Міністерство освіти і науки України
Запорізький національний університет

Є. В. Панасенко, І. В. Красікова, Н. М. Д’яченко

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

Навчальний посібник
для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра
спеціальності Прикладна математика
освітньо-професійної програми «Комп’ютерне моделювання»

Затверджено
вченою радою ЗНУ
Протокол №
від __.__.2026

Запоріжжя
2026

УДК: 517(075.8)
П16

Панасенко Є. В., Красікова І. В., Д’яченко Н. М. Математичний аналіз : навчальний посібник для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра спеціальності Прикладна математика освітньо-професійної програми «Комп’ютерне моделювання». Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2026. 93 с.

У навчальному посібнику подано у систематизованому вигляді програмний матеріал дисципліни «Математичний аналіз». Викладено основи класичного математичного аналізу з основами теорії функції дійсної змінної. Видання містить основні теоретичні відомості дисципліни, приклади та пояснення до застосування формул і методів розв’язання задач, що сприятиме розвитку і активізації самостійної роботи студентів. У кінці кожної теми наведено питання та завдання для самоперевірки, що спрямовані на успішне оволодіння студентами основами дисципліни та їх якісну підготовку до екзамену.

Для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра спеціальності Прикладна математика освітньо-професійної програми «Комп’ютерне моделювання».

Рецензент
А.О. Лісняк, кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри програмної інженерії

Відповідальний за випуск
С.М. Гребенюк, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри фундаментальної та прикладної математики

ЗМІСТ

Вступ 6
1. Поняття множини та теоретико-множинні операції 8
1.1. Поняття числових множин 8
1.2. Поняття функції 8
1.3. Метод математичної індукції 9
1.4. Деякі поняття з теорії множин 10
1.5. Операції над множинами. 11
1.6. Точна нижня і точна верхня межа множини 13
Питання та завдання для самоконтролю до теми 1 13
2. Границя числової послідовності 15
2.1. Послідовності та їх види 15
2.2. Границя числової послідовності 16
Питання та завдання для самоконтролю до теми 2 17
3. Границя функції. Неперервність функції 18
3.1. Границя функції 18
3.2. Перша і друга істотна границі функції 19
3.3. Порівняння нескінченно малих і нескінченно великих функцій 19
3.4. Поняття неперервності функції 20
Питання та завдання для самоконтролю до теми 3 21
4. Диференційовність функції 23
4.1. Поняття похідної функції 23
4.2. Геометричний зміст похідної. 24
4.3. Диференційовність функції 25
4.4. Таблиця похідних 25
4.5. Диференціал функції 27
Питання та завдання для самоконтролю до теми 4 28
5. Похідні та диференціали вищих порядків 30
5.1. Похідні вищих порядків 30
5.2. Таблиця похідних вищих порядків 30
5.3. Правило Лопіталя 31

5.4. Формула Тейлора 32
5.5. Формула Маклорена 33
5.6. Диференціали вищих порядків 33
Питання та завдання для самоконтролю до теми 5 34
6. Диференціальне числення функції багатьох змінних 36
6.1. Поняття метричного простору 36
6.2. Границя і неперервність 36
6.3. Частинні похідні 37
6.4. Похідна за напрямом та градієнт 38
Питання та завдання для самоконтролю до теми 6 39
7. Первісна та невизначений інтеграл 41
7.1. Означення та властивості первісної функції 41
7.2. Властивості невизначеного інтеграла 41
7.3. Таблиця невизначених інтегралів 42
7.4. Безпосереднє інтегрування 43
7.5. Інтегрування заміною змінної 43
7.6. Метод внесення функції під знак диференціала 44
7.7. Інтегрування частинами 44
7.8. Інтегрування раціональних дробів 45
7.9. Інтегрування тригонометричних функцій 47
7.10. Інтегрування деяких ірраціональних функцій 48
Питання та завдання для самоконтролю до теми 7 49
8. Визначений інтеграл Рімана 51
8.1. Площа криволінійної трапеції 51
8.2. Верхня та нижня інтегральні суми Дарбу. 52
8.3. Властивості визначеного інтеграла 53
8.4. Основна теорема інтегрального числення 54
Питання та завдання для самоконтролю до теми 8 54
9. Застосування визначеного інтегралу 56
9.1. Довжина дуги кривої 56
9.2. Обчислення площ криволінійної трапеції та криволінійного сектора 58
9.3. Об’єм тіл обертання 60

9.4. Обчислення площі поверхні обертання 62
Питання та завдання для самоконтролю до теми 9 62
10. Числові ряди 63
10.1. Знакопостійні числові ряди 63
10.2. Ознаки збіжності знакопостійних рядів 64
10.3. Знакозмінні числові ряди 65
10.4. Ознаки збіжності знакозмінних рядів 66
Питання та завдання для самоконтролю до теми 10 66
11. Функціональні послідовності і функціональні ряди 68
11.1. Основні поняття 68
11.2. Рівномірна збіжність функціональних рядів 69
11.3 Ознаки рівномірної збіжності функціональних рядів 70
11.4. Степеневі ряди 70
11.5. Розвинення функцій в степеневі ряди 71
Питання та завдання для самоконтролю до теми 11 72
12. Подвійні та потрійні інтеграли 74
12.1. Поняття подвійного інтеграла 74
12.2. Обчислення подвійних інтегралів у декартовій системі координат 75
12.3. Заміна змінних у подвійному інтегралі 76
12.4. Застосування подвійного інтеграла 79
12.5. Поняття потрійного інтеграла 80
12.6. Заміна змінних у потрійному інтегралі 81
12.7. Застосування потрійного інтеграла у механіці 85
Питання та завдання для самоконтролю до теми 12 86
Предметний покажчик 88
Використана література 91
Рекомендована література 92

ВСТУП

Інтенсивна математизація різних галузей знань, а також потреби практики та бурхливий розвиток обчислювальної техніки вимагають постійного вдосконалення математичних методів досліджень, розробки питань математичного забезпечення. Тому й виникла потреба вивчати у провідних університетах країни курс сучасного математичного аналізу.

На сучасному етапі розвитку математики різко зростає її абстрактність. Математика оперує дуже складними абстрактними поняттями (багатовимірні простори, функціонали, тощо). Вони також відображають дійсність, хоч і не безпосередньо. Деякі з них мають вже й прямі застосування, наприклад, у теорії відносності широко використовується чотиривимірний простір, а важливі питання теорії груп знаходять застосування в ядерній фізиці. Головна особливість математичних абстракцій полягає у тому, що в них віддзеркалюються лише кількісні відношення й просторові форми матеріального світу, їм байдуже до природи предметів і реальних процесів. У відповідності з сучасними поглядами на будову математики нам уявляється математичний аналіз як високоорганізована система структур різних ступенів абстракцій, тісно пов'язаних між собою.

У математичному аналізі вивчають функції та їх властивості за допомогою операцій диференціювання та інтегрування, які ґрунтуються на операції граничного переходу у скінченновимірному просторі (основне поняття диференціального числення – похідна – з'являється як границя деякого відношення; основне поняття інтегрального числення – інтеграл – з'являється як границя деякої суми).

Метою вивчення навчальної дисципліни «Математичний аналіз» є засвоєння систематичних знань із основних методів розв'язання типових задач з теорії дійсних чисел та функції дійсної змінної; дослідження поведінки функцій методами диференціального числення, що, в свою чергу, дає можливість аналізувати та моделювати процеси та явища в галузях майбутньої діяльності студентів як фахівців; набуття навичок із методів та теоретичних положень математичного аналізу.

Основними **завданнями** вивчення дисципліни «Математичний аналіз» є:

- ознайомитися із числовими множинами та дійсними функціями;
- ознайомитися із теорією границі числової послідовності та теорією границі функції;
- засвоїти класифікацію точок розриву функцій;
- ознайомитися із диференціальним та інтегральним численням функції однієї змінної;
- ознайомитися із застосуваннями визначеного інтегралу;
- ознайомитися із теорією рядів;
- ознайомитися із подвійними та потрійними інтегралами;
- набути вмінь доводити твердження методом математичної індукції;
- набути вмінь із знаходження границь послідовностей та функцій;

– виробити навичок диференціювати функції однієї змінної;
– набути вмінь із дослідження функції на неперервність, монотонність, диференційовність та інтегровність;
– набути вмінь будувати графік функції за допомогою диференціального числення;
– виробити навичок із методів знаходження невизначеного інтеграла;
– набути навички із застосування визначених та кратних інтегралів;
– виробити навички із розвинення функцій у ряди Тейлора та Фур'є.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен набути таких програмних компетентностей:

– здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу;
– здатність використовувати й адаптувати математичні теорії, методи та прийоми для доведення математичних тверджень і теорем;
– здатність виконувати завдання, сформульовані у математичній формі;
– здатність обирати та застосовувати математичні методи для розв'язання прикладних задач, моделювання, аналізу, проектування, керування, прогнозування, прийняття рішень;
– здатність сформулювати математичну постановку задачі, спираючись на постановку мовою предметної галузі, та обирати метод її розв'язання, що забезпечує потрібні точність і надійність результату.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен набути таких програмних результатів навчання:

– володіти основними положеннями та методами математичного, комплексного та функціонального аналізу, лінійної алгебри та теорії чисел, аналітичної геометрії, теорії диференціальних рівнянь, зокрема рівнянь у частинних похідних, теорії ймовірностей, математичної статистики та випадкових процесів, чисельними методами;
– формалізувати задачі, сформульовані мовою певної предметної галузі; формулювати їх математичну постановку та обирати раціональний метод вирішення; розв'язувати отримані задачі аналітичними та чисельними методами, оцінювати точність та достовірність отриманих результатів;
– уміти розробляти та використовувати на практиці алгоритми, пов'язані з апроксимацією функціональних залежностей, чисельним диференціюванням та інтегруванням, розв'язанням систем алгебраїчних, диференціальних та інтегральних рівнянь, розв'язанням крайових задач, пошуком оптимальних рішень.

Набуті знання при вивченні курсу «Математичний аналіз» необхідні для подальшого вивчення курсів: «Диференціальні рівняння», «Комплексний аналіз», «Теорія ймовірностей та математична статистика» та подальшої дослідницької діяльності в науках про інформаційні технології та інших галузях науки та техніки.

1. Поняття множини та теоретико-множинні операції

1.1. Поняття числових множин

Під *множиною* розуміється будь-яка сукупність об'єктів, що називаються елементами множини, об'єднаних за якоюсь ознакою. Множини позначають великими латинськими літерами, а їх елементи – відповідно маленькими.

Запис $a \in A$ означає, що об'єкт a є елементом множини A (належить множині A). У противному випадку $a \notin A$. Множина, що не містить жодного елемента, називається *порожньою* і позначається $\emptyset$.

Окремо слід відзначити числові множини. Їх позначають теж великим латинськими літерами, але з рискою, щоб відокремити їх від будь-якої іншої множини і підкреслити, що це числова множина.

$\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел:

$$\mathbb{N} = \{1,2,3, \dots, n, \dots\}.$$

$\mathbb{Z}$ – множина цілих чисел:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -n, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}.$$

$\mathbb{Q}$ – множина раціональних чисел:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} :\ m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

$\mathbb{I}$ – множина ірраціональних чисел. Наприклад, нескінченні неперіодичні дроби.

$\mathbb{R}$ – множина дійсних чисел.

$\mathbb{C}$ – множина комплексних чисел:

$$\mathbb{C} = \left\{z = x + iy,\ \ x \in \mathbb{R},\ \ y \in \mathbb{R},\ \ i = \sqrt{-1}\right\}.$$

У запису логічних тверджень використовуються логічні символи та квантори:

$\forall$ – універсальний квантор або *квантор загальності*, читається як «для будь-якого», «для кожного», «для всіх всякий».

