МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра фундаментальної та прикладної математики

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА БАКАЛАВРА

на тему: **«ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ КОНСТРУКЦІЙ ІЗ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ГРАДІЄНТНОГО МАТЕРІАЛУ»**

Виконала: студентка 4 курсу, групи 6.1132
спеціальності 113 Прикладна математика
(шифр і назва спеціальності)
освітньої програми Комп'ютерне моделювання
(назва освітньої програми)
Я. А. Хуповка
(ініціали та прізвище)
Керівник завідувач кафедри фундаментальної та прикладної математики, професор, д.т.н. Гребенюк С.М.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)
Рецензент доцент кафедри програмної інженерії, доцент, к.ф.-м.н. Кудін О.В.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Запоріжжя 2026

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет математичний

Кафедра фундаментальної та прикладної математики

Рівень вищої освіти бакалавр

Спеціальність 113 Прикладна математика
(шифр і назва)

Освітня програма Комп'ютерне моделювання

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри фундаментальної та прикладної математики, д.т.н., професор
_____ Гребенюк С.М.
(підпис)

« ____ » _____ 2025 р.

З А В Д А Н Н Я

НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТЦІ

Хуповці Ярославі Андріївні
(прізвище, ім'я та по-батькові)

1. Тема роботи Чисельне моделювання напружено-деформованого стану конструкцій із функціонально-градієнтного матеріалу

керівник роботи Гребенюк Сергій Миколайович, д.т.н., професор
(прізвище, ім'я та по-батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом ЗНУ від « 02 » грудня 2025 року № 1741-с

2. Строк подання студентом роботи 29 травня 2026 року

3. Вихідні дані до роботи 1. Постановка задачі.
2. Перелік літератури.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)
1. Постановка задачі.
2. Основні теоретичні відомості.
3. Автоматизація системи скінчено-елементного аналізу.

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень)
презентація

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання _____

К А Л Е Н Д А Р Н И Й П Л А Н

№	Назва етапів кваліфікаційної роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	Розробка плану роботи.	15.12.2025	
2.	Збір вихідних даних.	19.01.2026	
3.	Обробка методичних та теоретичних	09.02.2026	
	джерел.		
4.	Розробка першого та другого розділу.	16.03.2026	
5.	Розробка третього та четвертого розділу.	20.04.2026	
6.	Оформлення та нормоконтроль	18.05.2026	
	кваліфікаційної роботи магістра.		
7.	Захист кваліфікаційної роботи.	16.06.2026	

Студент _____ Я.А. Хуповка
(підпис) (ініціали та прізвище)

Керівник роботи _____ С.М. Гребенюк
(підпис) (ініціали та прізвище)

Нормоконтроль пройдено

Нормоконтролер _____ О.Г. Спиця
(підпис) (ініціали та прізвище)

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота бакалавра «Чисельне моделювання напружено-деформованого стану конструкцій із функціонально-градієнтного матеріалу»: 79 с., 19 рис., 45 джерел.

МЕТОД СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ, НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН, ТЕРМОМЕХАНІЧНИЙ АНАЛІЗ, ФУНКЦІОНАЛЬНО-ГРАДІЄНТНИЙ МАТЕРІАЛ, ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ, PYTHON.

Об’єкт дослідження – напружено-деформований стан конструкцій із функціонально-градієнтних матеріалів.

Мета роботи – розробити математичну модель, створити програмне забезпечення та провести чисельне дослідження конструкцій із функціонально-градієнтних матеріалів.

У роботі розглянуто та описано теоретичні основи неоднорідних середовищ, феноменологічну модель правила сумішей та класичну теорію згину Ейлера-Бернуллі.

Для виконання поставлених завдань розроблено математичну модель та створено спеціалізоване програмне забезпечення мовою Python. Адаптовано класичну теорію згину балок для неоднорідних середовищ із математичним обґрунтуванням зміщення нейтральної осі. Розраховано параметри напружено-деформованого стану та проведено термомеханічний аналіз ФГМ-балок в умовах температурних градієнтів за допомогою алгоритмів чисельного інтегрування.

Проведено серію обчислювальних експериментів, які довели здатність функціонально-градієнтних матеріалів ефективно згладжувати температурні напруження та формувати конструкції рівного опору. Створена програмна реалізація демонструє високу швидкодію і є надійним інструментом для інженерної оптимізації передових композитних конструкцій.

SUMMARY

Bachelor's Qualifying Theses «Numerical Modeling of the Stress-Strain State of Structures Made of Functionally Graded Materials»: 79 pages, 19 figures, 45 sources.

FINITE ELEMENT METHOD, STRESS-STRAIN STATE, THERMOMECHANICAL ANALYSIS, FUNCTIONALLY GRADED MATERIAL, NUMERICAL MODELING, PYTHON.

Subject of the study – the stress-strain state of structures made from functionally graded materials.

Aim of the thesis – to develop a mathematical model, create software, and conduct a numerical study of structures made of functionally graded materials.

The theoretical foundations of heterogeneous media, the phenomenological model of the rule of mixtures, and the classical Euler-Bernoulli bending theory are described and presented in the thesis.

To achieve the set objectives, a mathematical model was developed, and specialized software was created in Python. The classical theory of beam bending was adapted for heterogeneous media, providing a justification for the displacement of the neutral axis. The parameters of the stress-strain state were calculated, and thermomechanical and parametric analyses of FGM beams under temperature gradients were conducted using numerical integration algorithms.

A series of computational experiments were performed, demonstrating the ability of functionally graded materials to effectively smooth out thermal stresses and form structures with uniform resistance. The created software implementation demonstrates high performance and serves as a reliable tool for the engineering optimization of advanced composite structures.

ЗМІСТ

Завдання на кваліфікаційну роботу 2

Реферат 4

Summary 5

Вступ 8

1 Теоретичні основи моделювання функціонально-градієнтних матеріалів 10

1.1 Концепція та властивості ФГМ 10

1.2 Закони розподілу властивостей 13

1.3 Термомеханічні навантаження 18

2 Математична модель та чисельні методи 21

2.1 Кінематична гіпотеза та рівняння рівноваги 21

2.2 Інтегральні характеристики перерізу ФГМ-балки 23

2.2.1 Математичне обґрунтування зміщення фізичної нейтральної осі 26

2.2.2 Формули для обчислення ефективної згинальної жорсткості .. 28

2.3 Математичний опис фіктивного температурного моменту M_T та температурної поздовжньої сили N_T 30

2.4. Постановка крайових задач 33

2.5 Чисельний метод розв’язання 37

3 Програмна реалізація математичної моделі 40

3.1 Архітектура програмного комплексу 40

3.2 Класи матеріалів та геометрії 43

3.3. Алгоритм розрахункового ядра (Solver) 47

3.4 Користувацький інтерфейс та візуалізація результатів 50

3.5 Алгоритмічна реалізація головних модулів у вигляді псевдокоду… 55

4 Обчислювальні експерименти та аналіз результатів 61

4.1 Верифікація математичної моделі та програмного комплексу 61

4.2 Дослідження впливу профілю трансверсального ФГМ на напружено-деформований стан …… 63
4.3 Термомеханічний аналіз ФГМ-балок в умовах температурних градієнтів …… 66
4.4 Оцінка ефективності застосування матеріалів із поздовжнім градієнтом …… 68
4.5 Інтерактивний параметричний аналіз та оптимізація параметрів … 71
Висновки …… 74
Перелік посилань …… 76

ВСТУП

Розвиток сучасної техніки безперервно висуває дедалі суворіші вимоги до конструкційних матеріалів. Традиційні однорідні матеріали та класичні шаруваті композити часто вичерпують свій потенціал в екстремальних умовах експлуатації, оскільки різка зміна фізико-механічних властивостей на межі розділу шарів призводить до концентрації напружень та подальшого розшарування під дією механічних або інтенсивних термічних навантажень. Ефективним вирішенням цієї проблеми стало впровадження функціонально-градієнтних матеріалів (ФГМ) – передового класу композитів, у яких об’ємна частка складових фаз неперервно змінюється в просторі за наперед заданим математичним законом [1]. Завдяки такій мікроструктурі усуваються різкі межі поділу, а матеріал набуває здатності поєднувати взаємовиключні властивості різних речовин, наприклад, термостійкість кераміки та пластичність металу.

Актуальність теми дослідження зумовлена тим, що класичні методи механіки виявляються нефективними для розрахунку таких конструкцій. У математичних моделях механіки суцільного середовища властивості ФГМ, такі як модуль пружності, густина та коефіцієнт лінійного температурного розширення, розглядаються не як сталі величини, а як неперервні функції просторових координат. Наявність змінних коефіцієнтів значно ускладнює диференціальні рівняння рівноваги, через що знаходження точних аналітичних розв’язків стає здебільшого неможливим. Це створює гостру потребу в розробці надійних математичних моделей та застосуванні сучасних методів обчислювальної математики для чисельного моделювання напружено-деформованого стану таких систем.

У роботі детально розглядаються теоретичні основи опису ФГМ, феноменологічні моделі на базі правила сумішей та закони макроскопічного розподілу фаз, зокрема степеневий закон для трансверсального градієнта та лінійний закон для поздовжнього градієнта. Особлива увага приділяється

інтеграції складних термомеханічних процесів у класичну теорію згину балок Ейлера-Бернуллі, що вимагає математичного обґрунтування зміщення фізичної нейтральної осі та введення фіктивних температурних зусиль.

Значна частина дослідження присвячена практичній реалізації побудованих математичних моделей за допомогою створення спеціалізованого програмного забезпечення на мові Python. Використання об’єктно-орієнтованого підходу, оптимізованих векторизованих обчислень та методів чисельного кумулятивного інтегрування дозволяє ефективно розв’язувати крайові задачі. Проведення серії обчислювальних експериментів та параметричного аналізу дає змогу не лише верифікувати розроблені алгоритми, але й глибоко дослідити вплив мікроструктурних та геометричних параметрів на макроскопічну поведінку інженерних конструкцій.

1 ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ МОДЕЛЮВАННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ГРАДІЄНТНИХ МАТЕРІАЛІВ

У першому розділі представлені базові теоретичні відомості про функціонально-градієнтні матеріали, їх фізико-механічні властивості та математичні закони макроскопічного розподілу фаз. Також тут розглянуто основні положення та гіпотези класичної теорії згину балок, які слугують фундаментальною основою для подальшого чисельного моделювання

1.1 Концепція та властивості ФГМ

Сучасна техніка, зокрема в аерокосмічній, машинобудівній та біомедичній галузях, висуває дедалі більші вимоги до конструкційних матеріалів. Традиційні однорідні матеріали або класичні шаруваті композити часто не здатні повною мірою задовольнити експлуатаційні вимоги, такі як одночасна стійкість до надвисоких температур, висока міцність, в’язкість руйнування та низька питома вага. У класичних шаруватих композитах різка зміна фізико-механічних властивостей на межі розділу шарів призводить до виникнення значних міжшарових дотичних і нормальних напружень. Це є причиною одного з найпоширеніших механізмів руйнування таких конструкцій – розшарування під дією інтенсивних механічних або термічних навантажень.

Концепція функціонально-градієнтних матеріалів була запропонована як ефективне розв’язання проблеми концентрації напружень на межах розділу середовищ [2, 3]. ФГМ являють собою передовий клас передових композитних матеріалів, у яких об’ємна частка складових фаз змінюється в просторі за наперед заданим неперервним законом [4]. Завдяки цій поступовій зміні мікроструктури усуваються різкі межі поділу між компонентами. Як наслідок, матеріал набуває унікальної здатності адаптуватися до зовнішніх впливів,

об’єднуючи в єдиному монолітному тілі взаємовиключні властивості різних речовин без структурних стрибків.

Безперервна зміна на мікрорівні мікроструктури матеріалу зумовлює відповідну плавну зміну його макроскопічних фізико-механічних характеристик. У математичних моделях механіки суцільного середовища властивості ФГМ розглядаються не як константи, а як неперервні, диференційовані функції просторових координат. До ключових макроскопічних параметрів, що визначають напружено-деформований стан конструкції, належать модуль пружності, густина та коефіцієнт лінійного температурного розширення.

Зміна модуля пружності (модуля Юнга) за координатами дає змогу набагато ефективніше розподіляти напруження в деталі, коли на неї діють зовнішні сили. Найкращій приклад, це плавний перехід від кераміки до металу. Кераміка дуже тверда, стійка до зносу та високих температур, але при цьому досить крихка. Метал же навпаки, пластичний і добре чинить опір поширенню тріщин. Якщо поєднати їх без різких меж, отримаємо конструкцію, яка з одного боку захищена від нагріву та стирання, а з іншого – має високу загальну міцність і не руйнується раптово від ударів. З математичної точки зору така будова матеріалу означає, що модуль Юнга перестає бути звичайною константою. У класичному законі Гука він тепер записується як функція від просторових координат, наприклад, $E(x)$ або $E(y)$. Наявність такого змінного коефіцієнта досить сильно ускладнює диференціальні рівняння згину, знайти точний аналітичний розв’язок для них здебільшого неможливо. Тому для розрахунку напружено-деформованого стану таких конструкцій допомагає комп’ютерне моделювання та чисельні методи.

Окрім модуля пружності, велике значення має те, як у матеріалі розподіляється густина. Замість того, щоб робити всю деталь однаково важкою, можна зосередити більш щільні та міцні компоненти лише там, де виникають найбільші навантаження. Це дозволяє суттєво зменшити загальну вагу конструкції, що може бути критично важливим. Також, нерівномірний розподіл маси впливає на те, як деталь поводиться в русі або під час вібрацій. Змінюючи

густину за певним законом, можна свідомо керувати інерційними характеристиками балки чи пластини. Наприклад, це дає можливість «налаштувати» власні частоти конструкції таким чином, щоб уникнути небезпечного резонансу під час її експлуатації.

Наступна важлива властивість ФГМ – плавна зміна коефіцієнта лінійного температурного розширення. У звичайних шаруватих конструкціях, якщо жорстко з'єднати два різні матеріали і піддати їх сильному нагріву, вони почнуть розширюватися по-різному. Через цю різницю на межі їх з'єднання різко зростають температурні напруження, що часто приводить до розтріскування або відриву шарів. У функціонально-градієнтному матеріалі цієї чіткої межі просто не існує. Деформація від нагріву змінюється поступово і небезпечні стрибки напружень згладжуються. На практиці, зовнішня керамічна частина бере на себе удар надвисоких температур і виступає як надійний тепловий бар'єр, а внутрішня металева частина відводить залишкове тепло і тримає на собі основне механічне навантаження. Завдяки такій взаємодії, ФГМ є чи не єдиним реальним варіантом для деталей, що працюють в екстремальних теплових умовах, як-от лопатки газових турбін, сопла ракетних двигунів або теплозахисні екрани [5].

Від того як конструкція буде працювати та які навантаження сприйматиме, напрямок зміни властивостей матеріалу може бути різним. Найбільш поширеним і досліджуваним варіантом є трансверсальний градієнт, тобто зміна характеристик за товщиною або висотою деталі. Цей підхід підходить для елементів, які зазнають згину або сильного температурного перепаду між своїми поверхнями. Наприклад, якщо деталь має захищати від гарячого газу згори, верхню частину перерізу роблять із тугоплавкої кераміки, а нижню залишають металевою для забезпечення загальної міцності та здатності до пластичної деформації. Між ними властивості плавно змінюються за визначеним математичним законом – найчастіше степеневим. Змінюючи показник цього степеня, можна «насичувати» переріз більшою кількістю металу або кераміки керуючи жорсткістю всієї балки. Важливим наслідком такої неоднорідності є те, що нейтральна вісь при згині більше не лежить чітко посередині перерізу. Вона

зміщується у бік більш жорсткого матеріалу. Цей зсув є критично важливим фактором, який обов'язково треба враховувати в математичних моделях та чисельних розрахунках, щоб отримати правильні значення прогинів і напружень [6].

З іншого боку, існує поздовжній градієнт, при якому властивості матеріалу змінюються вздовж головної осі конструкції. У реальних умовах більшість балок навантажені досить нерівномірно, часта ситуація, що біля місця жорсткого закріплення виникають величезні згинальні моменти, а на вільному краї зусилля зводяться до мінімуму. Для проєктування такої деталі з однорідного матеріалу, доводиться закладати міцність під найгірший випадок, через що більша частина конструкції виходить невиправдано масивною. ФГМ із поздовжнім градієнтом дозволяє зробити матеріал максимально жорстким та щільним лише в зоні великого напруження і поступово розбавляти його більш легким матеріалом на розвантажених ділянках. У диференціальних рівняннях рівноваги це відображається як залежність модуля Юнга безпосередньо від поздовжньої координати, що робить згинальну жорсткість змінною величиною. Хоча технологічно виготовити такий матеріал складніше, його використання дозволяє досягти унікального співвідношення міцності до власної ваги конструкції.

Таким чином, ФГМ надає корисний інструмент для спрямованого проєктування матеріалів. Шляхом вибору відповідних складових матеріалів та математичного закону зміни їх концентрації, стає можливим створити конструкційний елемент з наперед заданим, оптимальним для конкретних умов експлуатації відгуком на механічні та температурні навантаження.

1.2 Закони розподілу властивостей

Будь-яке математичне дослідження неоднорідних середовищ починається з побудови адекватної фізико-механічної моделі самого матеріалу. У класичній теорії пружності матеріали розглядаються як макроскопічно однорідні ізотропні

тіла, що дозволяє оперувати сталими характеристиками. Проте у випадку функціонально-градієнтних матеріалів, які за своєю природою є багатофазними композитними структурами, виникає фундаментальна проблема усереднення (гомогенізації) [7]. Оскільки на мікрорівні матеріал складається з дискретних включень однієї фази в матрицю іншої, безпосередньо використовувати такі мікроструктурні дані у крайових задачах макромеханіки практично неможливо. Тому в механіці суцільних середовищ переходять до концепції «ефективного середовища» – уявного суцільного ідеалізованого матеріалу, властивості якого в кожній точці неперервно змінюються і відображають усереднений вплив усіх фаз у цій локальній околиці [8].

Для визначення цих ефективних властивостей у сучасній механіці композитів існує ціла низка мікромеханічних моделей [9]. Серед них виділяють схеми Морі-Танаки, самоузгоджені методи та оцінки меж Хашіна-Штрікмана, які враховують не лише співвідношення компонентів, але й форму включень, їхню взаємодію та пружні властивості матриці [10]. Однак для макроскопічного аналізу поведінки конструкцій, таких як згин балок чи пластин, використання занадто складних мікромеханічних моделей часто призводить до невиправданого ускладнення диференціальних рівнянь без суттєвого підвищення точності кінцевого результату. Тому в більшості теоретичних досліджень макроскопічної поведінки ФГМ застосовують феноменологічний підхід, заснований на правилі сумішей.

