9	-0,3	7,4	25,28
	1,9	-2,0	1,3	7,2	0,2	-0,9	1,74
	1,4	6,8	0,0	0,2	-1,0	2,4	-4,26
	0,2	0,9	-1,1	1,9	7,4	-0,3	-5,94
	-0,9	0,2	7,2	1,9	-2,0	1,3	7,40
13	-1,1	2,3	0,7	-0,4	1,6	8,8	-6,04
	2,0	5,7	0,6	0,1	-0,8	-1,3	-7,38
	6,6	0,0	-2,1	1,7	1,6	0,0	15,74
	-1,0	1,2	0,3	6,9	0,9	-1,7	15,55

Продовження таблиці 2

	2,4	0,0	0,1	1,1	7,8	-0,5	-11,76
	0,1	-1,9	5,4	-1,0	0,4	0,0	4,66
14	0,0	0,3	-0,7	1,5	-1,9	7,4	28,60
	5,7	2,0	0,6	0,1	-0,8	-1,3	-16,18
	0,4	-0,1	0,0	6,6	0,6	2,2	20,94
	1,4	6,8	0,0	0,2	-1,0	2,4	5,92
	1,2	0,0	-0,4	6,6	0,1	-2,5	-8,86
	0,0	-0,9	6,1	0,7	-1,0	1,2	7,98
15	0,0	1,9	0,1	-1,3	0,2	7,8	4,70
	-0,7	-1,1	0,0	0,3	8,1	1,3	29,47
	-0,1	5,2	-1,2	2,2	0,6	0,4	6,09
	7,9	0,4	-0,2	0,0	-1,0	1,2	-27,93
	1,9	-1,7	0,3	2,1	7,9	-0,4	11,78
	0,9	0,0	6,8	-2,1	-0,9	1,3	10,44
16	-0,5	0,3	1,3	2,9	0,1	6,2	13,82
	1,8	5,2	0,2	-0,4	0,0	2,2	-1,72
	5,8	0,5	-2,4	0,3	1,4	-0,1	1,76
	0,0	2,2	-1,2	8,0	-0,1	1,7	25,45
	-0,1	0,2	-1,0	5,2	-1,8	0,4	3,42
	0,0	2,3	8,4	-0,2	1,6	-1,3	-11,56
17	0,4	-0,1	-1,1	0,0	8,0	1,2	27,17
	-1,2	5,7	-0,5	0,0	0,3	-0,9	3,69
	-0,8	1,9	-1,4	1,1	0,0	6,6	0,90
	6,7	0,1	-2,1	1,7	1,5	0,0	11,57
	-0,2	0,3	2,4	5,3	1,6	-0,3	-10,57
	0,0	2,1	8,4	0,2	-1,8	1,3	17,30
18	0,4	-0,1	1,2	0,0	8,1	-1,0	7,62
	0,6	6,0	-0,4	-1,1	0,9	0,0	3,85
	-0,8	2,0	-1,4	-1,1	0,1	6,8	32,76
	6,3	-1,4	0,0	2,0	0,4	-0,7	1,95
	2,1	0,4	7,7	-1,9	0,4	-1,7	-8,87
	1,3	-0,8	-2,0	1,2	6,8	0,1	12,52
19	-0,7	-1,0	1,5	8,1	0,0	0,3	33,09
	0,0	6,2	-3,1	1,1	-0,8	-0,4	0,19
	0,6	0,0	1,2	-0,4	-2,5	5,7	17,56
	8,9	-0,6	1,3	-2,0	0,2	0,7	14,12
	-0,7	-1,1	1,6	8,0	0,0	0,3	-11,48
	2,0	0,2	7,8	-2,1	0,2	-1,6	9,85
20	-1,2	-0,8	2,0	0,9	6,6	0,1	19,77
	0,2	7,0	-3,3	1,4	-0,1	0,5	-19,81
	0,4	-0,2	1,1	-0,6	2,3	5,7	-4,61
	9,1	-0,5	1,2	-2,4	0,0	-0,6	19,36

Продовження таблиці 2

	-0,5	-1,3	-0,2	2,2	5,6	0,4	13,76
	-2,4	1,0	0,1	6,9	1,6	0,0	5,09
21	0,9	1,5	0,6	-1,2	1,0	6,8	8,94
	0,1	7,0	0,7	-1,1	-1,9	1,6	-1,50
	7,8	-0,3	-1,9	0,4	1,7	2,2	-15,59
	1,4	0,6	5,8	0,1	-0,6	-1,8	2,55
	0,4	0,6	2,2	5,4	-1,2	-0,1	-1,82
	0,7	-0,2	7,1	-1,2	1,9	2,1	2,64
22	-2,2	-1,1	0,0	0,2	6,8	1,2	4,54
	0,1	-1,4	-1,8	2,0	0,0	6,6	-9,40
	-0,9	6,8	1,6	-0,2	1,2	-1,0	16,54
	7,5	0,4	-2,0	0,9	-1,1	0,1	22,19
	-1,1	-0,8	0,1	0,6	5,7	2,0	0,39
	-1,7	0,9	6,9	0,3	-1,2	-1,0	-15,29
23	8,8	-1,5	0,3	-0,7	2,2	-1,1	13,95
	0,1	1,6	-1,5	-2,1	0,0	6,6	-17,54
	0,3	7,4	-1,9	1,1	0,9	0,2	5,60
	1,3	-2,0	1,9	7,2	0,2	-0,9	3,68
	2,4	-1,0	0,2	0,0	6,8	1,4	11,18
	2,2	0,6	6,6	0,0	-0,1	-0,4	15,68
24	7,4	-1,9	1,5	-0,7	0,3	0,0	21,01
	-1,3	-0,8	0,1	0,6	2,0	5,7	2,79
	-0,5	7,8	1,1	0,1	0,0	2,4	0,69
	0,1	0,3	-1,0	5,4	-1,9	0,1	-18,92
	2,2	-0,4	0,6	5,2	-1,2	0,1	-1,82
	0,1	0,6	5,7	-1,3	-0,8	2,0	299,61
25	0,0	0,2	-1,0	0,0	6,8	1,4	2,34
	6,9	-0,9	-1,7	1,2	0,3	-1,0	15,43
	-0,4	2,1	2,0	-0,3	1,8	7,6	36,80
	-1,9	7,0	0,1	-1,6	0,7	-1,1	6,21
	0,4	0,6	2,2	-1,2	5,2	-0,1	-0,40
	-2,3	0,1	6,6	-0,4	0,0	1,2	-13,07
26	7,9	-0,3	1,3	-0,1	1,8	0,1	14,32
	1,2	-1,0	0,0	-0,2	0,4	7,8	1,54
	1,4	8,2	-0,1	0,0	-1,1	-0,7	6,93
	1,2	-1,0	0,7	6,1	-0,9	0,0	13,02
	2,2	-0,1	-0,3	0,2	5,3	-1,7	-3,84
	1,6	0,0	8,1	-1,2	2,1	-0,1	30,16
27	6,2	0,1	-2,7	1,2	-0,3	-0,5	-25,78
	-0,1	1,4	0,4	2,1	0,5	5,7	17,58
	-0,4	7,9	2,0	-0,2	-1,7	1,9	11,30
	1,3	-0,9	-2,1	6,8	0,0	0,7	-4,95

Кінець таблиці 2

28	-0,9	0,3	0,0	-0,5	5,8	-1,1	-6,18
	0,4	-1,6	5,3	1,0	-0,2	-0,1	7,53
	6,6	0,0	1,1	-1,4	1,7	-0,6	24,20
	0,1	1,3	1,6	-2,1	0,2	6,7	15,66
	1,2	8,2	0,0	-1,1	0,1	0,2	-6,36
	-1,3	1,8	-0,2	8,6	-2,2	0,0	-9,21
29	0,1	0,0	0,9	-1,1	6,0	0,6	-13,70
	-0,3	1,6	5,3	2,4	0,3	-0,2	20,17
	6,8	0,1	-1,1	-1,4	2,0	-0,8	12,52
	-0,7	0,4	2,0	0,0	-1,4	6,3	17,02
	-1,0	8,1	0,0	1,2	-0,1	0,4	-18,95
	1,3	-1,8	0,2	8,4	2,1	0,0	30,19
30	0,4	-0,8	0,0	1,1	6,2	-3,1	15,05
	0,3	0,0	8,1	1,5	-1,0	-0,7	-21,52
	5,7	-1,5	-0,4	1,2	0,0	0,6	0,99
	0,7	0,2	-2,0	1,3	-0,6	8,9	18,45
	0,1	6,8	1,2	-2,0	-0,8	1,2	1,48
	-1,7	0,4	-1,9	7,7	0,4	2,1	10,18

Завдання 2 до розділу 1. Розв'язання СЛАР методом Холецького

Розв’язати систему рівнянь за схемою Холецького з точністю до 0,0001.

№ 1. $\begin{cases} 0{,}63x_1 + 1{,}00x_2 + 0{,}71x_3 + 0{,}34x_4 = 2{,}08; \\ 1{,}17x_1 + 0{,}18x_2 - 0{,}65x_3 + 0{,}71x_4 = 0{,}17; \\ 2{,}71x_1 - 0{,}75x_2 + 1{,}17x_3 - 2{,}35x_4 = 1{,}28; \\ 3{,}58x_1 + 0{,}21x_2 - 3{,}45x_3 - 1{,}18x_4 = 0{,}05. \end{cases}$

№ 2. $\begin{cases} 3{,}51x_1 + 0{,}17x_2 + 3{,}75x_3 - 0{,}28x_4 = 0{,}75; \\ 4{,}52x_1 + 2{,}11x_2 - 0{,}11x_3 - 0{,}12x_4 = 1{,}11; \\ -2{,}11x_1 + 3{,}17x_2 + 0{,}12x_3 - 0{,}15x_4 = 0{,}21; \\ 3{,}17x_1 + 1{,}18x_2 - 3{,}17x_3 + 0{,}22x_4 = 0{,}05. \end{cases}$

№ 3. $\begin{cases} 0{,}17x_1 + 0{,}75x_2 - 0{,}18x_3 + 0{,}21x_4 = 0{,}1; \\ 0{,}75x_1 + 0{,}13x_2 + 0{,}11x_3 + 1{,}00x_4 = 2{,}00; \\ -0{,}33x_1 + 0{,}11x_2 + 3{,}01x_3 - 2{,}01x_4 = 0{,}11; \\ 0{,}1x_1 + 1{,}12x_2 + 1{,}11x_3 - 1{,}31x_4 = 0{,}13. \end{cases}$

№ 4. $\begin{cases} -1{,}00x_1 + 0{,}13x_2 - 2{,}00x_3 - 0{,}14x_4 = 0{,}15; \\ 0{,}75x_1 + 0{,}18x_2 - 0{,}21x_3 - 0{,}77x_4 = 0{,}11; \\ 0{,}28x_1 - 0{,}17x_2 + 0{,}39x_3 + 0{,}48x_4 = 0{,}12; \\ 1{,}00x_1 + 3{,}14x_2 - 0{,}21x_3 - 1{,}00x_4 = -0{,}11. \end{cases}$

№ 5. $\begin{cases} 3{,}01x_1 - 0{,}14x_2 + 1{,}00x_3 - 0{,}15x_4 = 1{,}00; \\ -1{,}75x_1 + 1{,}11x_2 + 0{,}13x_3 - 0{,}75x_4 = 0{,}13; \\ 0{,}17x_1 - 2{,}11x_2 + 0{,}71x_3 - 1{,}71x_4 = 1{,}00; \\ 0{,}21x_1 + 0{,}21x_2 + 0{,}35x_3 + 0{,}33x_4 = 0{,}17. \end{cases}$

№ 6. $\begin{cases} 1{,}15x_1 + 0{,}62x_2 - 0{,}83x_3 + 0{,}92x_4 = 2{,}15; \\ 0{,}82x_1 - 0{,}54x_2 + 0{,}43x_3 - 0{,}25x_4 = 0{,}62; \\ 0{,}24x_1 + 1{,}15x_2 - 0{,}33x_3 + 1{,}42x_4 = -0{,}62; \\ 0{,}73x_1 - 0{,}81x_2 + 1{,}27x_3 - 0{,}67x_4 = 0{,}88. \end{cases}$

№ 7. $\begin{cases} 2{,}2x_1 - 3{,}17x_2 + 1{,}24x_3 - 0{,}87x_4 = 0{,}46; \\ 1{,}5x_1 + 2{,}11x_2 - 0{,}45x_3 + 1{,}44x_4 = 1{,}5; \\ 0{,}86x_1 - 1{,}44x_2 + 0{,}62x_3 + 0{,}28x_4 = -0{,}12; \\ 0{,}48x_1 + 1{,}25x_2 - 0{,}63x_3 - 0{,}97x_4 = 0{,}35. \end{cases}$

№ 8. $\begin{cases} 0{,}64x_1 + 0{,}72x_2 - 0{,}83x_3 + 4{,}2x_4 = 2{,}23; \\ 0{,}58x_1 - 0{,}83x_2 + 1{,}43x_3 - 0{,}62x_4 = 1{,}71; \\ 0{,}86x_1 + 0{,}77x_2 - 1{,}83x_3 + 0{,}88x_4 = -0{,}54; \\ 1{,}32x_1 - 0{,}52x_2 - 0{,}65x_3 + 1{,}22x_4 = 0{,}65. \end{cases}$

№ 9. $\begin{cases} 1{,}42x_1 + 0{,}32x_2 - 0{,}42x_3 + 0{,}85x_4 = 1{,}32; \\ 0{,}63x_1 - 0{,}43x_2 + 1{,}27x_3 - 0{,}58x_4 = -0{,}44; \\ 0{,}84x_1 - 2{,}23x_2 - 0{,}52x_3 + 0{,}47x_4 = 0{,}64; \\ 0{,}27x_1 + 1{,}37x_2 + 0{,}64x_3 - 1{,}27x_4 = 0{,}85. \end{cases}$

№10. $\begin{cases} 0{,}73x_1 + 1{,}24x_2 - 0{,}38x_3 - 1{,}43x_4 = 0{,}58; \\ 1{,}07x_1 - 0{,}77x_2 + 1{,}25x_3 + 0{,}66x_4 = -0{,}66; \\ 1{,}56x_1 + 0{,}66x_2 + 1{,}44x_3 - 0{,}87x_4 = 1{,}24; \\ 0{,}75x_1 + 1{,}22x_2 - 0{,}83x_3 + 0{,}37x_4 = 0{,}92. \end{cases}$

№ 11. $\begin{cases} 1{,}32x_1 - 0{,}83x_2 - 0{,}44x_3 + 0{,}62x_4 = 0{,}68; \\ 0{,}83x_1 + 0{,}42x_2 - 0{,}56x_3 + 0{,}77x_4 = 1{,}24; \\ 0{,}58x_1 - 0{,}37x_2 + 1{,}24x_3 - 0{,}62x_4 = 0{,}87; \\ 0{,}35x_1 + 0{,}66x_2 - 1{,}38x_3 - 0{,}93x_4 = -1{,}08. \end{cases}$

№ 12. $\begin{cases} 0{,}11x_1 - 0{,}17x_2 + 0{,}72x_3 - 0{,}34x_4 = 0{,}17; \\ 0{,}81x_1 + 0{,}12x_2 - 0{,}91x_3 + 0{,}17x_4 = 1{,}00; \\ 0{,}17x_1 - 0{,}18x_2 + 1{,}00x_3 + 0{,}23x_4 = 0{,}21; \\ 0{,}13x_1 + 0{,}17x_2 - 0{,}99x_3 + 0{,}35x_4 = 2{,}71. \end{cases}$

№ 13. $\begin{cases} 0{,}18x_1 + 2{,}11x_2 + 0{,}13x_3 - 0{,}22x_4 = 0{,}22; \\ 0{,}33x_1 - 0{,}22x_2 - 1{,}00x_3 + 0{,}17x_4 = 0{,}11; \\ -1{,}00x_1 + 0{,}11x_2 + 2{,}00x_3 - 0{,}45x_4 = 1{,}00; \\ 7{,}00x_1 - 0{,}17x_2 - 0{,}22x_3 + 0{,}33x_4 = 0{,}21. \end{cases}$

№ 14. $\begin{cases} 2{,}00x_1 + 0{,}05x_2 - 3{,}01x_3 - 0{,}11x_4 = 0{,}21; \\ 1{,}00x_1 - 2{,}00x_2 + 3{,}02x_3 + 0{,}05x_4 = 0{,}18; \\ 0{,}17x_1 + 0{,}99x_2 - 2{,}00x_3 - 0{,}17x_4 = 0{,}17; \\ 0{,}33x_1 - 0{,}07x_2 + 0{,}33x_3 + 2{,}00x_4 = 0{,}17. \end{cases}$

№ 15. $\begin{cases} 0{,}17x_1 - 0{,}13x_2 - 0{,}11x_3 - 0{,}12x_4 = 0{,}22; \\ 1{,}00x_1 - 1{,}00x_2 - 0{,}13x_3 + 0{,}13x_4 = 0{,}11; \\ 0{,}35x_1 + 0{,}33x_2 + 0{,}12x_3 + 0{,}13x_4 = 0{,}12; \\ 0{,}13x_1 + 0{,}11x_2 - 0{,}13x_3 - 0{,}11x_4 = 1{,}00. \end{cases}$

№ 16. $\begin{cases} 0{,}11x_1 + 1{,}13x_2 - 0{,}17x_3 + 0{,}18x_4 = 1{,}00; \\ 0{,}13x_1 - 1{,}17x_2 + 0{,}18x_3 + 0{,}14x_4 = 0{,}13; \\ 0{,}11x_1 - 1{,}05x_2 - 0{,}17x_3 - 0{,}15x_4 = 0{,}11; \\ 0{,}15x_1 - 0{,}05x_2 + 0{,}18x_3 - 0{,}11x_4 = 1{,}00. \end{cases}$

№ 17. $\begin{cases} 1{,}00x_1 - 0{,}17x_2 + 0{,}11x_3 - 0{,}15x_4 = 0{,}17; \\ 0{,}14x_1 + 0{,}21x_2 - 0{,}33x_3 + 0{,}11x_4 = 1{,}00; \\ 0{,}22x_1 + 3{,}44x_2 - 0{,}11x_3 + 0{,}12x_4 = 2{,}00; \\ 0{,}11x_1 + 0{,}13x_2 + 0{,}12x_3 + 0{,}14x_4 = 0{,}13. \end{cases}$

№ 18. $\begin{cases} 1{,}00x_1 + 0{,}55x_2 - 0{,}13x_3 + 0{,}34x_4 = 0{,}13; \\ 0{,}13x_1 - 0{,}17x_2 + 0{,}33x_3 + 0{,}17x_4 = 0{,}11; \\ 0{,}11x_1 + 0{,}18x_2 - 0{,}22x_3 - 0{,}11x_4 = 1{,}00; \\ 0{,}13x_1 - 0{,}12x_2 + 0{,}21x_3 + 0{,}22x_4 = 0{,}18. \end{cases}$

№ 19. $\begin{cases} 1{,}00x_1 - 0{,}51x_2 + 0{,}12x_3 + 0{,}55x_4 = 0{,}12; \\ 0{,}12x_1 + 0{,}18x_2 - 0{,}22x_3 - 0{,}41x_4 = 0{,}13; \\ 0{,}22x_1 - 3{,}01x_2 + 0{,}31x_3 + 0{,}58x_4 = 1{,}00; \\ 1{,}00x_1 + 0{,}24x_2 - 3{,}05x_3 - 0{,}22x_4 = 3{,}41. \end{cases}$

№ 20. $\begin{cases} 0{,}13x_1 + 0{,}22x_2 - 0{,}14x_3 + 0{,}15x_4 = 1{,}00; \\ 0{,}22x_1 - 0{,}31x_2 + 0{,}42x_3 - 5{,}10x_4 = 6{,}01; \\ 0{,}62x_1 - 0{,}74x_2 + 0{,}85x_3 - 0{,}96x_4 = 0{,}11; \\ 0{,}12x_1 + 0{,}13x_2 + 0{,}14x_3 + 0{,}45x_4 = 0{,}16. \end{cases}$

№ 21. $\begin{cases} 0{,}18x_1 + 0{,}19x_2 + 0{,}20x_3 - 0{,}21x_4 = 0{,}22; \\ 0{,}51x_1 - 0{,}50x_2 + 0{,}49x_3 - 0{,}48x_4 = 0{,}47; \\ 0{,}61x_1 + 0{,}62x_2 - 0{,}63x_3 + 0{,}64x_4 = 0{,}65; \\ 0{,}11x_1 - 0{,}15x_2 + 0{,}22x_3 - 0{,}38x_4 = 0{,}42. \end{cases}$

№ 22. $\begin{cases} 0{,}17x_1 - 0{,}18x_2 + 0{,}19x_3 - 5{,}74x_4 = 1{,}00; \\ 0{,}11x_1 - 0{,}43x_2 + 0{,}15x_3 - 0{,}17x_4 = 1{,}9; \\ 0{,}12x_1 + 0{,}14x_2 + 0{,}16x_3 + 0{,}18x_4 = 2{,}00; \\ 0{,}71x_1 - 0{,}13x_2 - 0{,}41x_3 + 0{,}52x_4 = 1{,}00. \end{cases}$

№ 23. $\begin{cases} 1{,}00x_1 - 2{,}01x_2 + 2{,}04x_3 + 0{,}17x_4 = 0{,}18; \\ 0{,}33x_1 - 0{,}77x_2 + 0{,}44x_3 - 0{,}51x_4 = 0{,}19; \\ 0{,}31x_1 + 0{,}17x_2 - 0{,}21x_3 + 0{,}54x_4 = 0{,}21; \\ 0{,}17x_1 + 1{,}00x_2 - 0{,}13x_3 + 0{,}21x_4 = 0{,}31. \end{cases}$

№ 24. $\begin{cases} 2{,}34x_1 - 1{,}42x_2 - 0{,}54x_3 + 0{,}21x_4 = 0{,}66; \\ 1{,}44x_1 - 0{,}53x_2 + 1{,}43x_3 - 1{,}27x_4 = -1{,}44; \\ 0{,}63x_1 - 1{,}32x_2 - 0{,}65x_3 + 1{,}43x_4 = 0{,}94; \\ 0{,}56x_1 + 0{,}88x_2 - 0{,}67x_3 - 2{,}38x_4 = 0{,}73. \end{cases}$

№ 25. $\begin{cases} 0{,}63x_1 - 0{,}76x_2 + 1{,}34x_3 + 0{,}37x_4 = 1{,}21; \\ 0{,}54x_1 + 0{,}83x_2 - 0{,}74x_3 - 1{,}27x_4 = 0{,}86; \\ 0{,}24x_1 - 0{,}44x_2 + 0{,}35x_3 + 0{,}55x_4 = 0{,}25; \\ 0{,}43x_1 - 1{,}21x_2 + 2{,}32x_3 - 1{,}41x_4 = 1{,}55. \end{cases}$

№ 26. $\begin{cases} 1{,}43x_1 + 0{,}87x_2 - 1{,}57x_3 - 0{,}58x_4 = 2{,}34; \\ 0{,}63x_1 - 0{,}57x_2 - 2{,}34x_3 + 0{,}66x_4 = 0{,}77; \\ 1{,}57x_1 + 0{,}66x_2 - 0{,}57x_3 + 1{,}15x_4 = -0{,}24; \\ 0{,}88x_1 - 0{,}67x_2 + 0{,}55x_3 - 0{,}45x_4 = 0{,}56. \end{cases}$

№ 27. $\begin{cases} 1{,}71x_1 - 0{,}83x_2 + 1{,}44x_3 - 0{,}72x_4 = 1{,}35; \\ 0{,}64x_1 - 0{,}85x_2 - 0{,}43x_3 + 0{,}88x_4 = 0{,}77; \\ 0{,}38x_1 + 1{,}42x_2 + 0{,}63x_3 - 1{,}55x_4 = 0{,}28; \\ 0{,}83x_1 - 0{,}66x_2 + 0{,}58x_3 + 1{,}22x_4 = -0{,}47. \end{cases}$

№ 28. $\begin{cases} 0{,}85x_1 + 1{,}27x_2 - 2{,}37x_3 + 0{,}57x_4 = 1{,}47; \\ 1{,}47x_1 - 0{,}28x_2 + 0{,}56x_3 - 1{,}21x_4 = 0{,}86; \\ 0{,}66x_1 + 1{,}31x_2 - 0{,}63x_3 - 0{,}43x_4 = -0{,}55; \\ 0{,}57x_1 - 0{,}78x_2 - 0{,}56x_3 - 0{,}83x_4 = 0{,}27. \end{cases}$

№ 29. $\begin{cases} 0{,}68x_1 + 1{,}32x_2 - 0{,}63x_3 - 0{,}87x_4 = 1{,}43; \\ 0{,}57x_1 + 0{,}36x_2 - 1{,}24x_3 - 0{,}235x_4 = 0{,}33; \\ 0{,}82x_1 - 0{,}32x_2 + 1{,}42x_3 + 1{,}48x_4 = -0{,}84; \\ 0{,}56x_1 - 1{,}20x_2 + 1{,}50x_3 - 0{,}64x_4 = 0{,}45. \end{cases}$

№ 30. $\begin{cases} 1{,}42x_1 + 2{,}34x_2 - 0{,}88x_3 + 0{,}53x_4 = 0{,}72; \\ 0{,}71x_1 - 1{,}15x_2 + 0{,}53x_3 - 0{,}67x_4 = -0{,}18; \\ 0{,}55x_1 - 0{,}93x_2 - 1{,}42x_3 + 1{,}32x_4 = 0{,}68; \\ 0{,}44x_1 - 0{,}25x_2 + 1{,}92x_3 - 1{,}08x_4 = 0{,}43. \end{cases}$

РОЗДІЛ 2 НАБЛИЖЕНІ (ІТЕРАЦІЙНІ) МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

2.1. Метод простих ітерацій

Цей найпростіший ітераційний метод розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь полягає в тому, що система рівнянь (7) перетворюється до вигляду

$$\bar{x} = B\bar{x} + \bar{c} \tag{22}$$

і її розв'язок знаходиться як границя послідовності

$$\bar{x}^{(k+1)} = B\bar{x}^{(k)} + \bar{c}, \qquad k = 0,1,\dots \tag{23}$$

У розгорнутому виді система (23) буде такою:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \beta_{11}x_1^{(k)} + \beta_{12}x_2^{(k)} + \cdots + \beta_{1n}x_n^{(k)} + c_1 \\ x_2^{(k+1)} = \beta_{21}x_1^{(k)} + \beta_{22}x_2^{(k)} + \cdots + \beta_{2n}x_n^{(k)} + c_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n^{(k+1)} = \beta_{n1}x_1^{(k)} + \beta_{n2}x_2^{(k)} + \cdots + \beta_{nn}x_n^{(k)} + c_n \end{cases} \tag{24}$$

Теорема. Якщо для приведеної системи (22) виконано принаймні одна з умов

$$1)\ \sum_{j=1}^{n} |\beta_{ij}| < 1 \quad (i = 1,2,\dots,n)$$

або

$$2)\ \sum_{i=1}^{n} |\beta_{ij}| < 1 \quad (j = 1,2,\dots,n),$$

то процес (23) збігається до єдиного розв'язку цієї системи незалежно від вибору початкового наближення.