$\exists$ – екзистенціальний квантор або *квантор існування*, читається як «існує», «знайдеться».

: – «такий, що».

! – «єдиний».

$\Rightarrow$ – «випливає», «виконується», символ імплікації.

$\Leftrightarrow$ – рівносильність твердження, «необхідно й достатньо», «тоді і тільки тоді», символ еквіваленції.

$\cup$ – «об'єднання множин»; $\cap$ – «перетин множин»; $\subset$ – «підмножина».

$\vee$ – «або», символ диз'юнкції; $\wedge$ – «і», символ кон'юнкції.

Запис $\overline{A}$ означає «не A», $\overline{\ \ }$ – це символ заперечення.

Пріоритет щодо вище зазначених символів такий:

$$\overline{\ \ },\ \ \wedge,\ \ \vee,\ \ \Rightarrow,\ \ \Leftrightarrow.$$

1.2. Поняття функції

Розглянемо дві множини $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ та $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$.

Означення. Якщо кожному елементу $x \in X$ за якимось законом f можна поставити у відповідність елемент $y \in Y$, то кажуть, що задана функція відображення множини X у множину Y: $X \xrightarrow{f} Y$, або $f: X \to Y$, або $y = f(x)$.

Означення. Множина X називається *областю визначення* функції $y = f(x)$ і позначається $D(f)$. Множина Y називається *областю значень* функції $y = f(x)$ і позначається $E(f)$.

Означення. Функція $y = f(x)$ називається *парною*, якщо для будь-якого $x \in X$ з області визначення виконується рівність $f(-x) = f(x)$ і *непарною*, якщо $f(-x) = -f(x)$. Всі інші функції називають *функціями загального вигляду*.

1.3. Метод математичної індукції

Метод математичної індукції застосовується для доведення тотожностей, нерівностей, біному Ньютона. Щоб довести, що деяке твердження вірно для $\forall n \in \mathbb{N}$, достатньо показати, що:

1) твердження $A(n)$ вірно при $n = 1$ або найменшого з області визначення;

2) припускається справедливість твердження при $n = k$, де $k \in \mathbb{N}$;

3) доводиться, що твердження вірно при $n = k + 1$.

Такий метод називають *методом математичної індукції*. Доведення твердження $A(1)$ називається першим кроком індукції (базисом індукції), а доведення $A(n+1)$ за припущення справедливості $A(n)$ називається індуктивним переходом. При цьому n називається параметром індукції, а припущення $A(n)$ при доведенні $A(n+1)$ називається індуктивним припущенням.

Приклад. Довести за методом математичної індукції формулу біному Ньютона:

$$(x+a)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} a + C_n^2 x^{n-2} a^2 + \cdots + C_n^k x^{n-k} a^k + \cdots + C_n^n a^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} a^k,$$

де $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ – біноміальні коефіцієнти.

1) Перевіримо, що твердження вірно для степеню, що дорівнює 1:

ліва частина $(x+a)^1 = x + a$;

права частина $\sum_{k=0}^{1} C_1^k x^{1-k} a^k = C_1^0 x^1 + C_1^1 a = x + a$.

2) Припустимо, що твердження вірно для степеню, що дорівнює $(n-1)$:

$$(x+a)^{n-1} = C_{n-1}^0 x^{n-1} + C_{n-1}^1 x^{n-2} a + C_{n-1}^2 x^{n-3} a^2 + \cdots$$
$$\cdots + C_{n-1}^k x^{n-1-k} a^k + \cdots + C_{n-1}^{n-1} a^{n-1}.$$

3) Доведемо, що твердження вірно для степеню n:

$$(x+a)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} a + C_n^2 x^{n-2} a^2 + \cdots$$
$$\cdots + C_n^k x^{n-k} a^k + \cdots + C_n^n a^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} a^k.$$

Розглянемо ліву частину останньої рівності і покажемо, використовуючи другий пункт, що ліва частина дорівнює правій:

$$(x+a)^n = (x+a)(x+a)^{n-1} =$$
$$= (x+a)(C_{n-1}^0 x^{n-1} + C_{n-1}^1 x^{n-2}a + C_{n-1}^2 x^{n-3}a^2 + \cdots$$
$$\ldots + C_{n-1}^k x^{n-1-k}a^k + \cdots + C_{n-1}^{n-1}a^{n-1}) =$$
$$= x^n + (C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1)x^{n-1}a + (C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2)x^{n-2}a^2 + \cdots$$
$$\cdots + (C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k)x^{n-k}a^k + \cdots + a^n = \|C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}\| =$$
$$= x^n + C_n^1 x^{n-1}a + C_n^2 x^{n-2}a^2 + \cdots + C_n^k x^{n-k}a^k + \cdots + a^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k}a^k.$$

Властивості біноміальних коефіцієнтів:

1. $C_n^0 = C_n^1 = C_n^n = 1$;
2. $C_n^k = C_n^{n-k}$ (властивість симетричності);
3. $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$ (рекурентне співвідношення);
4. Сума всіх біноміальних коефіцієнтів $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$.

1.4. Деякі поняття з теорії множин

Множини можна задавати різними способами:

- описовий, наприклад $\mathbb{N}$ – множина усіх натуральних чисел;
- явний, наприклад $A_1 = \{a, b, c, d, e\}$;
- неявний, наприклад $A_2 = \{x \in \mathbb{R}: x^2 = 1\}$.

Означення. Множина A називається *підмножиною* множини B, якщо будь-який елемент множини A є елементом множини B:

$$A \subset B \Leftrightarrow \{\forall x \in A: x \in B\}.$$

Якщо множина A не є *підмножиною* множини B, то записують так:

$$A \not\subset B \Leftrightarrow \{\exists x \in A: x \notin B\}.$$

Означення. Множини A і B називаються рівними, якщо $A \subset B$ і $B \subset A$. Записують $A = B$, або:

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A).$$

Означення. Дві множини називаються еквівалентними, якщо між ними можна встановити взаємно однозначну відповідність. Якщо множини A і B еквівалентні, то записують так: $A \sim B$.

Теорема (*Кантора-Бернштейна-Шредера*). Якщо множина A еквівалентна підмножині множини B, а множина B еквівалентна підмножині множини A, то $A \sim B$.

Означення. Множина називається *скінченною*, якщо кількість її елементів можна виразити натуральним числом.

Означення. Множина називається *нескінченною*, якщо вона еквівалентна деякій своїй підмножині.

Для нескінчених множин не можна говорити про число елементів множини. Кількісною характеристикою довільної множини, що узагальнює поняття числа елементів, є потужність множини. Потужність множини A позначають символом $\bar{\bar{A}}$.

Означення. Нескінченна множина називається *зліченною*, якщо її елементи можна поставити в еквівалентність множині натуральних чисел.

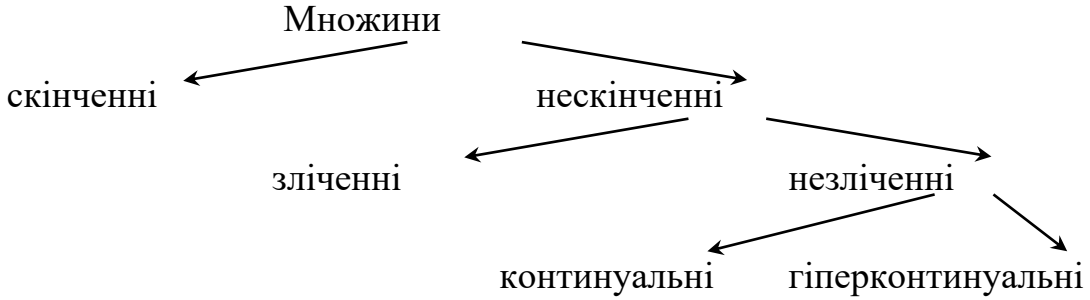
Означення. Якщо множина має потужність, більшу ніж множина натуральних чисел, то така множина називається *незліченною* множиною.

Теорема (*Кантора*). Множина всіх дійсних чисел з відрізку $[0;1]$ незліченна.

Теорема. Будь-який інтервал $(a;b)$, відрізок $[a;b]$, півінтервал $[a;b)$ або $(a;b]$ має потужність континуума (позначається c).

Означення. Множина, потужність якої дорівнює 2^c, називається множиною потужності *гіперконтинуума*.

Таким чином отримаємо схему:



1.5. Операції над множинами.

Всі можливі логічні відношення для скінченного набору множин зображають у вигляді діаграм Венна (див. рис. 1):

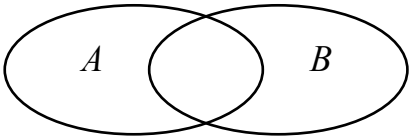


Рисунок 1 – Діаграма Венна

Означення. *Об'єднанням* двох множин A і B називається така множина, елементи якої належать хоча б одній множині з даних множин (див. рис. 2), тобто

$$A \cup B \Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B).$$

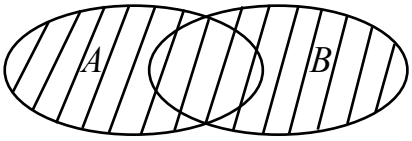


Рисунок 2 – Об'єднання двох множин A і B

Означення. *Перетином* двох множин A і B називається така множина, елементи якої належать кожній множині з даних множин (див. рис. 3), тобто

$$A \cap B \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B).$$

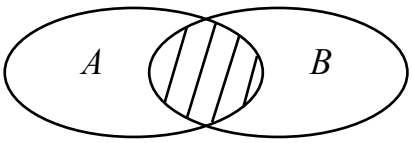


Рисунок 3 – Перетин двох множин A і B

Означення. *Різницею* множин A і B називається така множина, елементи якої належать множині A і не належать множині B (див. рис. 4), тобто

$$A\backslash B \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin B).$$

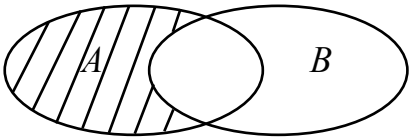


Рисунок 4 – Різниця двох множин A і B

Означення. *Доповненням* множини A називається така множина, елементи якої не належать множині A (див. рис. 5), тобто

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin A.$$

Універсальну множину будемо позначати U. Тоді $x \in \overline{A}$ можна зобразити у вигляді:

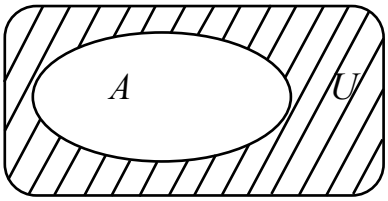


Рисунок 5 – Доповнення до множини A

Означення. *Декартовим добутком* множин A і B називається така множина упорядкованих пар (x, y), де $x \in A$, $y \in B$, тобто

$$A \times B \Leftrightarrow \{(x, y): x \in A, y \in B\}.$$

Означення 17. *Симетричною різницею* множин A і B називається така множина $A\Delta B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$, або $A\Delta B = (A \cup B)\backslash(A \cap B)$ (див. рис. 6).

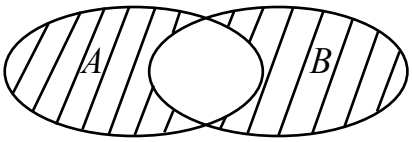


Рисунок 6 – Симетрична різниця двох множин A і B

Властивості операцій над множинами:

1. $\left.\begin{matrix} A \cup B = B \cup A \\ A \cap B = B \cap A \end{matrix}\right\}$ – комутативність.
2. $\left.\begin{matrix} (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \end{matrix}\right\}$ – асоціативність (сполучні закони).
3. $\left.\begin{matrix} A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{matrix}\right\}$ – дистрибутивність (розподільні закони).
4. $\left.\begin{matrix} \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \end{matrix}\right\}$ – закони двоїстості.

Приклад. Довести рівність множин: $A\backslash(A\backslash B) = A \cap B$ (див. рис. 7).