Правило сумішей є базовою математичною абстракцією для опису градієнтних середовищ. Його фундаментальна база полягає в тому, що будь-яка макроскопічна ефективна характеристика матеріалу в заданій точці простору формується як лінійна комбінація властивостей його базових складових. Ваговими коефіцієнтами у такій комбінації виступають локальні об’ємні частки кожної з фаз. Якщо розглядати класичну двофазну систему, наприклад, метал та кераміку – то фізичний стан матеріалу в кожній точці повністю визначається об’ємною часткою першої фази кераміки V_c та об’ємною часткою другої фази металу V_m. Виходячи із закону суцільності середовища, сума об’ємних часток

усіх складових у будь-якій локальній точці завжди є величиною сталою і дорівнює одиниці:

$$V_c + V_m = 1. \tag{1.1}$$

Завдяки цій умові, просторовий розподіл будь-якої локальної властивості P (зокрема модуля пружності Юнга, густини або коефіцієнта температурного розширення) можна виразити через константи чистих матеріалів та єдину функцію розподілу. У загальному вигляді математична модель ефективної властивості за правилом сумішей записується так:

$$P(r) = P_c V_c(r) + P_m\big(1 - V_c(r)\big), \tag{1.2}$$

де r – вектор просторових координат;

P_c та P_m – відповідні властивості чистої кераміки та металу.

Згрупувавши члени рівняння, отримуємо класичну формулу гомогенізації для двокомпонентного ФГМ:

$$P(r) = (P_c - P_m)V_c(r) + P_m\,. \tag{1.3}$$

Таким чином, фундаментальна задача математичного моделювання складного неоднорідного середовища зводиться до вибору однієї скалярної функції $V_c(r)$, яка має задовольняти задані крайові умови на поверхнях тіла та адекватно описувати плавний перехід між компонентами.

Вибір конкретного вигляду функції $V_c(r)$ повністю визначається технологічними можливостями та експлуатаційними вимогами до конструкції.

Для елементів конструкцій, таких як пластини або балки, що піддаються згину та інтенсивному нагріву з одного боку, класичним є використання трансверсального градієнта, тобто зміни за товщиною [11]. У цьому випадку функція розподілу залежить виключно від поперечної координати y. Якщо

початок координат розмістити на геометричній серединній площині прямокутного перерізу висотою h, то координата y змінюватиметься на відрізку $[-\frac{h}{2};\frac{h}{2}]$.

Для математичного опису такого профілю найширшого застосування набув степеневий закон розподілу об'ємної частки [12]. Відповідно до цього закону, макроскопічна частка однієї з фаз, наприклад, матеріалу верхньої грані, задається нелінійною функцією:

$$V_t(y) = \left(\frac{y+\frac{h}{2}}{h}\right)^p. \tag{1.4}$$

У цьому виразі p – невід'ємний безрозмірний параметр, який називають показником об'ємної частки, або індексом градієнта. Саме він визначає форму кривої розподілу матеріалу та є головним параметром керування жорсткістю у задачах оптимізації. Аналіз цієї функції демонструє її універсальність, при $p = 1$ маємо найпростіший лінійний розподіл. При $p \to 0$ функція прямує до одиниці, що відповідає граничному випадку суцільної однорідної балки з матеріалу верхньої грані. А при $p \to \infty$ об'ємна частка верхньої фази стає нульовою, перетворюючи тіло на однорідний матеріал нижньої грані. Варіюючи значення p, є змога плавно зміщувати концентрацію жорсткішої або термостійкішої фази до потрібної поверхні, формуючи опуклі або ввігнуті профілі розподілу.

Підставляючи отриману функцію у правило сумішей, приходимо до явних розрахункових залежностей для ефективного модуля пружності $E(y)$ та коефіцієнта лінійного температурного розширення $\alpha(y)$ за висотою перерізу:

$$E(y) = (E_t - E_b)\left(\frac{y+\frac{h}{2}}{h}\right)^p + E_b, \tag{1.5}$$

$$\alpha(y) = (\alpha_t - \alpha_b)\left(\frac{y + \frac{h}{2}}{h}\right)^p + \alpha_b, \tag{1.6}$$

де індекси t (top) та b (bottom) позначають константи матеріалів на верхній та нижній поверхнях відповідно.

Поряд з трансверсальними моделями розвивається концепція поздовжнього градієнта. Такий розподіл є обґрунтованим для елементів конструкцій, що зазнають суттєво нерівномірного навантаження вздовж своєї поздовжньої осі x.

Замість багатофазних степеневих розподілів, для поздовжнього напрямку часто застосовують феноменологічні моделі, які безпосередньо апроксимують зміну макроскопічного модуля пружності. У базовій математичній постановці розглядається лінійний закон зміни пружних властивостей вздовж осі x:

$$E(x) = E_0(1 + kx), \tag{1.7}$$

де E_0 – базове значення модуля пружності на початку координат ($x = 0$), а k – коефіцієнт поздовжнього градієнта, який задає інтенсивність зміни жорсткості. Такий підхід дозволяє раціонально перерозподілити матеріал, локально збільшити жорсткість конструкції у найбільш напружених перерізах і водночас полегшити малонавантажені ділянки, мінімізуючи загальну масу системи.

Введення описаних неперервних функцій просторових координат відіграє велику роль у побудові математичної моделі. Вони дозволяють відмовитися від кусково-сталих коефіцієнтів, які викликають сингулярності в задачах із шаруватими композитами, і перейти до класичних диференціальних рівнянь теорії пружності зі змінними неперервними коефіцієнтами. Це, у свою чергу, створює строге математичне підґрунтя для застосування ефективних чисельних методів інтегрування крайових задач згину балок.

1.3 Термомеханічні навантаження

Однією з головних історичних передумов створення функціонально-градієнтних матеріалів була необхідність захисту аерокосмічних апаратів від інтенсивних теплових потоків під час проходження щільних шарів атмосфери. У реальних умовах експлуатації такі конструкції не часто зазнають лише чисто механічного навантаження. Зазвичай вони працюють у складному термомеханічному середовищі, де одночасно діють зовнішні силові фактори та значні перепади температур, наприклад, гарячий газ з одного боку обшивки та система охолодження або космічний вакуум з іншого. Саме тому коректне врахування впливу температурних полів на напружено-деформований стан є важливою частиною розрахунку ФГМ-конструкцій.

Фізичний механізм виникнення температурних напружень тісно пов’язаний із явищем теплового розширення тіл [13]. Коли матеріал нагрівається, його кристалічна решітка прагне збільшити свої розміри. Величину цього розширення характеризує коефіцієнт лінійного температурного розширення α. Якщо тіло може вільно розширюватися у всіх напрямках, нагрівання призведе лише до зміни його форми та об’єму, але внутрішні напруження дорівнюватимуть нулю. Проте в реальних інженерних системах вільне теплове розширення завжди обмежене. Ці обмеження можуть бути зовнішніми, зокрема жорсткі опори або защемлення країв балки, та внутрішніми. У неоднорідних матеріалах внутрішні обмеження виникають через те, що сусідні шари мають різні коефіцієнти α і намагаються розширитися на різну величину, стримуючи одне одного [14].

У класичних шаруватих композитах стрибкоподібна зміна коефіцієнта α на межі шарів викликає різкий стрибок дотичних напружень, що призводить до руйнування. Натомість у функціонально-градієнтному матеріалі завдяки неперервному розподілу $\alpha(y)$ та модуля пружності $E(y)$ термічні деформації змінюються плавно. Це дозволяє уникнути небезпечних сингулярностей, однак

загальний рівень температурних напружень у тілі залишається значним і вимагає точного математичного моделювання.

У задачах макромеханіки температурний вплив описується через зміну температури відносно початкового природного стану, яку позначають як ΔT. Враховуючи специфіку роботи ФГМ-балок як теплових бар'єрів, найбільший практичний інтерес становить одновимірний розподіл температури за висотою перерізу. У найпростішій феноменологічній постановці, яка часто використовується для інженерних розрахунків тонких балок та пластин, припускається лінійний закон зміни температури за товщиною:

$$\Delta T(y) = \Delta T_{bot} + \left(\Delta T_{top} - \Delta T_{bot}\right)\frac{y + \frac{h}{2}}{h}, \tag{1.8}$$

де ΔT_{bot} та ΔT_{top} – задані прирости температур на нижній та верхній гранях відповідно.

Згідно з узагальненим законом Гука для термопружного середовища, повна деформація в будь-якій точці перерізу складається з двох частин, пружної деформації (яка викликає напруження) та вільної температурної деформації $\epsilon_T = \alpha(y)\Delta T(y)$ [15]. Відповідно, математична модель згину балки повинна враховувати, що нормальні напруження σ залежать не лише від механічного згину та розтягу, але й від локального нагріву.

При інтегруванні цих напружень по площі поперечного перерізу виникають додаткові силові фактори – так звана фіктивна температурна поздовжня сила N_T та температурний згинальний момент M_T. Ці величини безпосередньо входять до диференціальних рівнянь рівноваги балки. Тобто, з математичної точки зору, нерівномірне температурне поле діє на конструкцію аналогічно до зовнішніх розподілених або зосереджених навантажень. Балка може прогинатися і зазнавати колосальних внутрішніх напружень навіть за повної відсутності зовнішніх механічних сил, виключно під дією різниці температур ΔT між її гранями.

Завершуючи огляд термомеханічної поведінки, варто підкреслити, розрахунок ФГМ-конструкцій вимагає комплексного підходу, де в єдиній системі диференціальних рівнянь одночасно враховуються як силові фактори, зокрема зосереджені сили, розподілені навантаження, так і температурні градієнти з урахуванням безперервної просторової зміни пружних та теплофізичних властивостей середовища.

2 МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТА ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ

Спираючись на розглянуті теоретичні основи механіки суцільних середовищ, у цьому розділі буде побудовано комплексну математичну модель деформування ФГМ-балок. Особлива увага приділяється математичному обґрунтуванню зміщення фізичної нейтральної осі та інтеграції впливу потужних температурних градієнтів у класичні диференціальні рівняння рівноваги.

2.1 Кінематична гіпотеза та рівняння рівноваги

Строге математичне визначення напружено-деформованого стану будь-якого пружного тіла вимагає розв’язання повної системи диференціальних рівнянь теорії пружності у тривимірному просторі [16]. Проте для елементів конструкцій, у яких один розмір (довжина L) суттєво переважає над двома іншими (висотою h та шириною b), такий підхід є обчислювально надлишковим. Для таких тіл, зокрема балок, стрижнів та валів, у механіці деформованого твердого тіла традиційно застосовують технічні теорії, які дозволяють звести складну тривимірну задачу до значно простішої одновимірної [17]. З математичної точки зору це досягається шляхом введення певних кінематичних припущень щодо характеру деформування тіла.

У цій роботі розглядається поведінка тонких прямих балок, для яких відношення довжини до висоти перерізу є достатньо великим ($\frac{L}{h} \geq 10$). Тому за основу математичної моделі взято класичну теорію згину Ейлера-Бернуллі [12]. Фундаментом цієї теорії є кінематична гіпотеза плоских перерізів, гіпотеза Бернуллі [19]. Згідно з нею, будь-який поперечний переріз балки, який до деформації був плоским і перпендикулярним до її поздовжньої осі, залишається

плоским і перпендикулярним до викривленої осі і після прикладання навантаження.

Прийняття гіпотези плоских перерізів має глибокі математичні наслідки. Воно означає, що нехтуються деформації зсуву ($\gamma_{xy} \approx 0$) та деформації поперечного обтиснення ($\varepsilon_y \approx 0$). Завдяки цьому, поле переміщень будь-якої точки балки з координатами (x, y) можна повністю описати лише через функції, що залежать від однієї просторової координати x. Математично поле переміщень у рамках моделі Ейлера-Бернуллі записується у вигляді:

$$u(x, y) = u_0(x) - y\frac{dw(x)}{dx}, \tag{2.1}$$

$$w(x, y) = w(x). \tag{2.2}$$

де $u(x, y)$ – поздовжнє переміщення довільної точки перерізу;

$w(x)$ – поперечне переміщення (прогин) балки, яке вважається однаковим для всіх точок по висоті перерізу;

$u_0(x)$ – поздовжнє переміщення точок серединної площини (відлікової поверхні, $y = 0$);

$\frac{dw}{dx}$ – кут повороту поперечного перерізу.

Диференціюючи вираз для поздовжнього переміщення $u(x, y)$ по координаті x, отримуємо ключову кінематичну залежність для визначення єдиної ненульової компоненти тензора деформацій – лінійної поздовжньої деформації ε_x:

$$\varepsilon_x(x, y) = \frac{du_0(x)}{dx} - y\frac{d^2w(x)}{dx^2}. \tag{2.3}$$

Формула (2.3) показує, що деформація в будь-якій точці балки складається з двох компонент – рівномірного розтягу/стиску відлікової поверхні ($\frac{du_0(x)}{dx}$) та

деформації згину, яка лінійно залежить від відстані y до цієї поверхні і пропорційна кривині пружної лінії.

Наступним кроком є запис диференціальних рівнянь рівноваги нескінченно малого елемента балки. Вони пов'язують внутрішні силові фактори – згинальний момент $M(x)$ та поперечну силу $Q(x)$ – із зовнішнім розподіленим навантаженням $q(x)$. З умов статики для елемента dx випливають відомі диференціальні залежності Журавського:

$$\frac{dQ(x)}{dx} = -q(x), \tag{2.4}$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = Q(x). \tag{2.5}$$

Об'єднуючи ці два рівняння, отримуємо базове диференціальне рівняння рівноваги балки у внутрішніх зусиллях:

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} = -q(x). \tag{2.6}$$

Варто особливо наголосити на тому, що сама по собі кінематична гіпотеза Бернуллі та наведені рівняння рівноваги мають суто геометричний та статичний характер. Вони виводяться без жодних припущень про те, з якого саме матеріалу зроблена балка – зі сталі, дерева чи функціонально-градієнтного композиту. Тобто рівняння $\varepsilon_x = u_0' - yw''$ та $\frac{d^2M}{dx^2} = -q$ є універсальними.

Принципова ж різниця між класичним опором матеріалів та ФГМ починає проявлятися на наступному етапі – під час зв'язування цих деформацій із напруженнями через узагальнений закон Гука та подальшого інтегрування напружень по площі перерізу.

2.2 Інтегральні характеристики перерізу ФГМ-балки

Як було детально розглянуто в попередньому підрозділі, кінематична гіпотеза плоских перерізів та диференціальні рівняння статики мають суто геометричний і силовий характер. Вони є справедливими незалежно від того, з якого саме матеріалу виготовлена конструкція. Перехід від суто геометричного опису деформацій до внутрішніх зусиль здійснюється за допомогою фізичних рівнянь стану тіла, а саме – одновимірного закону Гука [20].

Для тонкої балки закон Гука встановлює лінійну пропорційність між нормальним напруженням σ_x та поздовжньою деформацією ε_x:

$$\sigma_x(x, y) = E(y)\varepsilon_x(x, y). \tag{2.6}$$

Принципова відмінність розрахунку функціонально-градієнтних матеріалів від класичного опору матеріалів полягає саме в цьому рівнянні. У традиційній однорідній балці модуль пружності є константою, тому розподіл напружень за висотою перерізу повністю повторює з точністю до постійного множника лінійний розподіл деформацій. У ФГМ-балці модуль пружності $E(y)$ є неперервною функцією поперечної координати. Це означає, що навіть при ідеально лінійному розподілі деформацій, епюра нормальних напружень σ_x набуває складного нелінійного характеру, повторюючи градієнтний профіль матеріалу.

Щоб записати макроскопічні рівняння рівноваги балки через переміщення, необхідно проінтегрувати ці локальні напруження по всій площі поперечного перерізу A. Підставляючи кінематичний вираз для деформації $\varepsilon_x = u_0' - yw''$ у закон Гука та виконуючи інтегрування, отримуємо вирази для головних внутрішніх силових факторів – поздовжньої сили N та згинального моменту M. Ця математична операція неминуче породжує появу трьох базових інтегральних характеристик перерізу ФГМ-балки.

Перша – осьова жорсткість EA (extensional stiffness), яка характеризує опір перерізу рівномірному розтягу або стиску:

$$EA = \int E(y)dA = b\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(y)dy. \tag{2.7}$$

Друга – статичний момент жорсткості ES (coupling stiffness), який описує взаємний вплив (зв'язність) деформацій розтягу та згину:

$$ES = \int E(y)ydA = b\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(y)ydy. \tag{2.8}$$

Третя – загальна згинальна жорсткість EI_{tot} (bending stiffness) відносно геометричної серединної площини:

$$EI_{tot} = \int E(y)y^2dA = b\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(y)y^2dy. \tag{2.8}$$

У класичному випадку однорідної балки, де $E = const$, якщо початок координат розмістити рівно посередині перерізу, інтеграл непарної функції y на симетричному інтервалі дорівнює нулю, отже $ES \equiv 0$. Це фундаментальний факт, в однорідних балках задачі розтягу та згину є математично і фізично незалежними.

Проте у функціонально-градієнтному матеріалі через асиметрію модуля пружності $E(y)$ відносно геометричного центру величина ES стає відмінною від нуля. Це призводить до виникнення так званого ефекту зв'язності, поява чистого згинального моменту автоматично викликає видовження осі балки, а суто осьова сила змушує її викривлятися. Щоб уникнути цього математичного ускладнення та звести систему диференціальних рівнянь до більш зручного вигляду, у

механіці неоднорідних тіл застосовують спеціальний аналітичний прийом. Він полягає у введенні нової відлікової поверхні – фізичної нейтральної осі, що вимагає окремого обґрунтування та розрахунку уточнених параметрів жорсткості системи, які будуть детально розглянуті в наступних пунктах.

2.2.1 Математичне обґрунтування зміщення фізичної нейтральної осі

Як було зазначено вище, наявність ненульового статичного моменту жорсткості ES суттєво ускладнює розв’язання крайових задач. Фізично це означає, що відлікова площина (яка збігається з геометричною серединою балки $y = 0$) під час згину зазнає видовження або стискання. Тобто вона більше не є «нейтральною». У класичному опорі матеріалів вважається, що нейтральна вісь – це лінія в перерізі, довжина якої при чистому згині залишається незмінною, а деформації на ній дорівнюють нулю. Для однорідних симетричних перерізів вона завжди проходить через геометричний центр ваги.

Однак у балках із трансверсальним функціонально-градієнтним матеріалом модуль пружності розподілений несиметрично. Більш жорсткий матеріал, наприклад, кераміка, «відтягує» на себе більшу частину напружень, працюючи як своєрідний силовий каркас. Через це вісь нульових деформацій зміщується від геометричної середини в бік більш жорсткого шару [21]. Щоб математично розв’язати та розділити задачі поздовжнього розтягу та поперечного згину і повернути диференціальним рівнянням їхній класичний незалежний вигляд, необхідно перенести початок координат із геометричного центру перерізу на фізичну нейтральну вісь.

Позначимо координату цієї нової нейтральної осі відносно геометричної середини як y_0. Введемо нову локальну систему координат із віссю z, початок якої лежить на нейтральній осі, тобто $z = y - y_0$. Головна математична умова, яку ставимо перед новою віссю, полягає в тому, щоб у цій новій системі координат перехресний (статичний) момент жорсткості дорівнював нулю. Запишемо цю умову у вигляді інтеграла:

$$\int E(y)zdA = 0. \tag{2.9}$$

Підставляючи сюди вираз $z = y - y_0$, отримуємо:

$$\int E(y)(y - y_0)dA = 0 \tag{2.10}$$

Розкриваючи дужки та користуючись лінійністю інтеграла, маємо:

$$\int E(y)ydA - y_0 \int E(y)dA = 0. \tag{2.11}$$

Зважаючи на раніше введені позначення для інтегральних характеристик, перший інтеграл – це статичний момент жорсткості відносно геометричної осі ES, а другий інтеграл – це осьова жорсткість EA. Оскільки координата нейтральної осі y_0 є константою для даного перерізу і не залежить від змінної інтегрування, можемо записати:

$$ES - y_0 EA = 0. \tag{2.12}$$

Звідси елементарно виводиться остаточна формула для визначення положення фізичної нейтральної осі в неоднорідній балці:

$$y_0 = \frac{ES}{EA} = \frac{\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(y)ydy}{\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(y)dy}. \tag{2.13}$$

Цей вираз має найважливіше значення для розрахунку ФГМ-конструкцій. Він математично доводить, що зміщення нейтральної осі повністю визначається

законом розподілу модуля пружності. У разі переходу до поздовжнього градієнта або однорідного матеріалу $E = const$, модуль пружності виноситься за знак інтеграла і скорочується, а інтеграл від непарної функції y на симетричному інтервалі дає нуль, повертаючи нас до класичного результату $y_0 = 0$.