Критерієм зупинки ітераційного процесу буде виконання умов:

$$\left|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right| < \varepsilon, \qquad k = 0,1,2,\dots \quad \forall i = 1,\dots,n,$$

тут ε – задана точність.

При практичній реалізації цієї нерівності необхідно враховувати, що якщо коефіцієнти й вільні члени даної системи є наближеними числами, написаними з p знаками після коми, то для одержання розв'язку з кількістю m десяткових знаків $(m \le p)$, слід в значеннях послідовних наближень утримувати m+1 десяткових знаків і послідовні наближення обчислювати до їхнього збігу, після чого треба округлити результат на один знак.

2.2. Метод Якобі

Розглянемо частинний випадок методу простих ітерацій, коли система (22) отримується шляхом виразу «діагональних» невідомих через усі інші, тобто коли

$\beta_{ii} = 0, (i = 1, \dots, n)$, тоді система три у розгорнутому виді буде представлятися так:

$$\begin{cases} x_1 = -\left(a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n - c_1\right)/a_{11} \\ x_2 = -\left(a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n - c_2\right)/a_{22} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = -\left(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{n,n-1}x_{n-1} - c_n\right)/a_{nn}. \end{cases} \quad (25)$$

Для запису ітераційного процесу типу (23) залишилось у виразах системи (25) «навісити» індекси, відповідні номерам наближень (тобто $k = 0, 1, 2, \dots$):

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\left(a_{12}x_2^{(k)} + a_{13}x_3^{(k)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k)} - c_1\right)/a_{11} \\ x_2^{(k+1)} = -\left(a_{21}x_1^{(k)} + a_{23}x_3^{(k)} + \cdots + a_{2n}x_n^{(k)} - c_2\right)/a_{22} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n^{(k+1)} = -\left(a_{n1}x_1^{(k)} + a_{n2}x_2^{(k)} + \cdots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)} - c_n\right)/a_{nn}. \end{cases}$$

Теорема 3. У випадку діагональної переваги в матриці A системи (7) метод Якобі збігається.

Тобто, метод Якобі збігається, якщо виконані умови:

$$\left|a_{ii}\right| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left|a_{ij}\right| \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Для приведення заданої системи до виду (22), яка б відповідала умовам збіжності, практично роблять наступне. Із заданої системи виділяють рівняння з коефіцієнтами при невідомих, модулі яких більші від суми модулів інших коефіцієнтів при невідомих у рівнянні. Кожне виділене рівняння виписують у такий рядок нової системи, щоб найбільший за модулем коефіцієнт виявився діагональним.

Якщо усі рядки нової системи у такий спосіб не вдалося заповнити, то з невикористаних і вже виділених рівнянь системи складають лінійні комбінації (множення рівняння на число, додавання рівнянь) з таким розрахунком, щоб був дотриманий зазначений вище принцип комплектування нової системи, й усі вільні рядки виявилися заповненими. При цьому треба подбати, щоб кожне рівняння заданої системи було використано при побудові нової системи.

Ітераційний процес (23) збігається до розв'язку системи зі швидкістю геометричної прогресії, якщо норма матриці $\|B\| < 1$. При цьому, початкове наближення $\bar{x}^{(0)}$ можна вибирати довільно. На практиці за початкове наближення $\bar{x}^{(0)}$ беруть стовпець вільних членів $\bar{c}$.

Нагадаємо визначення основних норм у просторах векторів і матриць. Якщо в просторі векторів $\bar{x} = (x_1, \dots, x_m)^T$ введена норма $\|\bar{x}\|$, то погодженою з нею нормою в просторі матриць A називають норму

$$\|A\| = \sup_{X \neq 0} \|A\bar{x}\| / \|\bar{x}\| .$$

Найбільш вживані в просторі векторів наступні норми

$$\|\bar{x}\|_\infty = \max_{1 \le j \le m} \left|x_j\right|,$$

$$\|\bar{x}\|_1 = \sum_{j=1}^{m} \left|x_j\right|,$$

$$\|\bar{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{m}|x_j|^2} = \sqrt{(\bar{x},\bar{x})},$$

а погодженими з ними нормами в просторі матриць є відповідно норми

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le m}\left(\sum_{j=1}^{m}|a_{ij}|\right);$$

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le m}\left(\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|\right);$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\max_{1\le i\le m}\lambda^i_{A^*A}},$$

тут λ^i_D – власне значення матриці D, A^* – матриця, сполучена до матриці A.

Якщо коефіцієнти й вільні члени даної системи є наближеними числами, написаними з p знаками, то для одержання розв'язку з m числом десяткових знаків $(m \le p)$ слід в значеннях послідовних наближень утримувати $m+1$ десяткових знаків і послідовні наближення обчислювати до їхнього збігу, після чого треба округлити результат на один знак.

Блок-схема методу наведена на рис. 4. У блок-схемі: *n* – кількість рівнянь; b_i – елементи вектору вільних членів; a_{ij} – елементи матриці коефіцієнтів при невідомих; ε – точність обчислень; x_{0i} – елементи вектору невідомих на попередній ітерації; x_i – елементи вектору невідомих на теперішній ітерації; *iter* – номер ітерації.

Приклад.

Методом простої ітерації з точністю до двох вірних десяткових знаків після коми розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 & +3x_2 & -4x_3 & +x_4 & -3 & = 0, & (A)\\ x_1 & -2x_2 & -5x_3 & +x_4 & -2 & = 0, & (Б)\\ 5x_1 & -3x_2 & +x_3 & -4x_4 & -1 & = 0, & (B)\\ 10x_1 & +2x_2 & -x_3 & +2x_4 & +4 & = 0, & (Г) \end{cases}$$

Розв'язання. У рівнянні (Б) коефіцієнт при x_3 за модулем більше від суми модулів інших коефіцієнтів при невідомих, тому його можна прийняти за третє рівняння нової системи. Коефіцієнт при x_1 в рівнянні (Г) також більше від суми модулів інших коефіцієнтів рівняння (Г), тому можна прийняти це рівняння за перше рівняння нової системи. Таким чином, нова система має такий вигляд:

$$\begin{cases} 10x_1 & +2x_2 & -x_3 & +2x_4 & +4 & = 0, & (I)\\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots, & (II)\\ x_1 & -2x_2 & -5x_3 & +x_4 & -2 & = 0, & (III)\\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & (IV) \end{cases}$$

Аналізуючи дану систему, легко помітити, що для одержання рівняння (II) з максимальним за модулем коефіцієнтом при x_2 досить скласти різницю $(A) - (Б)$:

$$x_1 + 5x_2 + x_3 + 0\cdot x_4 - 1 = 0\ (II).$$

Тепер у нову систему ввійшли рівняння (A), (Б) і (Г), тому в рівняння(IV) обов'язково повинне ввійти рівняння (В) даної системи. Підбором переконуємося, що за рівняння (IV) можна взяти лінійну комбінацію $2(A) - (Б) + 2(B) - (Г)$, тобто

$$3x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 - 9x_4 - 10 = 0 \quad (IV)\,.$$

У підсумку одержали перетворену систему рівнянь (I) – (IV) еквівалентну даній. Розв'язавши цю систему щодо діагональних невідомих, будемо мати систему:

$$\begin{cases} x_1 = & 0 \cdot x_1 & -0{,}2x_2 & +0{,}1x_3 & -0{,}2x_4 & -0{,}4, \\ x_2 = & -0{,}2x_1 & +0 \cdot x_2 & -0{,}2x_3 & +0 \cdot x_4 & +0{,}2, \\ x_3 = & 0{,}2x_1 & -0{,}4x_2 & +0 \cdot x_3 & +0{,}2x_4 & -0{,}4, \\ x_4 = & 0{,}333x_1 & +0 \cdot x_2 & -0 \cdot x_3 & +0 \cdot x_4 & -1{,}111, \end{cases}$$

для знаходження розв'язку якої можна застосувати метод простої ітерації, тому що для неї виконується достатня умова збіжності.

За нульове наближення коренів системи приймемо стовпець вільних членів, тобто $x_1^{(0)} = -0{,}4$; $x_2^{(0)} = 0{,}2$; $x_3^{(0)} = -0{,}4$; $x_4^{(0)} = -1{,}111$. Підставляючи ці значення в праві частини рівнянь останньої системи, одержимо перші наближення коренів:

$x_1^{(1)} = -0{,}2 \cdot 0{,}2 + 0{,}1(-0{,}4) - 0{,}2(-1{,}111) - 0{,}4 \approx -0{,}258;$

$x_2^{(1)} = -0{,}2(-0{,}4) - 0{,}2(-0{,}4) + 0{,}2 \approx 0{,}360;$

$x_3^{(1)} = 0{,}2(-0{,}4) - 0{,}4 \cdot 0{,}2 + 0{,}2(-1{,}111) - 0{,}4 \approx -0{,}782;$

$x_4^{(1)} = 0{,}333(-0{,}4) - 1{,}111 \approx -1{,}244\,.$

Далі, підставляючи ці знайдені наближення знову в праві частини системи, одержимо другі наближення коренів:

$$x_1^{(2)} = -0{,}301\,;\; x_2^{(2)} = 0{,}408;\; x_3^{(2)} = -0{,}844;\; x_4^{(2)} = -1{,}197.$$

Після нової підстановки будемо мати треті наближення коренів і т.д.

Для одержання коренів з необхідною точністю в одержуваних наближеннях утримуємо три знаки після коми й ітерації виконуємо доти, поки утримувані знаки в результатах перестануть змінюватися. Зведемо результати обчислень у таблицю 3.

Таблиця 3 – Реалізація методу простої ітерації

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$x_4^{(k)}$
0	-0,4	0,2	-0,4	-1,111
1	-0,258	0,360	-0,782	-1,244
2	-0,301	0,408	-0,844	-1,197
3	-0,327	0,429	-0,863	-1,212
4	-0,330	0,438	-0,879	-1,220
5	-0,332	0,442	-0,885	-1,221
6	-0,333	0,443	-0,887	-1,222
7	-0,333	0,444	-0,888	-1,222
8	-0,333	0,444	-0,889	-1,222
9	-0,333	0,444	-0,889	-1,222

Як видно з таблиці 3, на дев'ятому кроці ітерацій утримувані десяткові знаки в результатах перестали змінюватися. Округляючи отримані значення

коренів на один знак, одержуємо $x_1 \approx -0{,}33$; $x_2 \approx 0{,}44$; $x_3 \approx -0{,}89$; $x_4 \approx -1{,}22$.

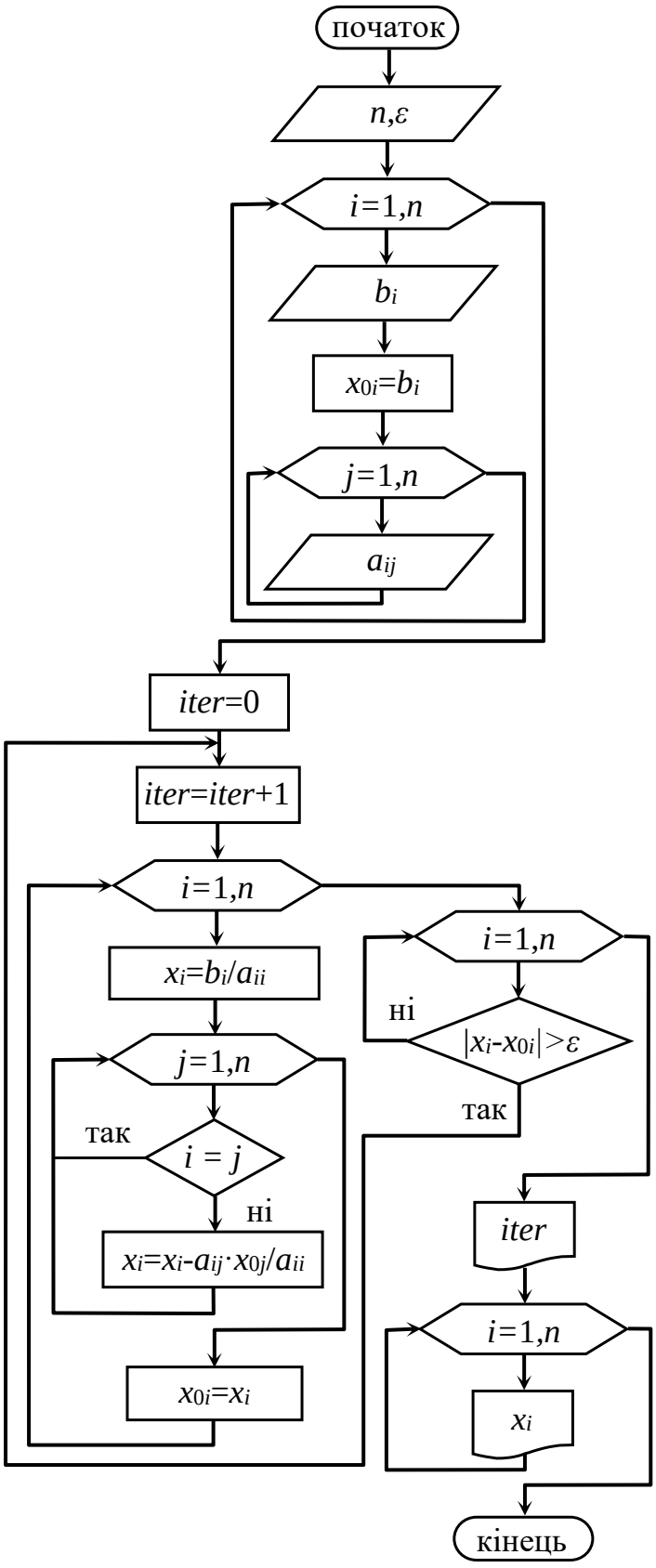


Рисунок 4 – Блок-схема розв’язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом простої ітерації

2.3. Метод Зейделя

Під методом Зейделя зазвичай розуміється така модифікація методу простих ітерацій (24), при якій для підрахунку i-ої компоненти (k+1)-ого наближення до шуканого розв'язку використовуються вже знайдені на цьому, тобто (k+1)-ому, кроці нові значення перших i-1 компоненти. Тоді метод Зейделя представляється системою:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \beta_{11}x_1^{(k)} + \beta_{12}x_2^{(k)} + \cdots + \beta_{1n}x_n^{(k)} + c_1 \\ x_2^{(k+1)} = \beta_{21}x_1^{(k+1)} + \beta_{22}x_2^{(k)} + \cdots + \beta_{2n}x_n^{(k)} + c_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n^{(k+1)} = \beta_{n1}x_1^{(k+1)} + \beta_{n2}x_2^{(k+1)} + \cdots + \beta_{nn}x_n^{(k)} + c_n. \end{cases} \quad (26)$$

Якщо ж як основу для такої модифікації взяти метод Якобі, то метод Зейделя представиться так:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\left(a_{12}x_2^{(k)} + a_{13}x_3^{(k)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k)} - c_1\right)/a_{11} \\ x_2^{(k+1)} = -\left(a_{21}x_1^{(k+1)} + a_{23}x_3^{(k)} + \cdots + a_{2n}x_n^{(k)} - c_2\right)/a_{22} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n^{(k+1)} = -\left(a_{n1}x_1^{(k+1)} + a_{n2}x_2^{(k+1)} + \cdots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)} - c_n\right)/a_{nn}. \end{cases} \quad (27)$$

2.4. Метод релаксації

Розглянемо одне узагальнення методу Зейделя, яка іноді дозволяє в кілька разів прискорити збіжність ітераційної послідовності.

Нехай $z_i^{(k)}$ – найменування i-ої компоненти k-го наближення до розв'язання системи (7) методом Зейделя, і $x_i^{(k)}$ – позначення i-ої компоненти k-го наближення, отриманої новим методом. Цей метод визначається рівністю

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \omega\left(z_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right), \quad (28)$$

де $i = 1,2,\ldots,n;\ k = 0,1,2,\ldots;\ x_i^{(0)}$ – початкові значення, що задаються; ω – числовий параметр, який називається параметром релаксації. Очевидно, що при $\omega = 1$, метод (28), який називається методом релаксації (послаблення), збігається з методом Зейделя.

Позбавившись від допоміжної послідовності $\bar{z}^{(k)}$, для $i = 1,2,\ldots,n$, будемо мати:

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right). \quad (29)$$

Перепишемо (29) у вигляді

$$a_{ii}x_i^{(k+1)} + \omega\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} = (1-\omega)a_{ii}x_i^{(k)} - \omega\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} + \omega b_i$$

а потім, враховуючи адитивне представлення матриці $A = L + D + R$, отримуємо векторно-матричний ітераційний процес в неявній формі

$$(D + \omega L)\bar{x}^{(k+1)} = (1 - \omega)D\bar{x}^{(k)} - \omega R\bar{x}^{(k)} + \omega\bar{b}.$$

Множення останнього рівняння зліва на матрицю $(D + \omega L)^{-1}$ дає можливість отримати еквівалентний (29) метод простих ітерацій

$$\bar{x}^{(k+1)} = (D + \omega L)^{-1}\big((1 - \omega)D - \omega R\big)\bar{x}^{(k)} + \omega(D + \omega L)^{-1}\bar{b}. \qquad (30)$$

Теорема (Островський-Рейх). *Для нормальної системи $A\bar{x} = \bar{b}$ метод релаксації (29) збігається при будь-якому $\bar{x}^{(0)}$ та будь-якому $\omega \in (0,2)$.*

Визначення. *Система $A\bar{x} = \bar{b}$ називається нормальною, якщо матриця A – симетрична, додатно визначена.*

Оскільки ітеративний процес (29) містить параметр, природно використовувати його так, щоб послідовність $\bar{x}^{(k)}$ збігалась як найшвидше. Встановлено, що це оптимальне значення $\omega_0 \in (1,2)$. Для значень $\omega \in (1,2)$ метод (29) називається методом послідовної верхньої релаксації. Метод (29) для $\omega \in (0,1)$ називається методом нижчої релаксації.

Питання для самоконтролю до розділе 2

1. Сформулюйте постановку задачі для ітераційних методів.
2. Опишіть метод простих ітерацій та метод Якобі розв’язання СЛАР.
3. Опишіть метод Зейделя розв’язання СЛАР.
4. Опишіть метод релаксації розв’язання СЛАР.

Завдання до розділу 2. Розв'язання СЛАР методом простих ітерацій

Методом простої ітерації з точністю до двох знаків після коми розв’яжіть систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{j=1}^{6} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1,2,..,6.$$

Відповідно до індивідуального варіанту (табл. 4).

Таблиця 4 – Варіанти завдань до розділу 2

№ варі-анта	Матриця коефіцієнтів системи A						Стовпець вільних членів $\bar{b}$
1	2,1	0,3	4,4	-0,1	1,4	0,0	-2,25
	0,0	2,2	-3,4	0,3	-0,8	1,4	4,07
	5,2	-1,0	0,4	0,7	1,1	-0,1	3,69
	-0,6	1,5	3,2	-2,1	1,6	0,6	-8,02
	1,3	0,2	0,0	0,8	6,1	-1,4	-16,33
	0,4	0,0	-2,7	1,4	-1,8	3,1	18,06

Продовження таблиці 4

2	3,3	4,2	0,7	5,4	2,1	1,6	24,87
	-0,1	7,2	1,8	-2,3	1,1	0,3	7,81
	-2,1	3,0	-0,6	-3,4	-0,5	0,0	0,20
	0,4	0,0	1,9	6,1	-0,8	-2,1	11,00
	4,7	-0,6	3,3	7,1	1,9	-4,6	0,12
	0,0	0,2	-1,6	2,4	0,7	5,7	22,04
3	0,4	7,6	2,0	-0,3	1,8	2,1	29,95
	4,8	-5,2	-2,3	1,6	0,8	-3,5	-20,33
	-2,1	3,3	-0,4	3,4	-0,5	0,0	2,11
	0,6	2,4	-1,7	3,0	-8,0	1,1	-1,91
	6,3	-0,4	1,4	0,8	0,0	1,0	7,01
	4,2	-1,7	6,9	0,0	1,1	9,2	17,25
4	1,7	-3,1	2,2	0,6	1,8	-0,1	2,68
	1,2	-1,0	0,7	-0,9	0,0	5,9	-6,17
	-0,1	7,2	4,8	2,3	5,1	3,3	-35,57
	2,1	1,3	-5,2	1,4	3,3	4,6	-25,65
	8,4	-1,6	0,0	0,7	-1,8	1,2	8,50
	1,6	8,7	-0,2	0,8	-2,0	1,1	-14,46
5	-1,1	-0,8	0,1	0,6	5,7	2,0	11,83
	-2,7	1,9	-5,9	1,3	-2,2	1,0	16,24
	8,8	-1,5	0,3	-0,7	1,2	-2,1	18,64
	2,1	3,6	-1,5	-2,1	0,0	4,6	-37,76
	0,3	7,4	-1,9	1,1	0,9	0,2	-7,90
	2,3	-2,0	3,9	4,2	0,2	-1,9	-8,78
6	3,4	-1,0	2,2	1,0	4,8	1,4	20,16
	2,2	0,6	6,8	0,0	-0,1	-0,4	-1,58
	4,4	-2,9	-1,5	-0,7	1,3	0,8	15,62
	-1,3	-0,8	0,1	0,6	2,0	5,7	-0,39
	-2,5	5,8	1,1	3,1	0,0	2,4	-11,95
	0,1	0,3	-1,0	5,4	-1,9	0,1	-12,82
7	2,2	-0,4	0,6	5,2	-1,2	0,1	9,43
	-2,1	3,6	4,7	-1,3	-2,8	2,0	7,77
	0,0	0,2	-1,0	0,0	6,8	1,4	-6,20
	4,9	-1,9	-2,7	1,2	0,3	-1,0	10,28
	-0,4	2,1	2,0	-0,3	1,8	7,6	16,05
	-2,9	4,0	1,1	-1,6	3,7	-1,1	-9,78
8	3,4	1,6	2,2	-1,2	4,2	-2,1	20,72
	-2,3	0,1	6,6	-0,4	0,0	1,2	6,52
	7,9	-0,3	1,3	-0,1	1,8	0,1	13,20
	2,2	-1,0	3,0	-1,2	3,4	5,8	5,70
	1,4	8,9	-0,1	0,0	-1,1	-0,7	-4,31
	3,2	-2,0	1,7	4,1	-1,9	0,4	0,23

Продовження таблиці 4

9	2,2	-0,1	-0,3	0,2	5,3	-1,7	-6,11
	2,6	0,0	4,1	-1,2	2,1	-0,1	-18,21
	6,3	0,1	-2,7	0,2	-1,3	-0,5	-2,48
	-3,1	2,4	1,4	2,1	0,5	3,7	13,14
	-0,4	7,9	2,0	-0,2	-1,7	1,9	21,60
	3,3	-1,9	-2,1	4,8	0,0	1,7	2,68
10	-3,9	2,3	0,0	-1,5	3,8	-4,1	15,40
	0,4	-1,6	5,3	1,0	-0,2	-0,1	2,83
	4,6	0,7	2,1	-1,4	2,7	-3,6	35,68
	0,1	1,3	1,6	-2,1	0,2	6,7	-10,10
	2,2	5,2	0,9	-1,1	-2,1	1,2	-0,95
	-1,3	1,8	-0,2	8,6	-2,2	0,0	-29,34
11	0,1	0,0	0,9	-1,1	6,2	0,6	-2,06
	-2,3	3,6	4,3	2,4	0,3	-1,2	2,86
	6,8	0,1	-1,1	-1,4	2,0	-0,8	16,15
	-2,7	1,4	2,0	0,0	-3,4	4,3	-6,29
	-1,0	8,1	0,0	1,2	-0,1	0,4	-10,12
	3,3	-1,8	2,2	4,4	2,1	0,0	34,53
12	0,3	-0,9	0,0	1,1	6,3	-3,0	-18,47
	1,3	0,8	4,1	2,5	-3,0	-1,7	-11,85
	5,7	-1,5	-0,4	1,2	0,0	0,6	0,69
	2,7	3,2	-2,0	1,3	-3,6	4,9	33,99
	0,1	6,8	1,2	-2,0	-0,8	1,2	14,64
	-4,7	2,4	-3,9	-3,9	0,4	2,1	24,29
13	0,4	0,6	2,2	5,4	-1,2	-0,1	-26,32
	1,7	-2,2	4,1	-3,2	1,9	2,1	13,22
	-2,0	-1,1	0,0	0,2	6,8	1,2	23,50
	3,1	-2,4	-3,8	2,0	0,0	4,6	-20,28
	-0,9	6,8	1,6	-0,2	1,2	-1,0	13,06
	4,5	2,4	-2,0	3,9	-1,1	4,1	-29,17
14	-3,5	-1,3	-2,2	1,4	3,6	0,4	-22,69
	-2,4	1,0	0,1	6,9	1,6	0,0	-13,35
	3,9	1,5	2,6	-1,2	1,0	-4,8	11,33
	0,1	7,1	0,7	-1,1	-1,9	1,6	-17,57
	-0,9	6,8	1,6	-0,2	1,2	-1,0	-23,88
	1,4	-0,6	-8,8	2,1	-0,6	2,8	-30,08
15	2,1	0,4	7,7	-1,9	0,4	-1,7	-19,76
	-2,2	-3,1	0,8	4,2	-3,8	1,2	-15,45
	0,1	-1,4	-1,8	2,0	0,0	6,6	1,03
	2,4	-3,4	1,1	-4,1	0,9	2,1	-20,28
	-0,7	2,9	4,6	3,2	1,6	-0,8	3,86
	7,5	0,4	-2,0	0,9	-1,1	0,1	14,59