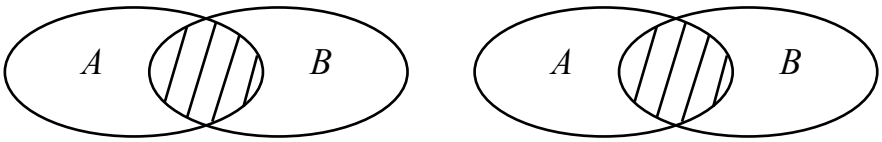


Рисунок 7 – Діаграма Венна для прикладу

$$x \in A\backslash(A\backslash B) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge \big(x \notin (A\backslash B)\big) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B) \Leftrightarrow A \cap B.$$

1.6. Точна нижня і точна верхня межа множини

Означення. Найбільша з нижніх меж називається *точною нижньою межею* множини M або *інфінумом* (позначається $\inf M$). Найменша з верхніх меж називається *точною верхньою межею* множини M або *супремумом* (позначається $\sup M$).

$A = \sup M \Leftrightarrow$ 1) $\forall x \in M\colon x \le A$;
2) $\forall A' < A\ \exists x' \in M\colon x' > A'$;
2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists x' \in M\colon x' > A - \varepsilon$.

$a = \inf M \Leftrightarrow$ 1) $\forall x \in M\colon x \ge a$;
2) $\forall a' > a\ \exists x'' \in M\colon x'' < a'$;
2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists x'' \in M\colon x'' < a + \varepsilon$.

$A = \sup\limits_{x \in D(f)} f(x) \Leftrightarrow$ 1) $\forall x \in D(f)\colon f(x) \le A$;
2) $\forall A' < A\ \exists x' \in D(f)\colon f(x') > A'$;
2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists x' \in D(f)\colon f(x') > A - \varepsilon$.

$a = \inf\limits_{x \in D(f)} f(x) \Leftrightarrow$ 1) $\forall x \in D(f)\colon f(x) \ge a$;
2) $\forall a' > a\ \exists x'' \in D(f)\colon f(x'') < a'$;
2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists x'' \in D(f)\colon f(x'') < a + \varepsilon$.

$A = \sup x_n \Leftrightarrow$ 1) $\forall x \in E\colon x_n \le A$;
2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N}\colon x_n > A - \varepsilon$.

$a = \inf x_n \Leftrightarrow$ 1) $\forall x \in E\colon x_n \ge a$;
2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N}\colon x_n < a + \varepsilon$.

Теорема (*основна теорема дійсних чисел*). Для будь-якої обмеженої зверху (знизу) множини існує точна верхня (нижня) межа.

Питання та завдання для самоконтролю до теми 1

1. Наведіть приклади числових множин.
2. Сформулюйте метод математичної індукції.
3. Сформулюйте означення функції. Наведіть приклади функцій.
4. Наведіть означення області визначення та множини значення функції.
5. Охарактеризуйте основні способи задання функції.
6. Вкажіть основні елементарні функції.
7. Побудуйте графіки наступних функцій:

$$1)\ y = 5x + 6;\ 2)\ y = 3x^2 - 6x + 2;\ 3)\ y = \frac{2}{x};\ 4)\ y = \frac{1}{x^2};\ 5)\ y = \sqrt{x};$$

$$6)\ y=\sqrt[3]{x};\ 7)\ y=\sin 3x\,;\ 8)\ y=\cos 2x\,;\ 9)\ y=\operatorname{tg}\frac{x}{2};\ 10)\ y=\operatorname{ctg}\frac{x}{2};$$

$$11)\ y=\arcsin x\,;\ 12)\ y=\arccos x\,;\ 13)\ y=\operatorname{arctg} x\,;\ 14)\ y=\operatorname{arcctg} x\,;$$

$$15)\ y=e^{2x};\ 16)\ y=\left(\frac{1}{7}\right)^{x};\ 17)\ y=\ln x$$

$$18)\ y=\log_4 x\,;\ 19)\ y=\operatorname{sh} x\,;\ 20)\ y=\operatorname{ch} x.$$

8. Наведіть приклади складених функцій.
9. Сформулюйте означення парної та непарної функцій. Наведіть приклади.
10. Наведіть приклади скінченних і нескінченних множин.
11. Сформулюйте теорему Кантора.
12. Сформулюйте які ви знаєте операції над множинами.
13. Сформулюйте означення точної нижньої і точної верхньої межі для послідовності, множини та функції.
14. Доведіть рівність множин:
$$(A\cap B)\cup(A\backslash B)=A.$$
15. Встановіть взаємно однозначну відповідність між множинами A та B, де A – множина усіх квадратів зі сторонами, які паралельні осям координат, B – множина всіх кіл на площині.
16. Знайдіть $\inf x_n$ та $\sup x_n$ послідовності $x_n=\frac{(-1)^n}{n}$.
17. Знайдіть $\inf f(x)$ та $\sup f(x)$ функції $f(x)=\operatorname{th} x$.
18. Доведіть справедливість твердження для всіх $n\in\mathbb{N}$ за методом математичної індукції:
$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\frac{n+2}{2n+2}.$$
19. Знайдіть $\inf x_n$ та $\sup x_n$ послідовності $x_n=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.
20. Знайдіть $\inf f(x)$ та $\sup f(x)$ функції $f(x)=\sin x^2$.
21. Доведіть справедливість твердження для всіх $n\in\mathbb{N}$ за методом математичної індукції:
$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)\cdot(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}.$$

2. Границя числової послідовності

2.1. Послідовності та їх види

Означення. Функція, яка визначена на множині натуральних чисел $\mathbb{N}$ і яка приймає будь-які числові значення (множина $\mathbb{R}$), називається *числовою послідовністю* або просто *послідовністю*: $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Позначається – $\{x_n\} = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$.

Наприклад, $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$.

Означення. Послідовність $\{x_n\}$ називається *обмеженою*, якщо

$$\exists M > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}: |x_n| \le M \ (\exists m, M \in \mathbb{R} \ \forall n \in \mathbb{N} : m \le x_n \le M).$$

Наприклад, $\{\sin n\}_{n=1}^{\infty} = \{\sin 1, \sin 2, \sin 3, \dots, \sin n, \dots\}$.

Означення. Послідовність $\{x_n\}$ називається *необмеженою*, якщо

$$\forall M > 0 \ \exists n \in \mathbb{N} : |x_n| > M.$$

Наприклад, $\{n\}_{n=1}^{\infty} = \{1,2,3, \dots, n, \dots\}$.

Означення. Послідовність $\{x_n\}$ називається *нескінченно великою*, якщо

$$\forall A > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ таке що } \forall n \ge n_0: \ |x_n| > A.$$

Наприклад, $\{7n\}_{n=1}^{\infty}$.

Означення. Послідовність $\{x_n\}$ називається *нескінченно малою*, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \ge n_0: \ |x_n| < \varepsilon.$$

Наприклад, $\left\{\frac{1}{7n}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

Основні властивості нескінченно малих послідовностей:

1) Сума скінченного числа нескінченно малих послідовностей – нескінченно мала послідовність.
2) Добуток нескінченно малої послідовності та обмеженої – нескінченно мала послідовність.
3) Будь-яка нескінченно мала послідовність є обмеженою послідовністю.
4) Добуток двох нескінченно малих послідовностей є нескінченно малою послідовністю.
5) Якщо нескінченно мала послідовність складається з одного елементу c, то $c = 0$.
6) (Перший зв'язок між нескінченно малою і нескінченно великою послідовностями). Якщо послідовність $\{x_n\}$ нескінченно велика, то починаючи з деякого номера $n_0 \in \mathbb{N}$ послідовність $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}_{n=n_0}^{\infty}$ – нескінченно мала послідовність.
7) (Другий зв'язок між нескінченно малою і нескінченно великою послідовностями). Якщо послідовність $\{x_n\}$ нескінченно мала і $\forall n \in \mathbb{N}$: $x_n \neq 0$, то послідовність $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}_{n=n_0}^{\infty}$ – нескінченно велика послідовність.

2.2. Границя числової послідовності

Означення. Послідовність $\{x_n\}$ називається *збіжною до точки* a, якщо послідовність $\{x_n - a\}$ – нескінченно мала послідовність, при цьому число a називається *границею* цієї послідовності і позначається: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Наприклад, $x_n = \frac{1}{n} + 1$. Виберемо у ролі $a = 1$, тоді за означенням $\{x_n - a\} = \left\{\frac{1}{n} + 1 - 1\right\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ – нескінченно мала послідовність. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + 1\right) = 1$.

Означення. Число a називається *границею послідовності* $\{x_n\}$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |x_n - a| < \varepsilon.$$

Приклад. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{7n+1}{n} = 7$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{7n+1}{n} = 7 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : \left|\frac{7n+1}{n} - 7\right| =$$
$$= \left|\frac{7n+1-7n}{n}\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon},$$

у ролі n_0 візьмемо $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. Таким чином, для $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ таке що $\forall n \geq n_0$ виконується нерівність $\left|\frac{5n+1}{n} - 5\right| < \varepsilon$, що і треба було довести.

Означення. Послідовність $\{x_n\}$ називається *збіжною у точці* a, якщо в будь-якому ε-околі точки a лежать усі члени послідовності, починаючи з номеру $n_0 \in \mathbb{N}$.

Означення. Послідовність $\{x_n\}$ називається *незростаючою* (*неспадною*), якщо $\forall n \in \mathbb{N}\ \ x_n \geq x_{n+1}\ \ (x_n \leq x_{n+1})$. Незростаючі і неспадні послідовності називаються *монотонними*.

Якщо нерівності строгі, то послідовності називаються *строго монотонними*, спадною та зростаючою відповідно.

Теорема (*Веєрштраса, основна теорема теорії послідовностей*). Нехай послідовність $\{x_n\}$ неспадна (незростаюча) і обмежена зверху (знизу). Тоді послідовність $\{x_n\}$ збігається.

Означення нескінченних границь:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |x_n| > \varepsilon;$$
$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : x_n > \varepsilon;$$
$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : x_n < -\varepsilon.$$

Основні формули для границі послідовності:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0,\ |q| < 1$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty,\ |q| > 1$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0,$ $|a| > 1, k > 0$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$
6. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0,\ \forall a \in \mathbb{R}$
7. $\lim\limits_{n\to\infty} nq^n = 0,\ |q| < 1$
8. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n} = 0,$ $a > 0, a \neq 1$
9. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1,\ a > 0$
10. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
11. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$
12. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}$, де $\theta_n \in (0;1)$ – формула Стірлінга.

Приклад. Знайти границю числової послідовності $x_n = \left(\frac{2n+3}{2n-1}\right)^{4n+3}$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n-1}\right)^{4n+3} = \|1^\infty\| = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{2n-1}\right)^{4n+3} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{1}{2}n-\frac{1}{4}}\right)^{4n+3} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{1}{2}n-\frac{1}{4}}\right)^{8\left(\frac{1}{2}n-\frac{1}{4}\right)+5} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(\left(1+\frac{1}{\frac{1}{2}n-\frac{1}{4}}\right)^{\left(\frac{1}{2}n-\frac{1}{4}\right)}\right)^8}_{\to e^8}\cdot\lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(1+\frac{1}{\frac{1}{2}n-\frac{1}{4}}\right)^5}_{\to 1} = e^8.$$

Питання та завдання для самоконтролю до теми 2

1. Сформулюйте означення числової послідовності.
2. Приведіть приклад послідовностей $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$, які задовольняють умовам:
$$x_n \neq y_n, \lim_{n\to\infty} x_n = +\infty, \lim_{n\to\infty} y_n = +\infty, \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{5}.$$
3. Наведіть приклади обмежених і необмежених числових послідовностей.
4. Сформулюйте основні властивості нескінченно малих послідовностей.
5. Сформулюйте означення границі послідовності $\{x_n\}$.
6. Доведіть, що
$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n} = \frac{2}{3}.$$
7. Наведіть основні формули для границі числової послідовності.
8. Сформулюйте означення:
$$1)\ \lim_{n\to\infty} x_n = \infty,\ \ 2)\ \lim_{n\to\infty} x_n = +\infty,\ \ 3)\ \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty.$$
9. Дослідіть послідовність $\{x_n\}$ на обмеженість, якщо:
$$1)\ x_n = \frac{2n^2-1}{n^2+2},\ \ 2)\ x_n = n^{\cos(\pi n)}.$$
10. Дослідіть послідовність $x_n = \frac{20n}{n^2+1}$ на монотонність.
11. Знайдіть границю числової послідовності $x_n = \left(\frac{3n+5}{3n-2}\right)^{7n+1}$.
12. Знайдіть множину часткових границь послідовності $x_n = \cos\frac{\pi n}{2}$.