2.2.2 Формули для обчислення ефективної згинальної жорсткості

Після того, як положення справжньої нейтральної осі знайдено, усі подальші розрахунки згину необхідно проводити відносно неї. Це означає, що загальну згинальну жорсткість балки EI_{tot}, яка була обчислена відносно геометричного центру, потрібно перерахувати відносно нової осі z. Ця математична процедура є прямим аналогом класичної теореми Гюйгенса-Штейнера (про паралельне перенесення осей) з теоретичної механіки, але застосованою не просто до геометричних моментів інерції площі, а до зведених моментів жорсткості.

Ефективна згинальна жорсткість EI_{eff} відносно нейтральної осі визначається як інтеграл від добутку модуля пружності на квадрат відстані до цієї нової осі:

$$EI_{eff} = \int E(y) z^2 dA = \int E(y)(y - y_0)^2 dA. \quad (2.14)$$

Розкриємо квадрат різниці під знаком інтеграла:

$$EI_{eff} = \int E(y)(y^2 - 2yy_0 + y_0^2) dA. \quad (2.15)$$

Розбиваючи цей вираз на суму трьох окремих інтегралів і виносячи константу y_0 за знак інтегрування, отримуємо:

$$EI_{eff} = \int E(y)y^2 dA - 2y_0 \int E(y)ydA + y_0^2 \int E(y)dA. \quad (2.16)$$

Замінюючи інтеграли на раніше визначені базові характеристики перерізу (EI_{tot}, ES та EA), приходимо до такого рівняння:

$$EI_{eff} = EI_{tot} - 2y_0 ES + y_0^2 EA. \quad (2.17)$$

Цей вираз можна ще більше спростити, якщо згадати щойно виведену залежність для нейтральної осі $ES = y_0 EA$. Підставимо це значення в середній доданок:

$$EI_{eff} = EI_{tot} - 2y_0(y_0 EA) + y_0^2 EA = EI_{tot} - 2y_0^2 EA + y_0^2 EA. \quad (2.18)$$

Після зведення подібних доданків отримуємо фінальну, надзвичайно елегантну та зручну для програмування формулу розрахунку ефективної жорсткості:

$$EI_{eff} = EI_{tot} - EA \cdot y_0^2. \quad (2.19)$$

Отримана ефективна згинальна жорсткість EI_{eff} є ключовим макроскопічним параметром еквівалентної однорідної балки. Використання цієї характеристики повністю «поглинає» в собі всю складність несиметричного розподілу властивостей ФГМ. Саме величина EI_{eff} підставляється у класичне диференціальне рівняння пружної лінії $\frac{EI_{eff}\mathrm{d}^2\mathrm{w}}{\mathrm{dx}^2} = -M$, що дозволяє застосовувати для неоднорідних матеріалів традиційні методи опору матеріалів та будівельної механіки [22]. Для програмної реалізації (у чисельному розв’язувачі) інтеграли EA, ES та EI_{tot} найпростіше обчислювати наближено за

допомогою квадратурних формул, що автоматизує визначення EI_{eff} для будь-якого, навіть найскладнішого неперервного профілю $E(y)$.

2.3 Математичне моделювання фіктивного температурного моменту M_T та температурної поздовжньої сили N_T

Як було фізично обґрунтовано в першому розділі, температурне поле викликає в тілі вільні температурні деформації, які в умовах неоднорідного матеріалу та зовнішніх або внутрішніх зв'язків трансформуються у значні термічні напруження. Тепер, маючи математичний апарат для визначення ефективних характеристик перерізу та знаючи точне положення фізичної нейтральної осі y_0, можемо строго інтегрувати цей температурний вплив у загальну систему диференціальних рівнянь рівноваги балки [23].

Основою для математичного опису термомеханічної поведінки є узагальнений закон Гука. Для одновимірного напруженого стану балки з урахуванням температурних деформацій він набуває такого вигляду:

$$\sigma_x(x,y) = E(y)[\varepsilon_x(x,y) - \alpha(y)\Delta T(y)]. \qquad (2.20)$$

У цьому рівнянні $\varepsilon_x(x,y)$ – це повна поздовжня деформація волокна, яка розглядається з точки зору суто кінематичної гіпотези плоских перерізів. Член $\alpha(y)\Delta T(y)$ являє собою вільну температурну деформацію, тобто те видовження, яке отримав би матеріал за відсутності будь-якого опору з боку сусідніх шарів. Різниця в квадратних дужках – це пружна складова деформації, яка власне і генерує нормальне напруження σ_x у матеріалі з локальним модулем Юнга $E(y)$.

Згадаємо вираз для повної кінематичної деформації, але тепер запишемо його відносно знайденої раніше справжньої нейтральної осі. Для цього замість координати y від геометричного центру використаємо відстань від нейтральної осі $z = y - y_0$:

$$\varepsilon_x(x,z) = \frac{du_0}{dx} - z\frac{d^2w}{dx^2}. \tag{2.21}$$

Підставляючи цей кінематичний вираз у термопружний закон Гука, отримуємо розгорнуту формулу для напружень у будь-якій точці перерізу ФГМ-балки:

$$\sigma_x(x,y) = E(y)\left[\frac{du_0}{dx} - (y-y_0)\frac{d^2w}{dx^2} - \alpha(y)\Delta T(y)\right]. \tag{2.22}$$

Для того щоб перейти від локальних напружень до макроскопічних внутрішніх зусиль (поздовжньої сили N та згинального моменту M), необхідно проінтегрувати цей вираз по всій площі поперечного перерізу A.

Спочатку знайдемо повну поздовжню силу N, інтегруючи σ_x:

$$N = \int E(y)\frac{du_0}{dx}dA - \int E(y)(y-y_0)\frac{d^2w}{dx^2}dA - \int E(y)\alpha(y)\Delta T(y)da. \tag{2.23}$$

Оскільки відлік ведеться від справжньої нейтральної осі, другий інтеграл, який є по суті статичним моментом відносно цієї осі, тотожно дорівнює нулю (це і була головна мета введення y_0). Перший інтеграл дає нам $EA\frac{du_0}{dx}$. А от третій інтеграл формує нову, виключно температурну складову. Позначимо її як N_T:

$$N_T = b\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(y)\alpha(y)\Delta T(y)dy. \tag{2.24}$$

Тоді рівняння для поздовжньої сили набуває вигляду $N = EAu_0' - N_T$. Величину N_T у будівельній механіці називають фіктивною температурною поздовжньою силою.

Аналогічну процедуру застосуємо для знаходження загального згинального моменту M відносно нейтральної осі. Для цього помножимо напруження σ_x на плече $(y - y_0)$ і проінтегруємо:

$$M = \int \sigma_x (y - y_0) dA. \tag{2.25}$$

Після підстановки виразу для напружень та розкриття дужок, інтеграл від першого доданка знову обнуляється (через властивість нейтральної осі). Інтеграл від другого доданка дає нам ефективну згинальну жорсткість EI_{eff}, помножену на кривину. А інтеграл від температурного члена формує фіктивний температурний згинальний момент M_T:

$$M_T = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(y)\alpha(y)\Delta T(y)(y - y_0) dy. \tag{2.26}$$

Таким чином, макроскопічний згинальний момент у перерізі дорівнює:

$$M = -EI_{eff} \frac{d^2 w}{dx^2} - M_T. \tag{2.27}$$

Ці інтегральні характеристики, N_T та M_T, називаються «фіктивними» зусиллями з дуже конкретної причини, вони не є реальними механічними силами, прикладеними до балки ззовні. Вони є математичною абстракцією, що акумулює в собі весь складний вплив неоднорідного температурного розширення мікроструктури ФГМ.

Переносячи M_T у ліву частину, отримуємо остаточне диференціальне рівняння пружної лінії балки з урахуванням термомеханічного навантаження:

$$EI_{eff}\frac{d^2w}{dx^2} = -(M(x) + M_T). \quad (2.28)$$

Це математичне формулювання показує, що з точки зору алгоритму розв'язання температурний вплив можна розглядати просто як додаткове зовнішнє навантаження. Навіть якщо механічний момент $M(x) = 0$, тобто до балки не прикладено жодної сили, наявність температурного градієнта створює момент M_T, який змушує балку викривлятися. При чисельній реалізації моделі достатньо один раз проінтегрувати по перерізу поля $E(y)$, $\alpha(y)$ та $\Delta T(y)$ для знаходження M_T, після чого розрахунок прогинів зводиться до класичного подвійного інтегрування правої частини диференціального рівняння [24].

2.4 Постановка крайових задач

Маючи в розпорядженні загальне диференціальне рівняння пружної лінії, можемо перейти від локального опису деформацій до знаходження макроскопічних переміщень усієї конструкції. Це диференціальне рівняння другого порядку пов'язує невідому функцію прогину $w(x)$ із заданими функціями згинального моменту $M(x)$ та температурного моменту $M_T(x)$. Для того щоб отримати єдиний і фізично змістовний розв'язок цього рівняння, необхідно сформулювати коректну крайову задачу. З математичної точки зору це означає доповнити диференціальне рівняння системою граничних (крайових) умов на кінцях балки ($x = 0$ та $x = L$), які відображають спосіб її закріплення в просторі.

У загальному випадку інтегрування диференціального рівняння згину зводиться до послідовного знаходження першої похідної (кута повороту перерізу $\theta = \frac{dw}{dx}$) та самої функції прогину $w(x)$:

$$\frac{dw}{dx} = -\int \frac{M(x) + M_T(x)}{EI_{eff}(x)} dx + C_1. \quad (2.29)$$

$$w(x) = -\int \left(\int \frac{M(x) + M_T(x)}{EI_{eff}(x)} dx \right) dx + C_1 x + C_2. \quad (2.30)$$

де C_1 та C_2 – константи інтегрування, значення яких визначаються виключно з граничних умов.

У класичній будівельній механіці розглядають кілька базових розрахункових схем, які ідеалізують реальні вузли закріплення [25]. Залежно від типу опор, крайова задача може бути статично визначеною (коли всі опорні реакції можна знайти лише з рівнянь рівноваги статики) або статично невизначеною (коли рівнянь статики недостатньо, і необхідно залучати рівняння сумісності деформацій). Розглянемо постановку крайових задач для трьох найбільш поширених типів закріплення ФГМ-балки.

Шарнірно оперта балка (статично визначена задача). У цій схемі лівий кінець балки ($x = 0$) спирається на шарнірно-нерухому опору, яка забороняє вертикальні та горизонтальні переміщення, але дозволяє вільний поворот перерізу. Правий кінець ($x = L$) спирається на шарнірно-рухому опору, яка забороняє лише вертикальні переміщення. З точки зору граничних умов для прогину це записується так:

$$w(0) = 0, \quad (2.31)$$

$$w(L) = 0. \quad (2.32)$$

Оскільки опори шарнірні, вони не створюють реактивних зосереджених моментів. Розподіл згинального моменту $M(x)$ по довжині балки повністю визначається зовнішніми силами (розподіленим навантаженням q та зосередженою силою F) за допомогою методу перерізів. Після знаходження $M(x)$ диференціальне рівняння інтегрується двічі. Константа C_2 обнуляється

завдяки умові $w(0) = 0$, а константа C_1 визначається з умови $w(L) = 0$. У результаті отримуємо повну картину прогинів $w(x)$ та кутів повороту.

Консольна балка (статично визначена задача). Консоль являє собою балку, один кінець якої жорстко защемлений (наприклад, $x = 0$), а інший ($x = L$) абсолютно вільний. Жорстке защемлення накладає найсуворіші кінематичні обмеження: воно забороняє як переміщення, так і поворот перерізу. Математично це виражається системою граничних умов на лівому краї:

$$w(0) = 0, \tag{2.33}$$

$$\left.\frac{dw}{dx}\right|_{x=0} = 0. \tag{2.34}$$

У защемленні виникають три опорні реакції: вертикальна сила R, горизонтальна сила H та реактивний момент $M_{\text{защ}}$. Їхні значення знаходяться зі стандартних рівнянь статики ($\sum F_y = 0,\ \sum F_x = 0,\ \sum M = 0$). Після побудови функції згинального моменту $M(x)$ рівняння інтегрується. У цьому випадку обидві константи інтегрування (C_1 та C_2) дорівнюють нулю завдяки нульовим граничним умовам на лівому кінці, що робить розрахунок консолі найпростішим з алгоритмічної точки зору.

Балка з двостороннім защемленням (статично невизначена задача). Це найскладніший випадок закріплення, коли обидва кінці балки жорстко защемлені. Кінематичні граничні умови вимагають відсутності прогинів та поворотів на обох кінцях:

$$w(0) = 0, \qquad \left.\frac{dw}{dx}\right|_{x=0} = 0, \tag{2.35}$$

$$w(L) = 0, \qquad \left.\frac{dw}{dx}\right|_{x=L} = 0. \tag{2.36}$$

Така конструкція є тричі статично невизначеною. Навіть якщо відкинути горизонтальні реакції (припускаючи відсутність поздовжніх механічних сил), залишаються дві невідомі реакції в кожному защемленні (поперечна сила і момент), тобто загалом чотири невідомі силові фактори. Рівнянь статики для плоскої системи паралельних сил всього два.

Для розв'язання цієї проблеми в будівельній механіці застосовують метод сил або інтеграли Мора [26]. У випадку ФГМ-балки зі змінною жорсткістю EI_{eff} доцільно використовувати інтегральний метод. Суть його полягає в тому, що згинальний момент $M(x)$ представляється як сума невідомого реактивного моменту в лівому защемленні M_1, моменту від невідомої реактивної сили $R_1 \cdot x$ та відомого (балочного) моменту від зовнішнього навантаження $M_{load}(x)$:

$$M(x) = M_1 + R_1 x + M_{load}(x) \tag{2.37}$$

Підставляючи цей вираз у загальне рівняння пружної лінії та вимагаючи виконання граничних умов на правому кінці ($w(L) = 0$, $w'(L) = 0$), отримуємо систему з двох лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих M_1 та R_1. Коефіцієнтами в цій системі виступають визначені інтеграли по довжині балки від функцій, що містять обернену жорсткість $\frac{1}{EI_{eff}}(x)$.

Розв'язавши цю систему (розкриваючи статичну невизначеність), повністю визначаємо функцію моменту $M(x)$ і можемо знайти остаточні прогини $w(x)$ тим самим подвійним інтегруванням. Важливо зазначити, що у випадку наявності температурного градієнта фіктивний момент M_T також входить до цих рівнянь сумісності, викликаючи появу додаткових (часто дуже значних) реактивних зусиль у защемленнях, навіть якщо механічне навантаження відсутнє.

2.5 Чисельний метод розв’язання

Формулювання диференціального рівняння пружної лінії та відповідних крайових умов, завершує класичну математичну постановку задачі. Для найпростіших випадків – однорідної балки під дією рівномірного навантаження – це рівняння легко інтегрується аналітично, даючи відомі із опору матеріалів поліноміальні формули прогинів. Однак у випадку функціонально-градієнтних матеріалів аналітичний підхід стає вкрай неефективним, а часто й взагалі неможливим.

Головна складність полягає в тому, що ефективна згинальна жорсткість $EI_{eff}(x)$, а також температурний фіктивний момент $M_T(x)$, у загальному випадку є складними неперервними функціями координати x, особливо для балок із поздовжнім градієнтом або при складному розподілі температур. Підінтегральна функція $\frac{M(x)+M_T(x)}{EI_{eff}(\mathrm{x})}$ може набувати такого вигляду, що первісна від неї не виражається через елементарні функції. Тому для створення універсального алгоритму, здатного обробляти будь-які закони розподілу матеріалу та комбінації навантажень, єдино правильним шляхом є застосування методів обчислювальної математики [27].

Першим кроком будь-якого чисельного методу є дискретизація суцільної розрахункової області. Неперервний відрізок балки $x \in [0, L]$ розбивається на N дискретних точок, вузлів сітки, з постійним кроком $dx = \frac{L}{N-1}$. Відповідно, усі неперервні функції – модуль Юнга, згинальний момент, прогин тощо, перетворюються на одновимірні масиви довжиною N. Завдання зводиться до того, щоб знаючи значення кривини в кожному вузлі сітки, знайти значення кутів повороту та прогинів у цих же вузлах.

Для чисельного інтегрування диференціального рівняння другого порядку в роботі застосовано метод кусково-лінійної апроксимації підінтегральної функції, відомий як метод трапецій [28, 29] (у програмній реалізації йому відповідає алгоритм кумулятивного інтегрування cumtrapz). Вибір саме цього

методу обґрунтований його високою обчислювальною стабільністю, простотою програмної реалізації та ідеальною сумісністю з векторними операціями сучасних математичних бібліотек.

Математична суть методу полягає в тому, що визначений інтеграл на кожному елементарному відрізку $[x_i, x_{i+1}]$ наближено замінюється площею прямокутної трапеції [30]. Нехай підінтегральна функція кривини позначена як $f(x) = -\frac{M(x)+M_T(x)}{EI_{eff}(\text{x})}$. Тоді значення першої похідної (кута повороту θ) у вузлі $i+1$ обчислюється через значення у попередньому вузлі i за рекурентною формулою:

$$\theta_{i+1} = \theta_i + \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} dx. \tag{2.38}$$

Застосовуючи цю операцію послідовно від першого вузла до останнього, отримуємо масив кутів повороту з точністю до невідомої константи інтегрування C_1. Повторне застосування цього ж алгоритму вже до масиву кутів повороту дає нам базовий масив прогинів (первісну другого порядку):

$$w_{i+1} = w_i + \frac{\theta_i + \theta_{i+1}}{2} dx \tag{2.39}$$

Після отримання цих некоригованих масивів, алгоритм застосовує граничні умови для знаходження констант інтегрування. Наприклад, для шарнірно опертої балки прогин на правому кінці (в останньому вузлі розрахункової сітки) має дорівнювати нулю. З цього відразу знаходиться константа $C_1 = -w_{end}/L$, і весь масив прогинів коригується додаванням лінійного члена $C_1 \cdot x$.

Особливої уваги заслуговує чисельне розв’язання статично невизначеної задачі (двостороннє защемлення). Замість складних ітераційних процедур, у розробленій моделі використано ефективний алгебраїчний підхід. За допомогою

того ж кумулятивного інтегрування трапеціями паралельно обчислюються три незалежні інтеграли від базових функцій $\frac{1}{EI_{eff}(\mathrm{x})}$, $\frac{x}{EI_{eff}(\mathrm{x})}$ та $\frac{M_{load}-M_T}{EI_{eff}(\mathrm{x})}$ [31]. Граничні умови на правому кінці балки формують систему з двох лінійних алгебраїчних рівнянь, коефіцієнтами якої є останні елементи цих кумулятивних масивів. Знаходячи визначник цієї системи (детермінант), програма прямим методом обчислює невідомі реакції M_1 та R_1, після чого задача зводиться до звичайного подвійного інтегрування.