Продовження таблиці 4

	4,9	-2,7	0,9	1,4	-3,5	0,0	-29,45
	1,3	-0,8	-2,0	1,2	6,8	0,1	3,41
16	-2,7	1,4	3,3	-2,5	0,0	-0,8	20,11
	0,2	7,0	-1,5	-0,1	-2,3	1,0	-7,93
	1,0	-2,1	3,6	4,4	0,9	2,5	-21,21
	9,1	-0,5	1,2	-2,4	0,0	-0,6	-28,18
	0,1	0,0	0,9	-1,1	6,0	2,3	3,13
	-3,4	1,2	-2,7	4,8	-3,9	0,9	-4,70
17	0,3	0,0	8,1	1,5	-1,0	-0,7	-9,75
	1,9	-4,1	0,0	-2,0	3,7	0,9	13,91
	-0,8	1,1	-2,8	-1,4	0,1	2,2	2,47
	-1,7	0,4	-1,9	7,7	0,4	2,1	6,41
	1,2	0,0	-0,4	6,6	0,1	-2,5	16,04
	-3,7	1,3	2,8	-1,7	-4,2	0,0	19,46
18	0,9	1,5	0,6	-1,2	1,0	6,8	25,20
	-1,6	-2,4	-3,7	4,1	0,0	2,9	9,52
	4,8	-1,9	1,8	-0,2	-3,5	0,0	11,16
	7,5	0,4	-2,0	0,9	-1,1	0,1	33,70
	-3,7	0,9	4,1	-2,2	1,9	0,0	21,55
	0,4	0,6	2,2	5,4	-1,2	-0,1	-22,09
19	1,9	-2,3	-3,5	2,0	0,4	-4,2	2,71
	-7,8	-0,3	-1,9	0,4	1,7	2,2	12,63
	0,4	-0,2	1,1	-0,6	2,3	5,7	-4,15
	2,3	1,7	0,9	3,4	-4,4	-1,9	-27,60
	1,2	0,0	-0,4	6,6	0,1	-2,5	-10,39
	-3,9	2,6	4,1	-0,8	2,4	1,6	12,90
20	0,0	-0,9	6,1	0,7	-1,0	1,2	-10,26
	2,4	0,8	-2,9	3,3	0,9	-1,6	4,21
	-4,1	3,7	2,5	-1,1	2,2	3,0	-3,00
	0,0	1,9	0,1	-1,3	0,2	7,8	-15,20
	1,7	-0,8	-2,1	1,1	0,4	0,0	14,51
	-0,7	-1,1	0,0	0,3	8,1	1,3	20,69
21	2,8	1,4	-1,0	-2,6	-0,7	3,1	1,51
	-0,1	5,2	-1,2	2,2	0,6	-0,4	-8,76
	7,9	0,4	-0,2	0,0	-1,0	1,2	3,98
	1,8	-2,4	3,5	-1,1	0,8	2,7	-5,78
	1,9	-1,7	0,3	2,1	-7,9	-0,4	16,42
	-0,9	0,0	6,8	-2,1	-0,9	1,3	0,66
22	2,1	3,3	-4,0	1,7	1,1	2,4	8,48
	-4,6	-2,8	1,3	3,5	0,9	0,0	24,85
	1,5	0,6	2,2	-0,4	1,8	-2,3	-14,05
	-0,5	0,3	1,3	2,9	0,1	6,2	35,58

Продовження таблиці 4

	1,8	-5,2	0,2	-0,4	0,0	2,2	-1,16
	-2,1	1,7	-1,6	2,8	-3,4	0,0	-25,32
23	0,9	-1,4	0,2	-2,1	1,8	-3,4	11,05
	-4,4	2,9	-3,5	1,9	2,4	1,6	-14,78
	5,8	0,5	-2,4	0,3	1,4	-0,1	25,47
	0,0	2,2	-1,2	8,0	-0,1	1,7	-9,90
	-2,6	1,7	0,4	-2,3	3,1	0,0	-23,91
	1,4	-3,2	-2,9	0,7	-1,8	2,2	16,04
24	-0,1	0,2	-1,0	5,2	-0,8	1,4	9,91
	0,0	2,1	8,4	-0,2	1,6	-1,3	1,18
	3,6	-4,1	0,7	2,4	1,9	-3,2	45,77
	0,4	-0,1	-1,1	0,0	8,0	1,2	-1,15
	-1,2	5,7	-0,5	0,2	-0,1	-0,9	11,76
	-0,8	1,9	-1,4	1,1	0,0	6,6	43,81
25	4,5	-3,4	1,9	-2,8	3,7	0,0	-29,38
	2,6	1,8	-2,1	0,9	-1,1	-0,6	13,52
	6,7	-0,1	-1,2	1,7	0,5	0,0	11,10
	-1,5	2,0	0,8	0,0	-2,3	1,9	11,96
	-0,2	0,3	2,4	5,3	1,6	-0,3	-11,76
	4,6	-3,0	-2,7	0,0	-1,9	3,5	-4,58
26	1,1	2,9	0,8	-3,1	0,7	-2,3	7,68
	0,0	2,1	8,4	0,2	-1,8	1,3	-3,34
	0,4	-0,1	1,2	0,0	8,1	-1,0	30,76
	-2,8	1,5	-3,1	-2,2	0,0	3,3	20,42
	1,9	-4,6	0,0	3,8	-2,4	1,2	10,07
	0,6	6,0	-0,4	-1,1	0,9	0,0	-18,17
27	-0,8	2,0	-1,4	-0,1	1,1	6,8	-12,57
	2,4	-3,9	1,6	4,1	-2,7	-1,0	15,23
	-1,1	0,0	0,5	1,7	0,8	0,0	3,21
	6,3	-1,4	0,0	2,0	0,4	-0,7	11,36
	2,1	0,4	7,7	-1,9	0,4	-1,7	-8,75
	-0,8	1,2	0,0	2,0	-1,6	0,4	4,72
28	3,1	-2,8	-3,6	1,4	0,9	-2,2	3,07
	1,3	-0,8	-2,0	1,2	-6,8	0,1	19,48
	-0,7	1,0	1,5	-8,1	0,0	0,3	-11,57
	0,9	0,0	0,1	0,0	1,2	-0,8	-2,73
	2,5	-1,8	-3,4	0,0	2,9	1,4	-10,68
	0,0	6,2	2,3	1,1	-0,8	-0,4	10,44
29	-1,8	2,1	0,7	-1,5	2,4	0,1	20,68
	0,6	0,0	1,2	-0,4	-2,5	5,7	-7,83
	8,9	-0,6	1,3	-2,0	0,2	0,7	-32,61
	-3,3	2,9	-4,1	1,8	0,0	-2,5	7,49

Кінець таблиці 4

30	-0,7	-1,1	1,6	8,0	0,1	-0,3	21,43
	2,5	1,7	-3,1	0,0	-1,2	2,1	-1,33
	-1,1	0,9	2,2	-1,4	2,6	-0,7	-7,79
	2,0	-0,2	7,8	2,1	0,1	-1,6	21,91
	-1,2	-0,8	2,0	0,9	-6,6	0,1	4,83
	3,6	2,7	-3,3	-1,8	0,0	2,1	-6,21

РОЗДІЛ 3 ЛОКАЛІЗАЦІЯ КОРЕНІВ НЕЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ ТА ТРАНСЦЕНДЕНТНИХ РІВНЯНЬ. НАБЛИЖЕНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ ТА ТРАНСЦЕНДЕНТНИХ РІВНЯНЬ

3.1. Загальні положення

Нехай дано рівняння

$$f(x) = 0, \tag{31}$$

де $f(x)$ визначена і неперервна в певному скінченому чи нескінченному інтервалі.

Усяке значення x^*, що перетворює функцію $f(x)$ на нуль, тобто таке, що $f(x^*) = 0$, називається коренем рівняння (31) чи нулем функції $f(x)$.

Наближене знаходження дійсних коренів рівняння (31) звичайно складається з таких етапів:

- відділення коренів (задача локалізації коренів), тобто встановлення проміжків $[\alpha, \beta]$, що містять один і тільки один корінь рівняння (31);
- уточнення наближених коренів, тобто доведення їх до заданого степеня точності.

Для відділення коренів існує два способи:

- графічний;
- аналітичний.

Графічний спосіб формулюється так: якщо функція $f(x)$ така, що без особливих труднощів можна побудувати її графік, щоб представити ситуацію із кількістю та розташуванням нулів $f(x)$, виокремлюючи ті проміжки осі абсцис, де графік функції $y = f(x)$ перетинає Ox.

Якщо побудова графіка с викликає труднощі, то вихідне рівняння (31) можна представити у виді:

$$f_1(x) = f_2(x),$$

де $f_1(x)$ та $f_2(x)$, такі що $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ і їх графіки $y = f_1(x)$ та $y = f_2(x)$ легко будуються. Тоді задача локалізації коренів зведеться до пошуку точки перетину цих графіків.

Приклад 1. Розв’язати задачу локалізації коренів для рівняння $e^x + x = 0$.

Розв’язання. Нехай $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = -x$. Схематично будуємо графіки $y = f_1(x)$ та $y = f_2(x)$ (рис. 5).

Звідки видно, що $x^* \in [-1; 0]$.

Аналітичний метод базується на теоремі з математичного аналізу. Відповідно до цієї теореми, якщо неперервна функція $f(x)$ на кінцях відрізка $[\alpha, \beta]$, приймає значення різних знаків, тобто

$$f(\alpha)f(\beta) < 0, \tag{32}$$

то всередині цього відрізка міститься непарне число дійсних коренів. Ясно, що корінь виявиться єдиним, якщо всередині цього відрізка функція $f(x)$ крім того ще й монотонна, тобто її похідна існує і зберігає знак усередині інтервалу (α, β).

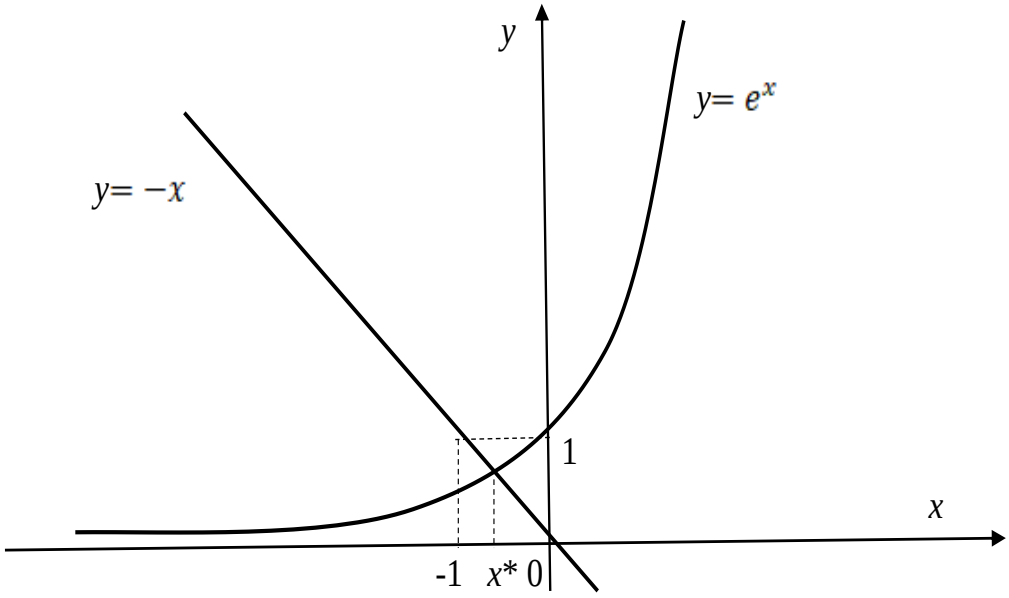


Рисунок 5 – Графічний метод розв’язання задачі локалізації коренів

Таким чином, якщо існує неперервна похідна $f'(x)$ і її нулі легко обчислюються, то для відділення коренів рівняння (31) можна вчинити так:

- знайти корені рівняння $f'(x) = 0$, тим самим ми визначимо кінці інтервалів монотонності функції $f(x)$;
- оцінити значення функції $f(x)$ на кінцях знайдених інтервалів монотонності й вибрати ті з них, на кінцях яких значення функції різних знаків. Вони і будуть шуканими інтервалами.

Корисно пам'ятати, що алгебраїчне рівняння n-го степеня $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$, $(a_0 = 0)$ має не більше ніж n дійсних коренів. Тому якщо для такого рівняння ми одержимо n+1 зміну знаків, то всі його корені будуть відділеними.

Приклад 2. Відділити корені рівняння

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3.$$

Розв’язання. Область визначення даної функції $(-\infty;\ \infty)$.

Знайдемо корені рівняння $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x \quad = 3x(x-2) = 0 \implies x_1 = 0, x_2 = 2.$$

Одержуємо такі інтервали монотонності функції $f(x)$: $(-\infty;\ 0)$, $(0;\ 2)$, $(2;\ \infty)$.

Визначимо знаки функції $f(x)$ на кінцях кожного з цих інтервалів:

$f(-\infty) < 0, f(0) > 0, f(2) < 0, f(\infty) > 0.$

На кінцях кожного з інтервалів монотонності значення даної функції різних знаків, отже в кожному інтервалі міститься по одному дійсному кореню розглянутого рівняння.

3.2. Методи дихотомії

Нехай функція $f(x)$ визначена, неперервна та монотонна при всіх $x \in [\alpha, \beta]$ і виконується умова (32). Візьмемо довільну точку $x \in (\alpha, \beta)$ – пробну точку. Тоді прийдемо до таких взаємовиключних ситуацій:

а) $f(\alpha)f(c) < 0$,

б) $f(c)f(\beta) < 0$,

в) $f(c) = 0$,

тобто а) корінь знаходиться на інтервалі (α, c),

б) корінь знаходиться на інтервалі (c, β),

в) с – корінь рівняння.

Таким чином, одне обчислення значення функції дозволяє зменшити проміжок $[\alpha, \beta]$ існування кореня (ситуація а) або б)) або вказати його значення (малоймовірна ситуація в)). В залежності від того, має місце ситуація а) або б), описана процедура одного кроку звуження проміжку існування нуля може бути застосована до проміжку $[\alpha, c]$ або $[c, \beta]$, відповідно, та далі повторюватися циклічно.

Такий процес називають методом дихотомії, методом бісекції, методом виделки, методом проб. Якщо спосіб визначення пробних точок задається так, що послідовність довжин проміжків існування кореня, що отримуються у цьому процесі, прагне до нуля, то методом дихотомії можна знайти будь-який корінь рівняння (31) із наперед заданою точністю.

3.3. Метод поділу навпіл

Одним із частинних випадків методів дихотомії є метод поділу навпіл (ділення проміжку існування кореня навпіл).

Виконати наближене обчислення с точністю ε кореня рівняння методом поділу навпіл можна за такою схемою:

1. Задати кінці відрізку α та β, функцію $f(x)$, мале число $\varepsilon > 0$ (допустиму абсолютну похибку кореня або напівдовжину його проміжку невизначеності), мале число $\delta > 0$ (допуск, пов'язаний із реальною точністю обчислення значень заданої функції).
2. Обчислити (або ввести) $f(\alpha)$.
3. Обчислити $c = 0{,}5(\alpha + \beta)$.
4. Якщо $\beta - \alpha < 2\varepsilon$, покласти $x^* \approx c$ (x^* – корінь) та зупинитися.
5. Обчислити $f(c)$.
6. Якщо $|f(c)| < \delta$, покласти $x^* \approx c$ та зупинитися.
7. Якщо $f(\alpha)f(c) < 0$, покласти $b = c$ та повернутися до пункту 3.

Апріорна оцінка абсолютної похибки:

$$|x^* - x_k| < \frac{\beta - \alpha}{2^k}. \qquad (33)$$

3.4. Метод пропорційних частин (метод хорд)

Основною ідеєю цього частинного випадку методів дихотомії є таке: відрізок $[\alpha, \beta]$ ділиться точкою с на частини не навпіл, а пропорційно величинам ординат $f(\alpha)$ та $f(\beta)$ графіка даної функції $f(x)$. Це означає, що точку с є сенс знаходити як абсцису точки перетину вісі Ох з прямою, що проходить через точки А(α; $f(\alpha)$) та В(β; $f(\beta)$), інакше з хордою АВ дуги Аx^*В. Запишемо рівняння прямої, що проходить через точки А(α; $f(\alpha)$) та В(β; $f(\beta)$):

$$\frac{y - f(\alpha)}{f(\beta) - f(\alpha)} = \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha}.$$

Звідси припускаючи, що $y = 0$, $x = $ с, знаходимо

$$c = \alpha - \frac{f(\alpha)(\beta - \alpha)}{f(\beta) - f(\alpha)}. \quad (34)$$

Цей метод називають методом хорд, або методом пропорційних частин.

Як найпростіший критерій зупинки ітераційного процесу можна використовувати:

$$|c_{k+1} - c_k| < \varepsilon, (k = 0, 1, 2, \dots),$$

де $c_0 = c$, c_k – k-е наближення до кореня рівняння.

3.5. Метод Ньютона (дотичних)

Цей метод дуже ефективний для розв'язання алгебраїчних і трансцендентних рівнянь. Його основна перевага полягає в тому, що при порівняно простій схемі обчислень він має швидку збіжність.

Нехай єдиний корінь ξ рівняння

$$f(x) = 0 \quad (35)$$

розташований усередині інтервалу $[\alpha, \beta]$, причому $f'(x)$ і $f''(x)$ неперервні і зберігають визначені знаки $\forall x \in [\alpha, \beta]$. Відповідно до методу Ньютона корінь вихідного рівняння відшукується як границя ітераційної послідовності

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}, (i = 0,1,2,\dots). \quad (36)$$

Початкове наближення $x_0 \in [\alpha, \beta]$ і повинне задовольняти умові

$$f(x_0)f''(x_0) > 0. \quad (37)$$

Геометрично метод Ньютона еквівалентний заміні рівняння кривої $y = f(x)$ рівнянням дотичної, проведеної до цієї кривої в точці $x = x_i$. За наближене значення кореня береться абсциса точки перетину цієї дотичної з віссю Ox.

Для оцінки точності наближення x_i можна скористатися формулою

$$|x_i - \xi| \le \frac{|f(x_i)|}{m_1}, \quad (38)$$

де

$$|f'(x)| \ge m_1 > 0, \forall x \in [\alpha, \beta], \quad (39)$$

ξ – точне значення кореня. На практиці обирають $m_1 = min\{|f'(\alpha)|; |f'(\beta)|\}$.

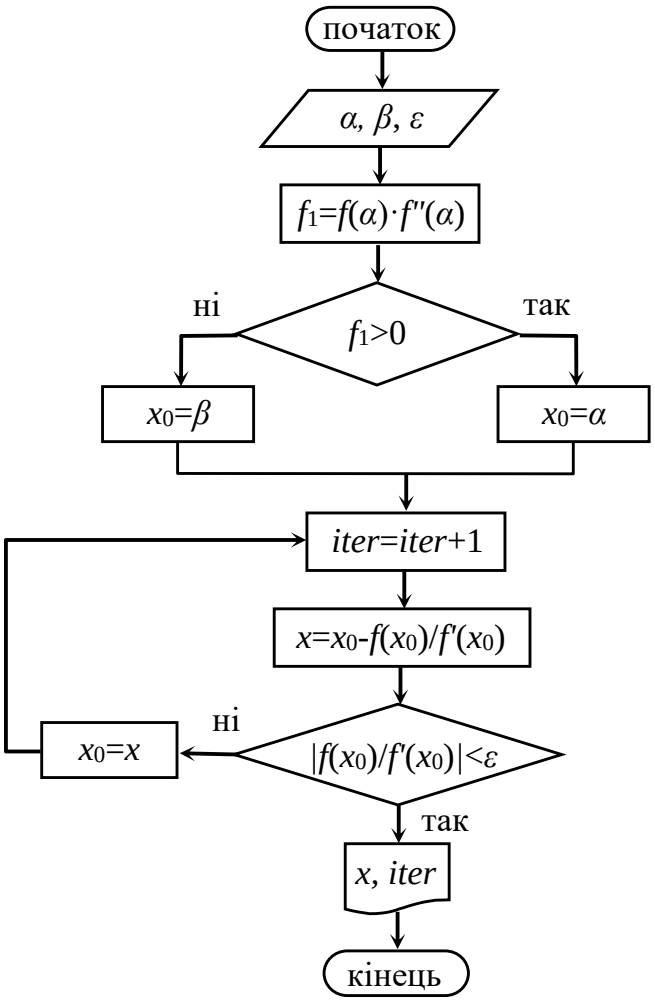


Рисунок 6 – Блок-схема розв'язання нелінійних трансцендентних рівнянь методом дотичних

На рис. 6 наведено блок-схему програми розв'язку нелінійних та трансцендентних рівнянь методом дотичних.

У даній блок-схемі: α – лівий кінець інтервалу; β – правий кінець інтервалу; ε – точність обчислень; x_0– корінь рівняння на попередній ітерації; x – корінь рівняння на поточній ітерації; *iter* – номер ітерації; $f(x)$ – значення функції у точці x.

Приклад. Знайдемо з точністю $\varepsilon = 0{,}0001$ корінь рівняння $x^3 - 3x^2 + 3 = 0$.

Розв'язання. Виконавши процедуру відділення коренів так, як описано вище (див. Розділ 3. Загальні положення) одержимо три інтервали $(-\infty; 0)$, $(0; 2)$, $(2; +\infty)$, що містять корені. Знайдемо корінь, розташований в інтервалі $(0; 2)$. Цей інтервал методом бісекції зменшимо так, щоб його довжина була $\leq 0{,}1$.

Маємо:

$$x_1 = \frac{0+2}{2} = 1, \quad f(x_1) = 1 > 0 \Rightarrow \xi \in [1; 2];$$

$$x_2 = \frac{1+2}{2} = 1{,}5, \quad f(x_2) = -0{,}375 < 0 \Rightarrow \xi \in [1; 1{,}5];$$

$$x_3 = \frac{1+1{,}5}{2} = 1{,}25, \quad f(x_3) = 0{,}2656 > 0 \Rightarrow \xi \in [1{,}25; 1{,}5];$$

$$x_4 = \frac{1{,}25+1{,}5}{2} = 1{,}375, \quad f(x_4) = -0{,}0727 < 0 \Rightarrow \xi \in [1{,}25; 1{,}375];$$

$$x_5 = \frac{1{,}25+1{,}375}{2} = 1{,}3125, \quad f(x_5) = 0{,}093 > 0 \Rightarrow \xi \in [1{,}3125; 1{,}375].$$

Довжина отриманого інтервалу

$$|1{,}375 - 1{,}3125| = 0{,}0625 < 0{,}1 .$$

Подальше уточнення кореня проведемо методом Ньютона.

Друга похідна $f''(x)$ на цьому інтервалі більша нуля, перша похідна $f'(x)$– менша нуля. За початкове наближення x_0 візьмемо лівий кінець інтервалу, тобто $x_0 = 1{,}3125$. Тоді

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1{,}3125 - \frac{0{,}093}{(-2{,}707)} = 1{,}3469, \quad f(x_1) = 0{,}00115.$$

Обчислимо значення першої похідної $f'(x)$ на другому кінці інтервалу й оцінимо похибку отриманого наближення $f'(1{,}375) \approx 2{,}578$, тобто $m_1 = 2{,}578$.

$$|x_1 - \xi| \le \frac{|f(x_1)|}{m_1} = \frac{0{,}00115}{2{,}578} \approx 0{,}00445 > 0{,}0001.$$

Точність, з якою обчислене перше наближення, недостатня. Тому робимо наступний крок

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1{,}3496 - \frac{0{,}0015}{(-2{,}639)} = 1{,}3473, \qquad f(x_2) = 2 \cdot 10^{-7},$$

$$|x_2 - \xi| \le \frac{|f(x_2)|}{m_1} = \frac{2 \cdot 10^{-7}}{2{,}578} \approx 7{,}76 \cdot 10^{-8} < 0{,}0001.$$

Як видно з оцінки похибки другого наближення, одержуємо значення кореня з похибкою, що не перевищує задану.

Корені, розташовані в двох інших інтервалах $(-\infty; 0)$, $(2; +\infty)$ знаходяться аналогічно.

Питання для самоконтролю до розділу 3

1. В чому полягає задача локалізації коренів.
2. Опишіть метод поділу навпіл та метод хорд.
3. Опишіть метод Ньютона, наведіть формулу для контролю похибки методу, умову вибору початкового наближення. Дайте геометричну інтерпретацію методу.

