МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра фундаментальної та прикладної математики

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА БАКАЛАВРА

на тему: **«Скінченнорізницевий метод розв'язання двовимірної задачі теплопровідності»**

Виконав: студент 4 курсу, групи 6.1131
спеціальності 113 Прикладна математика
(шифр і назва спеціальності)
освітньої програми Комп'ютерне моделювання
(назва освітньої програми)
А.О. Корука
(ініціали та прізвище)

Керівник Завідувач кафедри фундаментальної та прикладної математики, професор, д.т.н. Гребенюк С.М.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Рецензент декан математичного факультету, професор, д.т.н. Гоменюк С.І.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Запоріжжя – 2025

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет математичний

Кафедра фундаментальної та прикладної математики

Рівень вищої освіти бакалавр

Спеціальність 113 Прикладна математика
(шифр і назва)

Освітня програма Комп'ютерне моделювання

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри
фундаментальної та прикладної
математики, професор, д.т.н.

_____ Гребенюк С.М.
(підпис)

« ____ » _____ 2025 р.

ЗАВДАННЯ
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТУ

Коруці Анастасії Олегівні
(прізвище, ім'я та по-батькові)

1. Тема роботи (проекту) Скінченнорізницевий метод розв'язання двовимірної задачі теплопровідності

керівник роботи (проекту) Гребенюк Сергій Миколайович, д.т.н., професор
(прізвище, ім'я та по-батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом ЗНУ від « 20 » грудня 2025 року № 2001-с

2. Строк подання студентом роботи 15.06.2025

3. Вихідні дані до роботи 1. Постановка задачі.
2. Перелік літератури.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень)
Презентація

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання 18.02.2025

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів кваліфікаційної роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	Розробка плану роботи.	22.02.2025	
2.	Збір вихідних даних.	28.02.2025	
3.	Розробка першого розділу.	19.03.2025	
4.	Розробка другого розділу.	06.04.2025	
5.	Розробка третього розділу.	29.05.2025	
6.	Оформлення та нормоконтроль	14.06.2025	
	кваліфікаційної роботи.		
7.	Захист кваліфікаційної роботи.	17.06.2025	

Студент _____ А. О. Корука
(підпис) (ініціали та прізвище)

Керівник роботи _____ С. М. Гребенюк
(підпис) (ініціали та прізвище)

Нормоконтроль пройдено

Нормоконтролер _____ О. Г. Спиця

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота бакалавра «Скінченнорізницевий метод розв’язання двовимірної задачі теплопровідності»: 43 с., 5 рис., 13 джерел.

ТЕПЛОПРОВІДНІСТЬ, РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ, МЕТОД СКІНЧЕННИХ РІЗНИЦЬ, АПРОКСИМАЦІЯ ПОХІДНИХ, ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ, СТІЙКІСТЬ І ЗБІЖНІСТЬ ЧИСЕЛЬНОЇ СХЕМИ.

Об’єкт дослідження – процес розповсюдження тепла у двовимірному тілі та його чисельне моделювання методом скінченних різниць.

Мета роботи: побудувати математичну та комп’ютерну модель розв’язання двовимірної задачі теплопровідності з використанням методу скінченних різниць та дослідити її поведінку при різних параметрах дискретизації.

Метод дослідження – аналітичний, чисельний, порівняльний.

У даній кваліфікаційній роботі проведено аналіз фізичних основ процесу теплопровідності та математичних моделей, які описують цей процес. Описано принципи методу скінченних різниць для апроксимації диференціальних рівнянь, особливості заміни похідних різницевими співвідношеннями та побудови чисельної схеми.

Побудовано чисельну модель двовимірного розподілу температури із застосуванням явної різницевої схеми. Для моделювання використано рівномірну прямокутну сітку з подальшою реалізацією обчислювального алгоритму мовою програмування Python. Розглянуто вибір оптимальних параметрів кроку сітки та часу для забезпечення стійкості та точності моделі.

Проведено візуалізацію розподілу температури в обчислюваній області, здійснено аналіз отриманих результатів та їх фізичної достовірності. На основі проведеного дослідження зроблено висновки про ефективність застосованого підходу, його переваги, обмеження та можливості для подальшого розвитку моделей теплопровідності.

SUMMARY

Bachelor's Qualification Thesis «Finite Difference Method for Solving a Two-Dimensional Heat Conduction Problem»: 43 pages, 5 figures, 13 sources.

HEAT CONDUCTION, HEAT CONDUCTION EQUATION, FINITE DIFFERENCE METHOD, DERIVATIVE APPROXIMATION, NUMERICAL MODELING, STABILITY, CONVERGENCE.

Object of research – the process of heat distribution on a two-dimensional plane and its numerical modeling using finite difference methods.

Purpose of the work: to develop a mathematical and computer model for solving a two-dimensional heat conduction problem using the finite difference method and to investigate its behavior under different discretization parameters.

Research methods – analytical, numerical, comparative.

This bachelor's qualification thesis analyzes the physical fundamentals of the heat conduction process and the mathematical models describing this phenomenon. The principles of the finite difference method for approximating differential equations, the specifics of replacing derivatives with difference relations, and the construction of a numerical scheme are described.

A numerical model of two-dimensional temperature distribution was built using an explicit finite difference scheme. For modeling, a uniform rectangular grid was used, followed by the implementation of the computational algorithm in Python programming language. The selection of optimal grid spacing and time step parameters to ensure the stability and accuracy of the model was considered.

The temperature distribution in the calculated area was visualized, and the obtained results and their physical reliability were analyzed. Based on the conducted research, conclusions were drawn regarding the efficiency of the applied approach, its advantages, limitations, and possibilities for further development of heat conduction models.

ЗМІСТ

Завдання на кваліфікаційну роботу 2
Реферат 4
Summary 5
Вступ 8
Розділ 1. Теоретичні основи моделювання теплопровідності 12
1.1. Поняття теплопровідності 12
1.2. Математичне моделювання теплопровідності 13
1.3. Крайові умови та їх фізичне значення 15
1.4. Чисельні методи моделювання теплопровідності 17
1.5. Життєві приклади та аналогії 19
Розділ 2. Метод скінченних різниць 21
2.1. Основна ідея методу 21
2.2. Побудова різницевої сітки 23
2.3. Аппроксимація похідних 25
2.4. Стійкість, точність та збіжність методу 27
2.5. Приклади застосування методу в житті 29
Розділ 3. Розробка комп'ютерної моделі теплопровідності 31
3.1. Постановка задачі 31
3.2. Алгоритм розв'язання 31
3.3. Реалізація моделі на Python 32
3.4. Тестування та перевірка результатів 33
3.5. Візуалізація результатів 33
3.6. Висновки до розділу 3 37

Розділ 4. Аналіз отриманих результатів 38
4.1. Загальні спостереження 38
4.2. Динаміка температурного поля 39
4.3. Стійкість, точність та збіжність моделі 39
4.4. Практична цінність і приклади використання 40
4.5. Висновок до розділу 4.....40
Висновки 41
Перелік посилань 43

ВСТУП

Тепло – це щось, з чим ми маємо справу щодня. Ми відчуваємо його, коли гріємо руки біля батареї взимку, коли варимо обід, коли влітку шукаємо тінь від сонця. Тепло поширюється всюди: у повітрі, у воді, у металі, в стінах нашого будинку. Але як саме воно розповсюджується? Чому деякі речі нагріваються швидше, а інші – повільніше? Чому чай в кружці остигає швидше, якщо залишити її на підвіконні? На ці питання відповідає фізика, а саме – вивчення теплопровідності.

Здавалося б, навіщо нам знати, як розподіляється тепло на площині? Але уявімо реальні ситуації:

Будівництво будинку: потрібно знати, які матеріали краще утримують тепло, щоб зберегти тепло взимку та прохолоду влітку. Якщо неправильно розрахувати розподіл тепла, мешканці можуть втрачати значну кількість енергії на опалення.

Проєктування ноутбуків чи телефонів: важливо правильно розташувати деталі, щоб уникнути перегріву. Мікросхеми нагріваються, і якщо не врахувати розподіл тепла – пристрій швидко вийде з ладу.

Медицина: при проведенні процедур термотерапії, де за допомогою тепла лікують певні хвороби, потрібно точно знати, як тепло проникає у тканини тіла.

Рятувальні роботи: наприклад, тепловізори – камери, які показують розподіл тепла – допомагають знаходити людей у задимлених будівлях або вночі.

Але тепло не можна побачити. Його не можна сфотографувати без спеціальної техніки. Тому дуже важливо мати моделі, які дозволяють передбачити, як воно буде себе поводити. Саме для цього використовуються математичні моделі і чисельні методи, зокрема метод скінченних різниць.

Метод скінченних різниць дозволяє поділити складну задачу (наприклад, розподіл температури у металічній пластині) на багато простих дій – обчислень,

які може виконати комп’ютер. Так можна отримати поле розподілу температури і побачити, як змінюється тепло в кожній точці пластини.