Оцінка похибки та збіжності є обов'язковим етапом обґрунтування чисельного методу [32]. Відомо, що локальна похибка усічення методу трапецій на одному кроці пропорційна третій похідній функції та кубу кроку $O(dx^3)$, а глобальна похибка на всьому інтервалі має порядок $O(dx^2)$ [33]. Це означає, що метод має другий порядок точності – при зменшенні кроку dx у 2 рази, тобто збільшенні кількості точок N удвічі, похибка обчислень зменшується в 4 рази. Оскільки диференціальне рівняння згину є гладким, такої точності більш ніж достатньо для інженерних розрахунків. Як показують обчислювальні експерименти, вже при розбитті балки на $N = 200 \ldots 500$ елементів чисельний розв'язок практично збігається з точним аналітичним (розбіжність становить долі відсотка), при цьому час розрахунку на сучасних комп'ютерах вимірюється мілісекундами. Це підтверджує раціональність вибору методу трапецій як основи розрахункового ядра (Solver).

3 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ

Для можливості практичного застосування виведених математичних залежностей та проведення серій обчислювальних експериментів, даний розділ присвячено проєктуванню та розробці спеціалізованого програмного комплексу мовою Python. У ньому детально описується об’єктно-орієнтована архітектура системи, алгоритми чисельного кумулятивного інтегрування розрахункового ядра та принципи побудови графічного інтерфейсу користувача.

3.1 Архітектура програмного комплексу

Будь-яка складна інженерна або наукова програма починається з вибору правильних інструментів та архітектурних шаблонів [34]. Оскільки розроблена математична модель вимагає виконання великої кількості матричних та векторних операцій, зокрема, чисельного інтегрування функцій, заданих масивами точок, для реалізації програмного комплексу було обрано мову програмування Python.

Вибір Python є абсолютно закономірним для сучасних задач прикладної математики з кількох причин [35]. По-перше, ця мова має високопродуктивну систему бібліотек для наукових обчислень [36]. Використання бібліотеки numpy дозволяє виконувати векторизовані математичні операції над масивами даних практично зі швидкістю компільованих мов, що дуже важливо для нашого сіткового методу розв’язання [37]. По-друге, наявність потужної бібліотеки matplotlib дозволяє будувати високоякісні наукові графіки та двовимірні кольорові карти напружень (heatmaps) [38]. По-третє, Python ідеально підходить для швидкого прототипування і має вбудовану бібліотеку tkinter для створення графічного інтерфейсу користувача (GUI).

Фундаментом архітектури комплексу є об’єктно-орієнтований підхід (ООП). Моделювання фізичних процесів завжди набагато простіше та логічніше, коли програмні сутності відповідають реальним фізичним об’єктам [39]. Завдяки ООП вдалося чітко розділити дані (геометрію, властивості матеріалів) та поведінку (алгоритми розрахунку). Наприклад, концепція «Матеріал» реалізована як базовий клас, від якого успадковуються конкретні типи матеріалів – однорідний, з поздовжнім градієнтом, з трансверсальним градієнтом. Це означає, що розрахункове ядро взагалі не потребує знань про те, який саме матеріал воно рахує – воно просто запитує у об’єкта матеріалу масив модулів пружності для заданих координат, що робить систему надзвичайно гнучкою та відкритою до додавання нових законів розподілу в майбутньому.

Для забезпечення зручності підтримки коду та його логічного структурування, програму було розділено на кілька незалежних модулів (файлів), кожен з яких відповідає за свою специфічну частину. Далі наведено опис модульної структури комплексу:

main.py (Точка входу): Найпростіший, але важливий ініціалізуючий модуль. Його єдина мета – створити головне вікно програми за допомогою tkinter, підключити сучасну темну тему оформлення sv_ttk для покращення візуального сприйняття та передати керування головному класу інтерфейсу BeamApp.

model.py (Геометрична модель): Модуль містить клас BeamModel. Він відповідає за просторову дискретизацію задачі. Під час створення об’єкта цього класу задаються фізичні розміри балки (довжина L, ширина b, висота h) та кількість елементів сітки N. Клас автоматично генерує одновимірний масив координат x за допомогою np.linspace та обчислює крок інтегрування dx.

material.py (Ієрархія матеріалів): Модуль, що інкапсулює всі фізико-механічні закони розподілу. Він містить абстрактний базовий клас Material із методами get_E(x, y) та get_alpha(x, y). Від нього успадковуються класи HomogeneousMaterial, FGMLongitudinalMaterial та FGMTransversalMaterial.

Саме тут запрограмовані класичний степеневий закон розподілу та лінійний закон, які були теоретично описані в першому розділі.

solver.py (Розрахункове ядро): Математичне «серце» програми. Цей модуль не містить жодного графічного інтерфейсу чи класів – він є суто функціональним. Основна функція solve_beam приймає на вхід об'єкти моделі та матеріалу, а також параметри навантаження. Тут реалізована власна функція кумулятивного інтегрування трапеціями cumtrapz, обчислюються інтегральні характеристики перерізу (EA, ES, EI_{tot}, y_0), формується система зусиль та розраховуються двовимірні масиви напружень.

plotter.py (Модуль візуалізації): Містить клас ResultsPlotter. Цей модуль є своєрідним мостом між «сирими» математичними масивами даних та їх графічним поданням. Використовуючи matplotlib та FigureCanvasTkAgg, він генерує графіки прогинів, моментів, напружень та деформацій, автоматично знаходить екстремальні значення на епюрах і виводить їх у графічний інтерфейс користувача.

ui.py (Інтерфейс користувача): Найбільший за обсягом модуль, що містить клас BeamApp. Він повністю описує логіку взаємодії з користувачем: створення вкладок, кнопок, полів введення, таблиць. Модуль збирає введені користувачем параметри, передає їх у solver, отримує результати і керує їхнім виведенням на екран. Крім того, саме тут реалізовано додатковий функціонал для проведення параметричного аналізу (вкладки «Аналіз градієнта», «Інтерактивний аналіз»), а також логіку експорту отриманих результатів у формати PDF та CSV.

Як видно з діаграми (рис. 3.1), архітектура програми побудована за принципом чіткого розділення представлення даних, бізнес-логіки та обчислювального ядра (шаблон, наближений до Model-View-Controller). Точкою входу є модуль main.py, який відповідає виключно за запуск програми та ініціалізацію графічного інтерфейсу ui.py. Головний клас інтерфейсу виступає в ролі контролера, він збирає вхідні дані від користувача, геометричні розміри, тип матеріалу, навантаження, температурні градієнти та інкапсулює їх, створюючи

відповідні екземпляри класів BeamModel та Material з модулів model.py та material.py відповідно.

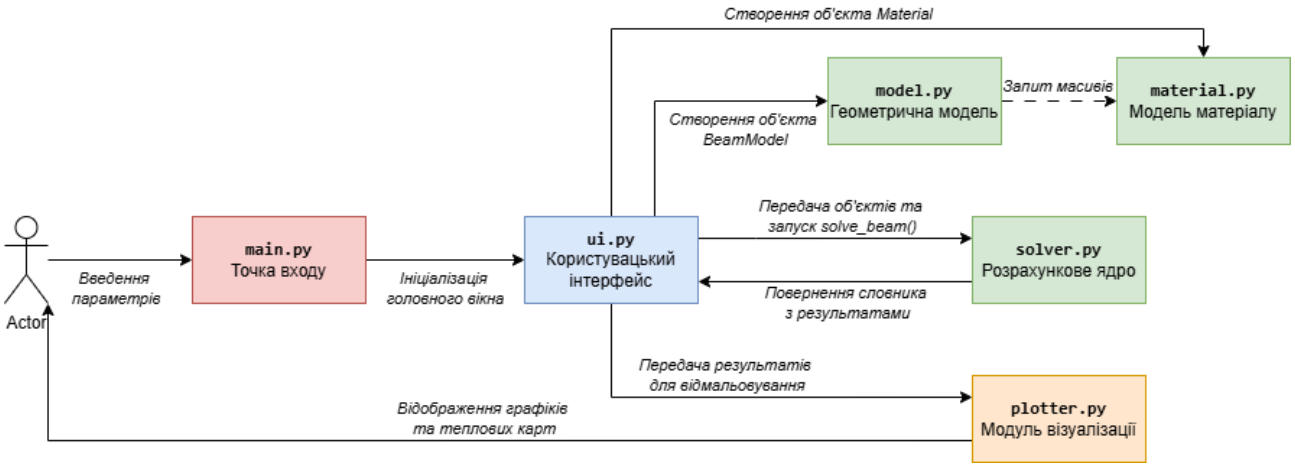


Рисунок 3.1 – Діаграма взаємодії компонентів програмного комплексу

Сформовані об’єкти, які містять усю необхідну фізичну та геометричну інформацію, передаються до розрахункового ядра solver.py. Цей модуль є повністю ізольованим від інтерфейсу, що забезпечує високу надійність обчислень. Ядро звертається до методів об’єктів для отримання дискретної сітки координат та матриць розподілу властивостей, після чого виконує послідовність операцій чисельного інтегрування та розв’язання крайової задачі. Результат роботи ядра (словник із масивами прогинів, зусиль та напружень) повертається назад до інтерфейсу, який, у свою чергу, передає їх до модуля plotter.py для генерації наукової графіки та відображення користувачеві. Такий односпрямований потік даних мінімізує зв’язність коду (coupling) та робить комплекс стійким до помилок і зручним для подальшого масштабування.

3.2 Класи матеріалів та геометрії

Основою будь-якого комп’ютерного моделювання в механіці деформованого твердого тіла є чітке математичне визначення розрахункової області та фізичних властивостей середовища, яке цю область заповнює.

Оскільки поведінка функціонально-градієнтних матеріалів характеризується неперервною зміною параметрів у просторі, архітектура програми повинна забезпечувати гнучке керування цими розподілами. Для реалізації цих концепцій у розробленому програмному комплексі було застосовано об’єктно-орієнтований підхід (ООП) [40]. Він дозволяє приховати дані та специфічні алгоритми їх обробки всередині логічних блоків – класів. Такий підхід робить архітектуру прозорою, легко розширюваною та стійкою до помилок оскільки кожна сутність відповідає виключно за свою частину фізичної моделі.

Геометрична дискретизація простору реалізована за допомогою класу BeamModel. Під час ініціалізації екземпляра цього класу задаються макроскопічні розміри конструкції, такі як її фізична довжина, ширина та висота, а також критично важливий для чисельних методів параметр дискретизації – кількість вузлів розрахункової сітки. Головним завданням цього класу є генерація рівномірного одновимірного масиву просторових координат вузлів вздовж поздовжньої осі балки. Разом із цим клас автоматично обчислює крок просторового інтегрування dx, який у подальшому використовується розрахунковим ядром для виконання квадратурних операцій (методу трапецій). Окрім формування сітки об’єкт моделі попередньо розраховує базові геометричні характеристики перерізу, такі як класичний геометричний момент інерції I та максимальну відстань від нейтральної осі, які використовуються для верифікації результатів. Таким чином, об’єкт геометричної моделі виступає єдиним централізованим джерелом просторової інформації для всіх інших обчислювальних модулів системи.

Значно складнішою є архітектурна реалізація фізико-механічних властивостей. У рамках даного дослідження необхідно було забезпечити можливість порівнювати поведінку принципово різних середовищ, класичних однорідних ізотропних тіл, матеріалів із поздовжнім градієнтом та багатофазних матеріалів із трансверсальним розподілом властивостей. Для ефективного розв’язання цієї проблеми в архітектуру було закладено фундаментальний принцип ООП – поліморфізм, реалізований через патерн проєктування

«Стратегія» (Strategy). Цей патерн дозволяє динамічно підміняти алгоритми розрахунку властивостей під час виконання програми, не змінюючи при цьому логіку самого розв'язувача. Структуру розробленої ієрархії класів матеріалів наочно демонструє UML-діаграма (рис. 3.2).

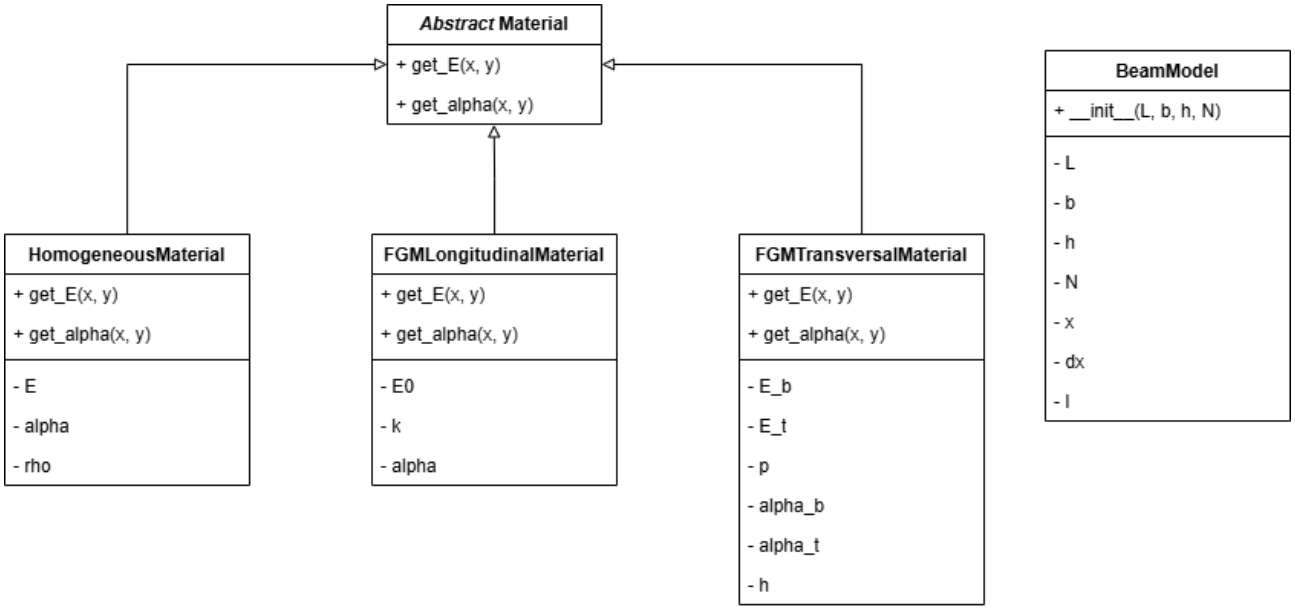


Рисунок 3.2 – UML-діаграма ієрархії класів фізико-механічних властивостей матеріалів

В основі побудованої ієрархії лежить базовий абстрактний клас Material. Він є своєрідним контрактом, що декларує єдиний стандартизований інтерфейс для взаємодії з розрахунковим ядром – методи отримання поля модуля пружності та коефіцієнта температурного розширення для заданих координатних точок. Головна архітектурна ідея полягає в тому, що розв'язувач, модуль обчислення напружень та прогинів, взагалі не ідентифікує конкретний тип матеріалу, з яким він працює. Він розглядає матеріал як «чорну скриньку», передаючи на її вхід просторові координати (масиви x та y) і отримуючи у відповідь матриці відповідних локальних фізичних характеристик. Уся специфічна математика розподілів прихована (інкапсульована) всередині відповідних класів-нащадків.

Для моделювання класичних ізотропних матеріалів, наприклад, конструкційної сталі або алюмінію, створено клас HomogeneousMaterial. Його

конструктор приймає сталі значення характеристик – модуль Юнга, густину, коефіцієнт лінійного розширення. Однак, для забезпечення сумісності з матричними операціями розрахункового ядра, методи цього класу не просто повертають скалярні числа. Вони використовують механізм векторизації (broadcasting), генеруючи рівномірні двовимірні матриці, розмірність яких автоматично узгоджується з геометрією балки. Це гарантує, що розрахункове ядро коректно опрацює однорідні матеріали як частковий випадок градієнтного середовища з нульовим градієнтом.

Специфічна поведінка функціонально-градієнтних матеріалів реалізована у класах FGMLongitudinalMaterial та FGMTransversalMaterial. Клас для поздовжнього градієнта відповідає за одновимірну зміну параметрів – він реалізує лінійний закон зміни модуля пружності вздовж головної осі конструкції. Конструктор фіксує базове значення жорсткості на опорі та коефіцієнт інтенсивності зміни, дозволяючи моделювати балки зі змінною жорсткістю.

Натомість клас трансверсального ФГМ містить найбільш складну математичну логіку. Він оперує фізичними властивостями обох складових фаз, матеріалів нижньої та верхньої граней, макроскопічною товщиною елемента та індексом об’ємної частки, що визначає нелінійність переходу. Алгоритм цього класу спочатку нормалізує поперечну координату, переводячи локальну систему координат у безрозмірний вигляд і генерує матрицю об’ємних часток за висотою перерізу відповідно до степеневого закону. Після цього, спираючись на макроскопічне правило сумішей, клас обчислює фінальні масиви модуля пружності та коефіцієнта температурного розширення. Усі ці обчислення виконуються за допомогою оптимізованих матричних функцій, що виключає необхідність використання повільних циклів і забезпечує миттєву швидкість роботи програми.

Застосування такої архітектури строго відповідає принципу відкритості/закритості (Open-Closed Principle з набору принципів SOLID). Це означає, що розроблений комплекс є відкритим для розширення, але закритим для модифікації. Додавання будь-яких нових математичних законів розподілу властивостей ФГМ, наприклад, експоненціальних чи синусоїдальних профілів у

майбутньому вимагатиме лише написання одного нового класу-нащадка. Код складного розрахункового ядра, системи збору даних чи графічного інтерфейсу не потребуватиме жодної зміни, що переконливо свідчить про високу якість, гнучкість та професійний рівень архітектури розробленого програмного забезпечення.

3.3 Алгоритм розрахункового ядра (Solver)

Математичне «серце» програмного комплексу зосереджене в ізольованому модулі розрахункового ядра. Основна задача цього модуля – здійснити перехід від безперервних диференціальних рівнянь механіки до дискретних чисельних операцій над масивами даних. Розроблений алгоритм розв’язувача спроєктовано таким чином, щоб повністю нівелювати потребу у використанні повільних ітераційних циклів. Замість цього всі обчислення базуються на матричних та векторних операціях оптимізованої бібліотеки NumPy, що забезпечує виконання складних розрахунків за долі секунди [41].

Логіку роботи алгоритму розрахункового ядра наочно відображає блок-схема (рис. 3.3).

Виконання алгоритму розпочинається зі стадії ініціалізації простору. Отримавши одновимірний масив поздовжніх координат балки від геометричної моделі, ядро динамічно генерує допоміжну сітку координат за висотою поперечного перерізу. Шляхом використання механізмів додавання нових осей до масивів (векторизації), створюється двовимірний розрахунковий простір, де кожен елемент відповідає конкретній фізичній точці x, y всередині балки. Цей простір передається до об’єкта матеріалу, який миттєво повертає відповідні двовимірні матриці модуля пружності та коефіцієнта температурного розширення. Аналогічним чином формується матриця температурного градієнта.