3. Границя функції. Неперервність функції

3.1. Границя функції

Будемо вважати, що функція $f(x)$ визначена на всій числовій прямій $\mathbb{R}$ або на деякій підмножині $A = D(f) \subset \mathbb{R}$.

Означення (*за Коші*). Число b називається границею функції $f(x)$ у точці a, якщо $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ таке, що $\forall x \in D(f)\colon 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$.

Позначається границя функції $f(x)$ в точці a: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

Записується так:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \forall x \in D(f)\colon 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Означення (*за Гейне*). Число b називається границею функції $f(x)$ у точці a, якщо для будь-якої збіжної послідовності $\{x_n\}$, такої що $x_n \in D(f)$, $x_n \neq a$ і $x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to b$.

Записується так:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \{x_n\}\colon x_n \in D(f), (x_n \neq a \wedge x_n \to a) \Rightarrow f(x_n) \to b.$$

Означення за Коші та за Гейне еквівалентні.

Теорема (*критерій Коші*). Функція $f(x)$ у точці a має границю $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ тоді і лише тоді, коли:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x', x'' \in D(f)\colon 0 < |x' - a| < \delta, 0 < |x'' - a| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Означення (*за Коші*). Число b називається правою (лівою) границею функції $f(x)$ у точці a, якщо $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, $\forall x \in D(f)$: $a < x < a + \delta$ $(a - \delta < x < a) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$.

$\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = b$ – права границя функції $f(x)$ у точці a.

$\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = b$ – ліва границя функції $f(x)$ у точці a.

Означення (*за Гейне*). Число b називається правою (лівою) границею функції $f(x)$ у точці a, якщо для будь-якої збіжної послідовності $\{x_n\}$, такої що $x_n \in D(f)$, $x_n \neq a$ і $x_n > a$ $(x_n < a) \Rightarrow f(x_n) \to b$.

Записується так:

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \{x_n\}\colon x_n \in D(f), (x_n \neq a \wedge x_n > a) \Rightarrow f(x_n) \to b.$$

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \{x_n\}\colon x_n \in D(f), (x_n \neq a \wedge x_n < a) \Rightarrow f(x_n) \to b.$$

Арифметичні операції над функціями, які мають границю:

Теорема. Якщо $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ і $\lim\limits_{x \to a} g(x) = d$ та існує δ-окіл точки a такий, що у цьому околі множини визначення цих функції однакові, тобто $\exists \delta > 0\colon D(f) \cap (a - \delta; a + \delta) = D(g) \cap (a - \delta; a + \delta) = D$, тоді

1) $\lim\limits_{x \to a} \big(f(x) \pm g(x)\big) = b \pm d$;
2) $\lim\limits_{x \to a} \big(kf(x)\big) = k \cdot b$, $\forall k \in \mathbb{R}$;
3) $\lim\limits_{x \to a} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = b \cdot d$;
4) $\lim\limits_{x \to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{b}{d}$, у припущенні, що $d \neq 0$.

5) $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)\big)^n = b^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Приклад.

$$\lim_{x\to a} x^3 = \lim_{x\to a} x \cdot \lim_{x\to a} x \cdot \lim_{x\to a} x = a \cdot a \cdot a = a^3,$$
$$\lim_{x\to 7}(x^3 - 25x - 108) = \|7^3 - 25 \cdot 7 - 108\| = 60.$$

3.2. Перша і друга істотна границі функції

Невизначеність типу $\left\|\frac{0}{0}\right\|$ розкривається також за допомогою першої істотної границі:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \left\|\frac{0}{0}\right\| = 1.$$

Наслідки з першої істотної границі:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0;\ \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1;\ \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1;\ \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1.$$

Приклад. Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 17x}{5x}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 17x}{5x} = \left\|\frac{0}{0}\right\| = \lim_{x\to 0} \frac{17 \sin 17x}{5 \cdot 17x} = \frac{17}{5}.$$

Друга істотна границя розкриває невизначеність типу $\|1^\infty\|$:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \|1^\infty\| = e.$$

Наслідки з другої істотної границі:

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e;\ \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1;\ \lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a};$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a;\ \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1;\ \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha.$$

Приклад. Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1-5x}{1+2x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1-5x}{1+2x}\right)^{\frac{1}{x}} = \|1^\infty\| = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1+2x-7x}{1+2x}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \left(1 + \frac{-7x}{1+2x}\right)^{\frac{1}{x}} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \left(1 + \frac{-7x}{1+2x}\right)^{\frac{1}{x}\cdot\frac{1+2x}{-7x}\cdot\frac{-7x}{1+2x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{-7x}{1+2x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-7}{1+2x}} = e^{-7}.$$

3.3. Порівняння нескінченно малих і нескінченно великих функцій

«O» велике і «o» маленьке – математичне позначення для порівняння асимптотичної поведінки функції. Наприклад, символ $o(f)$ позначає "нескінченно малу величину відносно функції f".

Означення. Функція $f(x)$ називається *нескінченно малою у точці* a, якщо її границя у цій точці дорівнює нулю: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

Означення. Функція $f(x)$ називається *нескінченно великою у точці* a, якщо її границя у цій точці дорівнює нескінченності: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$.

При знаходженні границі функції використовують формули (див. таблицю 1).

Таблиця 1 – Еквівалентність і рівність функцій при $x \to 0$

Еквівалентність при $x \to 0$	Рівність при $x \to 0$
1) $\sin x \sim x,\ x \to 0$	1) $\sin x = x + o(x)$
2) $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2},\ x \to 0$	2) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$
3) $\operatorname{tg} x \sim x,\ x \to 0$	3) $\operatorname{tg} x = x + o(x)$
4) $a^x - 1 \sim x \ln a,\ x \to 0$	4) $a^x = 1 + x \ln a + o(x)$
5) $e^x - 1 \sim x,\ x \to 0$	5) $e^x = 1 + x + o(x)$
6) $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x,\ x \to 0$	6) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$
7) $\ln(1+x) \sim x,\ x \to 0$	7) $\ln(1+x) = x + o(x)$
8) $\log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a},\ x \to 0$	8) $\log_a(1+x) = \frac{x}{\ln a} + o(x)$
9) $\arcsin x \sim x,\ x \to 0$	9) $\arcsin x = x + o(x)$
10) $\operatorname{arctg} x \sim x,\ x \to 0$	10) $\operatorname{arctg} x = x + o(x)$
11) $\operatorname{sh} x \sim x,\ x \to 0$	11) $\operatorname{sh} x = x + o(x)$
12) $\operatorname{ch} x - 1 \sim \frac{x^2}{2},\ x \to 0$	12) $\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$
13) $\operatorname{th} x \sim x,\ x \to 0$	13) $\operatorname{th} x = x + o(x)$

Зауваження. Для спрощення викладок слід відзначити, що із співвідношення $f(x) \sim g(x)$ при $x \to a$ випливає $\lim\limits_{x\to a} h(x)f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x)g(x)$ (або ці дві границі одночасно не існують). Тобто при знаходженні границі добутку $f(x) \cdot g(x)$ один з множників $f(x)$ або $g(x)$ (або обидва) можна замінити еквівалентною функцією.

Приклад. Знайти горницю функції $\lim\limits_{x\to 0} \frac{7x+2\sin 2x+x^7}{\ln(1+3x)+x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{7x + 2\sin 2x + x^7}{\ln(1+3x) + x} = \left\|\frac{0}{0}\right\| = \lim_{x\to 0} \frac{7x + 2\cdot\big(2x + o(x)\big) + x^7}{3x + o(x) + x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{7x + 4x + o(x) + x^7}{4x + o(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{11x + o(x)}{4x + o(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{11 + \frac{o(x)}{x}}{4 + \frac{o(x)}{x}} = \frac{11}{4},$$

так як $\frac{o(x)}{x} \to 0$ при $x \to 0$.

3.4. Поняття неперервності функції

Означення (*формальне означення неперервності функції*). Функція $f(x)$ – неперервна у точці x_0 $\big(x_0 \in D(f)\big)$ тоді і тільки тоді, коли

$$1)\ \exists \lim_{x\to x_0} f(x);\quad 2)\ \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Означення. Функція $f(x)$ називається *неперервною у точці* x_0, якщо вона визначена у точці x_0 і нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції, тобто

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

Означення (*означення неперервності функції за Коші*). Функція $f(x)$ – *неперервна у точці* a $\big(a \in D(f)\big)$ тоді і тільки тоді, коли

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0, \forall x \in D(f): \ |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Означення (*означення неперервності функції за Гейне*). Функція $f(x)$ – *неперервна у точці* a $\big(a \in D(f)\big)$ тоді і тільки тоді, коли

$$\forall \{x_n\}: x_n \in D(f), x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a).$$

Означення (*за Коші*). Функція $f(x)$ – *неперервна у точці* a *справа (зліва)* тоді і тільки тоді, коли

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0, \forall x \in D(f): a \le x < a + \delta \ (a - \delta < x \le a) \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Властивості функцій, неперервних в точці:

1) Сума, різниця, добуток скінченного числа функцій, неперервних у точці x_0, також неперервні в цій точці.

2) Частка від ділення двох функцій, неперервних у деякій точці x_0, також неперервна у цій точці за умови, що знаменник у цій точці не дорівнює нулю.

3) Якщо функція $y = f(u)$ неперервна у точці u_0, а функція $u = \varphi(x)$ неперервна у точці x_0, причому $u_0 = \varphi(x_0)$, то складна функція $y = f\big(\varphi(x)\big)$ неперервна у точці x_0.

Питання та завдання для самоконтролю до теми 3

1. Сформулюйте означення границі функції за Коші і за Гейне.
2. Сформулюйте які ви знаєте арифметичні операції над функціями, які мають границю. Наведіть приклади.
3. Надайте означення першої та другої істотних границь функції.
4. Надайте означення нескінченно малої функції у точці a.
5. Надайте означення функції, неперервної у точці. Наведіть приклади.
6. Сформулюйте означення неперервності функції у точці через прирости аргументу та функції.
7. Дослідіть на неперервність функцію $y = \frac{1}{1+7^{\frac{1}{x}}}$.
8. Обчисліть наступні границі:

$$1) \lim_{x \to \infty} \frac{3x^3 + 5x^2 - 1}{9x^3 - 4x + 3}; \ 2) \lim_{x \to \infty} \frac{x^5 - 2x^4 - 3x + 2}{x^3 + 1};$$

$$3) \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 + 5x^2 - 7}{12x^4 + 3x^3 + 3x - 2}; \ 4) \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{9x^2 - 8x - 1};$$

$$5) \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 2x - 3}; \ 6) \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}; \ 7) \lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}\right);$$

$$8) \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x + 1}; \ 9) \lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 2x}; \ 10) \lim_{x \to \pi} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x}.$$

9. Обчисліть границю, використовуючи асимптотичні формули та еквівалентність функцій:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x + 4 \operatorname{arctg} x + 2x^3}{\ln(1 + 7x + \sin^3 2x) + x \cos x}.$$

10.Знайдіть односторонні границі функції $f(x)$ у точці x_0:

$$f(x) = \text{arcctg}\frac{x}{x^3+8}, \quad x_0 = -2.$$

4. Диференційовність функції

4.1. Поняття похідної функції

Нехай на деякому інтервалі $(a;b)$ задано функцію $y=f(x)$. Візьмемо будь-яку точку $x_0 \in (a;b)$ і надамо x_0 довільного приросту Δx так, щоб точка $x_0+\Delta x$ також належала інтервалу $(a;b)$. Цьому приросту аргументу відповідає приріст функції у точці x_0:

$$\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

Означення (*неперервності функції через прирости*). Функція $f(x)$ *неперервна* у точці x_0 тоді і тільки тоді, коли нескінченно малому приросту аргументу у точці x_0 відповідає нескінченно малий приріст функції $\Delta f(x_0)$ у цій точці, тобто $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f(x_0)=0$.