Основним напрямом цієї роботи є створення простої, але ефективної комп’ютерної моделі, яка покаже, як тепло поширюється на площині. Така модель може бути використана для навчання, досліджень і навіть у реальних інженерних задачах.

Ця тема не лише технічна – вона пов’язана з нашим повсякденним життям. Тепло – це комфорт, безпека, енергоефективність. Зрозуміти, як воно працює – значить зробити наше життя кращим.

Дослідження на тему «Моделювання розподілу тепла на площині з використанням методу скінченних різниць» поєднує в собі одразу кілька важливих напрямів: прикладну математику, фізику та комп’ютерне моделювання. Це дає можливість не лише поглибити теоретичні знання, але й застосувати їх на практиці, створюючи реальні програми, які можуть використовуватися в різних галузях.

Актуальність цієї теми важко переоцінити. У будівництві потрібно знати, як тепло розподіляється в стінах будівлі, щоб правильно розрахувати теплоізоляцію. У медицині – як тепло впливає на тканини під час процедур. У виробництві – як охолоджуються деталі, щоб уникнути їхнього пошкодження. Навіть у побуті стикаємось із цим: наприклад, гріючи їжу в мікрохвильовці або обігріваючи приміщення.

Основною задачею цієї кваліфікаційної роботи є створення математичної моделі розподілу тепла на площині, реалізація цієї моделі на комп’ютері за допомогою методу скінченних різниць та аналіз отриманих результатів. Метод скінченних різниць дозволяє наближено розв’язувати складні рівняння, розбиваючи задачу на простіші частини. Це схоже на те, як розділяється велика справа на багато маленьких кроків і поступове її виконання.

Робота складається з кількох розділів. Спершу розглядаються фізичні та математичні основи теплопередачі. Далі пояснюється метод скінченних різниць і будується математична модель. Потім модель реалізується в комп’ютерній

програмі, проводяться чисельні експерименти та аналізуються результати.

Таким чином, ця кваліфікаційна робота є не лише навчальним проєктом, а й спробою застосувати математичні знання для вирішення актуальної та практично значущої задачі.

Актуальність теми

Моделювання розподілу тепла – це важливе завдання, яке має практичне значення у багатьох сферах. У наш час, коли енергозбереження, комфорт та безпека є на першому плані, вміння прогнозувати і контролювати розподіл температури стає особливо актуальним. Наприклад: у будівництві це дає змогу проєктувати енергоефективні будинки, у машинобудуванні – уникати перегріву двигунів і деталей, у побуті – правильно розраховувати теплоізоляцію квартир, у промисловості – покращувати виробничі процеси, де важлива точна температура, у науці та освіті – наочно пояснювати студентам складні фізичні процеси.

Тобто, ця тема не є вузькоспеціалізованою – вона має значення для кожного, хто стикається з теплом у будь-якому вигляді, а це – практично всі люди.

Мета і завдання роботи

Мета роботи – створити математичну та комп’ютерну модель розподілу тепла на площині з використанням методу скінченних різниць, а також дослідити її поведінку у різних умовах.

Завдання:

1. Ознайомитися з фізичною суттю теплопровідності.

2. Вивчити рівняння теплопровідності в двовимірному випадку.

3. Розглянути суть методу скінченних різниць.

4. Реалізувати програму для чисельного розв’язання.

5. Провести візуалізацію результатів (графіки, теплові карти).

6. Проаналізувати результати, зробити висновки щодо ефективності моделі.

Об’єкт та предмет дослідження

Об’єкт дослідження – процес розповсюдження тепла у двовимірному тілі та його чисельне моделювання за допомогою скінченнорізницевих методів.

Це може бути, наприклад, металева пластина, бетонна стіна або інший матеріал, по якому розповсюджується тепло.

Предмет дослідження – математичне моделювання процесу розповсюдження тепла методом скінченних різниць.

Будемо не просто «вивчати» тепло, а будувати формули, які дозволять передбачити, як воно поводиться в часі й просторі.

Методи, які використовуються

Для досягнення поставленої мети використовуються такі методи:

Теоретичний аналіз – вивчення законів теплопровідності та математичних моделей розповсюдження тепла.

Метод скінченних різниць – чисельний метод для розв’язання крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь.

Комп’ютерне моделювання – реалізація математичних моделей та отримання розрахунків за допомогою пакету прикладних програм, реалізованого за допомогою, наприклад, Python.

Візуалізація результатів – графічне представлення отриманих даних, що полегшує їх аналіз.

Ці методи є взаємопов’язаними: спершу формується математична модель, потім – реалізується на практиці, а далі аналізуємо та інтерпретуємо отримані результати.

1 ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

1.1 Поняття теплопровідності

У фізиці теплопровідність розглядається як один із основних механізмів передавання теплової енергії в матеріальному середовищі.

Цей процес полягає у перенесенні тепла від більш нагрітих частин тіла до менш нагрітих за рахунок хаотичного руху мікрочастинок – атомів, молекул, електронів.

На макрорівні це сприймається як вирівнювання температури: гаряче стає холоднішим, а холодне – теплішим. Наприклад, якщо покласти металеву ложку в гарячий чай, вже через кілька секунд її інший кінець теж почне нагріватися. Це і є теплопровідність у дії. Метали мають високу теплопровідність, оскільки в них наявні вільні електрони, що ефективно передають енергію. На противагу, скло, дерево чи пінопласт проводять тепло значно повільніше.

Знання про теплопровідність є ключовими у багатьох сферах: в опаленні, охолодженні, будівництві, електроніці, медицині, енергетиці.

Теплопровідність визначає, які матеріали вибирають для термоізоляції, яким чином розміщують компоненти в мікросхемах і як проєктуються опалювальні системи.

Теплопровідність — це складний фізичний процес, який можна розглядати з різних наукових позицій.

З погляду фізики, теплопровідність виникає через мікроскопічний рух частинок: атоми й молекули у гарячішій частині матеріалу мають більшу енергію й передають її своїм сусідам. У металах цей процес ще більш ефективний завдяки руху вільних електронів, які дуже швидко переносять тепло. Саме тому металеві предмети на дотик здаються холоднішими — вони швидко відводять тепло від руки.

З позиції математики, теплопровідність описується як процес зміни температурного поля у просторі та часі. Температура кожної точки залежить не тільки від її початкового стану, а й від того, як розподілене тепло у сусідніх точках. Математична модель дозволяє передбачати, як змінюватиметься температура у будь-який момент часу. Це важливо, коли йдеться про складні конструкції чи неоднорідні матеріали, де прості уявлення "на око" не працюють.

І нарешті, з точки зору програмування, теплопровідність — це задача для комп'ютерного моделювання. Реальні фізичні процеси часто настільки складні, що їх неможливо вирішити вручну. Завдяки комп'ютерним програмам (наприклад, написаним мовою Python або за допомогою спеціалізованих6го пакетів) можна створити чисельну модель: розбити досліджувану область на велику кількість маленьких ділянок і покроково обчислювати зміну температури у кожній з них. Саме так працюють сучасні моделі у будівництві, інженерії, медицині, енергетиці.

У підсумку, теплопровідність — це приклад того, як фізичний процес може бути математично описаний і практично змодельований за допомогою сучасних програмних інструментів.

1.2 Математичне моделювання теплопровідності

Реальні процеси теплопередачі описуються математичними рівняннями, що базуються на законах термодинаміки.

Одне з найважливіших таких рівнянь – рівняння теплопровідності (рівняння теплопереносу), що для двовимірної області має вигляд:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \tag{1.1}$$

де $u(x, y, t)$) – температура у точці з координатами (x, y) у момент часу t,

α – коефіцієнт теплопровідності, який залежить від властивостей матеріалу.

Це рівняння є диференціальним рівнянням у частинних похідних другого порядку.

Його фізичний зміст полягає в тому, що швидкість зміни температури в певній точці залежить від кривизни температурного поля навколо.

Математична модель дозволяє аналізувати поведінку тепла в різних середовищах, прогнозувати результат змін, а головне – зменшити потребу в дорогих фізичних експериментах.

Додатково варто враховувати, що сучасне математичне моделювання теплопровідності не обмежується лише класичним рівнянням теплопереносу. У багатьох практичних задачах доводиться враховувати додаткові ефекти:

По-перше, у реальних матеріалах теплопровідність може залежати від температури. Наприклад, у металах зі зростанням температури знижується рухливість електронів, і відповідно — знижується ефективність теплопровідності. У деяких керамічних матеріалів або полімерів, навпаки, при підвищенні температури зростає теплопровідність через активацію додаткових механізмів теплопередачі.

По-друге, у задачах з рухомим середовищем (наприклад, коли модель описує рідину або газ) до рівняння теплопровідності додають члени, що описують конвекційний перенос тепла. У таких випадках температура залежить не лише від теплопровідності, а й від швидкості руху потоку. Це особливо актуально для задач у енергетиці — наприклад, у теплових станціях або при охолодженні обладнання з примусовою циркуляцією охолоджувача.