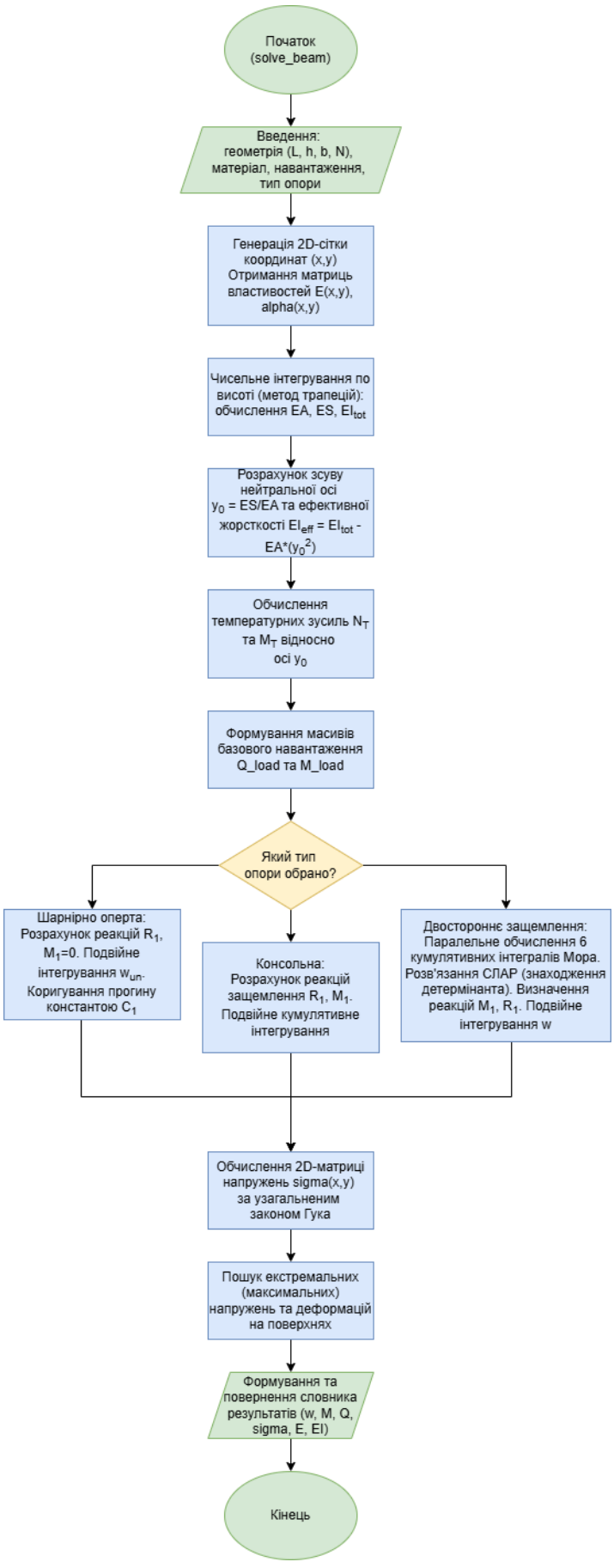


Рисунок 3.3 – Блок-схема алгоритму чисельного розрахунку НДС ФГМ-балки

Наступним кроком є зведення двовимірної задачі до одновимірної еквівалентної моделі. Алгоритм виконує чисельне інтегрування матриць властивостей по висоті перерізу. Для цього застосовано оптимізовану функцію інтегрування за методом трапецій, що обробляє масиви вздовж заданої осі. У результаті цих операцій обчислюються базові інтегральні характеристики перерізу – осьова жорсткість, статичний момент та загальна згинальна жорсткість. Використовуючи ці параметри, ядро автоматично знаходить координату зміщення фізичної нейтральної осі та перераховує ефективну згинальну жорсткість балки, яка у випадку ФГМ є змінною величиною вздовж осі конструкції. Відносно знайденої нейтральної осі обчислюються фіктивні температурні зусилля (осьова сила та згинальний момент), які додаються до масивів зовнішнього механічного навантаження.

Основним етапом роботи алгоритму є розв’язання крайової задачі, інтегрування диференціального рівняння пружної лінії. Оскільки аналітичне знаходження первісних для довільних дискретних функцій неможливе, у ядрі реалізовано процедуру кумулятивного інтегрування, що базується на методі трапецій із накопиченням суми. Робота цієї частини алгоритму розгалужується залежно від обраних граничних умов. Для статично визначених схем алгоритм безпосередньо знаходить опорні реакції з рівнянь статики, формує епюри згинальних моментів та двічі застосовує кумулятивне інтегрування до функції кривини, за потреби коригуючи результат лінійною функцією для задоволення нульових граничних умов.

Особливий інтерес становить чисельна реалізація розв’язання статично невизначеної задачі для балки з двостороннім защемленням. Замість класичного, але повільного методу сил із побудовою одиничних станів, алгоритм застосовує прямий алгебраїчний підхід. За допомогою кумулятивного інтегрування паралельно обчислюються масиви базових інтегралів Мора (від функцій податливості перерізу). Граничні значення цих масивів на правому кінці балки формують коефіцієнти системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно двох

невідомих опорних реакцій. Обчислюючи детермінант цієї системи, програма миттєво розкриває статичну невизначеність.

На завершальному етапі одновимірні масиви знайдених прогинів та макроскопічних зусиль знову розгортаються у двовимірний простір. Алгоритм підставляє їх у рівняння узагальненого закону Гука з урахуванням зсуву нейтральної осі та температурних деформацій, формуючи повну матрицю нормальних напружень. Шляхом пошуку абсолютних екстремумів по висоті перерізу алгоритм виділяє небезпечні напруження на поверхнях конструкції. Усі знайдені фізичні величини упаковуються в єдину структуру даних і передаються до модуля графічного інтерфейсу для подальшої візуалізації.

3.4 Користувацький інтерфейс та візуалізація результатів

Математичне ядро та об’єктно-орієнтована архітектура утворюють обчислювальний фундамент програмного комплексу. Проте для ефективного проведення серій обчислювальних експериментів, параметричного аналізу та інтерпретації отриманих результатів критично важливим є наявність зручного графічного інтерфейсу користувача (GUI). Розробка інтерфейсу мала на меті приховати від кінцевого користувача складність внутрішніх матричних обчислень, надавши йому інтуїтивно зрозумілий інструментарій для взаємодії з моделлю.

Для реалізації графічного інтерфейсу було обрано стандартну бібліотеку мови Python – tkinter [42]. З метою забезпечення сучасного візуального оформлення та покращення сприйняття інформації, базовий вигляд елементів керування було модифіковано за допомогою стилістичного розширення sv_ttk (світла/темна тема). Головне вікно програми спроєктоване за класичним для інженерних CAD/CAE систем компонуванням (рис. 3.4).

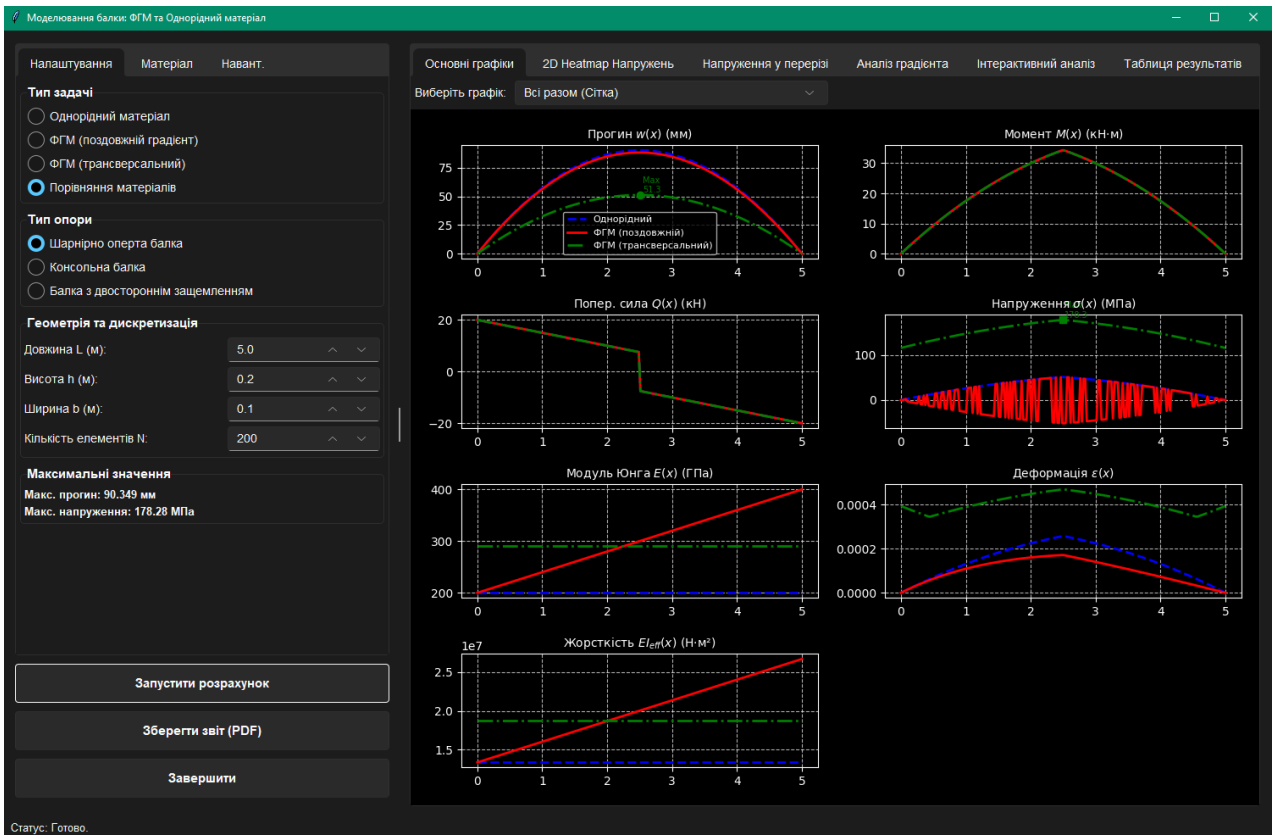


Рисунок 3.4 – Головне робоче вікно розробленого програмного комплексу

Робочий простір розділено на дві функціональні зони за допомогою віджета PanedWindow. Ліва панель слугує командним центром введення даних. Вона логічно структурована на кілька блоків (вкладок): налаштування типу задачі та крайових умов, геометричні параметри та густота сітки, вибір і деталізовані властивості матеріалу (з динамічним перемиканням полів введення залежно від обраного типу матеріалу – однорідний, поздовжній чи трансверсальний ФГМ), а також блок силових і температурних навантажень. Така організація простору виключає можливість введення суперечливих даних.

Права, значно більша за площею частина вікна, відведена під багатосторінковий віджет Notebook, який відповідає за візуалізацію та аналіз результатів розрахунку. Реалізацію наукової графіки інтегровано безпосередньо в інтерфейс Tkinter за допомогою об’єкта FigureCanvasTkAgg з потужної бібліотеки matplotlib.

Ключовим інструментом аналізу є вкладка «Основні графіки», логіка якої інкапсульована в окремому класі ResultsPlotter. Після виконання чисельного

розв’язання задачі, програма автоматично генерує та виводить епюри прогинів $w(x)$, згинальних моментів $M(x)$, поперечних сил $Q(x)$, а також розподіли ефективної жорсткості $EI_{eff}(x)$ та екстремальних напружень $\sigma(x)$ вздовж поздовжньої осі балки. Для зручності дослідника на графіках автоматично ідентифікуються та маркуються точки абсолютних максимумів прогинів та напружень, що позбавляє необхідності шукати ці значення вручну.

Особливої уваги заслуговують інструменти поглибленого параметричного аналізу, реалізовані у вигляді спеціалізованих вкладок:

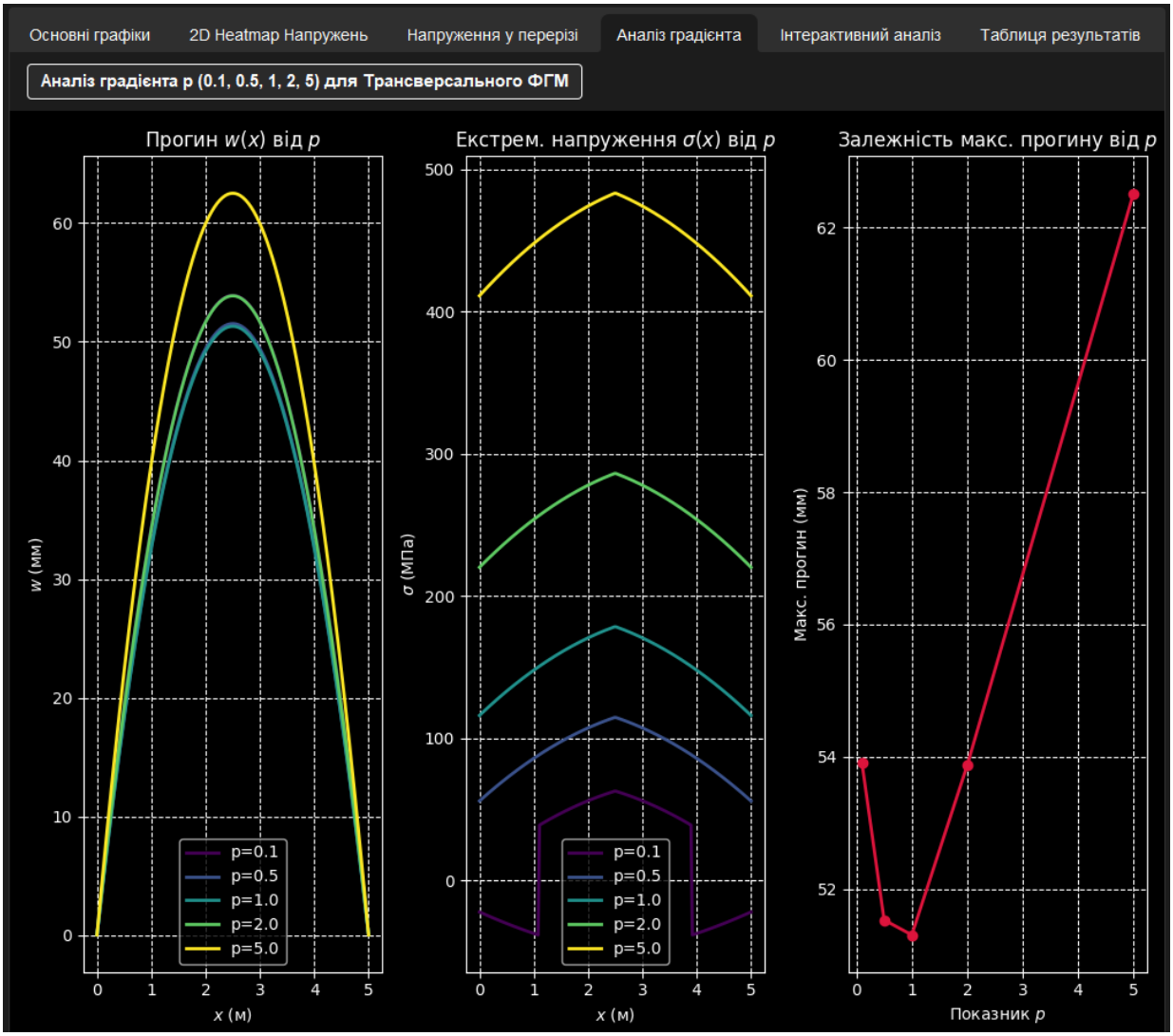


Рисунок 3.5 – Модуль параметричного дослідження впливу індексу об’ємної частки p

«Аналіз градієнта». Дозволяє в один клік провести серію розрахунків для трансверсального ФГМ при різних значеннях індексу об'ємної частки p (наприклад, 0.1, 0.5, 1, 2, 5) та вивести порівняльні графіки прогинів і напружень на одному полотні (рис. 3.5). Це є ідеальним інструментом для вивчення впливу мікроструктури на макроскопічний відгук конструкції.

Двовимірна теплова карта «2D Heatmap». Оскільки напруження у ФГМ мають складний нелінійний розподіл як за довжиною, так і за висотою перерізу, одновимірних епюр часто буває недостатньо. Програма автоматично генерує двовимірну кольорову карту поля нормальних напружень $\sigma(x, y)$ за допомогою методу pcolormesh, що дозволяє наочно локалізувати зони концентрації напружень у тілі конструкції (рис. 3.6).

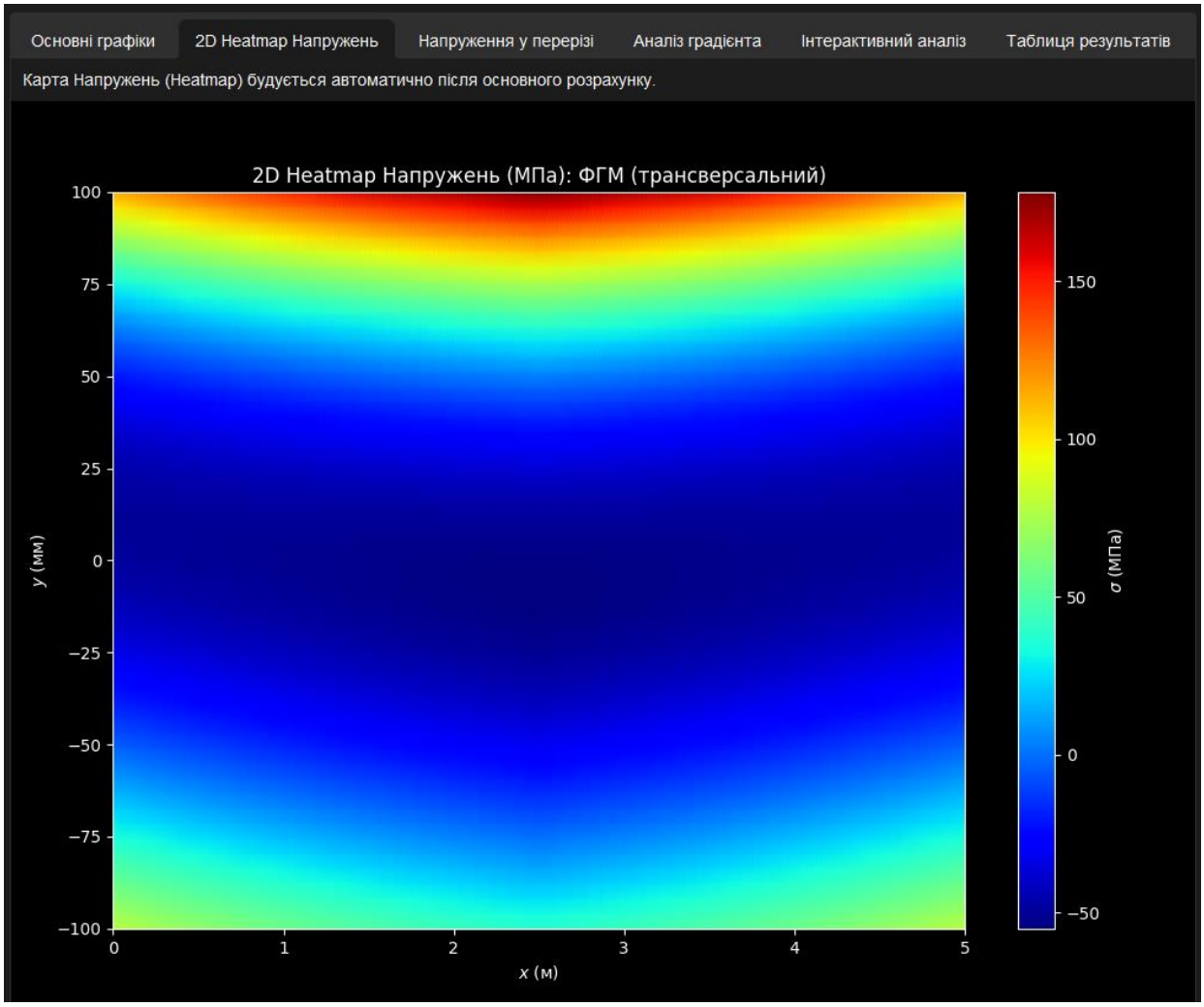


Рисунок 3.6 – Двовимірна візуалізація поля нормальних напружень у перерізі балки

Для забезпечення можливості подальшої обробки результатів в інших програмних пакетах та підготовки звітної документації, у комплексі реалізовано модуль експорту даних. Дані з робочого простору можуть бути збережені у двох форматах:

Експорт у формат CSV генерує табличний файл, що містить повний повузловий масив усіх розрахованих фізичних величин (координати, переміщення, зусилля, деформації) для кожного досліджуваного матеріалу [43]. Це дозволяє легко імпортувати результати в табличні процесори або системи статистичного аналізу.