Завдання до розділу 3. Локалізація коренів та розв'язання нелінійних рівнянь методом Ньютона

Обрати значення коефіцієнтів a_i $(i = 1{,}2{,}3{,}4)$ з таблиці варіантів (див. табл. 5). Номер варіанта, що являє собою двозначне число, задається викладачем. Перша цифра номера варіанта визначає значення шифри по вертикалі, друга – по горизонталі.

Таблиця 5 – Варіанти завдань до розділу 3

Шифр по вертикалі	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_1	1,6	-2,4	0,8	3,6	-1,2	6,4	-2,8	1,2	-0,4	5,2

	Шифр по горизонталі									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_2	5,1	3,3	-6,3	-1,5	5,7	6,3	1,2	-6,9	5,4	-2,1
a_3	0,2	0	0,8	0	-1,2	0,4	0	-0,6	1,0	0
a_4	-2	3	7	-1	-4	6	-3	8	9	-5

Підставивши обрані значення коефіцієнтів a_i $(i = 1{,}2{,}3{,}4)$, методом Ньютона з точністю до $\varepsilon = 0{,}0001$ обчислити всі дійсні корені рівняння

$$a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0.$$

РОЗДІЛ 4 НАБЛИЖЕНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

4.1. Методи спуску

Розглянимо методи спуску на найпростішому прикладі нелінійної системи двох рівнянь

$$\begin{cases} f(x,y) = 0, \\ g(x,y) = 0. \end{cases} \tag{40}$$

Побудуємо з лівих частин рівнянь системи функцію багатьох змінних виду:

$$\Phi(x,y) = f(x,y)^2 + g(x,y)^2 \tag{41}$$

Якщо існує глобальний мінімум функції $\Phi(x,y)$, тобто

$$\min \Phi(x,y) = \Phi(x^*,y^*) = 0 \Longrightarrow (x^*,y^*) - \text{розв}'\text{язок задачі.}$$

Маємо еквівалентні задачі, тобто:

$$\Phi(x^*,y^*) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x^*,y^*) = 0, \\ g(x^*,y^*) = 0. \end{cases}$$

Розв’яжемо еквівалентну задачу про глобальний мінімум функції $\Phi(x,y)$ за допомогою ітераційної процедури:

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} + \alpha_k \begin{pmatrix} p_k \\ q_k \end{pmatrix}, \tag{42}$$

де (x_k, y_k) – k-е наближення до точного розв’язку задачі (x^*, y^*), (p_k, q_k) – вектор мінімізації, α_k – кроковий множник.

Методи що визначаються формулою (42) називаються методами спуску («спуск на дно» поверхні $z = \Phi(x,y)$).

Однією з модифікацій методів спуска є метод покоординатного спуска (рис. 7), коли в (42) вектор мінімізації почергово паралельний одній та іншій осі $((p_k, 0), (0, q_{k+1}), (k = 0, 2, 4, \dots)$ або $(0, q_k), (p_{k+1}, 0), (k = 0, 2, 4, \dots))$.

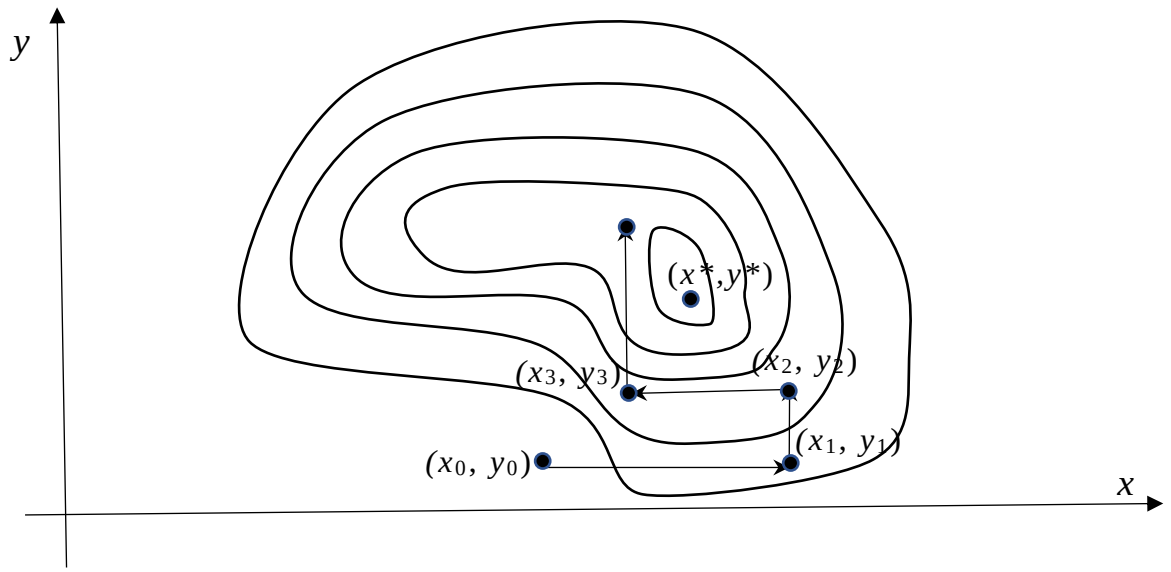


Рисунок 7 – Метод покоординатного спуску

Напрям найшвидшого зростання функції показує градієнт функції, а напрям найшвидшого спадання – антиградієнт функції:

$$\begin{pmatrix} p_k \\ q_k \end{pmatrix} = -\overline{grad}\ \Phi(x_k, y_k) = -\begin{pmatrix} \Phi'_x(x_k, y_k) \\ \Phi'_y(x_k, y_k) \end{pmatrix}. \quad (43)$$

Підстановка вектору мінімізації (43) в (42) дає метод градієнтного спуску:

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} - \alpha_k \begin{pmatrix} \Phi'_x(x_k, y_k) \\ \Phi'_y(x_k, y_k) \end{pmatrix}. \quad (44)$$

Кроковий множник α_k, можна брати сталим (однаковим на всіх ітераціях), а можна обирати таким, щоб на кожній ітерації наступне наближення було точкою локального мінімуму в напряму мінімізації, тобто:

$$\alpha_k = \arg\min_{\alpha>0} \Phi\left(x_k - \alpha\Phi'_x(x_k, y_k), y_k - \alpha\Phi'_y(x_k, y_k)\right). \quad (45)$$

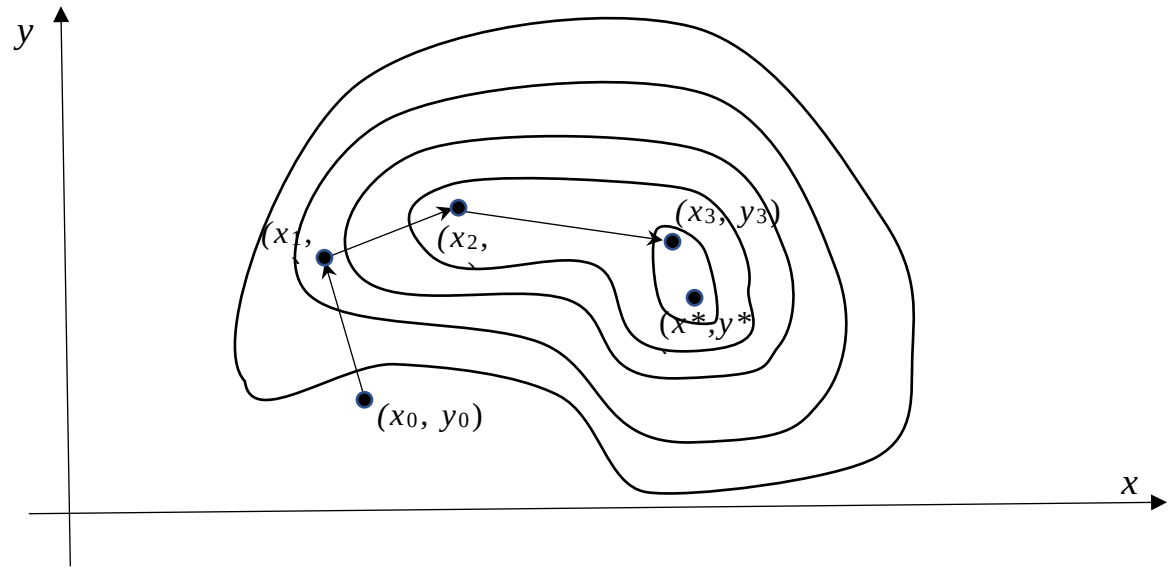


Рисунок 8 – Метод градієнтного спуску

Використання методів спуска (42) сумісно із таким вибором крокового множника (45) дає методи вичерпного спуску. А використання методів градієнтного спуска (44) сумісно із вибором крокового множника (45) дає метод найшвидшого спуску.

4.2. Метод градієнтного спуску

Нехай маємо систему рівнянь

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0\ (i = 1,2,\ldots,n), \quad (46)$$

чи в матричній формі

$$F(\bar{x}) = 0, \quad (47)$$

де $F = (f_1, f_2, \ldots, f_n)^T$, $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Припустимо, що функції $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ дійсні й неперервно-диференційовані в їхній загальній області визначення. Розглянемо функцію

$$\Phi(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} [f_i(x_1, x_2, .., x_n)]^2 = \big(F(\bar{x}), F(\bar{x})\big). \quad (48)$$

Очевидно, що кожний розв'язок системи (46) перетворює на нуль функцію $\Phi(\bar{x})$; навпаки, числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, для яких функція $\Phi(\bar{x})$ дорівнює нулю, є коренями системи (46). Таким чином, задача зводиться до знаходження мінімуму скалярної функції багатьох змінних $\Phi(\bar{x})$.

Одним з методів мінімізації функцій багатьох змінних є метод градієнтного спуску. Якщо $\bar{x}^{(k)}$ – деяке наближення до розв'язку системи, то в методі градієнтного спуску ми одержуємо нове наближення $\bar{x}^{(k+1)}$, рухаючись за напрямком найбільшої миттєвої швидкості зміни функції $\Phi(\bar{x})$ в точці $\bar{x}^{(k)}\left(grad\Phi\big(\bar{x}^{(k)}\big)\right)$ до точки, де значення $\Phi\big(\bar{x}^{(k+1)}\big)$ мінімальне, тобто

$$\bar{x}^{(k+1)} = \bar{x}^{(k)} + \lambda_k grad\Phi\big(\bar{x}^{(k)}\big), \quad (49)$$

де λ_k вибирається з умови мінімуму $\Phi\big(\bar{x}^{(k+1)}\big)$.

Якщо λ – мала величина, квадратом і вищими ступенями якої можна знехтувати, то, розкладаючи функції $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ за степенями λ з точністю до лінійних членів і виражаючи $grad\ \Phi(x)$ через матрицю Якобі $W(\bar{x})$, одержимо таке представлення розрахункової формули методу градієнтного спуску

$$\bar{x}^{(k+1)} = \bar{x}^{(k)} - \mu_k W^T\big(\bar{x}^{(k)}\big)F\big(\bar{x}^{(k)}\big),\ (k = 0,1,2,\ldots), \quad (50)$$

де матриця Якобі вектор-функції $F(\bar{x})$ має вид:

$$W(\bar{x}) = \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

$$\mu_k = \frac{\Big(F\big(\bar{x}^{(k)}\big), W\big(\bar{x}^{(k)}\big)W^T\big(\bar{x}^{(k)}\big)F\big(\bar{x}^{(k)}\big)\Big)}{\Big(W(\bar{x}^{(k)})W^T(\bar{x}^{(k)})F(\bar{x}^{(k)}),\quad W(\bar{x}^{(k)})W^T(\bar{x}^{(k)})F(\bar{x}^{(k)})\Big)}. \quad (51)$$

Слід зазначити, що ітераційний процес, побудований за методом градієнтного спуску, збігається до точного розв'язку, якщо початкове наближення $x^{(0)}$ обране з досить малого околу кореня.

На рис. 9 наведено блок-схему програми розв'язання нелінійних систем методом градієнтного спуску.

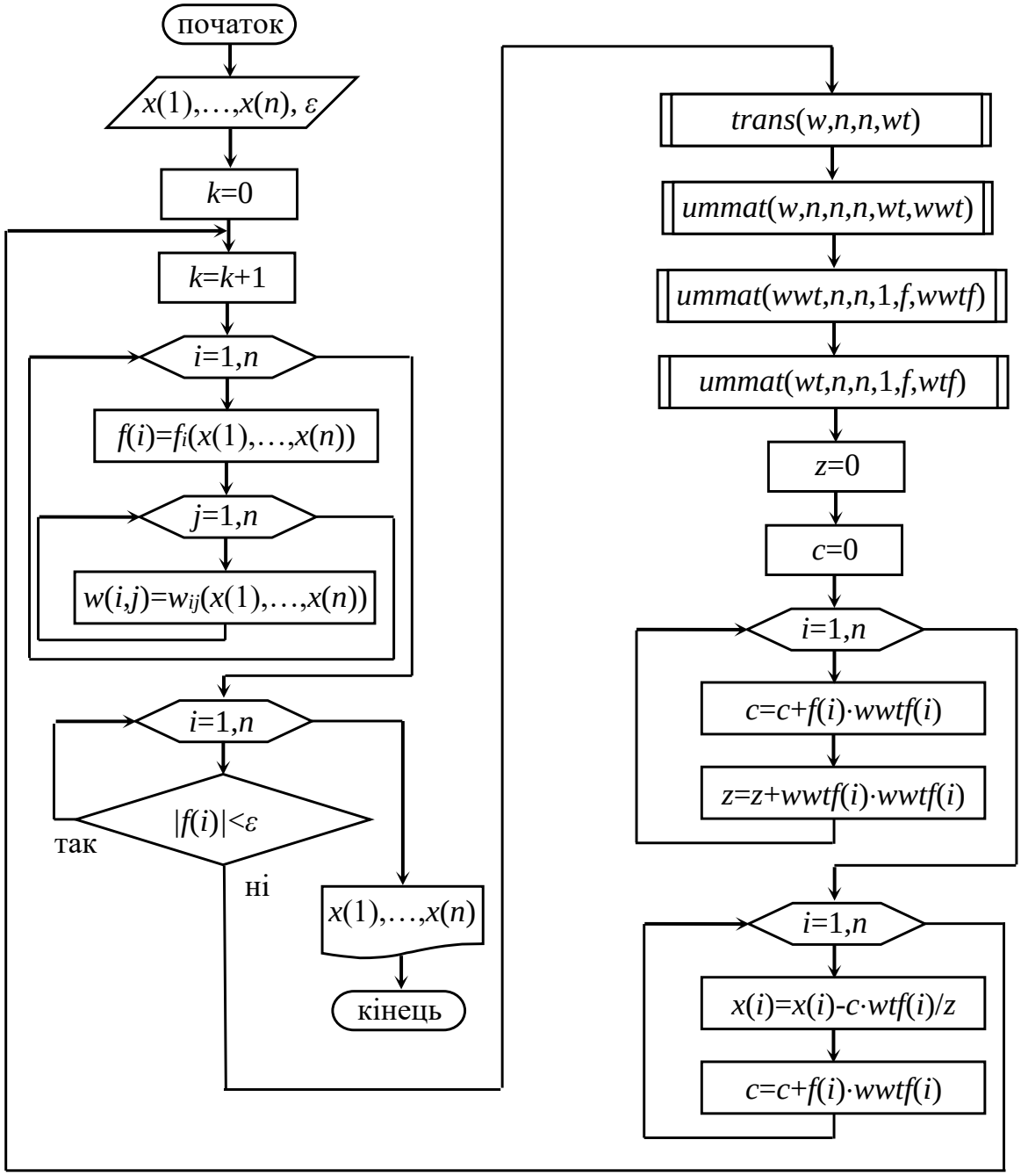


Рисунок 9 – Блок-схема розв’язання нелінійних систем методом градієнтного спуску

У даній блок-схемі: n – кількість рівнянь у системі, $x(1),\ldots,x(n)$ – наближені значення розв’язку системи; ε – точність обчислень; k – номер ітерації; $f(i)$, $f_i(x(1),\ldots,x(n))$ – значення, що приймає ліва частина i-го рівняння системи у точці $(x(1),\ldots,x(n))$; $w(i;j)$, $w_{ij}(x(1),\ldots,x(n))$ – значення коефіцієнтів матриці Якобі у точці $(x(1),\ldots,x(n))$; *trans*(w,n,m,wt) – підпрограма транспонування матриці (w – вихідна матриця, n – кількість рядків вихідної матриці, m – кількість стовпців матриці, wt – транспонована матриця); *ummat*(w,n,m,l,wt,wwt) – підпрограма добутку двох матриць (w – перша матриця, n – кількість рядків першої матриці, m – кількість стовпців першої та рядків другої матриці, l – кількість стовпців другої матриці, wt – друга матриця, wwt – добуток двох матриць).

Приклад. Методом градієнтного спуску обчислити корені системи

$$\begin{cases} x + x^2 - 2yz = 0{,}1; \\ y - y^2 + 3xz = -0{,}2; \\ z + z^2 + 2xy = 0{,}3, \end{cases}$$

розташовані в околі початку координат.

Розв'язання. Маємо $\bar{x}^{(0)} = (0{,}0{,}0)^T$.

Тут $F = \begin{pmatrix} x + x^2 - 2yz - 0{,}1 \\ y - y^2 + 3xz + 0{,}2 \\ z + z^2 + 2xy - 0{,}3 \end{pmatrix}$ і $W = \begin{pmatrix} 1 + 2x & -2z & -2y \\ 3z & 1 - 2y & 3x \\ 2y & 2x & 1 + 2z \end{pmatrix}$.

Підставляючи нульове наближення, будемо мати:

$$F\left(\bar{x}^{(0)}\right) = (-0{,}1; 0{,}2; -0{,}3)^T \text{ і } W\left(\bar{x}^{(0)}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

За формулами (50) і (51) одержуємо перше наближення

$$\mu_0 = \frac{\left(F\left(\bar{x}^{(0)}\right),\ F\left(\bar{x}^{(0)}\right)\right)}{\left(F(\bar{x}^{(0)}),\ F(\bar{x}^{(0)})\right)} = 1$$

і $\bar{x}^{(1)} = \bar{x}^{(0)} - 1 \cdot E \cdot F\left(\bar{x}^{(0)}\right) = (0{,}1; -0{,}2; 0{,}3)^T$.

Аналогічно знаходимо друге наближення $\bar{x}^{(2)}$. Маємо:

$$F\left(\bar{x}^{(1)}\right) = \begin{pmatrix} 0{,}13 \\ 0{,}05 \\ 0{,}05 \end{pmatrix}, W\left(\bar{x}^{(1)}\right) = \begin{pmatrix} 1{,}2 & -0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}9 & 1{,}4 & 0{,}3 \\ -0{,}4 & 0{,}2 & 1{,}6 \end{pmatrix}.$$

Звідси:

$$W^T\left(\bar{x}^{(1)}\right)F\left(\bar{x}^{(1)}\right) = \begin{pmatrix} 0{,}181 \\ 0{,}002 \\ 0{,}147 \end{pmatrix} \text{ та } W\left(\bar{x}^{(1)}\right)W^T\left(\bar{x}^{(1)}\right)F\left(\bar{x}^{(1)}\right) = \begin{pmatrix} 0{,}2748 \\ 0{,}2098 \\ 0{,}1632 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$\mu_1 = \frac{0{,}13 \cdot 0{,}2748 + 0{,}05 \cdot 0{,}2098 + 0{,}05 \cdot 0{,}1632}{0{,}2748^2 + 0{,}2098^2 + 0{,}1632^2} = \frac{0{,}054374}{0{,}14619797} = 0{,}3719$$

і $\bar{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ -0{,}2 \\ 0{,}3 \end{pmatrix} - 0{,}3719 \begin{pmatrix} 0{,}181 \\ 0{,}002 \\ 0{,}147 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}0327 \\ -0{,}2007 \\ 0{,}2453 \end{pmatrix}$.

Для контролю обчислимо відхил

$$F\left(\bar{x}^{(2)}\right) = \begin{pmatrix} 0{,}032 \\ -0{,}017 \\ -0{,}007 \end{pmatrix}.$$

Питання для самоконтролю до розділу 4

1. Сформулюйте постановку задачі, опишіть метод розв'язання.
2. В чому полягає основна ідея методу градієнтного спуску?
3. Які умови закінчення ітераційного процесу?
4. Що може відбутися при невдалому виборі нульового наближення?
5. Дайте геометричну інтерпретацію методу.

Завдання до розділу 4. Розв'язання нелінійних рівнянь методом градієнтного спуску

Методом градієнтного спуску при заданому початковому наближенні $\bar{x}^{(0)}$ знайдіть наближені корені системи

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1^2 + a_{12} \cdot x_2 \cdot x_3 + a_{13} \cdot x_2 \cdot x_4 + a_{14} \cdot x_1 = b_1, \\ a_{21} \cdot x_2^2 + a_{22} \cdot x_1 \cdot x_3 + a_{23} \cdot x_3 \cdot x_4 + a_{24} \cdot x_2 = b_2, \\ a_{31} \cdot x_3^2 + a_{32} \cdot x_1 \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_2 \cdot x_4 + a_{34} \cdot x_3 = b_3, \\ a_{41} \cdot x_4^2 + a_{42} \cdot x_1 \cdot x_2 + a_{43} \cdot x_2 \cdot x_3 + a_{44} \cdot x_4 = b_4. \end{cases}$$

За умову закінчення ітераційного процесу прийміть $\left\| F\left(\bar{x}^{(i)}\right) \right\|_\infty < 0{,}01$.

Індивідуальні варіанти наведено в табл. 6

Таблиця 6 – Варіанти завдань до розділу 4

№ варіанта	Матриця коефіцієнтів системи a_{ij}				Стовпець вільних членів b_i	Початкове наближення коренів $x_i^{(0)}$
1	-4,1	2,4	1,3	-0,7	-18,12338	-1,1
	0,6	-1,2	3,1	2,9	4,89797	2,2
	-3,4	0,4	-0,1	-1,1	-30,61106	-3,3
	0,5	-2,8	1,4	3,3	-3,70831	0,0
2	2,4	3,1	-0,8	1,5	-4,06003	1,3
	-1,8	-4,2	2,6	0,7	-16,26196	-1,1
	0,4	1,9	-0,5	-2,6	-6,20337	3,0
	-3,2	0,2	1,1	0,9	-3,44529	0,3
3	1,5	0,9	-2,2	3,2	11,10436	-0,5
	-0,4	3,6	1,7	-2,8	-10,36585	1,0
	2,1	-0,3	-2,9	1,4	-0,27533	-2,5
	-1,6	2,5	0,7	-0,1	-16,43394	3,0
4	-2,8	0,6	1,9	-3,1	-2,74332	0,9
	1,4	-2,2	-0,8	1,2	6,78768	2,1
	-0,1	1,5	2,6	-0,9	-0,35866	1,6
	3,5	-0,6	-1,7	2,4	-7,91985	-0,1
5	1,1	4,0	-2,3	-0,5	7,25672	1,6
	-3,4	-0,7	1,2	2,4	-9,89640	-0,3
	2,5	1,9	-3,0	0,8	16,31988	2,5
	-0,1	-0,8	2,5	-1,0	-1,00392	-1,7
6	4,5	1,2	-0,6	2,1	19,99632	-2,5
	-0,6	-2,0	1,3	-3,2	-12,18632	1,6
	1,1	0,8	-2,1	0,2	-14,24772	-0,7
	-3,0	-2,7	0,4	-1,3	-22,48474	3,3

Продовження таблиці 6

7	2,4	0,9	-1,8	0,2	0,53615	0,9
	-1,2	-3,0	-2,3	1,7	-10,59093	-2,3
	0,1	1,8	0,4	-2,2	-5,46305	1,5
	-2,0	-0,5	1,6	0,8	-5,47281	-0,8
8	0,8	-1,1	-0,4	2,7	17,47656	3,1
	-1,0	3,4	1,8	-0,2	-33,53480	-0,6
	2,1	-0,6	-2,0	1,9	9,65912	-2,5
	0,0	2,5	0,4	-3,1	-9,05794	2,0
9	-3,4	0,0	1,2	-2,1	-3,65902	-0,1
	2,1	-1,9	-0,4	1,6	0,76205	0,2
	0,0	3,4	1,1	-0,7	-1,16126	1,8
	-4,0	1,9	-0,2	2,4	-15,32033	-1,4
10	0,6	-2,1	3,0	-0,1	-0,57180	-0,2
	-1,9	3,4	-1,5	2,4	6,32067	0,8
	2,0	-0,8	2,4	-0,5	5,10568	-0,3
	-0,4	1,9	-0,2	2,5	1,30491	2,3
11	2,7	0,6	-1,5	-0,8	12,31117	2,6
	-1,5	-1,4	-0,8	2,0	9,43067	2,1
	0,3	2,2	0,5	-1,8	18,78237	-2,9
	1,6	-0,1	-2,4	0,5	13,59151	0,4
12	-0,5	2,9	0,2	-1,4	2,02812	0,7
	1,0	-0,8	-2,5	0,6	6,82786	-2,0
	-2,6	1,5	0,8	-2,2	-5,96430	-0,4
	0,8	-2,4	1,2	0,5	10,15452	1,9
13	-1,2	0,6	-0,5	1,8	-1,89552	-1,7
	0,5	-2,2	1,4	-0,9	-0,51975	0,9
	-2,4	1,6	-1,7	2,5	-4,79314	2,4
	1,8	-0,5	2,0	-1,2	17,82578	-2,6
14	-2,5	0,2	1,8	-0,2	-32,82288	3,6
	0,6	1,5	-0,4	1,2	-3,47712	-1,4
	-0,5	-2,4	-1,6	0,4	14,80896	-0,5
	1,4	-3,2	0,5	-2,0	18,41504	2,5
15	0,9	-1,0	2,2	-0,5	1,24605	-2,4
	-1,5	2,0	-1,4	0,4	-3,02800	0,6
	3,0	-0,5	0,8	-2,6	1,17404	1,4
	-2,8	1,2	-1,0	0,5	-8,58912	-1,6
16	1,9	-0,7	-1,5	2,0	4,99613	0,9
	-0,6	2,4	0,4	-0,5	-9,27880	-2,5
	-3,2	-0,1	2,5	1,4	-43,01664	-2,9
	1,1	0,5	1,8	-2,2	11,28333	1,8