По-третє, сучасні задачі часто мають складну геометрію. Це не просто прямокутна або кругла пластина — це можуть бути конструкції зі складними внутрішніми порожнинами, шарами різних матеріалів, отворами. Такі задачі вимагають спеціальних методів дискретизації та використання нерівномірної сітки. Завдяки сучасному програмному забезпеченню (наприклад, COMSOL Multiphysics або ANSYS) стало можливим будувати моделі для практично будь-якої складної області.

Ще одним важливим напрямом є моделювання теплопереносу у багатошарових структурах. У таких системах кожен шар може мати свої теплопровідні властивості. Наприклад, у сучасних багатошарових вікнах або термоізоляційних стінах інженери спеціально комбінують шари з різними характеристиками для досягнення бажаного теплового ефекту.

Не менш актуальними є задачі моделювання короткочасних теплових процесів. У таких випадках важливо правильно врахувати інерційні властивості матеріалу — його теплоємність. Наприклад, при роботі лазерного різання, при зварюванні чи при термообробці металів важливо знати, як швидко і на яку глибину проникне тепло за короткий проміжок часу.

Також у математичному моделюванні широко використовують поняття змінних і залежних у часі граничних умов. Це дозволяє, наприклад, моделювати ситуації, коли зовнішні умови (температура навколишнього середовища, тепловий потік) змінюються у часі — що характерно для багатьох реальних технологічних процесів.

Сучасні комп’ютерні моделі дозволяють інтегрувати у розрахунок як теплопровідність, так і супутні ефекти — механічне напруження, фазові переходи (наприклад, плавлення, кристалізація), що відкриває нові можливості для інженерів та дослідників.

Завдяки стрімкому розвитку обчислювальних технологій теплопровідність перестала бути лише темою фізики — це повноцінна багатогалузева прикладна задача, що активно вирішується за допомогою математики, комп’ютерного моделювання та програмування.

1.3 Крайові умови та їх фізичне значення

Жодна задача математичного моделювання не може бути розв’язана лише на основі диференціального рівняння – обов’язково потрібно задати початкові та крайові умови. Початкові умови визначають температуру у всіх точках на момент часу $t = 0$.

Крайові умови описують, що відбувається на межах обчислювальної області.

Основні типи крайових умов:

- Умови першого роду (Діріхле) – температура на межі фіксована (наприклад, край тримається при 0°C).

- Умови другого роду (Неймана) – задається тепловий потік або теплоізоляція ($\partial u/\partial n = 0$).

- Умови третього роду (Ньютона) – враховується теплообмін із навколишнім середовищем.

У побуті прикладом умов третього роду є охолодження гарячої чашки повітрям. А умови другого роду відповідають ситуації, коли тепло не передається – наприклад, при використанні термоізоляційного шару.

На практиці правильний вибір крайових умов є одним із ключових факторів для побудови адекватної моделі теплопровідності. Часто від того, наскільки фізично коректно задані умови на межах, залежить уся достовірність моделювання.

У багатьох реальних задачах крайові умови бувають складнішими, ніж прості фіксовані значення температури або теплового потоку. Наприклад, у будівництві стіни будівлі можуть контактувати одночасно з повітрям зовні, внутрішнім опаленням та шарами утеплювача — це створює комбіновані умови третього роду, які додатково змінюються в часі (день/ніч, вітер, вологість).

У сучасних електронних пристроях, таких як процесори чи акумулятори, межі тіла можуть бути умовно рухомими — наприклад, коли матеріал розширюється від нагріву або стискається при охолодженні. В такому випадку граничні умови потрібно формулювати у зв’язку із змінною геометрією області.

Особливо складними є задачі, у яких межа розділяє області з різними фізичними властивостями. Наприклад, у шаруватих композитах, які поєднують кераміку і метал, одна межа матеріалу може мати абсолютно інші теплопровідні характеристики, ніж сусідня. Для таких випадків використовуються так звані умови "зшивки" температурних полів і теплових потоків.

Ще один важливий випадок — задачі з внутрішніми тепловими джерелами, де необхідно правильно задати умови не тільки на зовнішніх межах, а й у самій області. Наприклад, при моделюванні процесу зварювання чи лазерної обробки теплове джерело "переміщується" по матеріалу, що створює складний температурний розподіл.

Також сьогодні активно розвивається напрям моделювання теплопередачі у біологічних тканинах. Тут крайові умови можуть включати як природне охолодження організму, так і штучні впливи (наприклад, при медичних процедурах або використанні спеціальних охолоджуючих пристроїв).

Таким чином, застосування крайових умов у сучасному математичному моделюванні теплопровідності вимагає глибокого розуміння фізичних процесів і точного відображення реальних умов експлуатації об’єкта.

1.4 Застосування чисельних методів до розв’язання задачі теплопровідності

Аналітичні розв’язки рівнянь теплопровідності існують лише для ідеалізованих задач: регулярна геометрія, сталі умови, однорідні матеріали. У реальному світі існують ситуації з набагато складнішими випадками, де ці методи вже не працюють.

Чисельні методи, зокрема метод скінченних різниць, дозволяють розв’язувати:

- задачі зі складною формою області (наприклад, контур квартири з нішами, балконами, перегородками),
- нерівномірні умови (наприклад, обігрів лише одного кута кімнати),
- моделі, в яких різні частини мають різні теплопровідні властивості.

Крім того, чисельні методи дозволяють швидко адаптувати модель: змінити розмір сітки, умови на межах, джерела тепла – і отримати новий результат без повторного виведення складних формул. Це дає гнучкість і

економить час.

У сучасному світі застосування чисельних методів для моделювання теплопровідності стало стандартом у багатьох галузях. Завдяки доступності потужних комп'ютерів стало можливим моделювати складні об'єкти з високою роздільною здатністю і деталізацією.

Одним з актуальних напрямів є використання адаптивних сіток, де розмір кроку сітки автоматично змінюється у залежності від крутизни температурного градієнта. Це дозволяє значно підвищити точність у важливих ділянках (наприклад, біля локальних джерел тепла), зберігаючи при цьому помірний час обчислень.

Крім того, у задачах, де теплопровідність поєднується з іншими фізичними явищами (наприклад, механічним напруженням, фазовими переходами або хімічними реакціями), чисельні методи дозволяють будувати так звані мультифізичні моделі. Це відкриває нові можливості, зокрема для проектування нових матеріалів та інженерних рішень.

Ще один цікавий аспект — застосування паралельних обчислень для розв'язання задач теплопровідності. Сучасні алгоритми дозволяють розподіляти обчислення між кількома процесорами або навіть використовувати графічні процесори (GPU), що суттєво скорочує час розрахунків для великих задач.

Також значний розвиток отримали інтерактивні програмні пакети для чисельного моделювання теплопередачі. Сучасні інженери та дослідники мають у своєму розпорядженні не тільки програмні мови (Python, C++, Fortran), а й такі потужні системи, як COMSOL, ANSYS, SolidWorks Simulation та інші. Це дозволяє швидко створювати моделі, проводити серії експериментів та отримувати наочні результати.

Сучасні чисельні методи не тільки дають змогу моделювати відомі фізичні процеси, а й допомагають у створенні нових технологій: наприклад, у розробці енергоефективних будівель, теплових захистів для космічної техніки або інноваційних систем охолодження для електроніки.

Таким чином, застосування чисельних методів для розв’язання задач теплопровідності стало важливою складовою сучасної науки і техніки. Ці методи дозволяють не просто аналізувати відомі процеси, а й прогнозувати їх розвиток, оптимізувати інженерні рішення і створювати нові ефективні технології.

1.5 Приклади та аналогії крайових задач теплопровідності

Якщо залишити кухоль чаю на вікні взимку, він охолоне швидше, ніж у кімнаті – через більший тепловий потік назовні.

В автомобілях прокладають термоізоляційні прокладки між двигуном і корпусом, щоб зменшити нагрів кабіни.

Термоси використовують принцип поганої теплопровідності: вакуум між стінками не дозволяє теплу виходити.

У телефонах розміщення процесора і радіаторів тепла враховує напрямок розсіювання теплової енергії.

В усіх цих прикладах інтуїтивно уявляється процес теплопередачі, але саме математичне моделювання дозволяє його точно описати і прогнозувати.

У сучасному світі моделювання теплопровідності має все ширше застосування у найрізноманітніших сферах. Численні приклади з реального життя демонструють, наскільки важливими є ці знання не тільки для інженерів, а й для фахівців інших галузей.

Наприклад, у медицині чисельне моделювання теплових процесів допомагає планувати процедури термотерапії, де контроль за глибиною прогріву тканин критично важливий для досягнення терапевтичного ефекту без пошкодження здорових клітин. Такі моделі враховують не тільки властивості тканин, а й кровообіг, який впливає на розподіл температури.

У військовій техніці моделювання теплопередачі використовується при проєктуванні теплових екранів для захисту від теплового випромінювання або для маскування техніки у інфрачервоному діапазоні.