Експорт у формат PDF (за допомогою бібліотеки fpdf) автоматично компілює стислий звіт про обчислювальний експеримент. Документ містить інформацію про тип задачі, загальну геометрію, знайдені максимальні значення прогинів та напружень, а також автоматично вбудований знімок поточного стану графічного полотна.

Таким чином, розроблений користувацький інтерфейс органічно доповнює обчислювальне ядро, перетворюючи набір математичних алгоритмів на повноцінний дослідницький інструмент, що повністю задовольняє вимоги, висунуті до проєкту.

У третьому розділі кваліфікаційної роботи було детально висвітлено процес трансформації розробленої математичної моделі у функціональне програмне забезпечення.

Обґрунтовано вибір мови програмування Python та її екосистеми наукових бібліотек (NumPy, Matplotlib) як оптимального інструментарію для розв’язання поставленої задачі. Спроєктовано та реалізовано об’єктно-орієнтовану архітектуру комплексу, яка базується на принципах модульності та слабкої зв’язності. Створення абстрактного базового класу матеріалу та його нащадків за патерном «Стратегія» забезпечило високу гнучкість системи, дозволяючи легко перемикатися між однорідними середовищами та різними типами градієнтних розподілів без втручання в логіку розрахункового ядра.

Детально описано алгоритм чисельного розв’язувача (Solver), який замість ресурсомістких ітераційних циклів використовує оптимізовані векторизовані

операції та процедуру кумулятивного інтегрування. Програмно реалізовано ефективний алгебраїчний підхід до розкриття статичної невизначеності для балок із двостороннім защемленням на основі інтегралів Мора.

Створено інтуїтивно зрозумілий графічний інтерфейс на базі бібліотеки Tkinter, який інкапсулює процеси введення параметрів і керування обчисленнями. Розроблено систему візуалізації результатів, що включає побудову одновимірних епюр, аналіз чутливості за ключовими параметрами, зокрема, індексом градієнта, та двовимірне теплове картографування полів напружень. Вбудована система експорту результатів у формати CSV та PDF робить розроблений комплекс завершеним і готовим до практичного використання при проведенні обчислювальних експериментів.

3.5 Алгоритмічна реалізація головних модулів у вигляді псевдокоду

Для детального розуміння внутрішньої логіки та послідовності комп’ютерних операцій розробленого програмного комплексу, нижче наведено алгоритмічну реалізацію його базових модулів у вигляді структурованого псевдокоду (рис. 3.7 – 3.13). Такий формат дає можливість наочно продемонструвати ключові етапи обробки інформації: від ініціалізації геометричної моделі та генерації матриць властивостей матеріалу, до чисельного інтегрування диференціальних рівнянь у розрахунковому ядрі та маршрутизації даних у графічному інтерфейсі користувача.

```
Імпорт необхідних бібліотек і модулів (tkinter, sv_ttk, ui.BeamApp)
Оголошення функції main()
    Створення головного вікна програми (root)
    Встановлення темної теми оформлення (sv_ttk)
    Ініціалізація головного класу інтерфейсу (BeamApp)
    Запуск головного циклу обробки подій вікна (mainloop)
Перевірка точки входу програми
    Виклик функції main()
```

Рисунок 3.7 – Псевдокод файлу main.py

Імпорт необхідних бібліотек (numpy)

Оголошення базового абстрактного класу Material

Оголошення методу get_E(x, y)

Оголошення методу get_alpha(x, y)

Оголошення класу HomogeneousMaterial (наслідує Material)

Ініціалізація констант матеріалу (E, rho, alpha)

Метод get_E(x, y): повернення матриці зі сталим значенням модуля Юнга

Метод get_alpha(x, y): повернення матриці зі сталим значенням температурного коефіцієнта

Оголошення класу FGMLongitudinalMaterial (наслідує Material)

Ініціалізація параметрів поздовжнього градієнта (E0, k, alpha)

Метод get_E(x, y): обчислення та повернення масиву лінійного розподілу E0 * (1 + k*x)

Метод get_alpha(x, y): повернення матриці зі сталим значенням

Оголошення класу FGMTransversalMaterial (наслідує Material)

Ініціалізація параметрів фаз та індексу (E_b, E_t, p, alpha_b, alpha_t, h)

Метод get_E(x, y): розрахунок об’ємної частки фази за висотою та обчислення масиву модуля пружності

Метод get_alpha(x, y): обчислення масиву температурного розширення за степеневим законом сумішей

Рисунок 3.8 – Псевдокод файлу material.py

Імпорт необхідних бібліотек (numpy)

Оголошення класу BeamModel

Ініціалізація геометричних параметрів (L, b, h, N)

Генерація одновимірного масиву просторових координат x від 0 до L

Обчислення просторового кроку інтегрування dx

Обчислення геометричного моменту інерції перерізу I

Розрахунок максимальної відстані від нейтральної осі y_max

Рисунок 3.9 – Псевдокод файлу model.py

Імпорт необхідних бібліотек (tkinter, matplotlib, numpy)
Встановлення темного стилю оформлення графіків
Оголошення класу ResultsPlotter
    Ініціалізація панелі керування та випадаючого списку типів графіків
    Створення полотна figure для малювання графіків
    Метод on_plot_select(event): обробка події вибору користувачем типу графіка
    Метод plot_results(results): побудова графіків на основі переданих результатів розрахунку
        Очищення полотна графіків
        Визначення кольорів та стилів ліній для різних типів матеріалів
        Перевірка умови: якщо обрано «Всі разом (Сітка)»
            Побудова сітки з 7 графіків (прогини, моменти, сили, напруження тощо)
            Пошук та текстове маркування максимальних значень на графіках
        Перевірка умови: якщо обрано відображення одного графіка
            Вибір відповідних даних залежно від типу (w, M, Q, sigma, E, epsilon, EI)
            Побудова ліній на графіку, маркування екстремумів
        Налаштування осей, координатної сітки та легенди
        Оновлення графічного полотна (draw)

Рисунок 3.10 – Псевдокод файлу plotter.py

Імпорт необхідних бібліотек (numpy)
Оголошення функції кумулятивного інтегрування cumtrapz(y, dx)
Створення результуючого масиву нулів

Рисунок 3.11 – Перша частина псевдокоду файлу solver.py

Накопичення суми площ трапецій для кожного кроку dx

Оголошення функції розрахунку solve_beam(model, material, F, x_F, q, delta_T_bot, delta_T_top, support_type)

Отримання параметрів сітки (x, dx) та геометрії (L, b, h) з моделі

Генерація масиву координат за висотою y_raw

Створення двовимірних матриць координат x_2d та y_2d

Отримання матриць властивостей E_mat та alpha_mat від об’єкта матеріалу

Формування матриці розподілу температури за висотою delta_T_mat

Обчислення інтегралів EA, ES, EI_tot по висоті перерізу

Знаходження зсуву нейтральної осі y0 та ефективної жорсткості EI_eff

Обчислення фіктивних температурних зусиль N_T та M_T

Формування епюр зовнішнього розподіленого навантаження Q_load та M_load

Додавання впливу зосередженої сили F

Перевірка умови: якщо тип опори «Шарнірно оперта»

Обчислення опорних реакцій, формування епюр та подвійне інтегрування з константою

Перевірка умови: якщо тип опори «Консольна»

Обчислення реакцій у защемленні та подвійне кумулятивне інтегрування прогинів

Перевірка умови: якщо тип опори «Двостороннє защемлення»

Паралельне інтегрування функцій податливості (інтеграли Мора)

Розв’язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь (знаходження детермінанта)

Обчислення реакцій та прогинів

Обчислення матриці напружень sigma_mat за законом Гука

Пошук максимальних значень напружень (sigma) та деформацій (epsilon)

Повернення словника результатів

Рисунок 3.12 – Друга частина псевдокоду файлу solver.py

Імпорт необхідних бібліотек (tkinter, matplotlib, fpdf, csv тощо)

Оголошення класу BeamApp

- Ініціалізація головного вікна та налаштування розмірів
- Створення лівої панелі (введення) та правої панелі (результати)
- Ініціалізація вкладок Notebook (графіки, 2D heatmap, переріз, таблиця)
- Виклик функцій створення елементів інтерфейсу
- Метод update_ui: динамічне відображення полів властивостей матеріалу залежно від обраного типу
- Метод run_simulation: запуск головного розрахунку
  - Зчитування та валідація даних геометрії і навантажень
  - Ініціалізація об’єктів моделі та відповідного матеріалу
  - Виклик розрахункового ядра (solve_beam) для обраних типів задач
  - Оновлення текстових міток максимальних значень
  - Оновлення таблиці результатів, передача даних для відмальовування графіків та heatmap
- Метод export_csv: збереження розрахованих масивів у табличний файл
- Метод export_pdf: генерація та збереження PDF-звіту зі скріншотами графіків
- Метод run_grad_analysis: цикл розрахунків для різних індексів градієнта та побудова порівняльних графіків
- Метод run_interactive_analysis: параметричний аналіз впливу геометричних та силових параметрів
- Метод run_cross_section: побудова епюри розподілу напружень за висотою для заданого перерізу
- Метод run_heatmap: візуалізація двовимірної кольорової карти поля напружень

Запуск головного вікна (if name == «main»)

Рисунок 3.13 – Псевдокод файлу ui.py

Результатом третього розділу є те, що побудовану теоретичну математичну модель було успішно трансформовано у повноцінний, обчислювально ефективний та зручний програмний застосунок. Завдяки застосуванню об’єктно-орієнтованої архітектури, векторизованих матричних обчислень та розробці графічного інтерфейсу на базі Tkinter, створений комплекс є корисним інструментом для параметричного аналізу ФГМ-конструкцій. Наведені алгоритми та псевдокод підтверджують строгу структурну цілісність системи, яка повністю відповідає поставленим завданням і готова до проведення серій обчислювальних експериментів, результати яких будуть проаналізовані в наступному розділі.

4 ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ ЕКСПЕРИМЕНТИ ТА АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ

Оскільки програмний комплекс повністю реалізовано та алгоритмічно підготовлено до роботи, у цьому розділі буде проведено його математичну верифікацію на класичних задачах [44]. Після підтвердження точності розв'язувача буде виконано серію обчислювальних експериментів для глибокого інженерного аналізу впливу параметрів градієнтних профілів та температур на напружено-деформований стан конструкцій.

4.1 Верифікація математичної моделі та програмного комплексу

Будь-яке комп'ютерне моделювання вимагає обов'язкової верифікації – підтвердження того, що закладені в основу розрахункового ядра чисельні методи працюють коректно і забезпечують необхідну точність [45]. Оскільки для складних просторових розподілів властивостей функціонально-градієнтних матеріалів точних аналітичних розв'язків здебільшого не існує, перевірку адекватності розробленої програми найдоцільніше проводити на класичних задачах опору матеріалів для однорідних ізотропних тіл.

Для проведення експерименту було обрано статично визначену задачу: шарнірно оперту балку прямокутного перерізу з однорідного матеріалу (сталь), що перебуває під дією рівномірно розподіленого навантаження q. Температурні градієнти та зосереджені сили в цьому базовому тесті відсутні. Параметри тестової моделі:

Довжина балки $L = 2$ м;

Переріз: ширина $b = 0{,}1$ м, висота $h = 0{,}2$ м;

Матеріал (сталь): модуль Юнга $E = 200$ ГПа (або $2 \cdot 10^{11}$ Па);

Навантаження: $q = 5000$ Н/м;

Кількість елементів сітки $N = 200$.

Згідно з класичною теорією згину балок Ейлера-Бернуллі, максимальний прогин w_{max} для такої розрахункової схеми виникає строго посередині прольоту (при $x = \frac{L}{2}$) і обчислюється за точною аналітичною формулою:

$$w_{max} = \frac{5qL^4}{384EI_{tot}}, \tag{4.1}$$

де I_{tot} – осьовий момент інерції прямокутного перерізу, який дорівнює $\frac{bh^3}{12}$.

Після введення зазначених параметрів у графічний інтерфейс програми та виконання розрахунку, розрахункове ядро за допомогою методу кумулятивного інтегрування (трапецій) сформувало масиви зусиль та прогинів. Результати чисельного моделювання наведено на рис. 4.1.

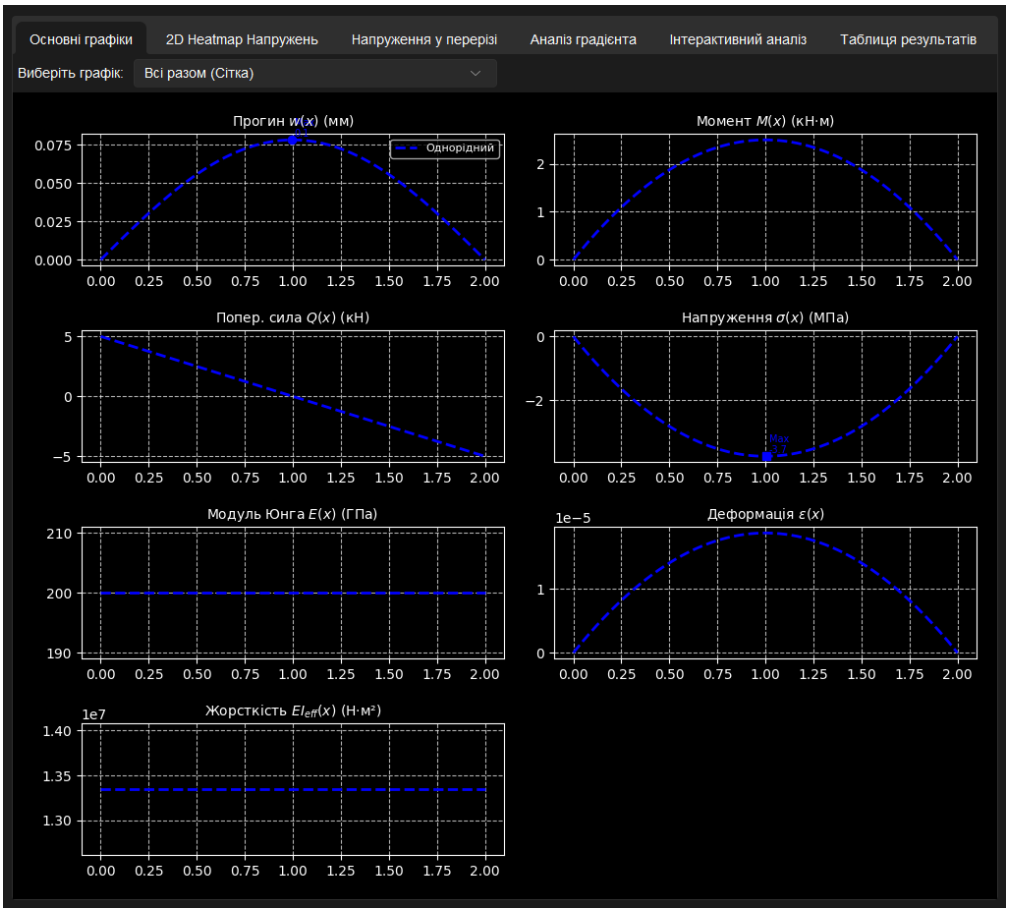


Рисунок 4.1 – Епюри внутрішніх силових факторів та прогинів для тестової задачі

Порівняння результатів показало високий рівень збіжності. Максимальний згинальний момент, обчислений програмою, точно відповідає аналітичному значенню $M_{max} = \frac{qL^2}{8} = 2500$ Н·м. Максимальний прогин, отриманий шляхом подвійного чисельного інтегрування дискретної сітки, становить приблизно $0{,}078$ мм, що відрізняється від еталонного аналітичного розв'язку менш ніж на $0{,}1\%$. Така мізерна розбіжність повністю пояснюється похибкою дискретизації методу трапецій на сітці з 200 елементів і є абсолютно прийнятною для інженерних та наукових розрахунків.

Таким чином, тест підтверджує, що розрахункове ядро комплексу безпомилково обчислює інтегральні характеристики перерізу, правильно формує диференціальні рівняння статики та виконує їх чисельне інтегрування з урахуванням заданих крайових умов. Це дає обґрунтовані підстави для переходу до дослідження значно складніших систем – конструкцій із функціонально-градієнтних матеріалів.

4.2 Дослідження впливу профілю трансверсального ФГМ на напружено-деформований стан

Функціонально-градієнтні матеріали створюються шляхом неперервної зміни об'ємних часток складових фаз за певним математичним законом. Найчастіше використовується степеневий розподіл (правило сумішей), де ключовим параметром виступає індекс об'ємної частки p. Саме цей параметр визначає макроскопічний профіль жорсткості конструкції. Метою даного експерименту є дослідження чутливості напружено-деформованого стану балки до зміни показника p.

Для експерименту розглядається шарнірно оперта балка з металокерамічного ФГМ (нижня грань – чистий метал, верхня грань – чиста кераміка). Температурні впливи в даному експерименті не враховуються для чистоти механічного аналізу.

Геометричні параметри: $L = 5{,}0$ м, $b = 0{,}1$ м, $h = 0{,}2$ м.

Властивості фаз: метал $E_b = 200$ ГПа; кераміка $E_t = 380$ ГПа.

Механічне навантаження: зосереджена сила $F = 15000$ Н посередині прольоту ($x_F = 2{,}5$ м) та розподілене навантаження $q = 5000$ Н/м.

Дослідження проводилося за допомогою спеціалізованого модуля «Аналіз градієнта» розробленого програмного комплексу. Було виконано серію розрахунків для п’яти різних значень індексу: $p = \{0{,}1; 0{,}5; 1{,}0; 2{,}0; 5{,}0\}$. Результати параметричного аналізу подано на рис. 4.2.