Продовження таблиці 6

17	0,6	-2,8	3,4	0,5	4,43632	-1,3
	-2,5	1,2	-0,6	1,8	4,15527	0,3
	1,4	-1,5	2,2	-0,4	9,58114	-2,5
	-0,5	2,0	-1,6	0,2	0,39000	0,0
18	1,2	-0,5	2,8	-3,2	-2,42752	3,2
	-2,6	1,4	-3,0	0,5	3,16474	-1,3
	0,5	-2,1	1,1	-2,6	8,81720	0,4
	-4,1	0,6	-0,5	1,2	-26,58144	-2,5
19	1,6	-0,5	3,2	2,1	-2,90940	-0,7
	-2,0	4,1	-0,8	-1,5	-3,30594	-2,0
	0,8	-1,5	2,4	0,1	-1,82784	-1,0
	-1,2	0,4	-2,5	-0,6	-6,36048	0,0
20	-0,4	-2,5	1,8	-2,0	0,42576	3,0
	1,1	3,2	-2,6	0,5	-30,21898	0,4
	-3,5	-0,1	1,4	-2,6	-16,27821	-2,6
	-4,0	0,2	-0,5	1,1	-6,42578	-1,0
21	2,4	-1,6	-2,5	0,7	-2,28288	0,6
	1,5	0,9	1,2	2,6	1,84254	-1,5
	-0,8	1,1	2,4	-0,5	-7,93506	1,1
	1,2	-2,8	-0,5	2,0	11,00036	1,9
22	0,4	1,9	-2,4	0,5	0,30678	1,2
	-1,5	0,6	1,2	2,4	-4,21839	2,5
	2,0	-4,1	0,5	1,6	-8,45331	-0,5
	0,1	3,0	1,4	-2,5	1,53789	1,6
23	1,7	0,6	2,1	-1,5	-5,66937	0,7
	-0,1	2,5	3,0	1,8	-4,99050	1,5
	2,6	-1,2	2,1	-0,5	13,15266	-2,2
	1,5	0,2	-1,7	2,2	8,54615	1,0
24	4,0	-0,5	2,1	0,2	18,84720	-2,5
	2,6	1,3	0,6	-1,5	3,40392	2,0
	-0,5	3,0	1,2	-2,4	-22,47560	2,2
	1,9	0,8	-0,5	1,2	-6,43244	-0,3
25	-2,5	1,6	2,1	0,1	-37,97268	3,5
	0,8	1,1	-3,0	1,5	2,22006	0,0
	2,1	-1,2	0,5	-2,7	6,74865	-1,0
	1,4	0,5	2,2	0,3	6,29984	2,1
26	0,5	2,7	-0,1	1,2	-0,86703	1,0
	3,0	-2,2	1,5	2,6	14,43240	-2,5
	1,9	0,5	2,4	-0,4	-12,59653	0,2
	-2,8	1,3	0,7	2,5	-9,05877	1,5

Кінець таблиці 6

27	1,1	-0,6	2,2	-1,5	1,68870	2,2
	0,9	3,0	-1,6	2,4	10,30449	1,4
	-2,0	0,5	2,7	1,1	1,29780	1,0
	2,5	1,1	0,4	-1,9	2,89248	0,6
28	2,3	1,4	0,7	-1,1	4,26706	-0,7
	1,7	0,9	1,3	2,2	24,95169	3,5
	-0,2	2,6	1,5	-0,3	-11,60306	0,6
	1,4	-0,4	2,0	1,5	6,61972	-1,5
29	0,9	-0,9	1,7	2,0	1,28439	1,5
	4,1	1,4	-0,4	2,7	10,74725	-2,0
	-1,1	2,2	-3,3	1,1	-17,52025	-1,0
	0,4	3,0	1,5	-2,2	-8,26131	0,7
30	1,2	-0,7	3,1	2,4	1,15208	2,5
	2,5	1,4	-2,1	0,9	13,88584	1,0
	0,1	3,0	1,6	-2,2	-0,20264	1,6
	-2,4	0,7	2,5	1,8	-11,25706	-2,0

РОЗДІЛ 5 ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ ВИЗНАЧЕННЯ ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ ТА ВЛАСНИХ ВЕКТОРІВ МАТРИЦЬ

5.1. Проблема власних значень

При розв'язанні теоретичних і практичних задач часто виникає потреба визначити власні значення матриці A.

Нехай дана квадратна матриця $A = [a_{ij}]$. Розглянемо лінійне перетворення

$$\bar{y} = A\bar{x} \tag{52}$$

де $\bar{x}$ і $\bar{y}$ – n -вимірні вектори якогось n -вимірного простору.

Вектор $\bar{x} \neq \bar{0}$ називається власним вектором матриці A, якщо

$$A\bar{x} = \lambda\bar{x} \tag{53}$$

Число λ називається власним значенням чи характеристичним числом матриці A, що відповідає даному власному вектору $\bar{x}$. Власні вектори матриці $\bar{y}^{k+1} = A\bar{y}^k$ є ненульовими розв'язками матричного рівняння (53) або

$$(A - \lambda E)\bar{x} = \bar{0} \tag{54}$$

де матриця $(A - \lambda E)$ називається характеристичною матрицею. Рівняння (54) являє собою однорідну систему, що має ненульові розв'язки тоді й тільки тоді, коли визначник системи дорівнює нулю, тобто

$$det(A - \lambda E) = 0. \tag{55}$$

Визначник із (55) називається характеристичним (віковим) визначником матриці $\bar{y}^3$, а рівняння (55) називається характеристичним (віковим) рівнянням матриці A.

Для знаходження власних значень і власних векторів можна розгорнути характеристичне рівняння (55) n-го ступеня й розв'язати це рівняння одним із чисельних методів, або використати ітераційний метод для обчислення коренів характеристичного рівняння і власних векторів без попереднього розгортання характеристичного визначника.

5.2. Пошук власних значень і власних векторів матриць методом простих ітерацій

Приклад 1. Обчислити власні числа і власні вектори матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^3 - 12\lambda^2 + 39\lambda - 28 = 0\ .$$

Розв'язавши це рівняння, одержимо:

$\lambda_2 = 1; \lambda_2 = 4; \lambda_3 = 7$ – власні числа.

Знайдемо власні вектори. Підставимо $\lambda = 1$ в (54) і, розписавши його, одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} (3-1)x_1 & +2x_2 & +0x_3 & = 0 \\ 0x_1 & -2x_2 & +(5-1)x_3 & = 0 \\ 2x_1 & +(4-1)x_2 & -2x_3 & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 & +2x_2 & & = 0 \\ & -2x_2 & +4x_3 & = 0 \\ 2x_1 & +3x_2 & -2x_3 & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & & = 0 \\ & -x_2 & +2x_3 & = 0 \\ 2x_1 & +3x_2 & -2x_3 & = 0 \end{cases}$$

Нехай $x_1 = 1$, тоді $x_2 = -1$; $x_3 = -1/2$;

$$\bar{x}^1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1/2 \end{Bmatrix}$$

$$\lambda = 4$$

$$\begin{cases} (3-4)x_1 & +2x_2 & +0x_3 & = 0 \\ 2x_1 & +0x_2 & -2x_3 & = 0 \\ 0x_1 & -2x_2 & +x_3 & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x_1 & +2x_2 & & = 0 \\ 2x_1 & & -2x_3 & = 0 \\ & -2x_2 & +x_3 & = 0 \end{cases}$$

Нехай $x_1 = 1$, тоді $x_2 = 1/2$; $x_3 = 1$

$$\bar{x}^2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\lambda = 7$$

$$\begin{cases} (3-7)x_1 & +2x_2 & +0x_3 & = 0 \\ 2x_1 & +(4-7)x_2 & -2x_3 & = 0 \\ 0x_1 & -2x_2 & +(5-7)x_3 & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x_1 & +2x_2 & & = 0 \\ 2x_1 & -3x_2 & -2x_3 & = 0 \\ & -2x_2 & -2x_3 & = 0 \end{cases}$$

$$x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = -2$$

$$\bar{x}^3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{Bmatrix}.$$

Приклад 2. Використати метод ітерацій для визначення найбільшого за модулем власного числа матриці $A = \begin{pmatrix} 1{,}6 & 2{,}3 & 1{,}2 \\ 2{,}3 & 0{,}6 & 1{,}5 \\ 1{,}2 & 1{,}5 & 3{,}8 \end{pmatrix}$ і відповідного йому власного вектора.

Розв'язання. 1. Будуємо послідовність векторів $\bar{y}^{k+1} = A\bar{y}^k$ $(k = 0,1,2,\dots)$, де $\bar{y}^0$ – довільний вектор; тоді $\lambda_1 \approx y_i^{(k+1)}/y_i^{(k)}$, де $y_i^{(k+1)}$ і $y_i^{(k)}$ – однойменні координати двох послідовних векторів.

Всі обчислення наведені у таблиці 7.

Таблиця 7 – Реалізація методи ітерацій для визначення найбільшого за модулем власного числа матриці і відповідного йому власного вектору

A	1,6	2,3	1,2	$\frac{y_1^{(k+1)}}{y_1^{(k)}}$	$\frac{y_2^{(k+1)}}{y_2^{(k)}}$	$\frac{y_3^{(k+1)}}{y_3^{(k)}}$
	2,3	0,6	1,5			
	1,2	1,5	3,8			
$\bar{y}^0$	1	1	1			
$\bar{y}^1$	5,1	4,4	6,5	5,11	5,48	5,76
$\bar{y}^2$	26,08	24,12	37,42	5,45	5,41	5,60
$\bar{y}^3$	142,108	130,586	209,672	5,484	5,511	5,548
$\bar{y}^4$	$7{,}793\cdot10^2$	$7{,}197\cdot10^2$	$1{,}163\cdot10^3$	5,5151	5,5148	5,5321
$\bar{y}^5$	$42{,}98\cdot10^3$	$3{,}969\cdot10^3$	$6{,}434\cdot10^3$	5,5205	5,5225	5,5267
$\bar{y}^6$	$2{,}372\cdot10^4$	$2{,}191\cdot10^4$	$3{,}556\cdot10^4$	5,5233	5,5235	5,5251
$\bar{y}^7$	$1{,}310\cdot10^5$	$1{,}210\cdot10^5$	$1{,}964\cdot10^5$	5,5240	5,5241	5,5246
$\bar{y}^8$	$7{,}239\cdot10^5$	$6{,}688\cdot10^5$	$10{,}855\cdot10^2$	5,5242	5,5243	5,5244
$\bar{y}^9$	$3{,}999\cdot10^6$	$3{,}694\cdot10^6$	$5{,}996\cdot10^6$	5,5243	5,5243	5,5244
$\bar{y}^{10}$	$2{,}209\cdot10^7$	$2041\cdot10^7$	$2{,}312\cdot10^7$	5,5243	5,5243	5,5243
$\bar{y}^{11}$	$1{,}220\cdot10^8$	$1{,}127\cdot10^8$	$1{,}8301\cdot10^8$			

Отже, $\lambda_1 = 5{,}5243$.

2. Власний вектор $\bar{x}^1$ визначається з рівності $\bar{x}^1 \approx \bar{y}^k$. Отже, $\bar{x}^1 \approx \bar{y}^{11} = (1{,}2047 \cdot 10^8;\quad 1{,}12753 \cdot 10^8;\quad 1{,}830184 \cdot 10^8)$

Питання для самоконтролю до розділу 5

1. Що називається власним значенням матриці?
2. Що називається власним вектором матриці?
3. Які існують методи знаходження найменшого й найбільшого власного значення?
4. Наведіть основне рівняння проблеми власних значень.

Завдання до розділу 5. Чисельні методи визначення власних значень та власних векторів матриць

За допомогою характеристичного визначника знайти власні числа і власні вектори матриці відповідно зо індивідуального варіанту.

№ 1.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$$

№ 2.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$$

№ 3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$$

№ 4.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 13 & 0 \end{pmatrix}$$

№ 5.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 19 & 30 \\ 0 & -5 & -12 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

№ 6.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -15 & -7 & 4 \end{pmatrix}$$

№ 7.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

№ 8.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

№ 9.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

№ 10.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

№ 11.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

№ 12.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

№ 13.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 12 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

№ 14.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 12 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

№ 15.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 23 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

№ 16.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 7 & -2 & 9 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

№ 17.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 16 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

№ 18.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 11 & 7 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

№ 19.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 7 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

№ 20.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 21 \\ 21 & 2 & 16 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

№ 21.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

№ 22.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

№ 23.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

№ 24.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

№ 25.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

№ 26.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

№ 27.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

№ 28.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 9 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

№ 29.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

№ 30.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

РОЗДІЛ 6 АПРОКСИМАЦІЯ ФУНКЦІЙ

6.1. Постановка задачі інтерполяції

При розв'язанні багатьох практичних задач, що виникають у різних областях, постає необхідність у використанні теорії наближення функцій або теорії апроксимації функцій.

Суть задачі апроксимації така. Нехай дана деяка невідома в аналітичному сенсі функція $y = f(x)$ і відома лише її поведінка (наприклад, дискретні значення в точках $f(x_i)$) на певному відрізку $[a, b]$. Таку функцію надалі будемо називати апроксимованою функцією. Треба побудувати іншу функцію $y = F(x)$, апроксимуючу функцію, яка б була близька до функції $y = f(x)$ з певною похибкою. При цьому потрібне виконання таких вимог: наявність дискретних значень функції $y_i = f(x_i)$; визначення класу апроксимуючих функцій, з яких конструюється функція $y = F(x)$; вид критерію згоди між функціями $y = f(x)$ і $y = F(x)$; оцінка похибки апроксимації.

Вид функції $y = F(x)$ залежить від класу розв'язуваних задач. Наприклад, при дослідженні напружено-деформованого стану методом скінченних елементів у задачах механіки деформіваного тіла апроксимуючі функції представляються комбінацією функцій $1, x, \dots, x^n$, або сплайнами. Експонентні функції мають широке застосування у фізиці при вивченні явищ типу розпаду і нагромадження, а тригонометричні функції – у механіці при коливальних процесах.

Критерій згоди або близькості апроксимованої й апроксимуючої функцій визначається з умови мінімуму відстаней між ними. Наприклад, найпоширенішим критерієм є критерій Чебишева:

$$\rho = \max_{0 \le i \le n} |f(x_i) - F(x_i)| \to min \to 0.$$

Інший критерій може бути записаний у вигляді:

$$\rho = \sum_{i=0}^{n} [f(x_i) - F(x_i)]^2 \to min.$$

Метод апроксимації, заснований на другому критерії, має назву методу найменших квадратів.

Якщо при використанні критерію Чебишева прийняти $\rho = 0$, то це буде означати, що значення апроксимованої й апроксимуючої функцій у вузлових точках відрізка $[a, b]$ збігаються. Цей спосіб апроксимації називається інтерполюванням або інтерполяцією.

Питання оцінки похибки апроксимації безумовно залежать від попередніх трьох вимог і розглядаються окремо для кожного конкретного процесу апроксимації.

6.2. Наближене відновлення функції за допомогою інтерполяційного многочлена Лагранжа

Нехай відомі значення деякої функції f в $n+1$ різних точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Введемо позначення:

$$f_i = f(x_i), \quad i = 0,1,\ldots,n.$$

Наприклад, ці значення отримані з експерименту чи знайдені за допомогою досить складних обчислень.

Виникає задача наближеного відновлення функції f в довільній точці x. Часто для розв'язання цієї задачі будується алгебраїчний многочлен $L_n(x)$ степеня n, що у точках x_i приймає задані значення, тобто

$$L_n(x_i) = f_i \quad (i = 0,1,\ldots,n),$$

і називається інтерполяційним. Точки x_i $(i = 0,1,\ldots n)$ називаються вузлами інтерполяції.

Наближене відновлення функції f за формулою

$$f(x) \approx L_n(x)$$

називається інтерполяцією функції f. Якщо x розташований поза мінімальним відрізком, що містить усі вузли інтерполяції, то заміну функції f за зазначеною формулою називають також екстраполяцією.

На рис. 10 наведена блок-схема програми обчислення значення функції у точці за допомогою інтерполяційного многочлена Лагранжа.

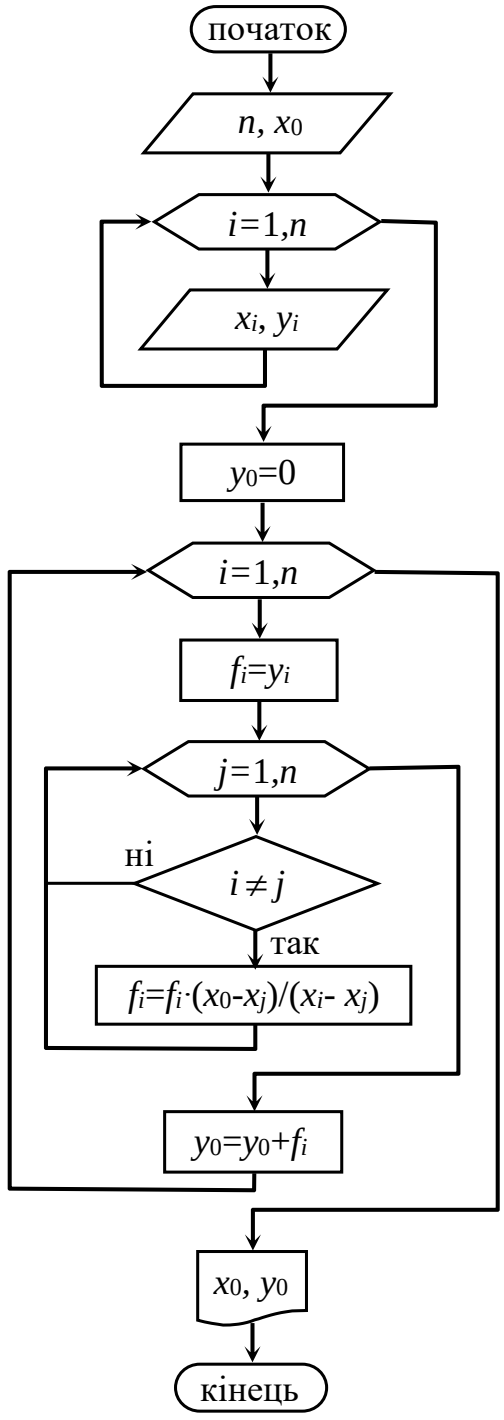


Рисунок 10 – Блок-схема побудови інтерполяційного многочлена Лагранжа

У даній блок-схемі: n – кількість вузлових точок; x_i – координати вузлових точок; y_i – значення функції у вузлових точках; x_0 – координата точки, у якій знаходиться значення функції; y_0 – значення шуканої функції.

Приклад. Нехай задані такі значення функції $f(x)$: $f(1) = 4$, $f(2) = 2$, $f(3) = 4$, $f(4) = 16$.

Для заданої таблиці значень функції $f(x)$ побудуємо інтерполяційний многочлен Лагранжа у вигляді

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)}.$$

Розв'язання. Тут

$$\omega(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n),$$

$$\omega'(x_k) = \prod_{i \neq k}(x_k - x_i).$$

Для нашого прикладу $\omega(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$.
$\omega'(1) = (1-2)(1-3)(1-4) = -6$; $\omega'(2) = 2$; $\omega'(3) = -2$; $\omega'(4) = 6$.
Тоді

$$L_3(x) = -\frac{4}{6}(x-2)(x-3)(x-4) + (x-1)(x-3)(x-4) -$$

$$-2(x-1)(x-2)(x-4) + \frac{16}{6}(x-1)(x-2)(x-3) = x^3 - 4x^2 + 3x + 4.$$

Питання для самоконтролю до тем 6.1 і 6.2

1. Сформулюйте постановку задачі інтерполяції.
2. Наведіть умови інтерполяції.
3. Наведіть формулу для оцінки похибки.
4. Дайте геометричну інтерпретацію процесу інтерполяції.

Завдання до теми 6.2 Інтерполяційний многочлен Лагранжа

За заданою таблицею 8 значень функції $f(x)$ приблизно обчислити значення цієї функції в заданій точці $\bar{x}$ за допомогою інтерполяційного многочлена Лагранжа $L_4(x)$.

Таблиця 8 – Таблиця варіантів завдань до теми 6.2

Шифр по вертикалі	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_0	-9,9	-8,1	-9,2	-8,7	-7,4	-9,5	-7,7	-8,4	-9,3	-8,8
$f(x_0)$	6,0	3,3	4,8	4,1	2,6	5,3	2,9	3,7	5,1	4,2

	Шифр по горизонталі									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_1	-0,9	0,0	0,5	-0,8	0,7	0,1	0,3	-0,4	-1,1	-0,2
$f(x_1)$	0,9	1,0	1,1	0,9	1,2	1,1	1,1	1,0	0,9	1,0
x_2	4,0	3,5	2,8	3,9	2,3	3,4	2,9	3,7	2,0	3,1
$f(x_2)$	2,0	1,9	1,7	2,0	1,6	1,9	1,7	1,9	1,5	1,8
x_3	-4,8	-4,1	-5,3	-4,2	-4,9	-3,9	-5,6	-4,5	-3,6	-5,1
$f(x_3)$	1,1	0,9	1,3	1,0	1,1	0,9	1,4	1,0	0,9	1,2
x_4	6,5	7,7	8,2	6,2	7,4	8,5	6,8	7,9	6,0	7,1
$f(x_4)$	2,7	3,0	3,1	2,6	2,9	3,2	2,8	3,1	2,6	2,9
$\bar{x}$	-6,6	-2,3	1,2	1,8	4,2	4,5	5,1	5,4	5,6	5,8

6.3. Чисельне диференціювання функцій за допомогою інтерполяції кубічним сплайном

Один з основних підходів чисельного диференціювання полягає в тому, що формули для апроксимації похідних різного порядку точності отримують у результаті диференціювання різних інтерполяційних многочленів.

Дійсно, нехай відомі значення певної функції $f(x)$ в точках $x_0, x_1, \dots, x_n$ і треба обчислити $f^{(k)}(\bar{x})$. Для цього побудуємо функцію $\phi(x)$, що інтерполює $f(x)$, і наближено покладемо $f^{(k)}(\bar{x}) \approx \phi^{(k)}(\bar{x})$. Якщо для функції $\phi(x)$ відома похибка $R(x) = f(x) - \phi(x)$ (чи її оцінка), то похибка $\phi^{(k)}(x)$ похідної може бути виражена формулою $r(x) = f^{(k)}(x) - \phi^{(k)}(x) = R^{(k)}(x)$.

Сплайном $S_m(x)$ порядку m називають функцію, що є многочленом степеня m **окремо на кожному із відрізків** $[\boldsymbol{x_{n-1}, x_n}]$ $(n = 1,2,\dots,N)$, на які розбитий вихідний відрізок $[a, b]$, тобто $S_m(x) = P_{nm}(x) = a_{n0} + a_{n1} + \dots a_{nm}x^m$ при $x \in [x_{n-1}, x_n]$, і яка, крім того, задовольняє умовам неперервності похідних до порядку $m-1$ в точках $x_1, x_2, \dots, x_{N-1}$:

$$P_{nm}^{(k)}(x_n) = P_{n+1,m}^{(k)}(x_n) \text{ при } k = 0,\dots,m-1; n = 1,\dots,N-1.$$

Кубічний сплайн $S_3(x) = P_{n3}(x)$, що задовольняє умові інтерполяції, тобто співпадає з функцією $f(x)$ в точках $x_0, \dots, x_N$, можна записати у вигляді

$$P_{n3}(x) = a_n + b_n(x - x_n) + \frac{c_n}{2}(x - x_n)^2 + \frac{d_n}{6}(x - x_n)^3, \qquad (56)$$
$$x \in [x_{n-1}, x_n], n = 1,.,N.$$

За умови, що $f''(a) = f''(b) = 0$ (один із варіантів задання крайових умов), коефіцієнти c_n визначаються із системи рівнянь

$$h_n c_{n-1} + 2(h_n + h_{n+1})c_n + h_{n+1}c_{n+1} = 6\left(\frac{f_{n+1} - f_n}{h_{n+1}} - \frac{f_n - f_{n-1}}{h_n}\right), \qquad (57)$$
$$c_0 = c_N = 0,\ n = 1,\dots,N-1.$$

Тут $h_n = x_n - x_{n-1},\ f_n = f(x_n)$.