У побутовій техніці інженери розраховують оптимальні режими нагріву для духовок, мікрохвильових печей та прасок, щоб забезпечити рівномірний розподіл температури та мінімізувати втрати енергії.

У авіації та космічній галузі точне моделювання теплопровідності дозволяє прогнозувати температурний режим літальних апаратів при різних умовах польоту — від нагрівання при русі у щільних шарах атмосфери до охолодження в умовах вакууму.

У новітніх будівельних технологіях моделювання теплових потоків допомагає проєктувати енергоефективні фасадні системи, вікна з селективним покриттям та системи теплих підлог. Це дозволяє зменшити теплові втрати будівель і підвищити комфорт для мешканців.

Навіть у харчовій промисловості моделювання теплопередачі важливе для визначення оптимальних режимів термічної обробки продуктів — щоб забезпечити рівномірне прогрівання і при цьому зберегти якість та корисні властивості.

Таким чином, практичне значення задач теплопровідності є надзвичайно широким. Їх моделювання дозволяє оптимізувати процеси, підвищувати ефективність технологій, забезпечувати безпеку та комфорт у найрізноманітніших галузях людської діяльності.

2 МЕТОД СКІНЧЕННИХ РІЗНИЦЬ

2.1 Основна ідея методу скінченних різниць

Метод скінченних різниць – один із найпоширеніших чисельних методів у математичному моделюванні, який застосовується для розв'язання крайових задач для диференціальних рівнянь. Його сутність полягає в тому, щоб замінити похідні в рівняннях на різницеві співвідношення – прості алгебраїчні формули. Такий підхід дозволяє розв'язувати задачі, які неможливо або дуже складно вирішити аналітично.

Наприклад, у звичайному рівнянні теплопровідності похідна за часом показує, як змінюється температура в точці з часом, а похідні по просторових координатах – як температура змінюється по поверхні. У методі скінченних різниць просто порівнюються значення температури в сусідніх точках та обчислюються середнє значення або зміну за крок часу.

Як приклад можна уявити процес охолодження гарячої каструлі, поставленої на плиту. Якщо вимірювати температуру в різних точках каструлі щосекунди, можна помітити, як вона змінюється – і це саме те, що імітує наш метод.

Метод перетворює математичну модель у систему лінійних рівнянь, які розв'язуються за допомогою комп'ютера. Весь процес можна реалізувати у вигляді циклів та формул, і що важливо – такий підхід універсальний, тобто його можна використовувати і для теплопровідності, і для дифузії, і для інших фізичних явищ.

Значною перевагою методу скінченних різниць є його гнучкість – можливість адаптуватися до найрізноманітніших задач. Метод однаково добре підходить як для задач із простою геометрією, так і для складних багатошарових чи нерівномірних середовищ.

Ще однією важливою властивістю цього методу є можливість легко змінювати параметри розрахунку – крок сітки або часовий інтервал – що дозволяє регулювати компроміс між точністю та швидкістю обчислень. Наприклад, для задач попереднього аналізу можна використовувати грубіші сітки для швидкого отримання загальної картини, а потім, для точнішого моделювання, переходити до дрібнішої дискретизації.

Слід також зазначити, що метод скінченних різниць чудово підходить для навчальних цілей. Його проста і наочна ідея – замінити похідні на різниці – дозволяє швидко зрозуміти суть чисельних методів навіть тим студентам, які не мають глибокої підготовки у вищій математиці. Саме тому цей метод широко використовується у навчальних курсах із чисельного аналізу, прикладної математики, обчислювальної фізики.

На практиці метод скінченних різниць знайшов широке застосування у різноманітних сферах:

у теплотехніці – для розрахунку температурних полів у будівлях та машинах;

у електроніці – для аналізу теплових режимів мікросхем;

у гідродинаміці – для моделювання теплових процесів у потоках рідини;

у геології – для вивчення теплових полів у земній корі та прогнозування вулканічної активності;

у біомедицині – для прогнозування розподілу температури в біотканинах при різних процедурах.

Окрім цього, метод скінченних різниць є основою для більш складних і вдосконалених чисельних методів – наприклад, методу скінченних елементів або методу скінченних об’ємів, які широко застосовуються у промислових інженерних програмних пакетах.

Завдяки простоті, універсальності та доступності метод скінченних різниць залишається актуальним інструментом для дослідження теплових процесів і сьогодні, навіть за умов бурхливого розвитку більш складних обчислювальних технологій.

2.2 Побудова різницевої сітки (сітка площини)

Перед тим як застосувати метод скінченних різниць, потрібно розбити площину, на якій відбувається процес теплопровідності, на сітку.

На початку моделювання потрібно визначити, яка область досліджується. Наприклад, якщо необхідно змоделювати розподіл температури на металевій пластині розміром 1×1 метр. Щоб це зробити, ця площина розбивається на рівномірну сітку, наприклад 50×50 точок. Кожна точка сітки відповідає маленькому квадрату пластини, в якому буде розраховуватися температура.

Чим менший крок сітки – тим більше точок і тим точніший розрахунок, але також більше обчислень. Це як із фотографією: чим вища роздільна здатність, тим якісніша картинка, але й більше пам’яті потрібно.

Уявімо побутову ситуацію: якщо покласти руку на стіну, де проходить труба з гарячою водою. У місці контакту буде найвища температура, але якщо рухатися рукою далі – вона зменшуватиметься. Сітка в моделюванні дозволяє розрахувати це падіння температури крок за кроком.

Це робиться для того, щоб перейти від неперервного простору до дискретного – тобто такого, де можна працювати з окремими точками.

Сітка складається з вузлів (точок), у яких обчислюються значення температури. Для зручності площину зазвичай розбивають на рівномірну прямокутну сітку з однаковим кроком по осі x і y. Кожна точка такої сітки має свої координати, де i – номер по осі x, а j – по осі y.

На практиці ця сітка – це таблиця значень температури, яка з кожним часовим кроком оновлюється. Наприклад, якщо моделюється тепловий розподіл у плиті розміром 10×10 см з кроком сітки 1 см, отримаємо 100 вузлів для розрахунків. Якщо зменшити крок до 0.5 см – вже 400 точок. Це показує, як зростає точність моделі, але також і складність обчислень.

У сучасному чисельному моделюванні сітка для обчислень може бути не лише рівномірною. Часто використовується неоднорідна або адаптивна сітка, де розмір кроку змінюється у залежності від складності температурного поля або

особливостей геометрії області. Це дозволяє зменшити обсяг обчислень у тих зонах, де температура змінюється повільно, і водночас підвищити точність у критичних ділянках з великими градієнтами температури.

У випадках складної геометрії області сітку будують із урахуванням внутрішніх особливостей – контурів, порожнин, шарів різних матеріалів. Для цього можуть використовуватися більш складні сіткові стратегії: структуровані сітки, сітки із локальним ущільненням або навіть так звані "нерегулярні" сітки, що складаються з багатокутників чи трикутників.

Вибір структури сітки суттєво впливає на швидкість і точність розрахунків. Наприклад, занадто груба сітка може не відобразити локальних ефектів, а занадто дрібна – призведе до надмірно великих обчислювальних витрат.

При побудові сітки важливо також враховувати особливості обчислювального алгоритму. Наприклад, при реалізації програмного коду у середовищах, що підтримують паралельні обчислення (CPU + GPU), зручно будувати сітку так, щоб розрахункові блоки рівномірно розподілялися між обчислювальними ядрами.

Окрему увагу слід приділяти також "граничним" елементам сітки – вузлам, що лежать на межі області. Саме тут вводяться крайові умови, які суттєво впливають на результати моделювання. Неправильне завдання граничних умов у комірках сітки може призвести до спотворення результатів або навіть до нестійкості чисельної схеми.

У підсумку, правильна побудова сітки – це не просто механічна дія, а один із ключових етапів усього процесу чисельного моделювання теплопровідності. Від якості та адекватності сітки залежить точність, стійкість і практична цінність усієї моделі.

2.3 Апроксимація похідних

Щоб замінити похідні у рівнянні теплопровідності, застосовуються

різницеві співвідношення. Це називається апроксимацією похідної – тобто наближеним відтворенням математичної похідної за допомогою значень функції в кількох точках.

Найпростіша і найпоширеніша апроксимація другої похідної (використовується в рівнянні теплопровідності) виглядає так:

Апроксимація похідних:

1. Для другої похідної по x:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{\left(u_{i+1\,j} - 2u_{i\,j} + u_{i-1\,j}\right)}{h^2}.$$

2. Для другої похідної по y:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{\left(u_{i\,j+1} - 2u_{i\,j} + u_{i\,j-1}\right)}{h^2}.$$

3. Для похідної по часу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{\left(u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^{n}\right)}{\tau}.$$

4. Повна різницева схема:

$$\boldsymbol{u_{ij}^{n+1} = u_{ij}^{n} + \frac{\alpha\ \tau}{h^2}\left(u_{i+1j}^{n} + u_{i-1j}^{n} + u_{ij+1}^{n} + u_{ij-1}^{n}\right).}$$

Таким чином, у кожній точці враховується температуру в чотирьох сусідніх точках і обчислюється нове значення.