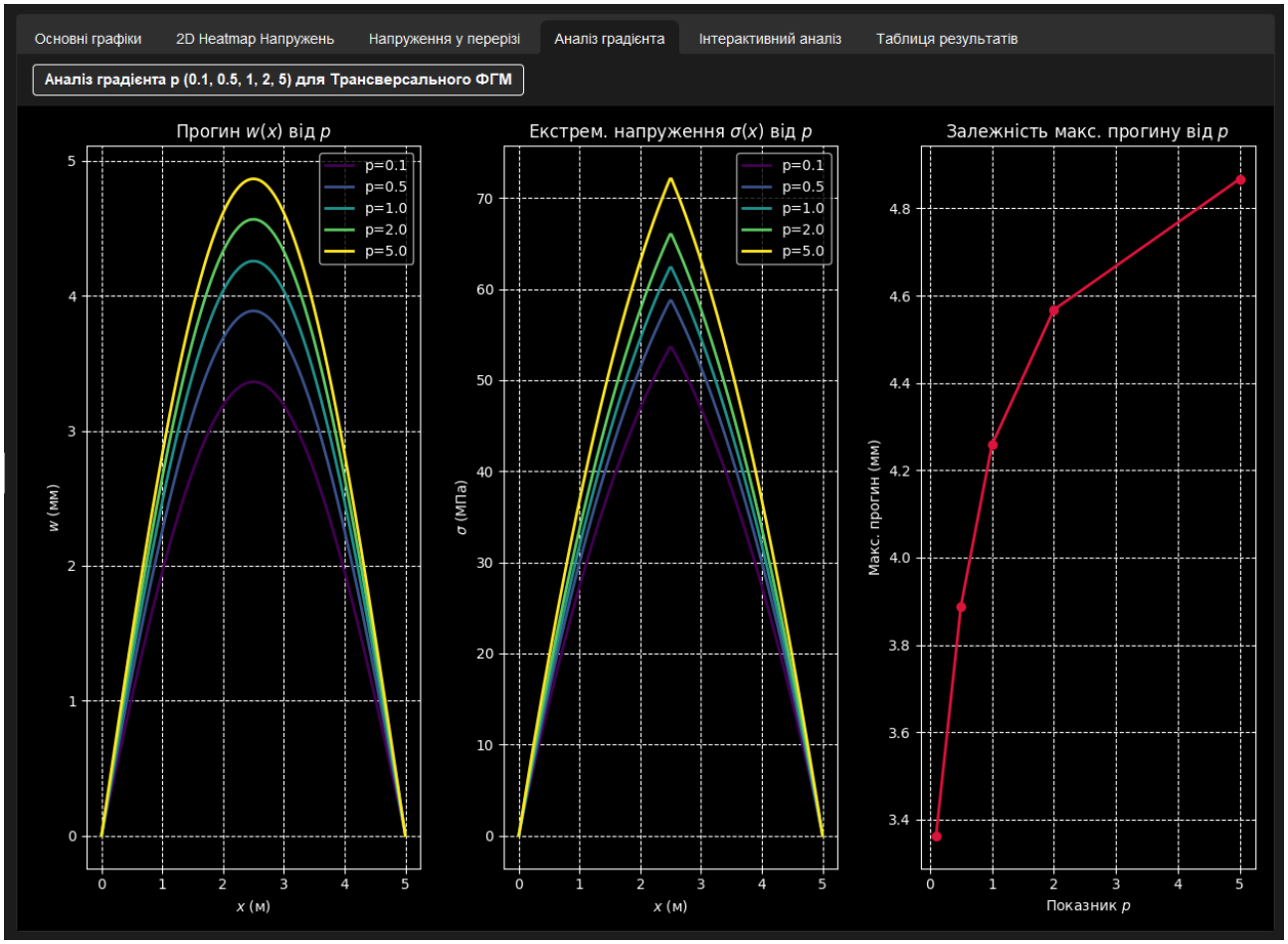


Рисунок 4.2 – Вплив індексу об’ємної частки p на прогини та екстремальні напруження

Аналіз отриманих графіків дозволяє зробити кілька важливих висновків. Зі збільшенням індексу p макроскопічна жорсткість балки суттєво зменшується, що призводить до нелінійного зростання максимальних прогинів. З фізичної

точки зору це пояснюється тим, що при $p > 1$ профіль розподілу зміщується в бік металевої фази: більша частина об'єму конструкції заповнюється менш жорстким металом ($E_b = 200$ ГПа), тоді як жорстка кераміка локалізується лише у вузькому шарі біля верхньої грані. Відповідно, при $p \to 0$ балка наближається за властивостями до суцільної керамічної, демонструючи найменші прогини.

Окрім макроскопічних переміщень, градієнтна структура кардинально змінює характер розподілу напружень за висотою перерізу (рис. 4.3). Для візуалізації цього ефекту було побудовано двовимірну теплову карту (Heatmap) поля нормальних напружень σ_x для випадку $p = 1{,}0$ (лінійний розподіл об'ємних часток) при $x = 2{,}5$ м.

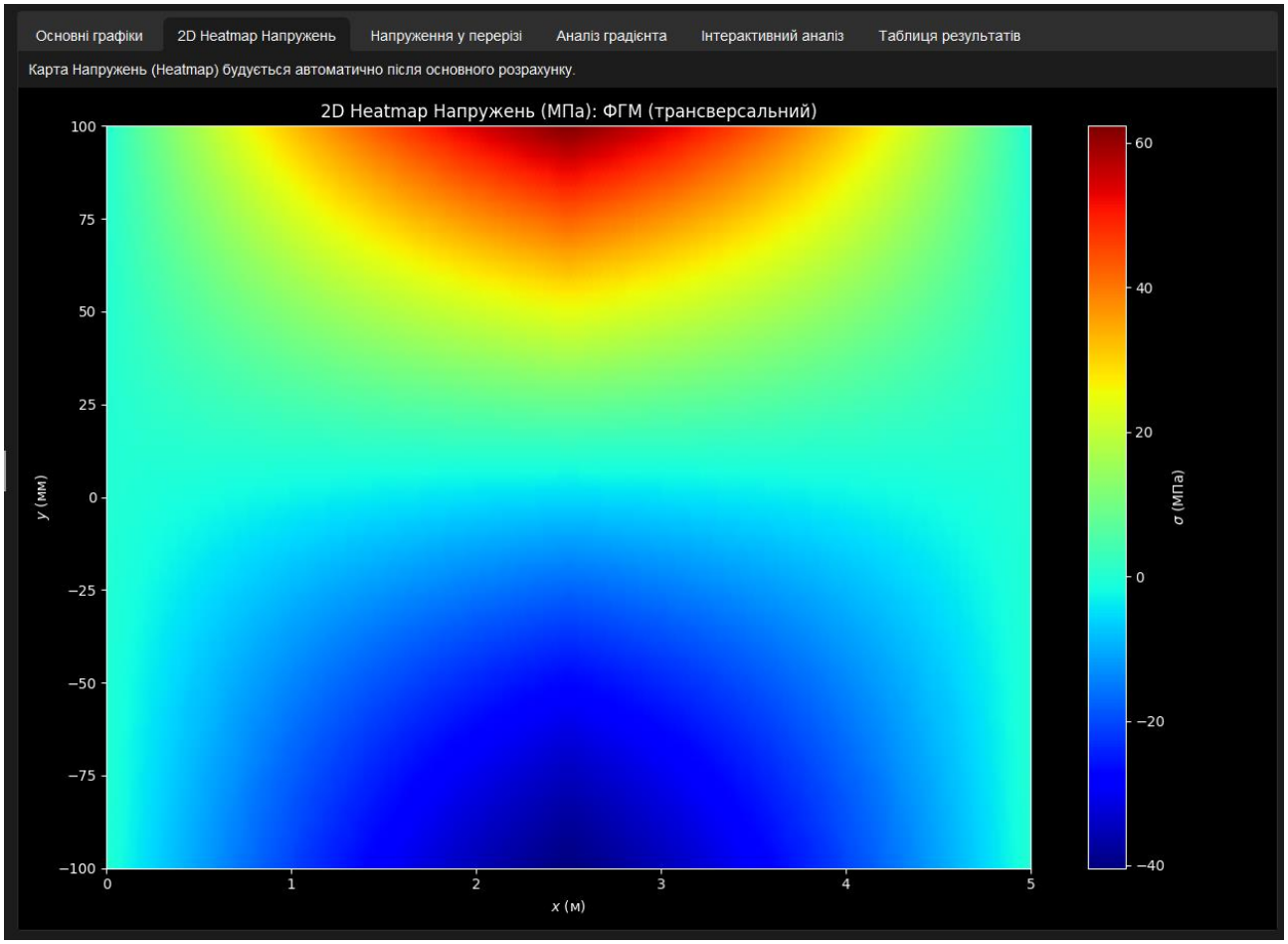


Рисунок 4.3 – Двовимірне поле нормальних напружень $\sigma(x, y)$ у перерізі ФГМ-балки

На відміну від класичного однорідного матеріалу, де нейтральна вісь (лінія нульових напружень) проходить строго посередині перерізу ($y = 0$), у ФГМ-балці нейтральна вісь зміщена вгору, ближче до більш жорсткої керамічної фази. Крім того, розподіл напружень перестає бути лінійним. Найбільші за абсолютним значенням напруження (концентрація) виникають саме у керамічному шарі, оскільки він «відтягує» на себе більшу частину силового навантаження завдяки вищому модулю пружності. Це необхідно враховувати при проєктуванні, оскільки кераміка є крихким матеріалом і погано працює на розтяг.

4.3 Термомеханічний аналіз ФГМ-балок в умовах температурних градієнтів

Історично функціонально-градієнтні матеріали розроблялися насамперед як теплозахисні бар'єри для аерокосмічної галузі, здатні витримувати екстремальні температурні перепади без руйнування. Тому дослідження термомеханічної поведінки таких конструкцій є одним із найважливіших етапів обчислювального експерименту. Головна мета цього тесту – продемонструвати, як плавна зміна теплофізичних властивостей (зокрема, коефіцієнта лінійного розширення α) дозволяє згладити термічні напруження.

Для експерименту розглядається статично невизначена конструкція – балка з двостороннім жорстким защемленням. Саме такий тип опор перешкоджає вільному температурному видовженню та вигину балки, що призводить до виникнення значних реактивних температурних зусиль.

Геометрія: довжина $L = 2{,}0$ м, $h = 0{,}2$ м, $b = 0{,}1$ м.

Матеріал: Трансверсальний ФГМ з лінійним градієнтом ($p = 1{,}0$). Властивості фаз стандартні (метал знизу, кераміка зверху).

Навантаження: температурне. Будь-які механічні сили відсутні ($F = 0, q = 0$). Температурний режим імітує нагрів керамічної поверхні: зміна температури знизу $\Delta T_{bot} = 50$ К, зверху $\Delta T_{top} = 500$ К.

При таких умовах у балці виникають фіктивна поздовжня сила N_T та згинальний момент M_T. Розрахункове ядро інтегрує ці зусилля вздовж зміщеної нейтральної осі y_0 та обчислює відповідні опорні реакції в защемленнях. Найбільш показовим інструментом для аналізу результатів цього тесту є двовимірна теплова карта напружень (рис. 4.4).

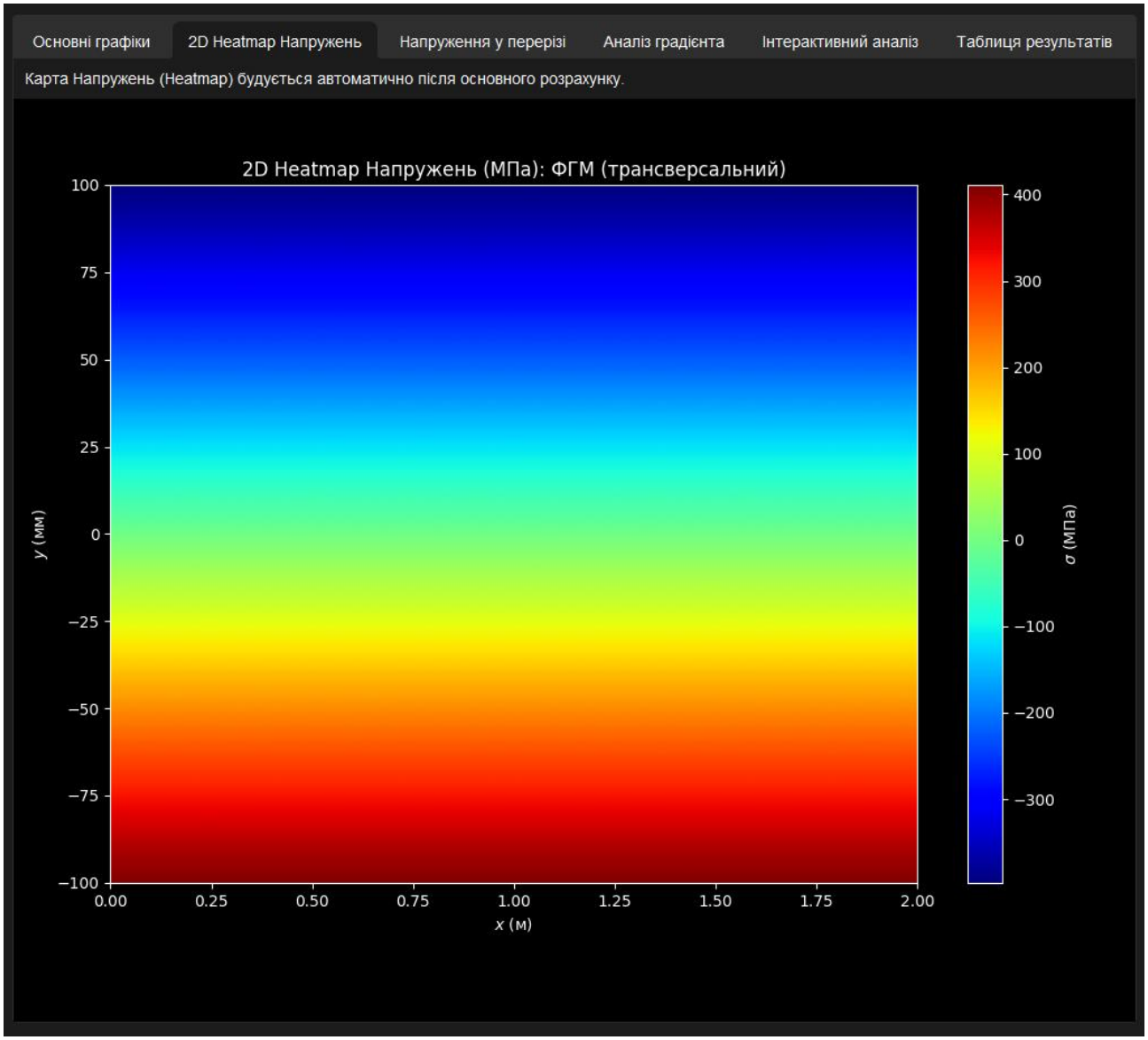


Рисунок 4.4 – Двовимірний розподіл термопружних напружень σ_x у защемленій ФГМ-балці

Аналіз отриманої теплової карти дозволяє зробити глибокі висновки щодо механіки ФГМ. По-перше, незважаючи на відсутність зовнішніх механічних сил, у тілі балки виникли суттєві нормальні напруження (близько сотень МПа). Вони викликані опором защемлень температурному розширенню матеріалу.

По-друге, розподіл напружень за висотою перерізу є яскраво нелінійним. Найбільші стискаючі напруження (негативні значення на епюрі) генеруються у верхньому шарі балки. Це логічно обґрунтовується фізикою процесу: верхній керамічний шар зазнає значно більшого нагріву ($\Delta T = 500$ К) і при цьому має вищу пружну жорсткість. Завдяки наявності безперервного градієнта мікроструктури, перехід між зонами розтягу та стиску відбувається абсолютно плавно. Якби замість ФГМ використовувалася звичайна двошарова склейка металу та кераміки, на межі їх контакту виник би різкий стрибок напружень (сингулярність), що неминуче призвело б до відшарування кераміки (деламінації) при такому потужному нагріванні. Використання ФГМ повністю вирішує цю проблему, знімаючи міжфазні напруження.

Отже, експеримент підтверджує, що розроблена математична модель успішно захоплює термопружні ефекти, а впровадження функціонально-градієнтних матеріалів є ефективним інженерним рішенням для конструкцій, що працюють в умовах інтенсивних теплових потоків.

4.4 Оцінка ефективності застосування матеріалів із поздовжнім градієнтом

Окрім зміни мікроструктури за товщиною, сучасні адитивні технології (наприклад, 3D-друк металами) дозволяють створювати деталі зі змінними властивостями вздовж головної осі конструкції. Впровадження поздовжнього функціонально-градієнтного матеріалу відкриває широкі перспективи для вагового та вартісного проєктування, дозволяючи створювати конструкції,

наближені до так званих «балок рівного опору». Метою даного експерименту є демонстрація ефективності такого підходу.

Для розрахунку обрано консольну балку під дією рівномірно розподіленого навантаження. Відомо, що в такій системі згинальний момент є максимальним у жорсткому защемленні ($x = 0$) і плавно спадає до нуля на вільному краї ($x = L$). Відповідно, матеріал поблизу вільного краю є недовантаженим з точки зору згинальних напружень і його висока жорсткість там є надлишковою. Параметри експерименту:

Геометрія: $L = 5{,}0$ м, $h = 0{,}2$ м, $b = 0{,}1$ м.

Навантаження: $q = 5000$ Н/м (зосереджені сили та температурні градієнти відсутні).

Тип задачі: Порівняння матеріалів (однорідна сталь та поздовжній ФГМ).

Властивості однорідного матеріалу: $E = 200$ ГПа.

Властивості поздовжнього ФГМ: базовий модуль у защемленні $E_0 = 200$ ГПа; коефіцієнт градієнта $k = -0{,}1$ м$^{-1}$.

Заданий від'ємний коефіцієнт градієнта означає, що модуль пружності лінійно спадає від 200 ГПа в защемленні до 100 ГПа на вільному краї балки ($E(L) = 200 \cdot (1 - 0{,}1 \cdot 5)$).

Як свідчать результати обчислювального експерименту (рис. 4.5), епюри згинальних моментів $M(x)$ та поперечних сил $Q(x)$ для обох балок є абсолютно ідентичними, оскільки задача є статично визначеною і розподіл внутрішніх зусиль залежить виключно від зовнішнього навантаження, а не від жорсткості матеріалу.

Водночас ключовою є епюра розподілу нормальних напружень σ_x. Вона показує, що максимальне напруження у защемленні залишилося незмінним, оскільки базовий модуль пружності E_0 на цій координаті дорівнює модулю однорідної сталі. Проте загальний прогин балки на вільному краї зріс (через зниження жорсткості в правій частині конструкції).