Означення. *Похідною функції* $f(x)$ у точці x_0 називається границя (якщо така границя існує) відношення приросту функції до приросту аргументу при прямуванні приросту аргументу до нуля:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Похідна функції $y=f(x)$ у точці x позначається одним з символів: y', $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df}{dx}$, y'_x (похідна обчислюється за аргументом x). У фізиці похідну часто позначають – $\dot{y}(x)$, коли аргумент x означає час.

З іншого боку, якщо ввести позначення $\Delta x=x-x_0$ та $\Delta f(x)=f(x)-f(x_0)$, то означення похідної запишеться у другому вигляді.

Означення. Якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, то вона називається *похідною функції* $f(x)$ у точці x_0:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Якщо для деякого значення x_0 існують границі $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=\infty$, або $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=+\infty$, або $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=-\infty$, то говорять, що при $x=x_0$ існує *нескінченна похідна*.

Якщо ця границя у деякій точці x_0 не існує, то у цій точці не існує і похідної $f'(x_0)$. Далі під похідною будемо розуміти скінченну похідну.

Означення. Якщо функція $f(x)$ визначена у деякому правосторонньому (лівосторонньому) околі точки x_0 і існує скінченна або нескінченна (визначеного знака) границя

$$\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$
$$\left(\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\right),$$

то вона називається скінченною або нескінченною *правою* (*лівою*) *похідною* функції $f(x)$ у точці x_0 і позначається $f'_+(x_0)$ (або $f'_-(x_0)$).

Якщо функція $f(x)$ задана на відрізку$[a; b]$, то під похідною у точці $x = a$ розуміють праву похідну, а у точці $x = b$ – ліву.

4.2. Геометричний зміст похідної.

Задача про дотичну. Нехай функція $f(x)$ визначена у δ-околі точки x_0 і неперервна при $x = x_0$. Розглянемо питання про дотичну до графіка функції $y = f(x)$ у точці $M_0(x_0; y_0)$, де $y_0 = f(x_0)$ (див. рис. 8).

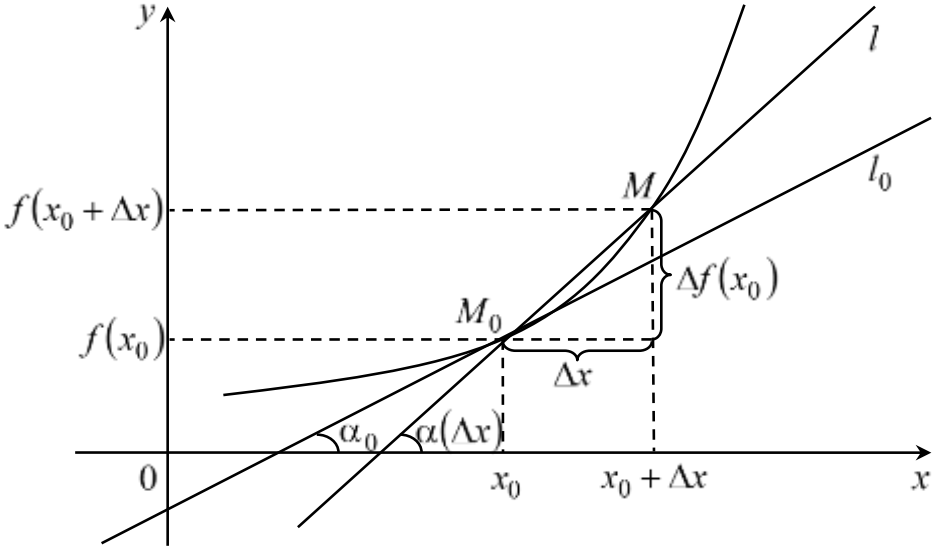


Рисунок 8 – Геометричний зміст похідної

Означення. *Дотичною до графіка функції* $y = f(x)$ у точці M_0 називається граничне положення січної MM_0 при прямуванні точки M до точки M_0 $(\Delta x \to 0)$, якщо таке граничне положення існує.

Геометричний зміст похідної: 1) у точці $M_0(x_0; y_0)$ існує дотична до графіка цієї функції; 2) похідна функції $y = f(x)$ дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до графіка функції, проведеної у точці з абсцисою $x = x_0$: $\operatorname{tg}\alpha_0 = f'(x_0) = k$.

Рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_0(x_0; y_0)$ і має кутовий коефіцієнт k, має вигляд $y - y_0 = k(x - x_0)$. Тоді рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці M_0 має вигляд:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Оскільки, кутові коефіцієнти перпендикулярних прямих обернені за величиною і протилежні за знаком $(k_1 \cdot k_2 = -1)$, то коефіцієнт нормалі буде $k_2 = -\frac{1}{f'(x_0)}$. Отже, рівняння нормалі до графіка функції $y = f(x)$ у точці M_0 має вигляд:

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

4.3. Диференційовність функції

Означення. Функція $y = f(x)$ називається *диференційовною у точці* x_0, якщо приріст функції $\Delta f(x_0)$ у цій точці можна записати у вигляді:

$$\Delta f(x_0) = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x,$$

де A – число; $\alpha(\Delta x)$ – нескінченно мала величина при $\Delta x \to 0$.

Так як, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = 0$, то $\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x = o(\Delta x)$, і $\Delta f(x_0) = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$.

Означення. Функцію $y = f(x)$ називають *диференційовною* на проміжку, якщо вона є диференційовною у кожній точці цього проміжку.

Теорема. Функція $y = f(x)$ є диференційовною у точці x_0 тоді і лише тоді, коли у цій точці існує похідна функції, причому константа A в умові диференціювання дорівнює значенню похідній.

Правила диференціювання:

Нехай функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$ мають похідні в точці x.

1. Константу можна виносити за знак похідної, тобто

$$(Cu)' = Cu'.$$

2. Похідна алгебраїчної суми функцій дорівнює алгебраїчній сумі похідних функцій, тобто

$$(u \pm v)' = u' \pm v'.$$

3. Похідна добутку. Має місце формула

$$(uv)' = u'v + v'u.$$

4. Похідна частки. Розглянемо функцію $y = \frac{u}{v}$. Припустимо, що функція v відмінна від нуля у розглянутій точці x. Має місце формула

$$y' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}.$$

Теорема (*про похідну складеної функції*). Нехай функція $y = f(u)$ диференційовна у точці t_0, $u(t_0) = x_0$, а функція $u = \varphi(x)$ диференційовна у точці x_0. Тоді складена функція $y = f\big(\varphi(x)\big)$ диференційовна у точці x_0 і має місце формула

$$y'(x_0) = \big[f\big(\varphi(x_0)\big)\big]' = f'\big(\varphi(x_0)\big) \cdot \varphi'(x_0).$$

Теорема (*про похідну оберненої функції*). Нехай функція $y = f(x)$ визначена, строго монотонна і неперервна в околі точки x_0, диференційовна у самій точці x_0 і $f'(x_0) \neq 0$, $f(x_0) = y_0$. Тоді у деякому околі точки y_0 існує обернена функція $x = f^{-1}(y)$, яка є диференційовною у точці y_0 і $\big(f^{-1}(y_0)\big)' = \frac{1}{f'(x_0)}$, або

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

4.4. Таблиця похідних

Розглянемо таблицю похідних функції (див. таблицю 2).

Таблиця 2 – Таблиця похідних

$c' = 0$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
$x' = 1$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},\ x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$
$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, x > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \lvert x\rvert < 1$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, x \neq 0$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \lvert x\rvert < 1$
$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, x > 0$	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
$(a^x)' = a^x \ln a\,, a \in (0;1) \cup (1;+\infty)$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
$(e^x)' = e^x$	$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, x > 0,$ $a \in (0;1) \cup (1;+\infty)$	$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}, x > 0$	$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$
$(\cos x)' = -\sin x$	

Доведення формул таблиці похідних проходить за означенням та правилами диференціювання, або за допомогою теорем про похідну складеної та оберненої функцій.

Приклад. Довести, що $(a^x)' = a^x \ln a$.

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x\left(a^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} = \|a^x - 1 \sim x \ln a\,,\ x \to 0\| =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x \Delta x \ln a}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

Приклад. Знайти похідну функції $y = \sqrt{\frac{\sin x^2}{1-5x^3}}$.

$$y' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\frac{\sin x^2}{1-5x^3}}} \cdot \left(\frac{\sin x^2}{1-5x^3}\right)' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-5x^3}{\sin x^2}} \cdot \frac{2x \cos x^2\,(1-5x^3) + 15x^2 \sin x^2}{(1-5x^3)^2}.$$

Означення. *Логарифмічною похідною* функції $y = f(x)$ називається похідна від натурального логарифма модуля цієї функції, тобто

$$(\ln|y|)' = \frac{y'}{y}.$$

Означення. Функцію $y = \left(u(x)\right)^{v(x)}$ називають *показниково-степеневою функцією.*

Для знаходження похідної цієї функції використовують логарифмічне диференціювання:

$$\ln y = v(x)\ln u(x),$$

$$\frac{y'}{y} = v'(x)\ln u(x) + v(x)\cdot\frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Підставимо замість y функцію $y = \big(u(x)\big)^{v(x)}$, отримаємо

$$y' = \big(u(x)\big)^{v(x)}\cdot\left(v'(x)\ln u(x) + v(x)\cdot\frac{u'(x)}{u(x)}\right).$$

Приклад. Знайти похідну функції $y = (\cos x)^{\operatorname{ctg} x}$.

$$\ln y = \operatorname{ctg} x\cdot\ln(\cos x) \Rightarrow \frac{y'}{y} = -\frac{1}{\sin^2 x}\cdot\ln(\cos x) + \operatorname{ctg} x\cdot\frac{-\sin x}{\cos x} \Rightarrow$$

$$y' = (\cos x)^{\operatorname{ctg} x}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\cdot\ln(\cos x) - \operatorname{ctg} x\cdot\frac{\sin x}{\cos x}\right).$$

$$y' = -(\cos x)^{\operatorname{ctg} x}\cdot\left(\frac{\ln(\cos x)}{\sin^2 x} + 1\right).$$

Нехай функція $y = f(x)$ монотонна і має похідну $f'(x)$, відмінну від нуля. Обернена їй функція $x = \varphi(y)$ має похідну в точці y, яка відповідає розглянутому значенню x.

Теорема. Похідні обернених функцій обернені за величиною, тобто

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}.$$

Нехай функції $x = x(t)$ і $y = y(t)$ параметрично задають функцію $y = y(t)$, де $t = \varphi(x)$, причому $x = x(t)$ і $y = y(t)$ функції диференційовні за змінною t і $x'(t) \neq 0$.