За знайденими числами c_n коефіцієнти b_n і d_n визначаються за формулами:

$$d_n = \frac{c_n - c_{n-1}}{h_n}, b_n = \frac{h_n}{2}c_n - \frac{h_n^2}{6}d_n + \frac{f_n - f_{n-1}}{h_n}, a_n = f_n, \qquad (58)$$
$$n = 1,2,\dots,N.$$

Для нашого прикладу $x_0 = 1,\quad f_0 = 4,\quad x_1 = 2,\quad f_1 = 2,\quad x_2 = 3, f_2 = 4,\quad x_3 = 4,\quad f_3 = 16$, тобто сітка рівномірна $h_n = x_n - x_{n-1} = 1 = const$, що трохи спрощує обчислення. Система рівняння (57) набуває вигляду (за умови $f''(x_0) = f''(x_3) = 0$)

$$c_{n-1} + 4c_n + c_{n+1} = 6(f_{n+1} + f_{n-1} - 2f_n), n = 1,2;$$
$$c_0 = c_3 = 0.$$

У розгорнутому вигляді маємо:

$$\begin{cases} c_0 + 4c_1 + c_2 = 6(f_2 + f_0 - 2f_1), \\ c_1 + 4c_2 + c_3 = 6(f_3 + f_1 - 2f_2), \\ c_0 = c_3 = 0. \end{cases}$$

Підставляючи в систему вхідні дані та враховуючи, що $c_0 = c_3 = 0$, перетворимо її до вигляду:

$$\begin{cases} 4c_1 + c_2 = 24, \\ c_1 + 4c_2 = 60. \end{cases}$$

Розв'язуючи останню систему, знаходимо:

$$c_1 = \frac{12}{5};\ c_2 = \frac{72}{5}.$$

Далі за формулами (58) одержуємо:

$$d_1 = \frac{12}{5};\ d_2 = 12;\ d_3 = -\frac{72}{5};$$

$$b_1 = -\frac{6}{5};\ b_2 = \frac{36}{5};\ b_3 = \frac{72}{5};$$

$$a_1 = 2;\ a_2 = 4;\ a_3 = 16.$$

Таким чином, шуканий сплайн має вигляд

$$S_3(x) = \begin{cases} P_{13}(x) = 2 - \frac{6}{5}(x-2) + \frac{6}{5}(x-2)^2 + \frac{2}{5}(x-2)^3, x \in [1;2]; \\ P_{23}(x) = 4 + \frac{36}{5}(x-3) + \frac{36}{5}(x-3)^2 + 2(x-3)^3, x \in [2;3]; \\ P_{33}(x) = 16 + \frac{72}{5}(x-4) + 0(x-4)^2 - \frac{12}{5}(x-4)^3, x \in [3;4]. \end{cases}$$

Тоді

$$f''(1{,}5) \approx P''(1{,}5) = \frac{12}{5} + \frac{12}{5}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{6}{5}.$$

Питання для самоконтролю до теми 6.3

1. Сформулюйте постановку задачі чисельного диференціювання.
2. Що називається сплайном, степенем сплайна, дефектом сплайна?
3. Що являє собою інтерполюючий кубічний сплайн?
4. Опишіть метод побудови інтерполюючого кубічного сплайна з дефектом, рівним одиниці.
5. Дати оцінку похибки інтерполяції сплайном.

Завдання до теми 6.3. Апроксимація функцій кубічними сплайнами

За заданою таблицею значень функції $f(x)$ побудуйте кубічний сплайн $S_\Delta^3(f,x) = P_{n3}(x)$, що задовольняє умовам інтерполяції. Потім з його допомогою приблизно обчисліть значення функції $f(x)$ та її похідної другого порядку $f''(x)$ в заданій точці $\bar{x}$.

Таблицю варіантів візьміть з завдань до лабораторної роботи №6.

РОЗДІЛ 7 МЕТОДИ ЧИСЕЛЬНОГО ІНТЕГРУВАННЯ

7.1. Загальні положення

У багатьох випадках первісна $F(x)$ функції $f(x)$ не може бути знайдена за допомогою елементарних засобів чи є занадто складною. Внаслідок цього обчислення визначеного інтеграла від такої функції $f(x)$ за формулою Ньютона-Лейбніца може бути складним чи навіть неможливим.

Крім того, підінтегральна функція може задаватися за допомогою таблиці, і тоді саме поняття первісної втрачає зміст. Тому важливе значення мають наближені і, у першу чергу, чисельні методи обчислення визначених інтегралів.

Звичайний прийом побудови квадратурних формул полягає в тому, що дану функцію $f(x)$ замінюють інтерполюючою чи апроксимуючою функцією $\phi(x)$ простого вигляду (наприклад, поліном), а потім наближено покладають:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b \phi(x)dx\,.$$

Функція $\phi(x)$ повинна бути така, щоб інтеграл від неї обчислювався безпосередньо.

Якщо в якості $\phi(x)$ взяти інтерполяційний многочлен Лагранжа $L_n(x)$ з вузлами інтерполяції $x_1, \ldots, x_n$ з відрізка інтегрування, то одержимо квадратурну формулу Ньютона-Котеса. Якщо $L_n(x)$ – многочлен другого ступеня з вузлами $x_1 = a,\ x_2 = \frac{a+b}{2},\ x_3 = b$, то інтегруючи його, одержимо окремий випадок квадратурної формули Ньютона-Котеса – квадратурну формулу Сімпсона

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f(x_1) + 4f(x_2) + f(x_3)].$$

Часто виникає задача обчислення інтегралів, де підінтегральна функція чи її похідні невисокого порядку мають ділянки різкої зміни, наприклад, обертаються на нескінченність. Такі функції погано наближаються многочленами відразу на усьому відрізку інтегрування. У таких випадках часто виявляється більш зручним розбити вихідний відрізок на частини й на кожній частині застосувати свою квадратурну формулу. Підсумовуючи потім квадратурні формули за усіма елементарними відрізками, одержимо так звану складену чи узагальнену квадратурну формулу.

7.2. Квадратурна формула Гауса

Якщо в квадратурній формулі Ньютона-Котеса, що, як відомо, є точною для многочленів степеня $n-1$, за вузли інтегрування взяти нулі многочлена Лежандра степеня n, ортогонального до усіх многочленів нижчого степеня, то одержимо квадратурну формулу Гауса, точну для многочленів степеня $2n-1$:

$$\int_a^b f(x)p(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\sum_{j=1}^{n} D_j f\left(x_j\right). \qquad (59)$$

Для практичного застосування формул Гауса необхідно мати в розпорядженні вузли й коефіцієнти цих квадратур. Наведемо параметри квадратур Гауса для відрізка $[-1,1]$ при $p(x) \equiv 1$. У цьому випадку залишковий член $R(f)$ для квадратурної формули (59) має вигляд:

$$R(f) = f^{(2n)}(\xi)\frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n!)^3(2n+1)}.$$

Таблиця вузлів і коефіцієнтів квадратур Гауса для відрізка $[-1,1]$ при $p(x) \equiv 1$ (див. табл. 9).

Таблиця 9 – Вузли і коефіцієнтів квадратур Гауса для відрізка $[-1,1]$ при $p(x) \equiv 1$

n	j	d_j	D_j
1	1	0	2,00000000
2	2; 1	±0,57735027	1,00000000
3	3; 1	±0,77459667	$\frac{5}{9} = 0{,}55555556$
	2	0,00000000	$\frac{8}{9} = 0{,}88888889$
4	4; 1	±0,86113631	0,34785484
	3; 2	±0,33998104	0,65214516
5	5; 1	±0,90617985	0,23692688
	4; 2	±0,53846931	0,47862868
	3	0,00000000	0,56888889
6	6; 1	±0,93246951	0,17132450
	5; 2	±0,66120939	0,36076158
	4; 3	±0,23861919	0,46791394
7	7; 1	±0,94910791	0,12948496
	6; 2	±0,74153119	0,27970540
	5; 3	±0,40584515	0,38183006
	4	0,00000000	0,41795918
8	8; 1	±0,96028986	0,10122854
	7; 2	±0,79666648	0,22238104
	6; 3	±0,52553242	0,31370664
	5; 4	±0,18343464	0,36268378

На рис. 11 наведена блок-схема програми обчислення визначених інтегралів за допомогою квадратурних формул Гауса.

У даній блок-схемі: a – лівий кінець інтервалу інтегрування; b – правий кінець інтервалу; n – кількість вузлових точок; t_i – координати вузлових точок на відрізку [–1; 1]; d_i – вагові коефіцієнти; x_i – координати вузлових точок на відрізку [a; b]; $f(x_i)$ – значення підінтегральної функції у вузловій точці x_i; J – значення визначеного інтеграла.

Приклад. Обчислити інтеграл

$$I = \int_0^1 \sqrt{1+2x}\,dx,$$

застосовуючи формулу Гауса з трьома вузлами інтегрування. Оцінити похибку отриманого результату.

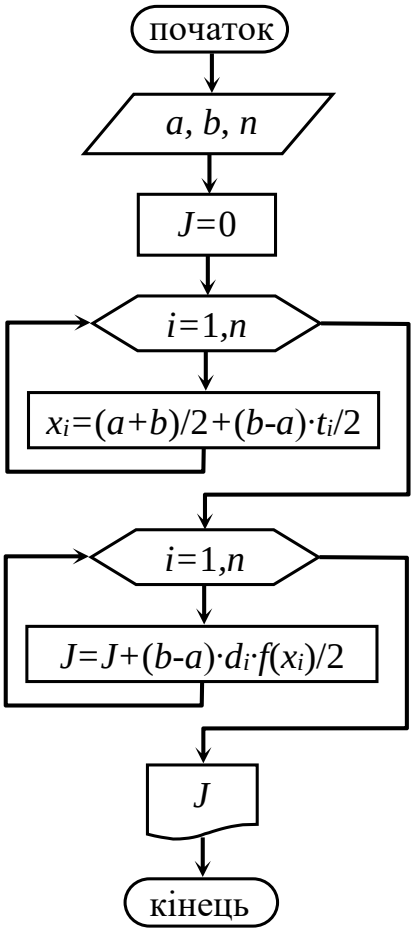


Рисунок 11 – Блок-схема обчислення визначеного інтеграла квадратурною формулою Гауса

Розв'язання. Оцінку похибки виконаємо за правилом Рунге. Тому інтеграл обчислимо двічі. Спочатку застосуємо формулу Гауса з трьома вузлами по всьому інтервалу інтегрування. Позначимо це наближене значення I_1. Потім розіб'ємо інтервал інтегрування $[0; 1]$ на два – $[0; 0{,}5]$ і $[0{,}5; 1]$, й за допомогою тієї ж формули обчислимо значення інтеграла на цих відрізках. Підсумовуючи отримані значення, знайдемо I_2.

Відрізок інтегрування $[-1,1]$, для якого наведена таблиця вузлів і коефіцієнтів квадратур Гауса, заміною змінних

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t$$

відображається на $[a; b]$. Це дозволяє нам визначити вузли інтегрування

$$x_1 = \frac{1+0}{2} + \frac{1-0}{2}d_1 = 0{,}11270;$$

$$x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}d_2 = 0{,}5000;$$

$$x_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}d_3 = 0{,}88730.$$

Відповідні коефіцієнти квадратурної формули (59) для нашого випадку будуть:

$$C_1 = \frac{b-a}{2}D_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{9} = \frac{5}{18};$$

$$C_2 = \frac{b-a}{2}D_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{8}{9} = \frac{4}{9};$$

$$C_3 = \frac{b-a}{2}D_3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{9} = \frac{5}{18}.$$

Подальші обчислення зведемо в таблицю 10.

Таблиця 10 – Розрахунки за квадратурою формулою Гауса

j	x_j	y_j	C_j	$C_j \cdot y_j$
1	0,11270	1,10698	5/18	0,30749
2	0,50000	1,41421	4/9	0,62854
3	0,88730	1,66571	5/18	0,46270
$I_1 = \sum_{j=1}^{3} C_j y_j = 1{,}39873$				
1	0,05635	1,05485	5/36	0,14651
2	0,25000	1,22474	2/9	0,27217
3	0,44365	1,37379	5/36	0,19080
4	0,55635	1,45351	5/36	0,20188
5	0,75000	1,58114	2/9	0,35136
6	0,94365	1,69921	5/36	0,23600
$I_2 = \sum_{j=1}^{6} C_j y_j = 1{,}39872$				

$$I = I_2 + \frac{I_2 - I_1}{63} = 1{,}3987198.$$

$$\varepsilon = \frac{|I_2 - I_1|}{63} \approx 2 \cdot 10^{-7}.$$

Питання для самоконтролю до розділу 7

1. З яких міркувань обираються вузли і вагові коефіцієнти квадратурної формули Гауса?
2. У чому полягають властивості формули Гауса?
3. Які особливості застосування правила Рунге практичної оцінки похибки?

Завдання до розділу 7. Квадратурна формула Гауса

За допомогою квадратурної формули Гауса, з похибкою, що не перевищує $\varepsilon = 10^{-6}$, обчислити заданий визначений інтеграл.

Варіанти завдань до розділу 7

1. $\int_{\pi/3}^{\pi} cos(x + sin\, x^2)\, dx$;
2. $\int_{-\pi/2}^{0} lg(2 - cos\, 3x)\, dx$;
3. $\int_{1,5}^{3} x^4 \cdot 2^{-x^2} dx$;
4. $\int_{2}^{4} \frac{sin(x^2 - 2x)}{x^2}\, dx$;
5. $\int_{0}^{\pi/4} tg(x^2 - cos\, x) dx$;
6. $\int_{1,1}^{4,3} ln(x + x^{-1})\, dx$;

7. $\int_{0,17}^{0,48} ch(2x - x^3)dx$;

8. $\int_{-2,1}^{1,1} \frac{e^x}{2x+7} dx$;

9. $\int_{-\pi}^{-\pi/6} lg(3 + sin\,3\,x)\,dx$;

10. $\int_{0,23}^{0,42} ch(x - 2x^{-1})dx$;

11. $\int_{3}^{4,5} x^{1/3} \cdot 3^{-x^2} dx$;

12. $\int_{-\pi/4}^{\pi/2} cos(x^2 - sin\,2\,x)\,dx$;

13. $\int_{\pi/6}^{\pi} (3 - x^2\,cos\,x^4)dx$;

14. $\int_{0}^{3\pi/2} 4^{cos^2 x} dx$;

15. $\int_{-1}^{2,1} \frac{3^x}{3x+4} dx$;

16. $\int_{1}^{3,2} th(2x + x^2)dx$;

17. $\int_{1}^{1,3} cos(3x + x^{-1})\,dx$;

18. $\int_{-\pi/6}^{\pi/2} sin(1 + cos^2\,x)\,dx$;

19. $\int_{-\pi/3}^{\pi} lg(4 + sin\,2\,x)\,dx$;

20. $\int_{1,1}^{4,2} x^2 \cdot 4^{-x^4} dx$;

21. $\int_{1,6}^{3,1} x^{-2}\,cos(2x - x^2)\,dx$;

22. $\int_{0}^{7\pi/2} sin(2\,cos\,x + 1)\,dx$;

23. $\int_{1}^{4,3} 5^{-(x+x^{-1})} dx$;

24. $\int_{1,1}^{4,2} 2^x (3x - 2)^{-1} dx$;

25. $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} tgx^2 dx$;

26. $\int_{-\pi/2}^{5\pi/6} (2 - cos\,x^3)dx$;

27. $\int_{-\pi/6}^{\pi/2} sin(x^3 + cos\,x^2)\,dx$;

28. $\int_{-\pi/3}^{\pi} 3^{sin^2 x} dx$;

29. $\int_{1}^{3,5} x^{-3}\,sin(x^3 - 2x)\,dx$;

30. $\int_{1,1}^{3,2} x^4 \cdot 2^{-(x+3)^2} dx$.

РОЗДІЛ 8 НАБЛИЖЕНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

8.1. Метод Ейлера розв'язання задачі Коші

Розглянемо диференціальне рівняння

$$y' = f(x, y)$$

з початковою умовою $y(x_0) = y_0$. Вибравши досить малий крок h, побудуємо систему рівновіддалених точок $x_i = x_0 + ih$.

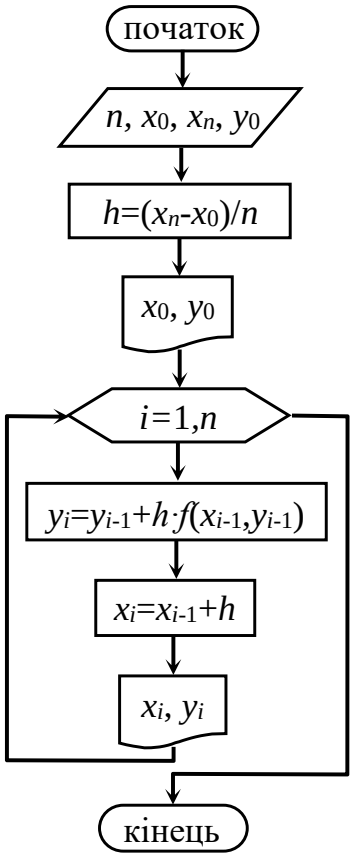


Рисунок 12 – Блок-схема розв'язання задачі Коші методом Ейлера

Наближені значення $y(x_i) = y_i$ обчислюються послідовно за формулами:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)\ (i = 0,1,2,\dots).$$

При цьому шукана інтегральна крива $y = y(x)$, що проходить через точку $M_0(x, y)$ замінюється ламаною $M_0M_1M_2\dots$ з вершинами $M_i(x_i, y_i)$, $(i = 0,1,2,\dots)$; кожна ланка цієї ламаної (ламаної Ейлера) має напрямок, що збігається з напрямком тієї інтегральної кривої вихідного рівняння, що проходить через точку M_0.

Похибка методу – величина порядку $O(h)$.

На рис. 12 наведена блок-схема програми наближеного розв'язання задачі Коші для диференціальних рівнянь першого порядку методом Ейлера.

В даній блок-схемі: x_0 – лівий кінець інтервалу; x_n – правий кінець інтервалу; n – кількість відрізків розбиття; y_0 – початкове умова; h – шаг сітки; y_i – значення шуканої функції; $f(x_i;y_i)$ – значення правої частини диференціального рівняння $y'=f(x,y)$ в точці $(x_i;y_i)$.

Приклад. Знайти розв'язок диференціального рівняння методом Ейлера на відрізку $(0; 0,4)$ при $h = 0,1$, якщо $y' = x + y$ при початковій умові $y(0) = 1$.

Розв'язання. Знаходимо значення аргументу: $x_0 = 0$; $x_1 = 0,1$; $x_2 = 0,2$; $x_3 = 0,3$; $x_4 = 0,4$ і відповідні їм значення y:

$$y_1 = y_0 + hf(x_0; y_0) = 1 + 0,1(0 + 1) = 1,1;$$
$$y_2 = y_1 + hf(x_1; y_1) = 1,1 + 0,1(0,1 + 1,1) = 1,22;$$
$$y_3 = y_2 + hf(x_2; y_2) = 1,22 + 0,1(0,2 + 1,22) = 1,36;$$
$$y_4 = y_3 + hf(x_3; y_3) = 1,36 + 0,1(0,3 + 1,36) = 1,52.$$

Одержимо таблицю 11 наближених значень шуканої функції

Таблиця 11 – Значення шуканої функції для задачі Коші (метод Ейлера)

x_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4
y_i	1	1,1	1,22	1,36	1,52
$y_{\text{аналіт.}}$	1	1,1103	1,2428	1,3997	1,5836

Питання для самоконтролю до теми 8.1

1. Сформулюйте задачу Коші для звичайних диференціальних рівнянь 1-го порядку.
2. Дайте геометричну інтерпретацію розв'язку задачі Коші. Запишіть формули методу Ейлера.
3. Як отримано формули методу Ейлера?
4. В чому полягають переваги й недоліки методу Ейлера?
5. Як визначається похибка методу Ейлера?

8.2. Метод Рунге-Кутта четвертого порядку точності

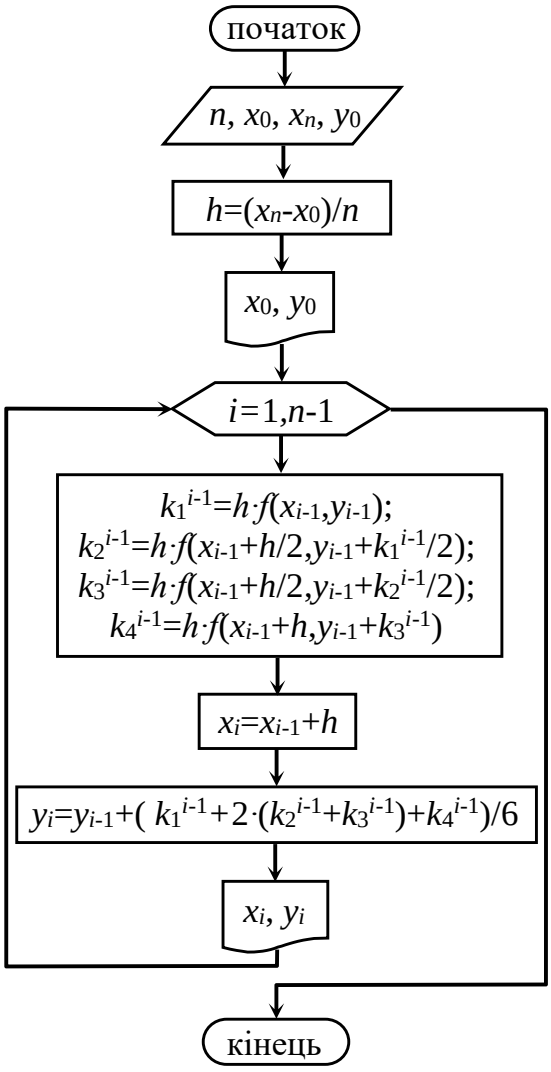


Рисунок 13 – Блок-схема розв'язання задачі Коші методом Рунге-Кутта

Нехай дано диференціальне рівняння $y' = f(x, y)$ з початковою умовою $y(x_0) = y_0$. Виберемо крок h, позначивши $x_i = x_0 + ih$ і $y_i = y(x_i)$, $(i = 0,1,2,\dots)$. Розглянемо числа:

$$k_1^i = hf(x_i; y_i);$$
$$k_2^i = hf\left(x_i + h/2\,; y_i + k_1^i/2\right)\ ;$$
$$k_3^i = hf\left(x_i + h/2\,; y_i + k_2^i/2\right)\ ;$$
$$k_4^i = hf\left(x_i + h; y_i + k_3^i\right)\ .$$

Тоді значення шуканої функції y визначається за формулою

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i\ ,$$

де $\Delta y_i = \left(k_1^i + 2k_2^i + 2k_3^i + k_4^i\right)/6;\ (i = 0,1,2,\dots)$.

Похибка цього методу – величина порядку $O\left(h^4\right)$.

На рис. 13 наведена блок-схема програми наближеного розв'язання задачі Коші для диференціальних рівнянь першого порядку методом Рунге-Кутта четвертого порядку точності.

В даній блок-схемі: x_0 – лівий кінець інтервалу; x_n – правий кінець інтервалу; n – кількість відрізків розбиття; y_0 – початкова умова; h – шаг сітки; y_i – значення шуканої функції;

$f(x_i;y_i)$ – значення правої частини диференціального рівняння $y'=f(x,y)$ в точці $(x_i;y_i)$; k_1^i, k_2^i, k_3^i, k_4^i – допоміжні числа.

Приклад. Розв'яжемо методом Рунге-Кутта задачу Коші: $y' = x + y$; $y(0) = 1$; $h = 0{,}1$ на інтервалі (0; 0,4).

Розв'язання. Покажемо початок процесу. Для y_1 обчислюємо послідовно

$k_1^0 = (0 + 1)0{,}1 = 0{,}1,$

$k_2^0 = \big(0{,}05 + (1 + 0{,}05)\big)0{,}1 = 0{,}11,$

$k_3^0 = \big(0{,}05 + (1 + 0{,}055)\big)0{,}1 = 0{,}1105,$

$k_4^0 = \big(0{,}01 + (1 + 0{,}1105)\big)0{,}1 = 0{,}12105$.

Звідси $\Delta y_0 = (0{,}1 + 2(0{,}1105 + 0{,}11) + 0{,}12105) = 0{,}1103.$

Отже $y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1 + 0{,}1103 = 1{,}1103.$

Аналогічно обчислюються подальші наближення. Отримані значення занесені в таблицю 12.

Таблиця 12 – Значення шуканої функції для задачі Коші (метод Рунге-Кутта)

x_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4
y_i	1	1,1103	1,2427	1,3996	1,5836
$y_{\text{аналіт.}}$	1	1,1103	1,2428	1,3997	1,5836

Питання для самоконтролю до теми 8.2

1. Основна ідея методу Рунге-Кутта?
2. В чому полягають переваги й недоліки методу Рунге-Кутта?
3. Який порядок похибки методу?
4. Як розв'язується методом Рунге-Кутта задача Коші для рівняння більш високого порядку?

8.3. Метод Адамса

Розглянемо задачу

$$y' = f(x;y);\ y(x_0) = x_0\ .$$

Потрібно знайти розв'язок рівняння на скінченому відрізку $(x_0; x_n)$. Поклавши h – крок інтегрування і $h > 0$, одержимо систему точок $x_k = x_0 + kh$ на відрізку $(x_0; x_n)$, $(k = 0{,}1, .., n)$.

Далі знаходять будь-яким методом наступні три значення шуканої функції:

$$y_1 = y(x_1)\ ;\ y_2 = y(x_2);\ y_3 = y(x_3);$$

(ці три значення можна одержати будь-яким методом, що забезпечує потрібну точність: можливо, методом Рунге-Кутта, але не методом Ейлера, через його недостатню точність).

За допомогою чисел x_0, x_1, x_2, x_3 і y_0, y_1, y_2, y_3 обчислюють величини

$$q_0 = hy_0' = hf(x_0;y_0);\quad q_1 = hf(x_1;y_1);$$

$$q_2 = hf(x_2;y_2);\quad q_3 = hf(x_3;y_3).$$

Далі складають таблицю 13 скінченних різниць величин "y_k" і "q_k".