Також наближено обчислюється похідна за часом.

Поєднавши всі ці апроксимації, отримаємо різницеву схему –

співвідношення, які дозволяють послідовно обчислювати нові значення температури в кожній точці на кожному кроці часу.

У практичних задачах дуже важливо правильно вибрати тип апроксимації похідних. Залежно від поставленої задачі, обирається схема, яка забезпечує баланс між точністю й швидкістю обчислень. Найчастіше використовуються центрально-різницеві схеми для просторових похідних і явні або неявні схеми для часових похідних.

Варто зазначити, що для більш складних задач – із сильно вираженими температурними градієнтами або нелінійною залежністю коефіцієнтів – прості різницеві схеми можуть бути недостатньо точними. У таких випадках використовуються схеми підвищеного порядку точності або комбіновані методи, що дозволяють краще відобразити поведінку температурного поля.

Цікаво, що навіть вибір способу апроксимації може мати практичні наслідки. Наприклад, у моделях охолодження мікроелектронних пристроїв надмірно груба апроксимація може призвести до того, що у симуляції не будуть виявлені локальні перегріви, які насправді виникають у реальних пристроях.

У сучасному програмному забезпеченні користувач часто має можливість самостійно вибирати порядок апроксимації. Це дозволяє адаптувати модель для конкретних завдань – наприклад, отримати швидкий результат для попередньої оцінки або більш точний результат для сертифікації виробу.

Окремо варто згадати, що сучасні дослідники активно працюють над створенням адаптивних методів апроксимації. Ідея полягає в тому, щоб схема автоматично змінювалася у залежності від того, які похідні у даній області найбільш важливі для точного опису процесу. Це дозволяє оптимізувати обчислення і зменшити витрати ресурсів.

Таким чином, апроксимація похідних є не просто технічним елементом чисельної схеми, а важливим інструментом, що дозволяє підвищити якість та ефективність моделювання теплопровідності у реальних фізичних системах.

2.4 Стійкість, точність та збіжність методу

У чисельному моделюванні дуже важливо, щоб обчислення були стійкими (тобто не «вибухали» з кожним кроком), точними (тобто не відхилялися від істинного значення) та збіжними (результат наближався до істини при зменшенні величини кроків).

Точність залежить від того, наскільки точно різницеві формули відображають реальні похідні. Зазвичай вважається, що точність методу пропорційна квадрату кроку. Стійкість – це здатність моделі не «зламатися» при великій кількості кроків. Якщо не виконати умову стійкості (наприклад, співвідношення між кроком по часу і простору), модель може давати безглузді або нескінченні результати.

Збіжність – це властивість чисельного розв’язку наближатися до аналітичного при зменшенні кроків. Якщо метод точний і стійкий, то він збіжний.

Суть цього підходу полягає в заміні складних математичних похідних наближеними різницевими формулами.

У чисельному моделюванні дуже важливо не просто отримати результат, а отримати його правильно.

Точність означає, наскільки наближене значення близьке до реального.

Стійкість означає, що розрахунки не «вибухнуть» при багаторазовому повторенні.

Збіжність – що при зменшенні кроку отримується результат, близький до істини.

Наприклад, якщо обчислюється розподіл тепла в будинку протягом години, і кожні 5 хвилин результат «скаче» на десятки градусів – це нестійка модель. Тому важливо підбирати кроки правильно, можна за формулою CFL (Куранта-Фрідріхса-Леві).

Варто зазначити, що питання стійкості, точності та збіжності чисельної схеми особливо важливі у випадках, коли розглядаються складніші задачі –

наприклад, моделювання теплопереносу у матеріалах з різною теплопровідністю або з сильними локальними джерелами тепла. У таких ситуаціях навіть незначні порушення умов стійкості можуть призвести до спотворення або "вибуху" обчислень.

Одним із дієвих підходів до забезпечення стійкості є використання адаптивного підбору часових і просторових кроків. Багато сучасних чисельних алгоритмів автоматично змінюють часовий крок під час розрахунків: якщо спостерігається стрімка зміна температурного поля, крок зменшується, а коли процес стабілізується – збільшується. Це дозволяє уникнути розбалансування схеми без значного збільшення загального часу обчислень.

Щодо точності моделі, то вона значною мірою залежить не лише від вибору схеми апроксимації, а й від якості вхідних даних. Для точного відтворення фізичного процесу важливо правильно задати коефіцієнти теплопровідності, теплоємності, граничні умови. Часто основною проблемою стає саме недостатня інформація про властивості матеріалів у реальних умовах експлуатації.

Збіжність моделі перевіряється шляхом поступового зменшення кроків сітки: якщо при цьому чисельний розв’язок наближається до деякого стабільного результату – модель вважається збіжною. На практиці цей підхід дозволяє калібрувати модель, визначати оптимальні параметри для конкретної задачі.

Крім того, важливо пам’ятати, що стійкість і точність чисельної схеми мають балансуватися із розумними обчислювальними витратами. Надмірна "перестраховка" у вигляді наддрібної сітки чи занадто малого кроку часу може призвести до необґрунтованих витрат часу і ресурсів. Тому важливим завданням дослідника або інженера є вміння знаходити оптимальний компроміс для конкретної задачі.

Загалом, увага до питань стійкості, точності та збіжності є одним із ключових елементів якісного чисельного моделювання. Від цього залежить не лише коректність результатів, а й їх практична цінність у реальних інженерних або наукових проєктах.

2.5 Висновок до розділу 2

Метод скінченних різниць – це потужний математичний інструмент, який робить можливим розв’язання складних задач теплопередачі, що неможливо вирішити аналітично. Завдяки йому можна з високою точністю змоделювати поведінку тепла в будь-якому середовищі – від стін житлового будинку до корпусу космічного корабля. І найголовніше – він доступний: будь-хто, маючи комп’ютер та програму, може побудувати свою модель, протестувати гіпотези й застосувати їх на практиці. Це відкриває великі можливості для дослідників, інженерів і студентів.

Окрім широкої сфери практичного застосування, важливо розуміти, чому метод скінченних різниць обирають для певних задач і як він виглядає на фоні інших чисельних методів.

Насамперед, перевагою методу є простота реалізації. Для більшості класичних задач теплопровідності, особливо з регулярною геометрією (прямокутна або циліндрична область), метод скінченних різниць дозволяє швидко побудувати програмний код навіть без використання спеціалізованих математичних пакетів. Завдяки цьому метод часто використовується у навчальних і наукових задачах, а також у невеликих інженерних проєктах.

Ще однією сильною стороною є прозорість розрахункового процесу. Під час застосування методу легко простежити, як саме змінюється температура в кожній точці сітки з кроком часу, що дозволяє краще розуміти фізичну суть процесів і контролювати хід обчислень.

У порівнянні з методом скінченних елементів, який є більш універсальним для складної геометрії та матеріалів з анізотропією, метод скінченних різниць вигідно відрізняється меншим обсягом початкових налаштувань і швидшим стартом розрахунків. Проте для задач з дуже складними межами або для тривимірних об'єктів з нерівномірними властивостями частіше обирають саме метод скінченних елементів, оскільки він дозволяє працювати з довільною

сіткою.

Метод скінченних об’ємів, який часто застосовують у задачах гідродинаміки та конвективного теплообміну, краще враховує закон збереження енергії у локальних об'ємах, однак є дещо складнішим у реалізації для початкового рівня.

Недоліком методу скінченних різниць можна вважати його залежність від типу сітки – він краще працює на регулярних, прямокутних сітках. При переході до нерівномірної сітки або складної геометрії ефективність методу знижується, а також можуть з'являтися додаткові труднощі у забезпеченні стійкості та точності.

З іншого боку, завдяки своїй простоті та ефективності при роботі зі стандартними моделями теплопровідності, метод скінченних різниць і досі залишається одним з основних інструментів для моделювання теплових процесів у техніці та науці, особливо у випадках, де важлива наочність розрахунків та швидкість їх проведення.

Таким чином, грамотний вибір чисельного методу для конкретної задачі є запорукою якісного та ефективного моделювання, а метод скінченних різниць продовжує зберігати свою актуальність поряд із більш сучасними підходами.

3 РОЗРОБКА КОМП'ЮТЕРНОЇ МОДЕЛІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

3.1 Постановка задачі

Метою даного розділу є побудова комп'ютерної моделі розповсюдження тепла на двовимірній площині.

Модель має імітувати поведінку тепла в матеріалі, наприклад, у квадратній металевій пластині, яка спочатку має рівномірну температуру, але в центрі якої є джерело тепла.

Умова задачі:

- Область: квадрат розміром 1×1 метр.
- Початкова температура: 20°C у всіх точках.
- Центр пластини: джерело тепла з температурою 100°C.
- Крайові умови: температура на межах області підтримується на рівні 0°C (охолодження).
- Коефіцієнт теплопровідності $\alpha = 0.0001$ м²/с.
- Розмір сітки: 50×50 точок ($dx = 1/50$).
- Часовий крок $dt = 0.25$ с.
- Час моделювання: 100 секунд.