За правилом диференціювання складної функції одержимо $y'_x = y'_t\cdot t'_x$. На підставі теореми про похідну оберненої функції, маємо: $t'_x = \frac{1}{x'_t}$, тому

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Нехай функція задана неявно у вигляді $F(x,y) = 0$. Обчислимо похідні обох частин рівності:

$$F'_x(x,y) + F'_y(x,y)\cdot y'_x = 0.$$

З останньої рівності одержимо:

$$y'_x = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}.$$

4.5. Диференціал функції

Означення. Якщо приріст функції $y = f(x)$ у точці x_0 можна представити у вигляді $\Delta f(x_0) = A\cdot\Delta x + o(\Delta x)$, то головна лінійна частина приросту функції $A\cdot\Delta x$ називається *диференціалом* функції $y = f(x)$ у точці x_0 і позначається $df(x_0)$ або $dy(x_0)$, тобто $df(x_0) = A\cdot\Delta x$.

Введемо позначення $dx = \Delta x$ (диференціал незалежної змінної ототожнюється з її приростом), тоді $df(x_0) = Adx$. Таким чином, якщо функція диференційовна у точці x_0, то $df(x_0) = f'(x_0)dx$.

Правила знаходження диференціала:

Якщо функції $u(x)$, $v(x)$диференційовні, то

1) $d(u \pm v) = du \pm dv$;
2) $d(u \cdot v) = v \cdot du + u \cdot dv$;
3) $d(c \cdot u) = c \cdot du$, де $c = \text{const}$;
4) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}$, $(v \neq 0)$.

Приклад. Знайти диференціал функції $y = \sqrt[5]{(\sin x + 5)^3}$

$$y' = \left(\sqrt[5]{(\sin x + 5)^3}\right)' = \left((\sin x + 5)^{3/5}\right)' =$$

$$= \frac{3}{5}(\sin x + 5)^{-2/5} \cdot (\sin x + 5)' = \frac{3}{5}\frac{\cos x}{\sqrt[5]{(\sin x + 5)^2}}.$$

$$dy = \frac{3}{5} \cdot \frac{\cos x}{\sqrt[5]{(\sin x + 5)^2}} dx.$$

Питання та завдання для самоконтролю до теми 4

1. Наведіть означення похідної функції.
2. Охарактеризуйте фізичний та геометричний зміст похідної.
3. Знайдіть похідну функції $y = a^x$, користуючись означенням похідної.
4. Знайдіть $f'(a)$, де
$$f(x) = (x-2)^2(x-3)(x-4), a = 4.$$
5. Запишіть рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $y = 3x^2 + 3x - 5$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$.
6. Надайте означення правої та лівої похідної у точці.
7. Наведіть правила диференціювання функції.
8. Надайте означення функції, диференційовної у точці.
9. Сформулюйте теорему про похідну складеної функції.
10. Сформулюйте теорему про похідну оберненої функції.
11. Знайдіть похідну функції, що задана параметрично:
$$\begin{cases} x = \ln \sin \frac{t}{2}, \\ y = \ln \sin t, \end{cases} t \in (0; \pi).$$
12. Знайдіть похідну функції, що задана неявно:
$$5x^2 + 9y^2 - 30x + 10y + 9 = 0, y < -1.$$
13. Наведіть означення диференціала функції.
14. Як визначається диференціал функції через її похідну?
15. Знайдіть похідні наступних функцій:

$$1)\ y = \frac{12x^7 - 8x^3 - x}{x^4 + x + 1};\ 2)\ y = \frac{\cos^5 x}{\sqrt{x}};\ 3)\ y = (8x^3 - 3x)\sin 7x^2;$$

$$4)\ y = \ln\left(\frac{1}{x}\right);\ 5)\ y = x \cdot \text{arctg}\, x^3;\ 6)\ y = x^{5x-9};\ 7)\ y = \text{ctg}\left(\frac{1}{x^2}\right);$$

$$8)\ y = e^{3\sin x + 8\cos x};\ 9)\ y = \frac{\operatorname{arctg} 4x}{16x^2 + 1};\ 10)\ \log_4(9\arcsin x^2).$$

16.Знайдіть диференціал функції:

$$y = \operatorname{arcctg}\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\cos x}}.$$

5. Похідні та диференціали вищих порядків

5.1. Похідні вищих порядків

Нехай функція $f(x)$ задана на інтервалі $(a;b)$ і диференційовна у кожній точці цього інтервалу. Тоді на інтервалі $(a;b)$ буде визначеною функція $f'(x)$. Якщо і ця функція є диференційованою у деякій точці x інтервалу$(a;b)$, тобто має у цій точці похідну, то значення похідної від функції $f'(x)$ у точці x називається *другою похідною функції* $f(x)$ *у точці* x і позначається $f''(x)$, або $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$, тобто

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)'.$$

Означення. Якщо функція $f(x)$ у точці x має другу похідну $f''(x)$, то функція називається *двічі диференційованою* у цій точці.

Друга похідна має простий фізичний зміст. Якщо заданий закон прямолінійного руху $s = f(t)$, то, як відомо, $\frac{ds}{dt} = v(t)$ – швидкість у момент часу t. Тоді $\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{dv}{dt}$, але це швидкість зміни швидкості у даний момент t, тобто прискорення. Отже, $\frac{d^2s}{dt^2}$ – друга похідна шляху за часом є прискорення руху у даний момент часу t.

Аналогічно визначається третя, четверта похідна. Якщо похідна $(n-1)$-го порядку від функції $f(x)$ вже визначена і вона є функцією $f^{(n-1)}(x)$, заданою на інтервалі $(a;b)$ і диференційованою у деякій точці x інтервалу $(a;b)$, то значення похідної від $f^{(n-1)}(x)$ у точці x називається похідною n*-го порядку від функції* $f(x)$ *у точці* x і позначається $f^{(n)}(x)$, тобто

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'.$$

Означення. Якщо функція $f(x)$ у точці x має похідну n-го порядку $f^{(n)}(x)$, то функція називається n *разів диференційованою* у цій точці.

Перша похідна функції, заданої параметрично, знаходиться за формулою $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$, а друга похідна функції, заданої параметрично відповідно за формулою $(y'_x)'_x$, тобто:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y''_t \cdot x'_t - x''_t \cdot y'_t}{(x'_t)^3}.$$

5.2. Таблиця похідних вищих порядків

Розглянемо таблицю похідних функції вищих порядків (див. таблицю 3).

Таблиця 3 – Таблиця похідних вищих порядків

$P_m(x) =$ $= a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ $\left(P_m(x)\right)^{(n)} = \begin{cases} a_m m!, n = m \\ 0, \quad n > m \end{cases}$	$(x^m)^{(n)} =$ $= m(m-1)\ldots(m-n+1)x^{m-n}$ $x > 0, m \in \mathbb{R}$

$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}, x \neq 0$	$(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} \cdot v^{(n-k)}$
$(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a,$ $a \in (0;1) \cup (1;+\infty)$	$(e^x)^{(n)} = e^x$
$(\log_a x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{x^n \ln^n a},$ $x > 0, \in (0;1) \cup (1;+\infty)$	$(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{x^n}, x > 0$
$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$	$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$

Нехай функції $u(x)$ і $v(x)$мають всі похідні до n-го порядку включно, тоді функція $u \cdot v$ також n раз диференційовна і її n-на похідна обчислюється за формулою Лейбніца:

$$(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} \cdot v^{(n-k)},$$

де $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Приклад. Знайти $y^{(100)}(x)$, якщо $y(x) = (3x+4)e^{2x}$.

$$y^{(100)}(x) = \sum_{k=0}^{100} C_n^k (3x+4)^{(k)} \cdot (e^{2x})^{(100-k)} = C_{100}^0 (3x+4)^{(0)} \cdot (e^{2x})^{(100)} +$$
$$+C_{100}^1 (3x+4)^{(1)} \cdot (e^{2x})^{(99)} + C_{100}^2 (3x+4)^{(2)} \cdot (e^{2x})^{(98)} + 0 + \cdots 0 =$$
$$= \frac{100!}{0! \cdot 100!}(3x+4) \cdot 2^{100}(e^{2x}) + \frac{100!}{1! \cdot 99!} 3 \cdot 2^{99}(e^{2x}) =$$
$$= (3x+4) \cdot 2^{100} e^{2x} + 2 \cdot 50 \cdot 3 \cdot 2^{99} e^{2x} = 2^{100} \cdot e^{2x}(3x+4+150) =$$
$$= 2^{100} \cdot e^{2x}(3x+154).$$

5.3. Правило Лопіталя

Нехай для функцій $f(x)$ і $\varphi(x)$ виконується умова: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$. Тоді відношення $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ втрачає зміст при $x \to x_0$, але границя відношення $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ при $x \to x_0$ може існувати (невизначеність типу $\left\|\frac{0}{0}\right\|$). Наступна теорема, яку називають правилом Лопіталя, дає можливість обчислення цієї границі.

Теорема (*правило Лопіталя для розкриття невизначеностей типу* $\left\|\frac{0}{0}\right\|$). 1) Нехай функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ визначені та диференційовні у проколотому околі точки x_0: $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_0) = U_\varepsilon(x_0) \backslash \{x_0\} = (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon) \backslash \{x_0\}$; 2) $\varphi'(x) \neq 0 \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_0)$; 3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$; 4) існує скінченна або нескінченна границя відношення похідних: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$. Тоді існує границя відношення функцій $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$, причому

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Зауваження. Правило Лопіталя здійснюється також і для границь $x\to x_0+0$ і $x\to x_0-0$.

Теорема (*правило Лопіталя для розкриття невизначеностей типу* $\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|$). 1) Нехай функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ визначені та диференційовні у проколотому околі точки x_0: $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_0)=U_\varepsilon(x_0)\backslash\{x_0\}=(x_0-\varepsilon;x_0+\varepsilon)\backslash\{x_0\}$; 2) $\varphi'(x)\neq 0\ \ \forall x\in\overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_0)$; 3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$; 4) існує скінченна або нескінченна границя відношення похідних: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$. Тоді існує границя відношення функцій $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, причому

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Приклад. Обчислити $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{e^x+x^2}$.

Для функції $f(x)=\ln x$ і $\varphi(x)=e^x+x^2$ при $x\to+\infty$ умови теореми виконуються, тому

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{e^x+x^2}=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(e^x+x^2)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{e^x+2x}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x(e^x+2x)}=\left\|\frac{1}{\infty}\right\|=0.$$

5.4. Формула Тейлора

Теорема (*формула Тейлора*). Нехай функція $f(x)$ $(n+1)$ раз диференційовна в деякому околі точки a, тоді для довільного x із цього околу і для довільного $p>0$ існує така точка ξ, яка лежить між x та a, що

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\cdots$$
$$\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_{n+1}(x),$$

де $R_{n+1}(x)=f^{(n+1)}(\xi)\cdot\left(\frac{x-a}{x-\xi}\right)^p\cdot\frac{(x-\xi)^{n+1}}{n!p}$ – залишковий член формули Тейлора у загальному випадку. Коротко так:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+o((x-a)^n).$$

Залишковий член формули Тейлора у формі Лагранжа $(p=n+1)$:

$$R_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}\big(a+\theta(x-a)\big)}{(n+1)!}\cdot(x-a)^{n+1},0<\theta<1.$$

Залишковий член формули Тейлора у формі Коші$(p=1)$:

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}\big(a+\theta(x-a)\big)}{n!}\cdot(1-\theta)^n(x-a)^{n+1}, 0<\theta<1.$$

Залишковий член формули Тейлора у формі Пеано:

$$R_{n+1}(x) = o((x-a)^n), x \to a.$$

5.5. Формула Маклорена

Означення. Формула Тейлора в точці $a=0$ називається *формулою Маклорена*:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x),$$

де $R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}\cdot x^{n+1}$, $0<\theta<1$ – залишковий член формули Маклорена у формі Лагранжа, або $R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}\cdot(1-\theta)^n\cdot x^{n+1}$, $0<\theta<1$ – залишковий член формули Маклорена в формі Коші, або $R_{n+1}(x) = o(x^n)$ – залишковий член формули Маклорена в формі Пеано. Коротко так:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n).$$

Розглянемо основні розклади елементарних функцій за формулою Маклорена:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \forall -\infty < x < \infty.$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n+2}), \forall -\infty < x < \infty.$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n+1}), \forall -\infty < x < \infty.$$

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + o(x^n), \forall -1 < x \le 1.$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots +$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n), \forall |x| < 1.$$

5.6. Диференціали вищих порядків

Зауваження. В подальшому символ δ означає операцію знаходження диференціала, а символ d означає, що цей диференціал береться при деякому конкретному значенні: $dy = \delta y|_{\delta x = dx}$:

δx– диференціал аргументу,

$\delta y = \delta f(x)$ – диференціал функції.