Таблиця 13 – Скінченні різниці в методі Адамса

x_k	y_k	Δy_k	$q_k = hf(x_k; y_k)$	Δq_k	$\Delta^2 q_k$	$\Delta^3 q_k$
x_0	y_0		q_0			
		Δy_0		Δq_0		
x_1	y_1		q_1		$\Delta^2 q_0$	
		Δy_1		Δq_1		$\Delta^3 q_0$
x_2	y_2		q_2		$\Delta^2 q_1$	
		Δy_2		Δq_2		
x_3	y_3		q_3			

Знаючи числа в нижньому косому рядку, за формулою Адамса знаходять

$$\Delta y_3 = q_3 + \Delta\, q_2/2 + 5\Delta^2 q_1/12 + 3\Delta^3 q_0/8\,,$$

а потім величину $y_4 = y_3 + \Delta y_3$. Знаючи тепер y_4, обчислюють $q_4 = hf(x_4; y_4)$, після чого можна написати наступний косий рядок:

$$\Delta q_3 = q_4 - q_3\,; \qquad \Delta^2 q_2 = \Delta q_3 - \Delta q_2\,; \qquad \Delta^3 q_1 = \Delta^2 q_2 - \Delta^2 q_1\,.$$

Він дозволяє обчислити за формулою Адамса значення

$$\Delta y_4 = q_4 + \Delta\, q_3/2 + 5\Delta^2 q_2/12 + 3\Delta^3 q_1/8\,,$$

а отже $y_5 = y_4 + \Delta y_4$ і т.д., тобто в загальному вигляді

$$\Delta y_k = q_k + \Delta\, q_{k-1}/2 + 5\Delta^2 q_{k-2}/12 + 3\Delta^3 q_{k-3}/8\,.$$

Приклад. Методом Адамса знайти на відрізку [0;1] розв'язок рівняння $y' = x + y, y(0) = 1$.

Розв'язання. Приймемо крок $h = 0{,}1$. Для початку процесу використовуємо значення, знайдені методом Рунге-Кутта, тобто $y_0 = 1$; $y_1 = 1{,}1103$; $y_2 = 1{,}2427$; $y_3 = 1{,}3996$. Подальші обчислення розташуємо в таблиці 14.

Таблиця 14 – Розрахунки за методом Адамса

i	x	y	Δy	q	Δq	$\Delta^2 q$	$\Delta^3 q$	$y_{\text{аналіт.}}$
0	0	1		0,1000				1
					210			
1	0,1	1,1103		0,1210		23		1,1103
					333		1	
2	0,2	1,2427		0,1443		24		1,2428
					257		2	
3	0,3	1,3996		0,1700		26		1,3997
			0,1838		283		5	
4	0,4	1,5834		0,1983		31		1,5836
			0,2137		314		2	
5	0,5	1,7971		0,2297		33		1,7974
			0,2469		347		3	
6	0,6	2,0440		0,2644		36		2,0442
			0,2833		383		5	
7	0,7	2,3273		0,3027		41		2,3275
			0,3235		424		3	
8	0,8	2,6508		0,3451		44		2,6511
			0,3682		468			
9	0,9	3,0190		0,3919				3,0192
			0,4172					
10	1	3,4362						3,4366

З таблиці видно, що максимальна похибка наближеного розв'язку y не перевершує чотирьох одиниць останнього десяткового розряду.

Питання для самоконтролю до теми 8.3

1. Яким чином отримано розрахункову формулу методу Адамса?
2. Яка похибка методу Адамса (залежність від трьох факторів)?

Завдання 1 до розділу 8. Метод Ейлера розв'язання задачі Коші

Розв'яжіть рівняння $y' = f(x; y)$ методом Ейлера відповідно до індивідуального варіанта (табл. 15).

Таблиця 15 – Варіанти завдання 1 до розділу 8

Шифр по вертикалі	A
0	1
1	0,4
2	-0,3
3	2
4	0,3
5	1
6	-1
7	0,3
8	2
9	-1

	Права частина $f(x,y)$
0	$\frac{(Ax+0{,}3y)(1-xy)}{-x-0{,}2y}$
1	$\frac{0{,}3A-x}{0{,}3y}$
2	$Ax^3-\frac{2}{y^2}$
3	$\frac{A}{y^2}+\frac{0{,}2}{x^2}$
4	$\frac{Ax^2-1}{y^3+x^2+0{,}3}$
5	$\frac{A}{x^2}-\frac{0{,}3}{x}+\frac{1}{y^2}$
6	$-\frac{A}{y^2}-\frac{0{,}4x}{0{,}8+x}$
7	$\frac{A}{0{,}4y^2+2x}$
8	$\frac{Ax}{y^3}+y$
9	$\frac{Ay}{2x+0{,}7}+\frac{3}{y^2}$

шифр по горизонталі

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Номер правої частини	2	4	5	8	1	3	9	0	7	6
y_0	1	-2	1	-2	2	2	-1	1,05	-2	0,5
h	0,2	0,2	0,1	0,2	0,1	0,2	0,05	0,1	0,4	0,2
Інтервал	[0;2]	[0;2]	[1;2]	[1;3]	[0;1]	[1;3]	[1;1,5]	[0;1]	[0;4]	[1;3]

Завдання 2 до розділу 8. Розв'язання задачі Коші методом Адамса

Методом Адамса розв'яжіть задачу Коші.

Завдання вибирається з таблиці варіантів до лабораторної роботи № 8.

РОЗДІЛ 9 НАБЛИЖЕНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

9.1. Постановка крайової задачі

Нехай дана крайова задача

$$Ly \equiv y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{60}$$

$$\begin{cases} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B \end{cases} \tag{61}$$

Тут α_0, α_1, β_0, β_1, A, B – деякі сталі, $p(x), q(x), f(x)$ – неперервні на відрізку $[a, b]$ функції. Якщо $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ – то маємо крайові умови (60) першого роду, якщо $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ – то маємо крайові умови другого роду, у інших випадках маємо змішані крайові умови, або крайові умови третього роду.

Для знаходження наближеного розв'язку цієї задачі вчинимо так. Задаємося на (a,b) деякою системою лінійно-незалежних функцій $u_0(x)$, $u_1(x)$, $u_2(x)$, …, $u_n(x)$ неперервних і двічі неперервно-диференційованих. Причому функція $u_0(x)$ повинна задовольняти неоднорідним крайовим умовам (61):

$$\begin{cases} \alpha_0 u_0(a) + \alpha_1 u_0'(a) = A, \\ \beta_0 u_0(b) + \beta_1 u_0'(b) = B. \end{cases} \tag{62}$$

А $u_1(x)$, $u_2(x)$, …, $u_n(x)$ повинні задовольняти однорідним крайовим умовам, тобто крайовим умовам

$$\begin{cases} \alpha_0 u_i(a) + \alpha_1 u_i'(a) = 0, \\ \beta_0 u_i(b) + \beta_1 u_i'(b) = 0. \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \tag{63}$$

Вибір базисної функції $u_0(x)$ можна зробити так: візьмемо її лінійною

$$u_0(x) = \delta + \gamma x, \tag{64}$$

А коефіцієнти підберемо так, щоб вона задовольняла крайовим умовам (61), тобто із розв'язання системи

$$\begin{cases} \alpha_0 \delta + (\alpha_0 a + \alpha_1)\gamma = A, \\ \beta_0 \delta + (\beta_0 b + \beta_1)\gamma = B. \end{cases} \tag{65}$$

Функції $u_1(x)$, $u_2(x)$, …, $u_n(x)$ можна обрати однопараметричними виду

$$u_i(x) = \gamma_i (x-a)^i + (x-a)^{i+1}, \tag{66}$$

$$\gamma_i = -\frac{\beta_0 (b-a)^2 + (i+1)\beta_1 (b-a)}{\beta_0 (b-a) + i\beta_1},$$

якщо в (61) $\alpha_1 = 0$, або виду

$$u_i(x) = \gamma_i (x-a)^{i+1} + (x-a)^{i+2}, \tag{67}$$

$$\gamma_i = -\frac{\beta_0 (b-a)^2 + (i+2)\beta_1 (b-a)}{\beta_0 (b-a) + (i+1)\beta_1}$$

у загальному випадку.

9.2. Метод колокацій

Розглянемо функцію $y_n(x)$ як лінійну комбінацію

$$y_n(x) = u_0(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i u_i(x), \tag{68}$$

де c_i – невідомі константи.

Якщо базисні функції вибрати так, як це було описано вище, то $y_n(x)$ буде задовольняти крайовим умовам (61), незалежно від вибору c_i.

В методі колокацій коефіцієнти c_i у (68) підбираються так, щоб у вузлах колокації x_i таких, що

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$$

значення $y_n(x_i)$ наближеного розв'язку співпадали із точними значеннями $y(x_i)$.

Підставимо послідовно при $x = x_i (i = 1, \dots, n)$ наближений розв'язок $y_n(x)$ у рівняння (60), будемо мати рівність

$$y_n^{"}(x_i) + p(x_i) y_n'(x_i) + q(x_i) y_n\ (x_i) = f(x_i), \tag{69}$$

яке вважаємо точним при кожному $i \in \{1, \dots, n\}$. Продеференцюємо двічі функцію $y_n(x)$ в представленні (68) переходимо до рівності

$$\sum_{j=1}^{n} c_j u_j^{"}(x_i) + p_i \sum_{j=1}^{n} c_j u_j'(x_i) + q_i \sum_{j=1}^{n} c_j u_j\ (x_i) =$$

$$= f_i - u_0^{"}(x_i) - p_i u_0'(x_i) - q_i u_0\ (x_i), \tag{70}$$

де $p_i = p(x_i), q_i = q(x_i), f_i = f(x_i)$. Будемо вважати:

$$a_{ij} = u_j^{"}(x_i) + p_i u_j'(x_i) + q_i u_j\ (x_i), \tag{71}$$

$$b_i = f_i - u_0^{"}(x_i) - p_i u_0'(x_i) - q_i u_0\ (x_i). \tag{72}$$

Тоді система (70) буде мати стандартний вид системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{73}$$

відносно коефіцієнтів $c_1, c_2, \dots, c_n$. Розв'язавши систему (73) та підставевши знайдені значення c_i у вираз (68), отримаємо шуканий наближений розв'язок $y_n(x)$.

9.3. Метод Гальоркіна

Наближений розв'язок будемо шукати у вигляді (68). Розглянемо функцію $R(x, c_1, c_2, c_3, \dots, c_n) = Ly_n - Ly$. Вона називається відхилом і отримується при підстановці в рівняння (60) виразу (68):

$$R(x, c_1, c_2, \dots, c_n) = y_n^{"}(x) + p(x) y_n'(x) + q(x) y_n\ (x) - f(x). \tag{74}$$

Якщо відхил дорівнює нулю, то маємо випадок точного розв'язку. Задача розв'язання звичайного диференціального рівняння зводиться до того, щоб відхил був мінімальним. Тоді вираз (68) буде наближеним розв'язком задачі.

Суть методу Гальоркіна полягає в тому, що базисні функції повинні бути ортогональними до відхилу.

Умова ортогональності двох функцій має вигляд:

$$\int_a^b R(x, c_1, c_2, c_3, \dots, c_n) u_i(x) dx = 0\,, i = 1,2, \dots, n.$$

В результаті одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь щодо невідомих коефіцієнтів $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$. Знайшовши ці коефіцієнти і підставивши їх у (68), одержимо наближений розв'язок крайової задачі.

Приклад. Методом Гальоркіна знайти наближений розв'язок рівняння $y'' + xy' + y = 2x$, що задовольняє крайовим умовам $y(0) = 1$; $y(1) = 0$.

Розв'язання. За систему базисних функцій обираємо функції $u_0(x) = 1 - x$; $u_1(x) = x(1 - x)$; $u_2(x) = x^2(1 - x)$; $u_3(x) = x^3(1 - x)$.

Наближений розв'язок задачі шукаємо у вигляді полінома

$$y_3 = (1 - x) + c_1 x(1 - x) + c_2 x^2(1 - x) + c_3 x^3(1 - x).$$

Підставляючи y_3 в ліву частину заданого диференціального рівняння, одержуємо відхил:

$$R(x, c_1, c_2, c_3) = (1 - 4x) + c_1(-2 + 2x - 3x^2) +$$
$$+c_2(2 - 6x + 3x^2 - 4x^3) + c_3(6x - 12x^2 + 4x^3 - 5x^4).$$

Умови ортогональності функції R до функцій $u_i(x)$ приводять до системи

$$\begin{cases} \int_0^1 (x - x^2)\, R(x, c_1, c_2, c_3) dx = 0, \\ \int_0^1 (x^2 - x^3)\, R(x, c_1, c_2, c_3) dx = 0, \\ \int_0^1 (x^3 - x^4)\, R(x, c_1, c_2, c_3) dx = 0. \end{cases}$$

Підставляючи замість R її значення, після відповідного інтегрування одержуємо систему

$$\begin{cases} 133c_1 + 63c_2 + 36c_3 = -70, \\ 140c_1 + 108c_2 + 79c_3 = -98, \\ 264c_1 + 252c_2 + 211c_3 = -210. \end{cases}$$

Звідси знаходимо: $c_1 = -0{,}2090$; $c_2 = -0{,}7894$, $c_3 = 0{,}2090$, і, отже, $y_3 = (1 - x)(1 - 0{,}29x - 0{,}7894x^2 + 0{,}2090x^3)$ – наближений розв'язок крайової задачі. Похибка наближеного розв'язку залежить від кількості базисних функцій.

Питання для самоконтролю до теми 9.1

1. Які існують типи крайових умов?
2. В чому полягає метод Гальоркіна? Що таке відхил?
3. В чому полягають принципи підбору базисних функцій?
4. Від чого залежить похибка методу Гальоркіна?

9.4. Метод скінченних різниць

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння 2-го порядку із змінними коефіцієнтами

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \qquad (75)$$
$$\begin{cases} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A, \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B, \end{cases}$$

де $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ неперервні функції на $[a, b]$, α_i, β_i, A, B - сталі, такі, що $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0, ; |\beta_0| + |\beta_1| \neq 0$. Розіб'ємо відрізок $[a, b]$ на n рівних частин, тобто одержимо $h = (b - a)/n$; побудуємо систему рівновіддалених вузлів

$$x_i = x_0 + ih \quad (i = 1, \dots, n-1); \quad x_0 = a; \quad x_n = b.$$

Розв'язок задачі будемо шукати чисельно. Для цього в рівнянні (75) похідні замінимо скінченними різницями другого порядку точності.

Введемо позначення $y(x_i) = y_i$, $p(x_i) = p_i$, $q(x_i) = q_i$, $f(x_i) = f_i$.

Одержимо:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i \quad (i = 1,2, \dots, n-1). \qquad (76)$$

Граничні умови запишемо в такому вигляді:

$$\begin{cases} \alpha_0 y_0 + \alpha_1 \dfrac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h} = A, \\ \beta_0 y_n + \beta_1 \dfrac{3y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2}}{2h} = B. \end{cases} \qquad (77)$$

Таким чином, одержимо систему $n + 1$ рівнянь з $n + 1$ невідомими. Розв'язуючи цю систему, знайдемо значення функції y у відповідних точках.

Приклад. Методом скінченних різниць знайти розв'язок наступної крайової задачі:

$$y'' + (1 + x^2)y = -1$$
$$y(-1) = y(1) = 0.$$

Розв'язання. Виберемо крок $h = 0{,}5$. Поклавши $x_{-2} = -1$; $x_{-1} = -0{,}5$; $x_0 = 0$; $x_1 = 0{,}5$; $x_2 = 1$, з огляду на симетрію рівняння і крайових умов будемо мати $y_{-2} = y_2 = 0$; $y_{-1} = y_1$. Таким чином, потрібно визначити лише дві ординати: y_0 і y_1. Запишемо рівняння у вигляді

$$(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})/h^2 + \left(1 + x_i^2\right)y_i = -1 .$$

При $i = 0$, тобто при $x_0 = 0$ будемо мати

$$(y_1 - 2y_0 + y_{-1})/0{,}25 + y_0 = -1 .$$

Аналогічно, при $i = 1$, тобто при $x_1 = 0{,}5$ будемо мати

$$(y_0 - 2y_1 + y_2)/0{,}25 + (1 + 0{,}25)y_1 = -1 .$$

З огляду на $y_{-1} = y_1$ і використовуючи крайову умову $y_2 = 0$, маємо систему

$$-7y_0 + 8y_1 = -1 \qquad 4y_0 - 6{,}75y_1 = -1.$$

Звідси $y_0 = 0{,}967$; $y_1 = 0{,}721$.

Отримані значення занесемо в таблицю 16.

Таблиця 16 – Значення шуканої функції для крайової задачі (метод скінченних різниць)

i	-2	-1	0	1	2
x	-1	-0,5	0	0,5	1
y	0	0,721	0,967	0,721	0

Питання для самоконтролю до теми 9.2

1. Опишіть метод скінченних різниць.
2. Яка похибка методу скінченних різниць?

Завдання 1 до розділу 9. Метод Гальоркіна розв'язання крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

Розв’яжіть крайову задачу методом Гальоркіна.

Завдання вибираються з наведеної нижче таблиці варіантів (табл. 17).

Завдання 2 до розділу 9. Метод скінченних різниць розв'язання крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

Розв’язати крайову задачу для звичайних диференціальних рівнянь методом скінченних різниць.

Завдання вибираються з наведеної нижче таблиці варіантів (табл. 17).

Таблиця 17 – Таблиця варіантів до розділу 9

Шифр по вертикалі	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
C_1	-1	2	-3	-1	-2	-4	-3	-4	2	-2,7
C_2	-4,8	-3,1	2,5	1,7	2	1,2	2	3,2	3	-1,3

Шифр по горизон-талі	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	0,5	1,3	2,4	-1	0	1	0	0,8	-4	0
B	0,5	0,7	0	1	-2	0,5	0	0,3	-0,6	2
a	1	-1	-1	0,5	0	2	-1	-0,5	-1	0
b	2	0	1,5	1,5	1	3	0	1,5	1	1
α_0	0	2	-1	0	0	5	-4	0	1	-1
α_1	2	0	0	-3	2	0	0	-1	0	0
β_0	-1	0	0	3	-2	0	0	-1	0	0
β_1	0	-1	2	0	0	-5	4	0	1	-1
h	0,1	0,1	0,25	0,1	0,1	0,1	0,1	0,2	0,2	0,1
$p(x)$	$c_1 x$	$\frac{c_1}{x + c_2}$	$c_1 x + c_2$	$c_2 x$	$c_2 x^2 - c_1$	$c_1 - x$	$c_2 + x^2$	$c_1 x^3$	$c_2 x^3 - c_1$	$x^2 c_1^2$
$q(x)$	$\frac{c_1 x}{x^2 + c_2^2}$	$c_2 x$	$c_1 x^2$	$c_2 x^3 + c_1$	$c_2 - x$	$c_2 + x^3$	$c_2 x$	$c_2 x - c_1$	$c_1 x + c_2$	$\frac{c_2}{x + 1}$
$f(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 + c_1^2}}$	$c_2 + x^3$	$\frac{c_2 + x}{x^2 - c_1}$	$\frac{x^2 + c_2}{x}$	$\frac{1}{c_1 x - c_2}$	$\sqrt{x^2 + c_2^2}$	$\frac{c_1 x^2}{c_2 + x}$	$\frac{1}{c_2 x^2 - c_1}$	$c_2 x^2 + c_1 x$	$\frac{c_1 x + c_2}{(c_1 - x)^3}$

РОЗДІЛ 10 ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

10.1. Різницевий метод розв'язання задачі Діріхле для рівняння Пуассона

Розглянемо задачу Діріхле для рівняння еліптичного типу – рівняння Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y) \text{ на } G, \tag{78}$$

$$u=\phi \text{ на } \Gamma, \tag{79}$$

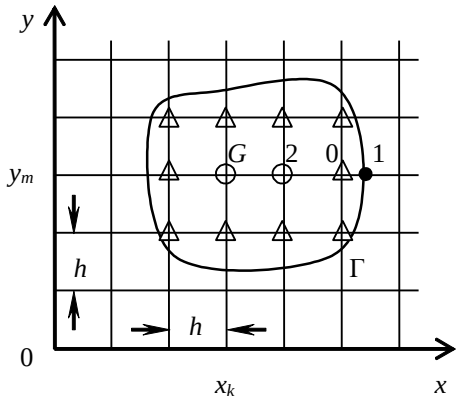


Рисунок 14 – Сітка для довільної області

де G – деяка скінчена область (рис. 14), Γ – границя області G, $f(x,y)$ – задана на G функція, ϕ – задана на Γ функція.

Суть різницевого методу розв'язання задачі (78), (79) така. Будуємо квадратну сітку з кроком $h=1/M$ (M – натуральне): $x_k=kh$, $y_m=mh$. В усіх розташованих в області G вузлах сітки, які можна з'єднати з чотирма найближчими вузлами відрізками прямих, не перетинаючи границю Г, частинні похідні $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, що входять у рівняння (78), замінимо формулами чисельного диференціювання другого порядку точності (порядку $O(h^2)$):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\approx\frac{V_{k-1,m}-2V_{km}+V_{k+1,m}}{h^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\approx\frac{V_{k,m-1}-2V_{km}+V_{k,m+1}}{h^2}, \tag{80}$$

де $V_{km}=V(x_k,y_m)$ – наближений розв'язок задачі (78), (79).

Підставляючи (80) у (78), одержимо:

$$\frac{V_{k-1,m}-2V_{km}+V_{k+1,m}}{h^2}+\frac{V_{k,m-1}-2V_{km}+V_{k,m+1}}{h^2}=f_{km}, \tag{81}$$

де $f_{km}=f(x_k,y_m)$.

Для всіх внутрішніх вузлів області G поблизу її границі Г (позначених на рис. 14 трикутниками), для задання різницевих рівнянь застосовується лінійна інтерполяція в напрямку осі x. Наприклад, у точці з номером 0 рівняння має вигляд

$$V_0 = \frac{\rho_1}{\rho_1 + \rho_2} V_2 + \frac{\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \phi_1, \tag{82}$$

де ρ_1 – відстань від точки 0 до точки 1 на границі Γ, у якій береться задане значення функції ϕ, позначене через ϕ_1; V_0, V_2 – невідомі в точках $0,\ 2$; $\rho_2 = h$ – відстань між цими точками. Тут для простоти використовується один індекс. Формула (82) означає лінійну інтерполяцію між точками $1,\ 2$ в точці 0.

Аналогічні різницеві рівняння задаються в інших вузлах, позначених трикутниками. При цьому відстань від точки, в яку відбувається інтерполяція, до обох крайніх точок не повинна перевищувати h і одна чи обидві крайні точки повинні лежати на границі Γ.

Отже, у кожному вузлі, позначеному кружком, маємо рівняння (81), а в кожному вузлі, позначеному трикутниками, рівняння має вид типу (82). Загальне число рівнянь збігається з числом невідомих. Отримана система лінійних алгебраїчних рівнянь має єдиний розв'язок V, для знаходження якого можуть бути застосовані прямі й ітераційні методи розв'язання систем рівнянь, викладені вище.

Якщо розв'язок задачі Діріхле (78), (79) $u(x, y) \in C_4(\bar{G})$, то має місце оцінка похибки

$$\max_{G_h} |u - V| = O\left(h^2\right),$$

де $\bar{G} = G \cup \Gamma$, G_h – множина усіх вузлів, позначених кружками й трикутниками.

Приклад. Розв'язати задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = cos(x - y) + \frac{1{,}25y}{1{,}5 + x}$$
$$u(x, y)|_\Gamma = |x| + |y|\ ,$$

де $\Gamma: x^2 + y^2 = 1$.

Розв'язання. Візьмемо крок $h = 0{,}5$ і побудуємо сітку (див. рис. 15).

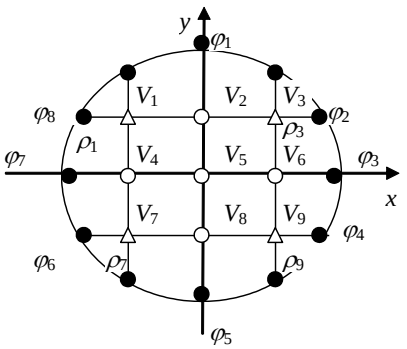


Рисунок 15 – Сітка для кола

З метою спрощення запису будемо використовувати один нижній індекс. Для зручності обчислень рівняння (81) розв'яжемо відносно V_{km}:

$$V_{km} = \frac{V_{k-1,m} + V_{k+1,m} + V_{k,m-1} + V_{k,m+1}}{4} - \frac{h^2}{4} f_{km}. \qquad (83)$$

Використовуючи далі формули (83), (82), одержимо систему рівнянь щодо невідомих $V_i (i = 1,2, \dots ,9)$:

$$\begin{cases} V_1 = \dfrac{\rho_1}{\rho_1 + h} V_2 + \dfrac{h}{\rho_1 + h} \phi_8 \\ V_2 = \dfrac{V_1 + \phi_1 + V_3 + V_5}{4} - \dfrac{h^2}{4} f_2 \\ V_3 = \dfrac{\rho_3}{\rho_3 + h} V_2 + \dfrac{h}{\rho_3 + h} \phi_2 \\ V_4 = \dfrac{\phi_7 + V_1 + V_5 + V_7}{4} - \dfrac{h^2}{4} f_4 \\ V_5 = \dfrac{V_4 + V_2 + V_6 + V_8}{4} - \dfrac{h^2}{4} f_5 \\ V_6 = \dfrac{V_5 + V_3 + \phi_3 + V_9}{4} - \dfrac{h^2}{4} f_6 \\ V_7 = \dfrac{\rho_7}{\rho_7 + h} V_8 + \dfrac{h}{\rho_7 + h} \phi_6 \\ V_8 = \dfrac{V_7 + V_5 + V_9 + \phi_5}{4} - \dfrac{h^2}{4} f_8 \\ V_9 = \dfrac{\rho_9}{\rho_9 + h} V_8 + \dfrac{h}{\rho_9 + h} \phi_4 \end{cases}$$

Обчислимо величини $\phi_i (i = 1,2, \dots ,8)$, f_2, f_4, f_5, f_6, f_8, ρ_1, ρ_3, ρ_7, ρ_9, використовуючи умови задачі:

$$\phi_1 = \phi_3 = \phi_5 = \phi_7 = 1; \quad \phi_2 = \phi_4 = \phi_6 = \phi_8 = \left|\sqrt{1 - 0,5^2}\right| + |0,5| \approx 1,367;$$

$$f_2 = cos(0 - 0,5) + \frac{1,25 \cdot 0,5}{1,5 + 0} \approx 1,295;$$

$$f_4 = cos(-0,5 - 0) + \frac{1,25 \cdot 0}{1,5 - 0,5} \approx 0,878;$$

$$f_5 = cos\, 0 + \frac{1,25 \cdot 0}{1,5 + 0} = 1; \quad f_6 = cos(0,5 - 0) + \frac{1,25 \cdot 0}{1,5 + 0,5} \approx 0,878;$$

$$f_8 = cos(0 + 0,5) + \frac{1,25 \cdot (-0,5)}{1,5 + 0} \approx 0,461;$$

$$\rho_1 = \rho_3 = \rho_7 = \rho_9 = \sqrt{1 - 0,5^2} - 0,5 \approx 0,366\,.$$

Підставляючи обчислені значення в останню систему, перетворимо її до вигляду

$$\begin{cases} V_1 = 0{,}423V_2 + 0{,}789 \\ V_2 = 0{,}25(V_1 + V_3 + V_5) + 0{,}169 \\ V_3 = 0{,}423V_2 + 0{,}789 \\ V_4 = 0{,}25(V_1 + V_5 + V_7) + 0{,}195 \\ V_5 = 0{,}25(V_2 + V_4 + V_6 + V_8) - 0{,}063 \\ V_6 = 0{,}25(V_3 + V_5 + V_9) + 0{,}195 \\ V_7 = 0{,}423V_8 + 0{,}789 \\ V_8 = 0{,}25(V_5 + V_7 + V_9) + 0{,}221 \\ V_9 = 0{,}423V_8 + 0{,}789 \end{cases}$$

Розв'язуючи систему, одержимо наближений розв'язок задачі: $V_1 = 1{,}225$; $V_2 = 1{,}032$; $V_3 = 1{,}225$; $V_4 = 1{,}065$;; $V_5 = 1{,}003$; $V_6 = 1{,}065$; $V_7 = 1{,}253$; $V_8 = 1{,}098$; $V_9 = 1{,}253$.