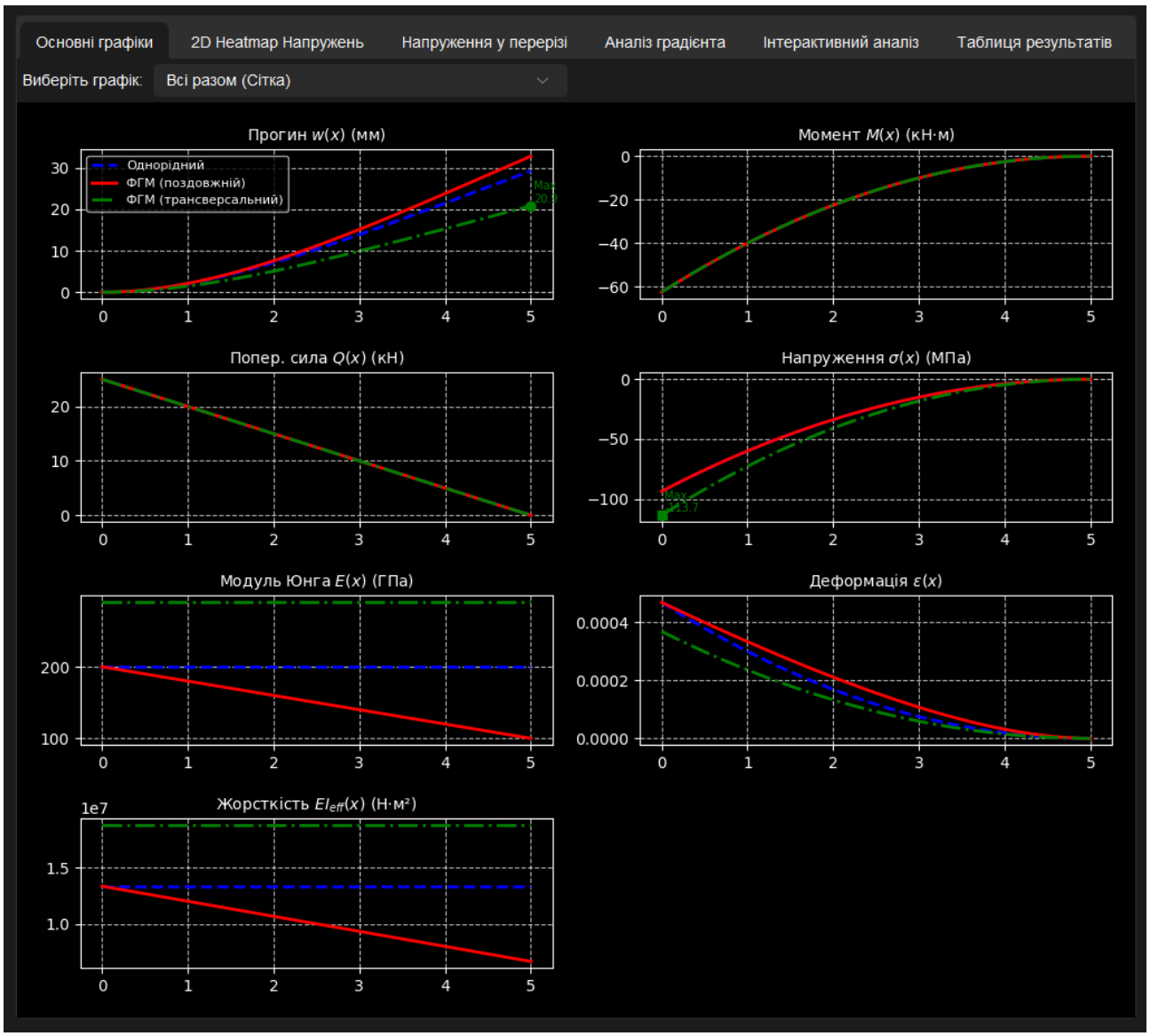


Рисунок 4.5 – Порівняння напружено-деформованого стану однорідної та поздовжньо-градієнтної консольних балок

Головний інженерний висновок цього дослідження полягає в тому, що завдяки використанню поздовжнього градієнта можна суттєво зменшити витрату цінного або важкого матеріалу в тих зонах конструкції, де він не виконує несучої функції (на вільному краї консолі), замінюючи його на легшу або дешевшу матрицю. При цьому міцність конструкції в небезпечному перерізі (у защемленні) залишається незмінною, а деяке збільшення максимального прогину може бути легко компенсоване на етапі проєктування.

4.5 Інтерактивний параметричний аналіз та оптимізація параметрів

У сучасній інженерній практиці розрахунок конструкції для єдиного фіксованого набору даних є лише першим етапом проєктування. Значно більшу цінність становить розуміння чутливості системи – того, як зміна певних геометричних чи силових факторів впливає на її несучу здатність. Для швидкого проведення таких досліджень у розробленому програмному комплексі реалізовано модуль «Інтерактивний аналіз».

Метою фінального обчислювального експерименту є дослідження впливу висоти поперечного перерізу балки h на її максимальний прогин w_{max} та екстремальні нормальні напруження σ_{max} .

Розрахункова схема: шарнірно оперта балка з трансверсального ФГМ ($p = 1{,}0$).

Фіксовані параметри: $L = 5{,}0$ м, $b = 0{,}1$ м, навантаження $q = 5000$ Н/м, температури відсутні.

Змінний параметр: висота h варіюється в діапазоні від $0{,}1$ м до $0{,}3$ м із розбиттям на 10 кроків.

Використання інтерактивного модуля дозволило автоматизувати процес перерахунку: програма самостійно згенерувала 10 різних геометричних моделей, провела інтегрування для кожної з них і побудувала результуючі криві (рис. 4.6).

Отримані залежності мають яскраво виражений нелінійний характер спадання. З позицій опору матеріалів цей результат є абсолютно закономірним: осьовий момент інерції перерізу пропорційний кубу висоти (h^3), а момент опору – квадрату висоти (h^2). Відповідно, при збільшенні висоти балки втричі (з $0{,}1$ м до $0{,}3$ м), її максимальний прогин зменшується у 27 разів, а напруження падають у 9 разів.Цей експеримент яскраво демонструє практичну цінність розробленого модуля. Інженер, маючи перед собою такі графіки, може легко оптимізувати конструкцію. Наприклад, якщо за умовами експлуатації максимальний прогин не повинен перевищувати 5 мм, за графіком можна миттєво визначити мінімально необхідну висоту перерізу h, не проводячи ручного підбору.

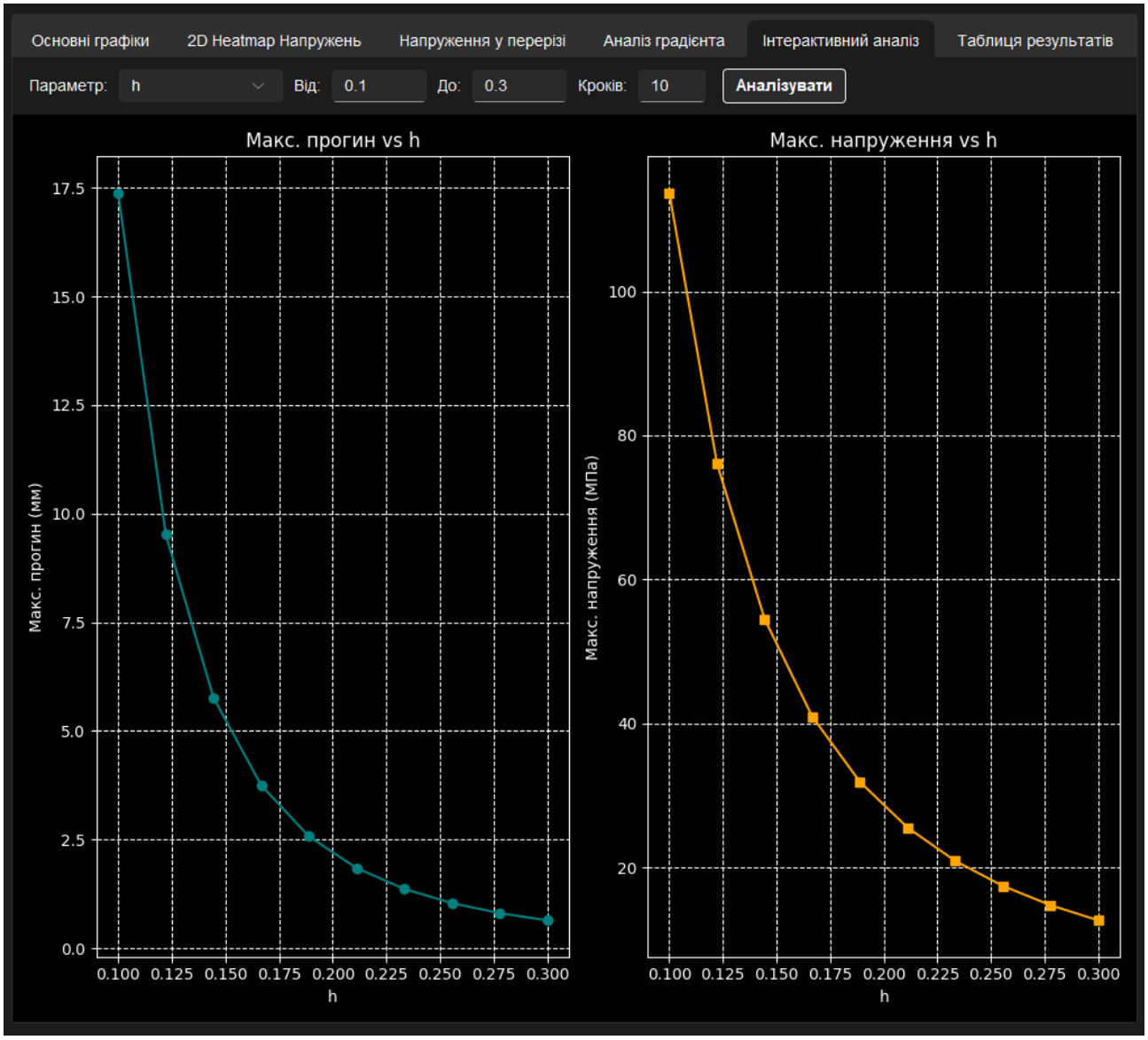


Рисунок 4.6 – Залежність максимального прогину та напружень від висоти перерізу балки h

Отже, можна підсумувати, у четвертому розділі кваліфікаційної роботи було проведено комплексну апробацію розробленого програмного забезпечення шляхом виконання серії обчислювальних експериментів.

Перший етап досліджень довів високу точність закладених чисельних алгоритмів: розбіжність між результатами комп'ютерного моделювання та точним аналітичним розв'язком класичної задачі склала менш ніж 0,1%.

Дослідження впливу профілю трансверсального ФГМ виявило, що зміна індексу об'ємної частки p дозволяє гнучко керувати макроскопічною жорсткістю

конструкції. Було доведено, що наявність градієнта викликає зсув фізичної нейтральної осі та призводить до нелінійного розподілу напружень, концентруючи їх у більш жорсткій (керамічній) фазі.

Термомеханічний аналіз балки з двостороннім защемленням наочно продемонстрував головну перевагу ФГМ – здатність згладжувати температурні напруження за відсутності різких міжфазних меж. Побудовані теплові карти (Heatmap) підтвердили плавний перехід зусиль від зони стиску до зони розтягу при значних температурних перепадах.

Окрім цього, експеримент із поздовжньо-градієнтним матеріалом довів можливість створення конструкцій «рівного опору», що дозволяє суттєво заощаджувати матеріал без втрати загальної міцності системи.

ВИСНОВКИ

У ході виконання кваліфікаційної роботи було успішно вирішено комплексне завдання з розробки математичної моделі, створення програмного забезпечення та проведення чисельного дослідження напружено-деформованого стану конструкцій із функціонально-градієнтних матеріалів.

У теоретичній частині роботи було адаптовано класичну теорію згину балок Ейлера-Бернуллі для розрахунку неоднорідних середовищ. Описане теоретичне та математичне обґрунтування фундаментального ефекту зміщення фізичної нейтральної осі, який виникає через асиметричний розподіл модуля пружності відносно геометричного центру перерізу. Виведено розрахункові формули для інтегральних характеристик жорсткості та доведено, що коректне врахування температурних полів вимагає введення до диференціальних рівнянь рівноваги фіктивної температурної поздовжньої сили та температурного згинального моменту.

Для практичного розв’язання сформульованих крайових задач було розроблено алгоритм розрахункового ядра на основі чисельного кумулятивного інтегрування (методу трапецій), що дозволило уникнути складного аналітичного інтегрування неперервних функцій властивостей матеріалу. Запропонований прямий алгебраїчний підхід із використанням інтегралів Мора виявився надзвичайно ефективним для розкриття статичної невизначеності в балках із двостороннім защемленням. Розроблена математична модель була успішно програмно реалізована мовою Python з використанням об’єктно-орієнтованої архітектури, матричних операцій бібліотеки NumPy для максимальної швидкодії та бібліотеки Tkinter для створення інтуїтивно зрозумілого графічного інтерфейсу.

Проведені обчислювальні експерименти повністю підтвердили адекватність моделі. Верифікація на класичній задачі показала розбіжність з еталонним аналітичним розв’язком менше ніж 0,1%. Параметричний аналіз

трансверсального ФГМ довів, що варіювання індексу об’ємної частки фаз дозволяє гнучко керувати макроскопічною жорсткістю балки, а нелінійний розподіл напружень концентрує найбільші зусилля в більш жорсткому керамічному шарі. Термомеханічний аналіз за допомогою побудованих двовимірних теплових карт (Heatmaps) наочно продемонстрував ключову перевагу ФГМ, здатність плавно згладжувати температурні напруження та усувати небезпечні сингулярності на межах фаз при інтенсивному нагріванні. Крім того, дослідження балок із поздовжнім градієнтом підтвердило можливість реалізації концепції «рівного опору», що відкриває шляхи до раціонального перерозподілу та економії цінного матеріалу на малонавантажених ділянках конструкції.

Таким чином, розроблений програмно-математичний комплекс є надійним та обчислювально ефективним інструментом, готовим до практичного використання в інженерних задачах оптимізації та параметричного проєктування передових композитних конструкцій.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Mahamood R. M., Akinlabi E. T., Shukla M., Pityana S. Functionally graded material: An overview. Proceedings of the World Congress on Engineering. London, 2012. P. 1593-1597.

2. Koizumi M. FGM activities in Japan. Composites Part B : Engineering. 1997. Vol. 28, No 1-2. P. 1-4.Reddy J. N. Analysis of functionally graded plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2000. Vol. 47, No 2. P. 663-684.

3. Suresh S., Mortensen A. Fundamentals of Functionally Graded Materials. London : IOM Communications Ltd, 1998. 165 p.

4. Padture N. P., Gell M., Jordan E. H. Thermal barrier coatings for gas-turbine engine applications. *Science*. 2002. Vol. 296, No 5566. P. 280-284.

5. Sankar B. V. An elasticity solution for functionally graded beams. *Composites Science and Technology*. 2001. Vol. 61, No 5. P. 689-696.

6. Jones R. M. Mechanics of Composite Materials. 2nd ed. Philadelphia : Taylor & Francis, 1999. 519 p.

7. Бобошко В. М. Механіка суцільних середовищ. Київ : КПІ, 2018. 230 с.

8. Богданов В. Л., Камінський А. О. Механіка композитних матеріалів : підручник. Київ : Київський університет, 2010. 320 с.

9. Mori T., Tanaka K. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta metallurgica*. 1973. Vol. 21, No 5. P. 571-574.

10. Богданович П. М., Ткачук М. М. Моделювання напруженого стану елементів конструкцій з покриттями. Харків : НТУ «ХПІ», 2005. 256 с.

11. Shen H. S. Functionally Graded Materials : Nonlinear Analysis of Plates and Shells. Boca Raton : CRC Press, 2009. 280 p.

12. Boley B. A., Weiner J. H. Theory of Thermal Stresses. New York : Dover Publications, 1997. 586 p.

13. Noda N. Thermal stresses in functionally graded materials. *Journal of Thermal Stresses*. 1999. Vol. 22, No 4-5. P. 477-512.

14. Hetnarski R. B., Eslami M. R. Thermal Stresses – Advanced Theory and Applications. Dordrecht : Springer, 2009. 536 p.

15. Timoshenko S. P., Goodier J. N. Theory of Elasticity. 3rd ed. New York : McGraw-Hill, 1970. 567 p.

16. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., Zhu J. Z. The Finite Element Method : Its Basis and Fundamentals. 7th ed. Oxford : Butterworth-Heinemann, 2013. 756 p.

17. Писаренко Г. С., Квітка О. Л., Уманський Е. С. Опір матеріалів. Київ : Вища школа, 2004. 655 с.

18. Карпенко М. І., Шевченко В. П. Опір матеріалів та теорія пружності. Київ : Вища школа, 2015. 412 с.

19. Опір матеріалів з основами теорії пружності / В. Г. Піскунов, В. М. Сипшун та ін. Київ : Вища школа, 1999. 540 с.

20. Sina S. A., Navazi H. M., Haddadpour H. An analytical method for free vibration analysis of functionally graded beams. *Materials & Design*. 2009. Vol. 30, No 3. P. 741-747.

21. Баженов В. А., Перельмутер А. В., Шишов О. В. Будівельна механіка. Комп’ютерні технології. Київ : Каравела, 2009. 696 с.

22. Tanigawa Y. Some basic thermoelastic problems for functionally graded materials. *Applied Mechanics Reviews*. 1995. Vol. 48, No 6. P. 287-300.

23. Фельдман Л. П., Петренко А. І., Дмитрієва О. А. Чисельні методи в інформатиці. Київ : Видавнича група BHV, 2006. 480 с.

24. Шваб’юк В. І. Опір матеріалів : навч. посіб. Київ : Знання, 2009. 380 с.

25. Баженов В. А., Дашченко О. Ф., Коломієць Л. В. Будівельна механіка. Одеса : Астропринт, 2014. 328 с.

26. Григоренко О. Я., Гуляєв В. І. Чисельні методи в задачах механіки конструкцій. Київ : КНУБА, 2012. 296 с.

27. Григоренко Я. М., Власюк А. П., Мартинюк П. М. Чисельні методи в механіці суцільних середовищ. Київ : Наукова думка, 2018. 350 с.

28. Мартинюк П. М., Мічута О. Р. Чисельні методи в інженерних задачах. Рівне : НУВГП, 2019. 185 с.

29. Burden R. L., Faires J. D. Numerical Analysis. 9th ed. Boston : Brooks/Cole Cengage Learning, 2011. 872 p.

30. Войтович Н. В., Гнип О. П. Чисельні методи прикладної математики. Львів : Видавництво Львівської політехніки, 2015. 116 с.

31. Шахно С. М. Методи чисельного аналізу. Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2014. 228 с.

32. Зарецька І. Т., Пелех Я. М. Чисельні методи. Львів : Львівська політехніка, 2020. 276 с.

33. ДСТУ ISO/IEC 25010:2016. Інженерія систем і програмного забезпечення. Вид. офіц. Київ : ДП «УкрНДНЦ», 2016. 30 с.

34. Kiusalaas J. Numerical Methods in Engineering with Python 3. Cambridge : Cambridge University Press, 2013. 432 p.

35. Співак В. М., Гахова Х. О. Програмування мовою Python. Харків : ХНУРЕ, 2017. 164 с.

36. Array programming with NumPy / C. R. Harris, K. J. Millman, S. J. van der Walt et al. *Nature*. 2020. Vol. 585, No 7825. P. 357-362.

37. Hunter J. D. Matplotlib: A 2D graphics environment. *Computing in science & engineering*. 2007. Vol. 9, No 3. P. 90-95.

38. Linge S., Langtangen H. P. Programming for computations – Python. Cham : Springer, 2016. 332 p.

39. Глибовець М. М., Ольховик О. В. Об’єктно-орієнтоване програмування. Київ : НаУКМА, 2010. 431 с.

40. Oliphant T. E. A guide to NumPy. USA : Trelgol Publishing, 2006. 342 p.

41. Moore A. Python GUI Programming with Tkinter. Birmingham : Packt Publishing Ltd, 2018. 402 p.

42. VanderPlas J. Python Data Science Handbook : Essential Tools for Working with Data. Sebastopol : O’Reilly Media, 2016. 548 p.

43. Комп’ютерне моделювання фізичних процесів та систем / В. І. Козлов та ін. Київ : КНУ ім. Тараса Шевченка, 2015. 240 с.

44. Newman M. E. J. Computational Physics. CreateSpace Independent Publishing Platform, 2012. 528 p.