Якщо функція $f(x)$ диференційовна на $(a;b)$, то$df(x) = dy = f'(x)dx$.

Припущення:

1) функція $f(x)$ – диференційовна двічі у даній точці $x \in (a;b)$;

2) змінна x або незалежна змінна або є двічі диференційованою функцією від іншої змінноїt, тобто$x = \varphi(t)$.

Означення *(диференціалу другого порядку)*. В зроблених припущеннях *диференціалом другого порядку* у даній точці $x \in (a; b)$ називається диференціал від першого диференціалу, якщо $\delta x = dx$, і позначається $d^2 f(x)$ або $d^2 y$. Тобто

$$d^2 y = \delta(\delta y)|_{\delta x = dx} = \delta(f'(x)\delta x)|_{\delta x = dx}$$

Якщо x – незалежна змінна, то $\delta x = \Delta x = \text{const}\ \forall x \in (a; b)$, тоді

$$d^2 y = \delta(\delta y)|_{\delta x = dx} = \delta(f'(x)\delta x)|_{\delta x = dx} = [f'(x) \cdot \delta x]'_x|_{\delta x = dx} = f''(x)dx^2,$$

тобто $d^2 y = f''(x)dx^2$.

Якщо $x = \varphi(t)$ – залежна змінна, то $f\big(\varphi(t)\big)$ і:

$$d^2 y = \delta(\delta y)|_{\delta x = dx} = \delta(f'(x)\delta x)|_{\delta x = dx} = [f'(x) \cdot \delta x]'_x|_{\delta x = dx} =$$
$$= f''(x) \cdot (dx)^2 + f'(x) \cdot d^2 x.$$

З останньої формули випливає, що форма другого диференціалу не є інваріантною, тобто вона змінюється в залежності від того, x є залежною чи незалежною змінною.

Означення *(диференціалу n-го порядку).* Нехай $y = f(x)$ – диференційовна n разів в даній точці $x \in (a; b)$, аргумент x є або незалежною змінною або функцією від t, яка диференційовна n разів у даній точці $x \in (a; b)$. *n-им диференціалом від функції $y = f(x)$ у точці x* називається диференціал від $(n-1)$-го диференціалу, якщо $\delta x = dx$, і позначається $d^n f(x)$ або $d^n y$. Тобто

$$d^n y = \delta(\delta^{n-1} y)|_{\delta x = dx}.$$

У випадку, коли x є незалежною змінною, маємо

$$d^n y = f^{(n)}(x)dx^n.$$

Форма n-го диференціалу ($n > 1$) не є інваріантною.

Питання та завдання для самоконтролю до теми 5

1. Знайдіть похідні другого порядку наступних функцій:
$$1)\ y = \arcsin 2x\ ;\ 2)\ y = \ln(1 + x^2)\ ;\ 3)\ y = \frac{2x-1}{3x+2};$$
$$4)\ y = (x^3 - 1)\ln x\ ;\ 5)\ y = \text{tg}(3x - 2).$$
2. Точка рухається прямолінійно за законом $s = 2t^3 - 4t^2 + 6t - 2$. Знайдіть її швидкість та прискорення у момент часу 3 секунди після початку руху.
3. Наведіть означення похідної *n*-го порядку.
4. Знайдіть похідну вказаного порядку: $(\sin x)^{(55)}$, $(\cos x)^{(40)}$.
5. Знайдіть похідну вказаного порядку, використовуючи формулу Лейбніца:
$$y^{(10)}(x),\ \ y(x) = (2x^2 + 3x + 1)e^{2x}.$$
6. Знайдіть похідну *n*-го порядку:
$$y = \frac{1}{x^2(x-1)}$$

7. Сформулюйте правило Лопіталя для розкриття невизначеностей типу $\left\|\frac{0}{0}\right\|\left(\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|\right)$.
8. Обчисліть границі за правилом Лопіталя:

$$1)\ \lim_{x\to -1}\frac{x^4+x^3-3x^2-5x-2}{x^4+2x^3-2x-1};\ 2)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right);$$

$$3)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x};\ 4)\ \lim_{x\to +\infty}\left(x\cdot\ln\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)\right);\ 5)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}};$$

$$6)\ \lim_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}};\ 7)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2};\ 8)\ \lim_{x\to\infty}\frac{xe^{\frac{x}{2}}}{x+e^x}.$$

9. Наведіть формулу Тейлора і формулу Маклорена.
10. Розкладіть функції за формулою Маклорена:

$$1)\ \sin(\sin x)\ \text{до}\ x^5;\ 2)\ \ln(3\cos x)\ \text{до}\ x^6.$$

11. Обчисліть границі за допомогою формулу Маклорена:

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh} 2x-2\operatorname{sh} x}{(e^x-1-x)x};\ 2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1+\frac{x^2}{2}}{\operatorname{ch} 3x+\cos 3x-2}.$$

12. Покажіть, що функція $y=e^x+2e^{2x}$ задовольняє рівняння $y''-6y'+5y=0$.
13. Наведіть означення диференціалу другого порядку та диференціалу *n*-го порядку.
14. Поясніть чому форма другого диференціалу не є інваріантною.

6. Диференціальне числення функції багатьох змінних

6.1. Поняття метричного простору

Означення. Нехай X – довільна множина. Дійсна невід'ємна функція $\rho: X \times X \to \mathbb{R}^+$ називається *метрикою*, якщо вона задовольняє наступні три аксіоми:

1) $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (аксіома тотожності);

2) $\forall x, y \in X \ \rho(x,y) = \rho(y,x)$ (аксіома симетрії);

3) $\forall x, y, z \in X \ \rho(x,y) \le \rho(x,z) + \rho(z,y)$ (аксіома трикутника).

При цьому пара (X, ρ) називається *метричним простором*, а елементи множини X – точками простору.

Наприклад, визначаючи відстань між дійсними числами x_1 і x_2 формулою $\rho(x,y) = |x_1 - x_2|$, отримаємо метричний простір, який позначаються символом $\mathbb{R}$. Якщо $x = (x_1, x_2)$, а $y = (y_1, y_2)$, то визначаючи метрику формулою $\rho(x,y) = ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2)^{1/2}$, отримаємо метричний простір, який позначаються символом $\mathbb{R}^2$. Якщо $x = (x_1, x_2, x_3)$, а $y = (y_1, y_2, y_3)$, то визначаючи метрику формулою $\rho(x,y) = ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2)^{1/2}$, отримаємо метричний простір, який позначаються символом $\mathbb{R}^3$.

Означення. Метричний простір називається *n-вимірним простором* $\mathbb{R}^n$, якщо між двома точками $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ і $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ з дійсних чисел визначено метрику

$$\rho(x,y) = ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2)^{1/2}.$$

Означення. Якщо кожній точці $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ з множини D точок $\mathbb{R}^n$ ставиться у відповідність за певним законом деяке число u, то кажуть, що на множині D задано *функцію* $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. При цьому множину D називають *областю визначення функції*.

Приклад. Знайти область визначення функції $u = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Функцію визначено при $1 - x^2 - y^2 \ge 0$, або $x^2 + y^2 \le 1$. Графічно область визначення даної функції зображується точками круга радіусу 1.

Означення. *Лінією рівня* функції $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називають множину усіх точок, в яких функція набуває сталого значення: $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{const}$.

6.2. Границя і неперервність

Якщо точку $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ позначити через M, то функцію $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ від цих змінних іноді називають функцією точки M і позначають $u = f(M)$.

Означення. *δ-околом* точки $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ будемо називати множину точок, віддалених від точки M_0 на відстань, що менше числа $\delta > 0$, тобто $\rho(M, M_0) < \delta$.

Нехай функція $u = f(M)$ визначена у деякому околі точки $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, можливо, окрім самої цієї точки.

Означення. Число A називають *границею функції* $u = f(M)$ при $M \to M_0$, якщо $\forall \varepsilon > 0$ знайдеться такий δ-окіл точки M_0, що для будь-якої точки M з цього околу виконується нерівність $|f(M) - A| < \varepsilon$.

Позначають $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = A$ або $\lim\limits_{\substack{x_1 \to x_1^0 \\ x_2 \to x_2^0 \\ \dots \\ x_n \to x_n^0}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = A$.

Зауваження. Усі теореми про границі для функції однієї змінної поширюються і на функції багатьох змінних.

Означення. Функцію $u = f(M)$ називають *неперервною у точці* M_0, якщо виконується умови:

1) функція $f(M)$ визначена у точці M_0;

2) існує $\lim\limits_{M \to M_0} f(M)$;

3) $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$.

Якщо у точці M_0 хоча б одна з вказаних умов порушується, то точка M_0 називається *точкою розриву* функції $u = f(M)$.

Зауваження. Властивості неперервних функцій однієї змінної переносяться на випадок функції багатьох змінних.

Означення. Функцію $u = f(M)$, неперервну у кожній точці деякої області D, називають *неперервною* у цій області.

6.3. Частинні похідні

Нехай у деякій області D задана функція $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ і у деякій точці $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, що належить області D, її значення $u = f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$. Дамо аргументу x_k^0 приріст Δx_k, не змінюючи інші змінні. Функція u одержить приріст:

$$\Delta_{x_k} u = f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{k-1}^0, x_k^0 + \Delta x_k, x_{k+1}^0, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0),$$

який називається *частинним приростом* функції по змінній x_k.

Означення. *Частинною похідною* по x_k від функції $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ у точці M_0 називається границя відношення частинного приросту функції за аргументом x_k до приросту аргументу x_k за умови, що приріст аргументу прямує до нуля, тобто

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta_{x_k} u}{\Delta x_k} = \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{k-1}^0, x_k^0 + \Delta x_k, x_{k+1}^0, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)}{\Delta x_k}.$$

Позначається частинна похідна по x_k так: $\frac{\partial u}{\partial x_k}$, $\frac{\partial f}{\partial x_k}$, u'_{x_k}, $f'_{x_k}(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Приклад. Для функції $u = x^5 y^2 + x \cos y - 5x + 4y + 7z - 3$ знайти частинні похідні.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 5x^4 y^2 + \cos y - 5; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2x^5 y - x \sin y + 4; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 7.$$

Якщо функція $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ визначена у деякій області D, то її частинні похідні у свою чергу будуть функціями багатьох змінних, визначеними у тій же області D. Будемо називати їх *частинними похідними першого порядку*.

Частинні похідні від частинних похідних першого порядку, якщо вони існують, називають *частинними похідними другого порядку* від функції $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ у цій точці. Для функції $u = f(x, y)$ двох змінних розглядають чотири частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f''_{xx}(x, y);\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f''_{xy}(x, y);$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f''_{yx}(x, y);\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = f''_{yy}(x, y).$$

Означення. Похідна $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, узята по різним змінним, називається *мішаною частинною похідною*.

Теорема (*Шварца*).Нехай виконані умови:

1) функції $u = f(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ визначені у деякому околі точки $(x_0; y_0)$;

2) функції $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ неперервні у точці $(x_0; y_0)$.