Питання для самоконтролю до розділу 10

1. Дайте класифікацію диференціальних рівнянь з частинними похідними.
2. Які існують типи задач для рівнянь з частинними похідними?
3. У чому полягає задача Діріхле для рівняння Пуассона?
4. Викладіть метод скінченних різниць розв'язання задачі Діріхле.
5. Яка похибка методу скінченних різниць розв'язання задачі Діріхле?

Завдання до розділу 10. Різницевий метод розв'язання задачі Діріхле для рівняння Пуасона

Різницевим методом розв'яжіть задачу Діріхле для рівняння Пуассона.

№1.

$$f(x,y) = 1 + 0{,}2y\sin x - y^2;$$
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1(\Gamma),$$
$$\phi(x,y)|_\Gamma = |x| + |y|.$$

№2.

$$f(x,y) = \cos(x+y) + 0{,}5(x-y);$$
$$(|x|+2)(|y|+2) = 12(\Gamma),$$
$$\phi(x,y)|_\Gamma = 2|x| + |y|.$$

№3.

$$f(x,y) = \frac{\cos x}{x+1} - 0{,}5y^2;$$
$$\left.\begin{matrix} |y| = 4 - x^2 \\ x \in [-2,2] \end{matrix}\right\}(\Gamma),$$
$$\phi(x,y)|_\Gamma = |x| \cdot |y|.$$

№4.

$$f(x,y) = (1-y^2)\cos x + 0{,}6y;$$
$$x^2 + y^2 = 16(\Gamma),$$
$$\phi(x,y)|_\Gamma = |x| + 2|y|.$$

№5.

$$f(x,y) = 1 + 0{,}4y\sin x - 1{,}5y^2;$$
$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1(\Gamma),$$
$$\phi(x,y)|_\Gamma = |x| \cdot |y|.$$

№6.

$$f(x,y) = \frac{\cos y}{x+2} + 0{,}3y^2;$$
$$\left.\begin{matrix} |x| = 4 - y^2 \\ y \in [-2,2] \end{matrix}\right\}(\Gamma),$$
$$\phi(x,y)|_\Gamma = |x| + |y|.$$

№7.

$$f(x,y) = cos(1{,}5x + y) + (x - y);$$
$$(|x| + 2)(|y| + 2) = 12(\Gamma),$$
$$\phi(x,y)|_\Gamma = |x| \cdot |y|.$$

№8.

$$f(x,y) = 1 - sin(x + y) + \frac{0{,}5y}{x+2};$$
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1(\Gamma),$$
$$\phi(x,y)|_\Gamma = 2|x| + |y|.$$

№9.

$$f(x,y) = \frac{cos\, y}{1{,}5 + x} + 0{,}1y^2;$$
$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1(\Gamma),$$
$$\phi(x,y)|_\Gamma = |x| \cdot |y|.$$

№10.

$$f(x,y) = 0{,}6\, sin\, x - 1{,}25y^2 + 1;$$
$$\left.\begin{array}{l} |y| = 4 - x^2 \\ x \in [-2,2] \end{array}\right\}(\Gamma),$$
$$\phi(x,y)|_\Gamma = |x| + |y|.$$

№11.

$$f(x,y) = cos(2x + y) + 1{,}5(x - y);$$
$$x^2 + y^2 = 16(\Gamma),$$
$$\phi(x,y)|_\Gamma = 0{,}5|x| + |y|.$$

№12.

$$f(x,y) = 1 - \frac{0{,}1y}{x+2} - sin(2x + y);$$
$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1(\Gamma),$$
$$\phi(x,y)|_\Gamma = |x| + 0{,}5|y|.$$

№13.

$$f(x,y) = \frac{cos\, y}{1{,}25 + x} - 0{,}1y^2;$$
$$\left.\begin{array}{l} |x| = 4 - y^2 \\ y \in [-2,2] \end{array}\right\}(\Gamma),$$
$$\phi(x,y)|_\Gamma = |x| + \tfrac{y^2}{2}.$$

№14.

$$f(x,y) = 1 + 0{,}8y\, sin\, x - 2y^2;$$
$$(|x| + 2)(|y| + 2) = 12(\Gamma),$$
$$\phi(x,y)|_\Gamma = 2|x| + 0{,}5|y|.$$

№15.

$$f(x,y) = cos(1{,}5x + y) + 1{,}5(x - y);$$
$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1(\Gamma),$$
$$\phi(x,y)|_\Gamma = |x| + |y|.$$

№16.

$$f(x,y) = 1 - sin(2x + y) + \frac{0{,}3y}{x+2};$$
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1(\Gamma),$$
$$\phi(x,y)|_\Gamma = 2|x| + 0{,}5|y|.$$

№17.

$$f(x,y) = \frac{cos\, y}{1{,}75 + x} - 0{,}5y^2;$$
$$\left.\begin{array}{l} |y| = 9 - x^2 \\ x \in [-3,3] \end{array}\right\}(\Gamma),$$
$$\phi(x,y)|_\Gamma = |x| + \tfrac{1}{2}|y|.$$

№18.

$$f(x,y) = 1 + (1 - x)\, sin\, y - (2 + x)y;$$
$$x^2 + y^2 = 16(\Gamma),$$
$$\phi(x,y)|_\Gamma = \tfrac{1}{2}|x| + 2|y|.$$

№19.

$$f(x,y) = (0{,}8 - y^2)\, cos\, x + 0{,}3y;$$
$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1(\Gamma),$$
$$\phi(x,y)|_\Gamma = 0{,}5|x| + |y|.$$

№20.

$$f(x,y) = 1 + 2{,}2\, sin\, x + 1{,}5y^2;$$
$$\left.\begin{array}{l} |y| = 9 - x^2 \\ x \in [-3,3] \end{array}\right\}(\Gamma),$$
$$\phi(x,y)|_\Gamma = 0{,}5|x| + |y|.$$

№21.

$$f(x,y) = cos(x+y) + 0{,}75(x-y);$$
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1(\Gamma),$$
$$\phi(x,y)|_\Gamma = 0{,}5|x| + 2|y|.$$

№22.

$$f(x,y) = 1 - sin(1{,}25x + y) + \frac{0{,}5y}{x+2};$$
$$x^2 + y^2 = 16(\Gamma),$$
$$\phi(x,y)|_\Gamma = 0{,}5|x| \cdot |y|.$$

№23.

$$f(x,y) = \frac{cos\, y}{x+2} - 0{,}3y^2;$$
$$(|x|+3)(|y|+2) = 18(\Gamma),$$
$$\phi(x,y)|_\Gamma = |x| + 0{,}5|y|.$$

№24.

$$f(x,y) = 1 - sin(0{,}75x + y) + \frac{0{,}1y}{x+2};$$
$$\left.\begin{array}{c} |y| = 9 - x^2 \\ x \in [-3{,}3] \end{array}\right\}(\Gamma),$$
$$\phi(x,y)|_\Gamma = 2|x| + 0{,}5|y|.$$

№25.

$$f(x,y) = \frac{cos\, y}{1{,}25 + x} - 0{,}5y^2;$$
$$x^2 + y^2 = 16(\Gamma),$$
$$\phi(x,y)|_\Gamma = 0{,}5(|x| + |y|).$$

№26.

$$f(x,y) = cos(1{,}5x + y) - 2{,}25(x+y);$$
$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1(\Gamma),$$
$$\phi(x,y)|_\Gamma = \frac{1}{2}|x| + |y|.$$

№27.

$$f(x,y) = \frac{cos\, y}{1{,}5 + x} - 1{,}25y^2;$$
$$\left.\begin{array}{c} |x| = 4 - y^2 \\ y \in [-2{,}2] \end{array}\right\}(\Gamma),$$
$$\phi(x,y)|_\Gamma = |x| + 0{,}5|y|.$$

№28.

$$f(x,y) = 1 - (x-1)\, sin\, y + 2(x+y);$$
$$(|x|+2)(|y|+3) = 18(\Gamma),$$
$$\phi(x,y)|_\Gamma = 2|x| + 0{,}5|y|.$$

№29.

$$f(x,y) = 1 - sin(0{,}75x - y) + \frac{1{,}75y}{x+1};$$
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1(\Gamma),$$
$$\phi(x,y)|_\Gamma = |x| + 0{,}5|y|.$$

№30.

$$f(x,y) = cos(x-y) + \frac{1{,}25y}{1{,}5 + x};$$
$$(|x|+5)(|y|+5) = 45(\Gamma),$$
$$\phi(x,y)|_\Gamma = |x| + 0{,}5|y|.$$

РОЗДІЛ 11 ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ФРЕДГОЛЬМА ІІ РОДУ

11.1. Квадратурний метод розв'язання інтегрального рівняння Фредгольма ІІ роду

Нехай дано інтегральне рівняння Фредгольма ІІ роду

$$\phi(x) - \lambda \int_a^b K(x,y)\phi(y)dy = f(x)\,, \tag{84}$$

де $K(x,y)$, $f(x)$ – ядро рівняння й вільний член відповідно, λ – чисельний параметр, $\phi(x)$ – шукана функція.

Інтеграл, що входить у цю рівність, ми можемо за допомогою будь-якої квадратурної формули наближено замінити на деякий простого виду вираз, що не містить знака інтеграла. Дійсно, усяка лінійна формула наближеного інтегрування має вид:

$$\int_a^b \psi(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k \psi(x_k)\,, \tag{85}$$

де A_k, x_k – ваги і вузли квадратурної формули відповідно.

Після застосування формули (85) до інтеграла в лівій частині рівняння (84) приходимо до рівності:

$$\tilde{\phi}(x) - \lambda \sum_{k=1}^{n} A_k K(x,x_k)\,\tilde{\phi}(x_k) = f(x), \tag{86}$$

де через $\tilde{\phi}(x)$ позначений наближений розв'язок для шуканої функції $\phi(x)$.

Поклавши потім у рівності (86) послідовно $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$ приходимо, до наступної системи лінійних алгебраїчних рівнянь щодо невідомих $\tilde{\phi}(x_i) \quad (i = 1,2,\ldots,n)$ – наближень для значень шуканої функції $\phi(x_i)$:

$$\tilde{\phi}(x_i) - \lambda \sum_{k=1}^{n} A_k K(x_i,x_k)\tilde{\phi}(x_k) = f(x_i) \quad (i = 1,2,\ldots,n). \tag{87}$$

За цими значеннями наближене значення самої функції може бути знайдене за допомогою того чи іншого прийому інтерполяції. У даному спеціальному випадку зручніше за все одержати це значення, виходячи з рівності (86), а саме:

$$\tilde{\phi}(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} A_k K(x,x_k)\tilde{\phi}(x_k)\,. \tag{88}$$

Очевидно, що точність результату, отриманого при заміні інтегрального рівняння (84) системою лінійних рівнянь (87), буде тим вище, чим меншу похибку ми робимо, заміняючи інтеграл сумою, тобто буде залежати від того, яку квадратурну формулу ми застосовуємо для апроксимації інтеграла в рівнянні (84).

Приклад. Застосуємо розглянутий вище спосіб наближеного розв'язання інтегральних рівнянь до знаходження розв'язку рівняння

$$\phi(x) - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{xy}\phi(y)\,dy = 1 - \frac{1}{2x}(e^x - 1),$$

використовуючи при цьому квадратурну формулу Гауса.

Розв'язання. Заміняючи це інтегральне рівняння на систему, при $n = 2$, і прийнявши до уваги, що $\lambda = \frac{1}{2}$, $A_1 = A_2 = \frac{1}{2}$, одержимо систему (87) для даного випадку у вигляді:

$$\left(1 - \frac{1}{4}K_{1,1}\right)\tilde{\phi}(x_1) - \frac{1}{4}K_{1,2}\tilde{\phi}(x_2) = f_1,$$
$$-\frac{1}{4}K_{2,1}\tilde{\phi}(x_1) + \left(1 - \frac{1}{4}K_{2,2}\right)\tilde{\phi}(x_2) = f_2.$$

Відповідно до викладеного вище, за x_1 й x_2 взяті вузли квадратурної формули Гауса для інтервалу $(0;1)$: $x_1 = 0{,}2113$; $x_2 = 0{,}7887$. Обчисливши значення $K_{i,k} = K(x_i, x_k)$, $f_i = f(x_i)$ і підставивши їх у систему, приведемо її до вигляду

$$0{,}7386\tilde{\phi}(x_1) - 0{,}2954\tilde{\phi}(x_2) = 0{,}4434$$
$$-0{,}2954\tilde{\phi}(x_1) + 0{,}5343\tilde{\phi}(x_2) = 0{,}2384.$$

Розв'язуючи дану систему, одержимо:

$$\tilde{\phi}(x_1) = 0{,}9997;\ \tilde{\phi}(x_2) = 0{,}9990.$$

Тоді наближений розв'язок в інших точках, згідно (88), може бути записаний у вигляді:

$$\tilde{\phi}(x) = \frac{1}{4}(e^{0{,}2113x} \cdot 0{,}9997 + e^{0{,}7887x} \cdot 0{,}9990) + 1 - \frac{1}{2x}(e^x - 1).$$

Питання для самоконтролю до теми 11.1

1. Дайте визначення інтегрального рівняння Фредгольма. Які основні проблеми виникають при розв'язанні інтегрального рівняння?
2. Сформулюйте постановку задачі, опишіть метод розв'язання, оцініть похибку методу.

11.2. Розв'язання інтегрального рівняння Фредгольма II роду методом послідовних наближень

Розглянемо інтегральне рівняння Фредгольма II роду (84).

Метод послідовних наближень для його розв'язання полягає в такому. Шукаємо розв'язок у вигляді ряду, за степенями λ:

$$\phi(x) = \phi_0(x) + \lambda\phi_1(x) + \lambda^2\phi_2(x) + \ldots \qquad (89)$$

Підставляючи цей ряд у рівняння (84) і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях λ, одержимо:

$$\left.\begin{aligned}\phi_0(x) &= f(x)\\ \phi_1(x) &= \int_a^b K(x,y)\phi_0(y)dy\\ \phi_2(x) &= \int_a^b K(x,y)\phi_1(y)dy\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\} \tag{90}$$

З цих рівностей можна визначити послідовно усі функції $\phi_0(x)$, $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$,…, підставивши які потім в (89), закінчимо процес побудови розв'язку.

Можна довести, припускаючи обмеженим ядро $|K(x,y)| \le M$, що ряд (89) буде рівномірно збігатися до розв'язку рівняння (84), якщо λ задовольняє умову:

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}. \tag{91}$$

Похибка ε, яку ми допустимо, якщо обмежимося n членами в ряді (89), може бути оцінена досить просто. А саме, припускаючи $|f(x)| \le N$, легко одержати, що

$$\varepsilon < \frac{NM^n(b-a)^n|\lambda|^n}{1-M(b-a)|\lambda|}.$$

Зазначимо, що якщо інтеграли (90) не можуть бути обчислені точно, то потрібно застосувати формули наближеного інтегрування, що, однак, внесе додаткову похибку в розв'язок.

Приклад. Методом послідовних наближень розв'язати рівняння

$$\phi(x) - \frac{1}{2}\int_0^1 \phi(y)dy = \sin \pi x.$$

Розв'язання. У даному випадку, оскільки $\lambda = \frac{1}{2}$ і $K(x,y) = 1$, умова (91) виконана. Прийнявши $\phi_0(x) = \sin \pi x$, послідовно знаходимо

$$\phi_1(x) = \sin \pi x + \frac{1}{2}\int_0^1 \phi_0(y)dy = \sin \pi x + \frac{1}{2}\int_0^1 \sin \pi y dy = \sin \pi x + \frac{1}{\pi};$$

$$\phi_2(x) = \sin \pi x + \frac{1}{2}\int_0^1 \phi_1(y)dy = \sin \pi x + \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\sin \pi y + \frac{1}{\pi}\right)dy =$$

$$= \sin \pi x + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi};$$

$$\phi_3(x) = \sin \pi x + \frac{1}{2}\int_0^1 \phi_2(y)dy = \sin \pi x + \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\sin \pi y + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi}\right)dy =$$

$$= \sin \pi x + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2^2\pi}.$$

Взагалі,

$$\phi_n(x) = \sin \pi x + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}\pi} = \sin \pi x + \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k},$$

звідси

$$\lim_{n\to\infty}\phi_n(x) = \sin\pi x + \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k} = \sin\pi x + \frac{2}{\pi}.$$

Тому розв'язком вихідного рівняння є функція

$$\phi(x) = \sin\pi x + \frac{2}{\pi},$$

у чому можна переконатися за допомогою безпосередньої перевірки.

Питання для самоконтролю до теми 11.2

1. Сформулюйте постановку задачі, опишіть метод розв'язання.
2. Які існують джерела похибки?
3. В чому полягають умови збіжності наближеного розв'язку до точного?

Завдання 1 до розділу 11. Розв'язання інтегральних рівнянь Фредгольма II роду квадратурним методом

Розв'яжіть інтегральне рівняння Фредгольма II роду квадратурним методом.

1. $y(x) - \frac{1}{2}\int_0^1 xty(t)dt = 2x;$
2. $y(x) + \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \cos^2 t\, y(t)dt = 1;$
3. $y(x) - \frac{\pi}{4}\int_0^1 (1-x)\sin 2\pi t y(t)dt = \frac{1}{2}(1-x);$
4. $y(x) - \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \sin x\, y(t)tdt = 2\sin x;$
5. $y(x) + \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi (\cos(x+t) + \cos(x-t))y(t)dt = \cos x;$
6. $y(x) - \frac{1}{2}\int_0^1 y(t)dt = \sin\pi x;$
7. $y(x) - \frac{1}{3\pi}\int_0^{2\pi} \cos x \sin t\, y(t)dt = \sin x;$
8. $y(x) - \frac{1}{3}\int_0^1 (1+x)\cos 2\pi t y(t)dt = x;$
9. $y(x) - \frac{\ln 2}{3}\int_0^1 2^{x+t} y(t)dt = x;$
10. $y(x) - \frac{1}{3}\int_0^1 (2x-t)y(t)dt = \cos 2\pi x;$
11. $y(x) - \frac{1}{4}\int_0^1 (1+2xt)y(t)dt = -\frac{1}{6}(x+3);$

12. $y(x)+\frac{1}{2}\int_0^1 \left(x-\sqrt{t}\right)y(t)dt=\frac{5}{3}x+\sqrt{x}-\frac{1}{6}$;

13. $y(x)-\frac{1}{2\ln 2}\int_0^1 \frac{x}{1+t^2}y(t)dt=1+x^2$;

14. $y(x)-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} y(t)dt=\sin x$;

15. $y(x)+\frac{1}{\pi}\int_0^1 x\sin 2\pi t y(t)dt=\cos 2\pi x$;

16. $y(x)-\frac{1}{3}\int_0^1 xe^t y(t)dt=e^{-x}$;

17. $y(x)-\frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} \sin x\cos t\, y(t)dt=1$;

18. $y(x)-\frac{1}{2}\int_0^1 x\left(1-\frac{3}{2}t\right)y(t)dt=1$;

19. $y(x)-\frac{1}{2}\int_0^1 \sin 2\pi x y(t)dt=x$;

20. $y(x)-\frac{1}{3\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x+2t)\, y(t)dt=x$;

21. $y(x)-\frac{1}{8}\int_{-1}^1 (x^2+1+xt)y(t)dt=1$;

22. $y(x)+\frac{1}{8\,\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (x\sin t+\sin 2x)y(t)dt=\sin x$;

23. $y(x)-\frac{1}{3}\int_{-1}^1 \cos\pi x\cos 3\pi t y(t)dt=\cos 3\pi x$;

24. $y(x)-\frac{1}{2\pi}\int_0^1 xy(t)dt=\sin 2\pi x$;

25. $y(x)-\frac{1}{4}\int_0^1 (1+2x)ty(t)dt=1-\frac{3}{2}x$.

Завдання 2 до розділу 11. Метод послідовних наближень розв'язання інтегральних рівнянь Фредгольма II роду

Методом послідовних наближень розв’яжіть інтегральне рівняння Фредгольма. Вихідні дані візьміть з завдань до лабораторної роботи № 12.

ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Андруник В.А., Висоцька В.А., Пасічник В.В., Чирун Л.Б., Чирун Л.В. Чисельні методи в комп'ютерних науках : навчальний посібник. Львів : Новий світ – 2000, 2017. 470 с.
2. Вербіцький В.В., Реут В.В. Введення в чисельні методи аналізу і диференційних рівнянь : навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл., що навч. за спец. "Прикладна математика". Одеса : ОНУ ім. І.І. Мечникова, 2018. 116 с.
3. Гребенюк С. М., Д'яченко Н. М., Красікова І. В. Наближені методи розв'язання крайових задач : методичні рекомендації до лабораторних занять для здобувачів ступеня вищої освіти магістра спеціальності «Математика» освітньо-професійної програми «Математика». Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2025. 68 с.
4. Гребенюк С.М., Д'яченко Н.М. Методи обчислень: навчальний посібник для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра спеціальності «Математика» освітньо-професійної програми «Математика». Запоріжжя: Запорізький національний університет, 2025. 83 с.
5. Крижанівська Т.В., Бойцова І.А. Конспект лекцій з дисципліни «Чисельні методи». Одеса : вид-во ОДЕУ, 2013. 152 с.
6. Ляшенко Б.М., Кривонос О.М., Вакалюк Т.А. Методи обчислень : навчально-методичний посібник для студентів фізико-математичного факультету. Житомир : Вид-во ЖДУ, 2014. 228 с.
7. Ярошенко О.І., Григорків М.В. Числові методи : навч. посібник. Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2018. 172 с.
8. Burden R.L., Faires J.D. Numerical Analysis. Boston: Cengage Learning, 2011. 877 p.
9. Sastry S.S. Introductory methods of numerical analysis. New Delhi : PHI Learning Private Limited, 2012. 450 p.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Гребенюк С.М., Левчук С.А. Чисельні методи в інформатиці : методичні рекомендації до лабораторних занять для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра спеціальності «Інженерія програмного забезпечення» освітньо-професійної програми «Програмна інженерія». Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2020. 66 с.
2. Epperson J.F. An introduction to numerical methods and analysis. New Jersey, Hoboken : John Wiley & Sons, 2013. 591 p.
3. Grebenyuk S.M., Klymenko M.I. Finite element modeling of the stress-strain state of a composite material with a viscoelastic matrix / Mathematical and computer modelling of engineering systems: Collective monograph. Riga : Baltija Publishing. 2020. Pp. 19-34.
4. Jantschi L., Rosca D. Numerical Methods. Basel : MDPI, 2020. 184 p.

5. Kong Q., Siauw T., Bayen A.M. Python Programming and Numerical Methods: A Guide for Engineers and Scientists. Cambridge : Elsevier, 2020. 480 p.
6. Linge S., Langtangen H.P. Programming for Computations – Python: A Gentle Introduction to Numerical Simulations with Python 3.6. 2nd ed. Cham : Springer, 2020. 323 p.
7. Moser R.D. Numerical Methods in Turbulence Simulation. London : Academic Press, 2023. 553 p.
8. Muftu S. Finite Element Method: Physics and Solution Methods. London : Academic Press, 2023. 519 p.
9. Vaquero J.M., Minhos F., Guirao J.L.G., Wade B.A. Analytical and Numerical Methods for Differential Equations and Applications. Lausanne : Frontiers Media SA, 2021. 94 p.

92

Навчальне видання
(*українською мовою*)

Сергій Миколайович Гребенюк
Наталія Миколаївна Д'яченко

МЕТОДИ ОБЧИСЛЕНЬ

Навчальний посібник для здобувачів
ступеня вищої освіти бакалавра
спеціальності «Комп'ютерні науки»
освітньо-професійної програми «Комп'ютерні науки»

Рецензент *С.І. Гоменюк*
Відповідальний за випуск *С.М. Гребенюк*
Коректор *Н.М. Д'яченко*