Задача полягає в тому, щоб змоделювати, як змінюється температура в кожній точці з плином часу, та побачити, як тепло поширюється від центру до країв.

3.2 Алгоритм розв'язання

Для реалізації моделі розробляється наступний алгоритм:

1. Створення двовимірної сітки (масив N×N), кожен елемент якої відповідає температурі в точці площини.

2. Ініціалізація температурного поля:

- вся область має температуру 20°C;

- центральна частина – 100°C;

- на краях – постійно підтримуються 0°C.

3. Застосування різницевої схеми методу скінченних різниць до всіх внутрішніх точок:

$$u_new[i,j] = u[i,j] + \alpha * dt / dx^2 * (u[i+1,j] + u[i-1,j] + u[i,j+1] + u[i,j-1] - 4 * u[i,j])$$

4. Оновлення температурного поля.

5. Повторення обчислень для кожного кроку часу до досягнення фінального моменту.

6. Побудова графіків (теплової карти) для візуального аналізу.

3.3 Реалізація моделі на Python в середовищі гугл-коллаб

Програму реалізовано мовою Python. Основні бібліотеки: numpy (для обчислень) та matplotlib (для візуалізації).

Нижче подано приклад коду:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
L = 1.0
N = 50
dx = L / N
alpha = 0.0001
dt = 0.25
steps = 400
u = np.full((N, N), 20.0)
center = N // 2
u[center-1:center+2, center-1:center+2] = 100.0
```

```
for n in range(steps):
u_new = u.copy()
for i in range(1, N - 1):
for j in range(1, N - 1):
u_new[i, j] = u[i, j] + alpha * dt / dx**2 * (
u[i+1, j] + u[i-1, j] + u[i, j+1] + u[i, j-1] - 4*u[i, j])
u = u_new.copy()
plt.imshow(u, cmap='hot', interpolation='nearest')
plt.colorbar(label='Температура (°C)')
plt.title('Розподіл температури через 100 с')
plt.show()
```

3.4 Тестування та перевірка результатів

Після реалізації моделі необхідно переконатися, що вона працює коректно. Було проведено такі перевірки:

- **Симетрія розподілу**: модель дає симетричну температуру навколо центру (рис. 3.1).

- **Стійкість**: обрана чисельна схема стабільна при заданих параметрах dt і dx.

- **Відповідність фізичному змісту**: з часом температура рівномірно поширюється від центру до країв.

Було протестовано також варіанти з іншими граничними умовами та температурою в центрі.

3.5 Візуалізація результатів

Отримані дані представлені у вигляді теплової карти. Кожна точка на

графіку відповідає певній координаті площини, а колір – температурі.

Результати показують, що температура рівномірно поширюється від центру і поступово вирівнюється. Гарячий центр охолоджується, а краї – нагріваються, що відповідає фізичній поведінці тепла.

Це дозволяє наочно проаналізувати модель, швидко виявити помилки в розрахунках і візуально представити хід процесу.

Для перевірки правильності роботи моделі було проведено тестування на різних моментах часу. Було виконано обчислення розподілу температури для таких часових міток: 0 секунд (початковий стан), 5 секунд, 10 секунд, 25 секунд, 50 секунд та 100 секунд. Це дозволило прослідкувати динаміку поширення тепла від джерела до країв області.

Результати тестування підтвердили очікувану поведінку температурного поля (рис. 3.1 – 3.5): на початковому етапі тепло концентрується у центрі, а з часом рівномірно розподіляється по всій площині згідно з фізичними законами теплопровідності.

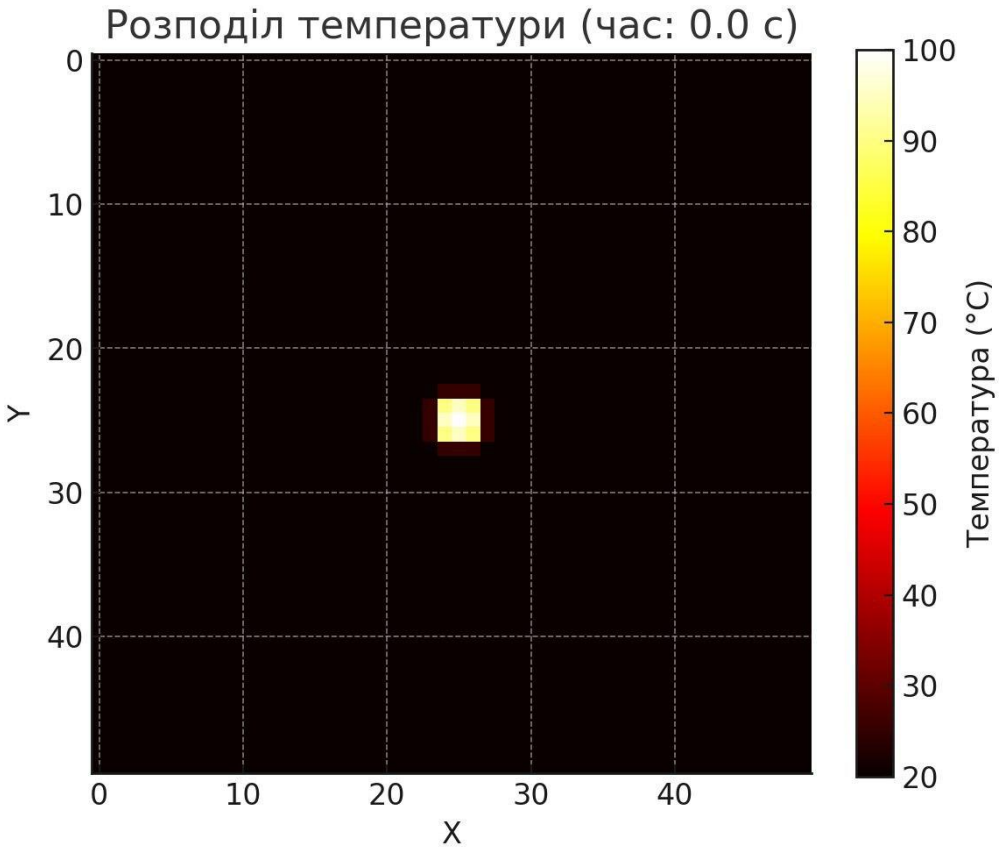


Рисунок 3.1 – Розподіл температури у квадратній пластині (t=0 с)

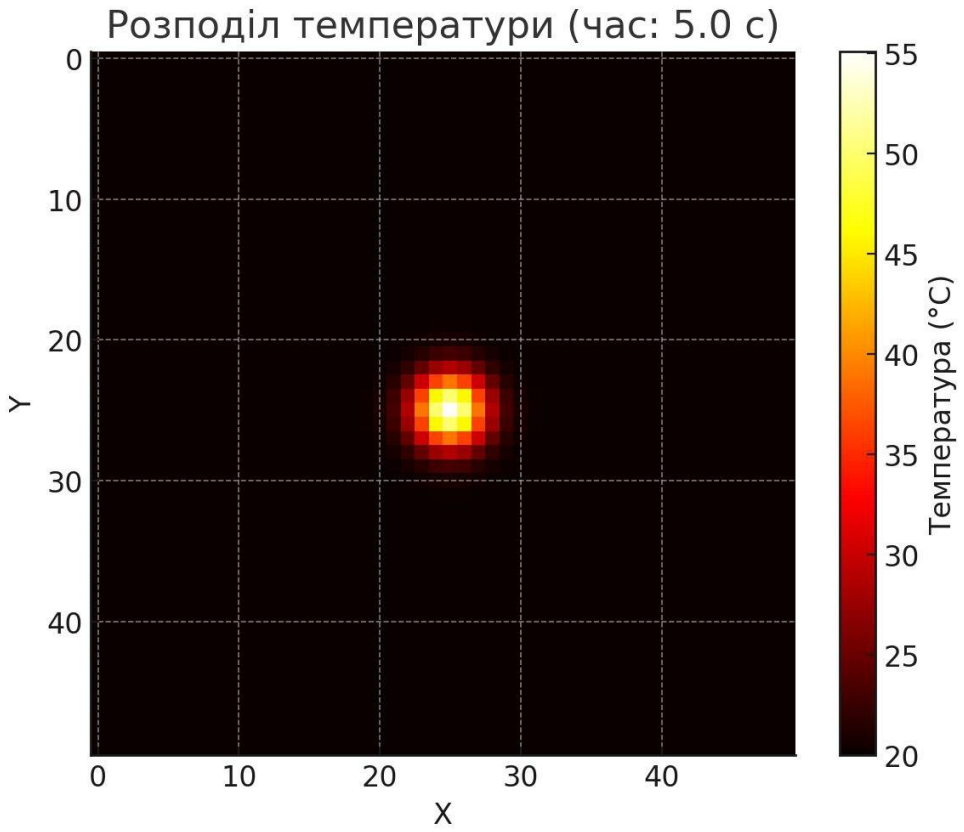


Рисунок 3.2 – Розподіл температури у квадратній пластині (t=5 с)

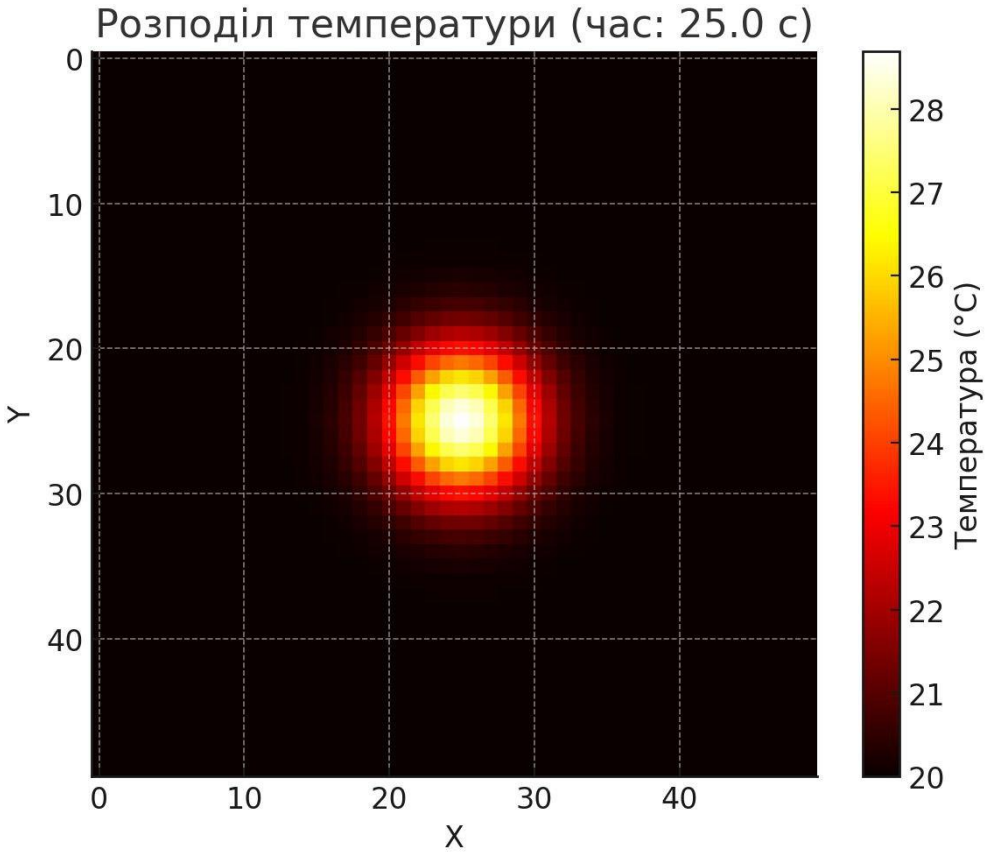


Рисунок 3.3 – Розподіл температури у квадратній пластині (*t*=25 с)

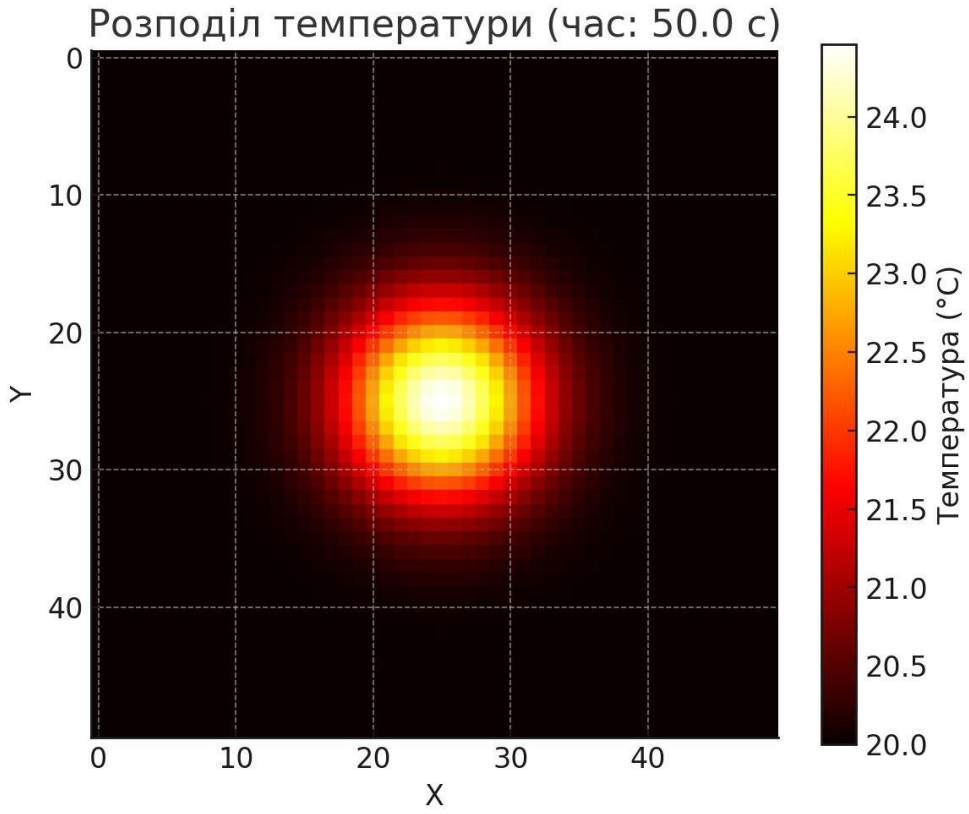


Рисунок 3.4 – Розподіл температури у квадратній пластині (*t*=50 с)

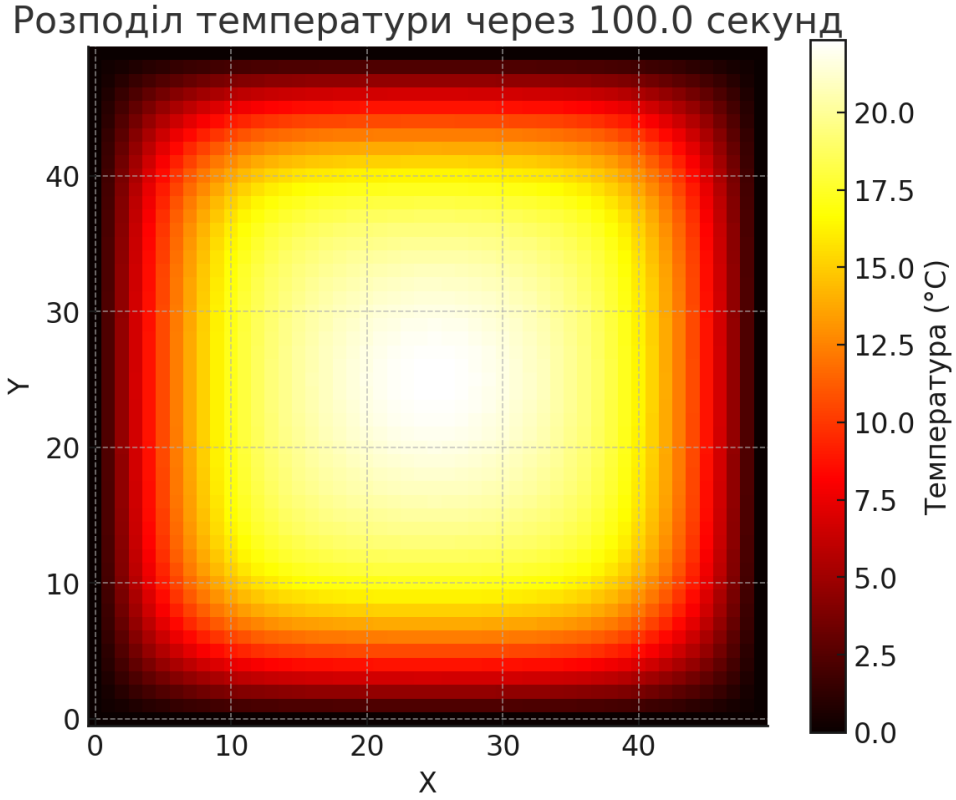


Рисунок 3.5 – Розподіл температури у квадратній пластині (t=100 с)

3.6 Висновки до розділу 3

У цьому розділі було побудовано комп’ютерну модель теплопровідності, реалізовано чисельний алгоритм на мові програмування Python, проведено тестування та візуалізацію результатів. Отримані графіки підтверджують коректність побудованої моделі та ефективність методу скінченних різниць у моделюванні теплових процесів.

Додатково варто відзначити, що у процесі роботи було проведено тестування моделі для різних моментів часу – від початкового стану (0 с) до 100 секунд, з проміжними кроками (5 с, 10 с, 25 с, 50 с). Це дозволило оцінити динаміку розвитку температурного поля у часі та підтвердити коректність роботи алгоритму на кожному етапі моделювання.

Отримані результати демонструють, що навіть за простої явної схеми та відносно грубої сітки можна досягти адекватного відображення фізичних процесів. Це свідчить про ефективність обраної чисельної схеми для задач такого типу.

У подальшій роботі модель можна розвивати – наприклад, додавати змінні коефіцієнти теплопровідності, використовувати адаптивні сітки, ускладнювати геометрію області або враховувати додаткові фізичні ефекти (конвекцію, фазові переходи). Це значно розширить можливості практичного використання моделі у більш складних задачах інженерного та наукового характеру.

4 АНАЛІЗ ОТРИМАНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

4.1 Загальні спостереження

Після створення та дослідження комп’ютерної моделі розповсюдження тепла на площині, маємо можливість візуально та чисельно оцінити процес теплопередачі. Результати моделювання стали своєрідним віддзеркаленням фізичної реальності, у якій тепло завжди поширюється від гарячої зони до холоднішої.

Варто зауважити, що навіть за відносно простих умов (рівномірна сітка, одне джерело тепла, фіксовані межі) спостерігається складна та цікава динаміка процесу.

Температура змінюється поступово, поетапно: те, що спочатку було лише в центрі, згодом охоплює майже всю площину.

Ці дані важко було б уявити без моделювання – око людини не може відстежити таку мікроскопічну зміну температурного поля.

Саме тому чисельне моделювання відіграє ключову роль у сучасній науці та техніці, дозволяючи дослідити фізичні процеси, які візуально не можна спостерігати.

4.2 Динаміка температурного поля

Протягом усього процесу моделювання, температурне поле демонструє стійку і передбачувану поведінку. Вже після кількох кроків часу помітно, як тепловий імпульс, закладений у центрі, починає поширюватися. Цей ефект схожий на хвилю, яка рухається водою після кидка камінця.

Температура з центральної ділянки рівномірно розтікається в усіх напрямках. Завдяки симетричності вихідних умов спостерігається класична

форма «теплового куполу», який поступово розширюється.

У реальному житті неодноразово відбувається подібне: коли доторкаємось рукою до нагрітої батареї, або коли на вулиці мороз, і гаряча кружка починає поступово віддавати тепло повітрю. Такі процеси часто проходять повз нашу увагу, але завдяки моделюванню можна їх побачити «зсередини».

4.3 Стійкість, точність та збіжність моделі

Ключовим критерієм оцінки будь-якої математичної моделі є не лише її результат, а й якість цього результату.

У даному випадку маємо переконатися, що модель теплопровідності не лише працює, а й працює надійно.

Стійкість нашої схеми гарантується тим, що задовольняється відомий критерій Куранта-Фрідріхса-Леві – це математичне правило, яке контролює співвідношення між часовим і просторовим кроками. Простими словами, щоб не відбувалося «перестрибування» в часі занадто швидко, і модель встигала точно оновлювати стан температурного поля.

Точність – це здатність моделі описувати фізичну реальність. Наш вибір сітки (50x50 точок) дозволив отримати гарну деталізацію.

При потребі її можна збільшити, але вже зараз отримані результати є задовільними для аналізу.

Збіжність означає, що при зменшенні кроків отримується ще точніший результат, і він не буде «скакати» – це також підтверджується.

4.4 Практична цінність і приклади використання

Комп’ютерні моделі, подібні до представленої, мають надзвичайно широке застосування. Уявімо кілька ситуацій із реального життя:

- У будівництві проєктувальники використовують подібні моделі, щоб зрозуміти, як тепло виходить з квартири. Де потрібно додаткове утеплення?

- У медицині при термотерапії лікар повинен знати, яка температура проникає в тканини пацієнта. Занадто гаряче – буде опік. Занадто холодно – ефекту не буде.

- Інженери автомобілів розраховують, як нагріваються деталі двигуна під час тривалої поїздки.

- Навіть у космічній техніці використовуються такі моделі: супутники обертаються навколо Землі й зазнають постійних змін температури – частина корпусу нагрівається від Сонця, інша – охолоджується.

Усі ці приклади підтверджують одне: моделювання теплопровідності – це не просто розрахунок, а спосіб приймати кращі рішення у складному світі.

4.5 Висновок до розділу 4

Аналіз результатів дозволяє впевнено сказати, що метод скінченних різниць є дієвим інструментом для дослідження теплових процесів.

Він дозволяє зазирнути туди, куди не проникає око, і побачити закономірності, які інакше були б прихованими.

У цьому – головна перевага чисельного аналізу.

ВИСНОВКИ

У результаті виконання кваліфікаційної роботи було досягнуто головну мету – створення простої, але ефективної комп’ютерної моделі розповсюдження тепла на площині, що дозволяє імітувати реальні фізичні процеси за допомогою методу скінченних різниць.

Проведене дослідження дозволило зробити такі розширені висновки:

1. У ході теоретичного аналізу було вивчено фізичну природу теплопровідності як одного з основних способів передачі енергії в матеріальних середовищах. Було показано, що цей процес має важливе значення у природних та інженерних системах – від побутових ситуацій до високотехнологічних пристроїв.

2. Визначено математичну модель процесу теплопровідності у вигляді диференціального рівняння в частинних похідних. Детально розглянуто її двовимірний варіант, а також особливості крайових умов, які задають фізичну взаємодію системи з навколишнім середовищем. Встановлено, що точний аналітичний розв’язок можливий лише для спрощених задач.

3. Вивчено чисельні методи розв’язання рівнянь теплопровідності, зокрема метод скінченних різниць, як один із найефективніших підходів для просторово-часового моделювання. У процесі реалізації було особливу увагу приділено стійкості, точності та збіжності обчислень. Розрахункові параметри були підібрані з урахуванням критерію Куранта-Фрідріхса-Леві.

4. Була створена повноцінна комп’ютерна реалізація моделі на мові Python. Для цього використано такі бібліотеки як NumPy (для чисельних розрахунків) і Matplotlib (для візуалізації). Програма продемонструвала свою працездатність, стабільність і здатність генерувати візуальні представлення температурного поля.

5. Візуалізація результатів у формі теплових карт дозволила краще зрозуміти динаміку поширення тепла. На отриманих графіках чітко видно, як з

часом температура вирівнюється, а тепло рівномірно поширюється від джерела до країв. Це відповідає фізичним законам і підтверджує правильність чисельної реалізації.

6. Практичне значення моделі є очевидним. Вона може бути використана у:

– енергетичному проєктуванні (розрахунок тепловтрат у будівлях),

– медицині (моделювання термотерапії),

– електроніці (охолодження мікропроцесорів),

– пожежній безпеці (розповсюдження тепла у будівлі),

– навчанні (демонстрація теплопередачі студентам).

7. Однією з важливих переваг моделі є її масштабованість. За потреби її можна адаптувати до тривимірного простору, реалізувати більш складні крайові умови, додати змінні коефіцієнти теплопровідності або врахувати нелінійні ефекти. Також є потенціал для створення інтерактивного програмного продукту.

8. Робота також підтвердила важливість використання комп’ютерного моделювання в сучасній науці та техніці. Воно дозволяє економити ресурси, зменшувати кількість фізичних експериментів і швидко тестувати нові ідеї.

Таким чином, дана кваліфікаційна робота не тільки реалізувала поставлену задачу, а й створила платформу для подальшого розвитку чисельного моделювання теплових процесів у різних сферах. Отримані результати мають як теоретичне, так і практичне значення, а розроблена модель може стати основою для майбутніх досліджень і вдосконалень.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Інжестрант А.С. Основи теплопередачі. Київ: Техніка. 2005. 285 с.
2. Курдюмов С.П. Основи теплопередачі: навчальний посібник. Львів: Видавництво ЛНУ, 2009. 368 с.
3. Марченко П.І. Основи програмування та комп'ютерного моделювання фізичних процесів. Київ: КНУ. 2015. 312 с.
4. Сидоренко А.В. Методи чисельного аналізу. Київ: КНЕУ. 2007. 320 с.
5. Теплопровідність: навчально-методичний посібник / За ред. О.П. Корнієнко. Львів: Видавництво ЛНУ. 2010. 240 с.
6. Тищенко І.П. Чисельні методи. Київ: Вища школа, 2006. 431 с.
7. Burden R.L., Faires J.D. Numerical Analysis. Brooks Cole. 2011. 888 p.
8. Carslaw H.S., Jaeger J.C. Conduction of Heat in Solids. Oxford: Clarendon Press. 1986. 510 p.
9. Chapman A.J. Heat Transfer. Macmillan Publishing. 1984. 700 p.
10. LeVeque R.J. Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations. SIAM. 2007. 339 p.
11. Morton K.W., Mayers D.F. Numerical Solution of Partial Differential Equations. Cambridge University Press. 2005. 272 p.
12. Smith G.D. Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods. Oxford University Press. 1985. 337 p.
13. Thomas J.W. Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods. Springer. 1995. 348 p.