Тоді мішані похідні другого порядку рівні у точці $(x_0; y_0)$:

$$\frac{\partial^2 f(x_0; y_0)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x_0; y_0)}{\partial y \partial x}.$$

Аналогічна теорема справедлива для будь-яких неперервних мішаних похідних, які відрізняються між собою лише порядком диференціювання.

Очевидно, що для функції двох змінних можна визначити дві частинні похідні першого порядку, чотири частинні похідні другого порядку, вісім – третього і взагалі 2^n частинних похідних n-го порядку. Наприклад, якщо існують частинні похідні від частинних похідних другого порядку, то їх називають *частинними похідними третього порядку* і таких похідних вісім:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}, \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}, \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}, \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}, \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}.$$

6.4. Похідна за напрямом та градієнт

Означення. *Похідною функції* $u = f(x, y, z)$ *за даним напрямом* $\bar{l}$ у точці M_0 називається границя $\lim\limits_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta_{x_l} u}{\Delta l} = \lim\limits_{\Delta l \to 0} \frac{u(M_0) - u(M)}{\Delta l}$, яка позначається $\frac{\partial u}{\partial l}$ або $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}$.

Тут

$$M_0(x_0, y_0, z_0),$$
$$M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z),$$
$$\Delta l = MM_0 = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}.$$

Якщо функція $u = f(x, y, z)$ диференційовна, то має місце формула:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

Похідна $\frac{\partial u}{\partial l}$ є швидкість зміни функції $u = f(x, y, z)$ у точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ за заданим напрямом $\bar{l}$.

Якщо напрям $\bar{l}$ задано у вигляді $\bar{l} = a\bar{\imath} + b\bar{\jmath} + c\bar{k}$, то напрямні косинуси вектору $\bar{l}$ знаходяться за формулами:

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Означення. *Градієнтом функції* $u = f(x,y,z)$ називається вектор, проекціями якого на координатні осі є відповідні частинні похідні даної функції:

$$\overline{\operatorname{grad} u} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\bar{\imath} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\bar{\jmath} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\bar{k}.$$

Похідна за напрямом $\bar{l}$ зв'язана з градієнтом функції формулою:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \left(\overline{\operatorname{grad} u}, \bar{l}\right).$$

Градієнт вказує напрямок найшвидшого зростання функції у даній точці. Похідна у напрямі градієнта має найбільше значення, тобто у напрямі $\bar{l} = \operatorname{grad} u$:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_{\max} = \left|\overline{\operatorname{grad} u}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

Питання та завдання для самоконтролю до теми 6

1. Дайте означення метрики. Сформулюйте аксіоми метрики.
2. Який метричний простір називається n-вимірним простором $\mathbb{R}^n$?
3. Знайдіть область визначення функції $u = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ і зобразіть її на координатній площині.
4. Що називають δ-околом точки $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ у просторі $\mathbb{R}^n$?
5. Сформулюйте означення границі функції багатьох змінних $u = f(M)$.
6. Знайдіть повторну границю або доведіть, що вона не існує:
$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{\sin(x+y)^2}{x^2+y^2}.$$
7. Знайдіть подвійну границю або доведіть, що вона не існує:
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin x}{\sin y}.$$
8. Сформулюйте означення неперервності функції багатьох змінних.
9. Сформулюйте означення частинної похідної по x_k від функції $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ у точці M_0.
10. Знайдіть для функції $u = 17x^2y^9 + x^5\sin(xy) - 2\sqrt{x} + 6e^{x^3y}$ частинні похідні.
11. Сформулюйте означення похідної функції $u = f(x,y,z)$ за даним напрямом $\bar{l}$ у точці M_0.
12. Що називають градієнтом функції?
13. Обчисліть градієнт функції $u = \frac{x+y}{x+4y+1}$ у точці $M(-1;2)$.
14. Для заданої функції $u = f(x,y)$ знайдіть: 1) $\overline{\operatorname{grad} u}(A)$; 2) похідну у точці A за напрямком $\bar{l}$:
$$z = 3x^2 + 2xy,\ \ A(1;2),\ \ \bar{l} = 4\bar{\imath} + 3\bar{\jmath}.$$

15. Знайдіть похідну функції $u = x^2 - y$ в точці $M(1;1)$ у напрямку $\bar{l}$, що утворює кут $\alpha = 60°$ з додатним напрямком вісі *OX*.

7. Первісна та невизначений інтеграл

7.1. Означення та властивості первісної функції

Означення. Функція $F(x)$ називається *первісною для функції* $f(x)$ *на проміжку* $(a;b)$, якщо функція $F(x)$ диференційовна на $(a;b)$ і $F'(x)=f(x)$ $\forall x\in(a;b)$.

Так, для функції $f(x)=5x^4$ первісна $F(x)=x^5$ чи x^5+1, чи $x^5+\ln 5$ ..., тобто функція $f(x)$ має не одну первісну.

Функція $F(x)=\cos x$ на $(-\infty;+\infty)$ є первісною для функції $f(x)=-\sin x$, оскільки $(\cos x)'=-\sin x$.

Властивості первісних:

1) Якщо $F(x)$ первісна для функції $f(x)$ на проміжку $(a;b)$, то $F(x)+C$, $C=\text{const}$ теж буде первісною для функції $f(x)$.
2) Якщо $F_1(x)$ і $F_2(x)$ будь-які первісні для функції $f(x)$ на проміжку $(a;b)$, то $F_1(x)-F_2(x)=\text{const}$.

Теорема (*достатня умова існування невизначеного інтеграла*). Довільна неперервна на деякому проміжку функція $f(x)$ має первісну $F(x)$ на цьому проміжку.

Означення 2. Сукупність усіх первісних даної функції $f(x)$ на деякому проміжку $(a;b)$ називають *невизначеним інтегралом функції* $f(x)$ на цьому проміжку і позначають символом $\int f(x)dx$.

Функцію $f(x)$ називають підінтегральною, а вираз $f(x)dx$ – підінтегральним виразом, x – змінна інтегрування; dx – диференціал змінної інтегрування. Якщо $F(x)$ – одна з первісних $f(x)$ на проміжку $(a;b)$, то

$$\int f(x)dx=F(x)+C.$$

Останнє співвідношення слід розуміти як рівність між двома множинами.

7.2. Властивості невизначеного інтеграла

1. Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює його підінтегральній функції:

$$\left(\int f(x)dx\right)'=f(x).$$

2. Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює сумі цієї функції та довільної сталої:

$$\int dF(x)=\int F'(x)dx=F(x)+C.$$

3. Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу:

$$d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx.$$

4. Сталий множник можна виносити за знак інтеграла:

$$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx\,,k=\text{const}.$$

5. Невизначений інтеграл від суми (різниці) двох функцій дорівнює сумі (різниці) інтегралів від цих функцій:

$$\int \big(f_1(x) \pm f_2(x)\big)dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx.$$

Ця властивість справедлива для довільного скінченного числа доданків.

6. Формула інтегрування $\int f(x)dx = F(x) + C$ залишається вірною, якщо у ній x замінити будь-якою диференційовною функцією $u(x)$, а dx – її диференціалом du (цю властивість називають *інваріантністю формули інтегрування*), тобто

$$\int f(u)du = F(u) + C.$$

7. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, то

$$\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + C,$$

де a та b – довільні константи, $a \neq 0$.

7.3. Таблиця невизначених інтегралів

Розглянемо таблицю невизначених інтегралів (див. таблицю 4).

Таблиця 4 – Таблиця невизначених інтегралів

$\int dx = x + C.$	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1.$
$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C.$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1.$
$\int e^x dx = e^x + C.$	$\int \sin x\, dx = -\cos x + C.$
$\int \cos x\, dx = \sin x + C.$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$	$\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C.$
$\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C.$	$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$
$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C. \end{cases}$
$\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C, \\ -\operatorname{arctg} x + C. \end{cases}$	$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C, a \neq 0.$
$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C, a \neq 0.$	$\int \frac{xdx}{a^2 \pm x^2} = \pm\frac{1}{2}\ln\lvert a^2 \pm x^2\rvert + C.$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right\rvert + C.$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{\lvert a\rvert} + C, a > 0.$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert + C,$	$\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm\sqrt{a^2 \pm x^2} + C,$

$a > 0.$	$a > 0.$
$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C, a > 0.$	$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left\|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\| + C, a > 0.$

До інтегралів, які не виражаються через елементарні функції, належать:

1) *інтеграл Пуассона* $\int e^{-x^2}dx$, що використовується в теорії ймовірностей, в статистичній фізиці, теорії теплопровідності і дифузії;
2) *інтеграли Френеля* $\int \cos x^2\, dx$, $\int \sin x^2\, dx$, що використовуються в оптиці;
3) *інтегральний логарифм* $\int \frac{dx}{\ln x}$, $x > 0$, $x \neq 1$;
4) *інтегральні косинус і синус* $\int \frac{\cos x}{x}dx$, $\int \frac{\sin x}{x}dx$.

7.4. Безпосереднє інтегрування

Означення. Інтегрування функцій на основі властивості лінійності невизначеного інтеграла і таблиці основних інтегралів називають *безпосереднім інтегруванням*.

Приклад. Обчислити інтеграли:

$$\int (5x^2 + 4x - 3)dx = 5\int x^2dx + 4\int xdx - 3\int dx = \frac{5}{3}x^3 + 2x^2 - 3x + C.$$

$$\int \left(-5\sin x + \frac{7}{4 + x^2}\right)dx = -5\int \sin x\, dx + 7\int \frac{1}{4 + x^2}dx =$$

$$= 5\cos x + \frac{7}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C.$$

$$\int (10^x + 5^x)^2dx = \int (10^{2x} + 2 \cdot 50^x + 5^{2x})dx =$$

$$= \int 100^x dx + 2\int 50^x dx + \int 25^x dx = \frac{100^x}{\ln 100} + 2 \cdot \frac{50^x}{\ln 50} + \frac{25^x}{\ln 25} + C.$$

7.5. Інтегрування заміною змінної

Нехай функція $f(x)$ задана на інтервалі $(a; b)$, а функція $x = \varphi(t)$ на інтервалі $(\alpha; \beta)$, причому функція $\varphi(t)$ відображає проміжок $(\alpha; \beta)$ на проміжок $(a; b)$.

Теорема. Нехай функція $f(x)$ неперервна в інтервалі $(a; b)$, функція $x = \varphi(t)$ неперервно диференційовна і строго монотонна в інтервалі $(\alpha; \beta)$, причому $\varphi'(t) \neq 0$. Тоді справедлива формула:

$$\int f(x)dx = \int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt.$$

Приклад. Обчислити інтеграл $\int \frac{dx}{5 + \sqrt{2x}}$.

$$\int \frac{dx}{5+\sqrt{2x}} = \left\| \begin{matrix} 5+\sqrt{2x}=t,\ x=\dfrac{(t-5)^2}{2} \\ dx=(t-5)dt \end{matrix} \right\| = \int \frac{(t-5)dt}{t} = \int dt - 5\int \frac{dt}{t} =$$
$$= t - 5\ln|t| + C = \sqrt{2x} - 5\ln\left|\sqrt{2x}+5\right| + C.$$

7.6. Метод внесення функції під знак диференціала

Внесення під знак диференціала використовується, коли підінтегральний вираз має вигляд: $f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)dx$:

$$\int f(x)dx = \int f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)dx = \int f\big(\varphi(x)\big)d\varphi(x) = F\big(\varphi(x)\big) + C.$$

При інтегруванні зручно використовувати властивість інваріантності диференціалу (див. таблицю 5).

Таблиця 5 – Диференціали деяких функції

$d(x^n) = nx^{n-1}dx$	$d(\ln x) = \dfrac{dx}{x}$	$d(\operatorname{tg} x) = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$
$d(\sin x) = \cos x\, dx$	$d(\cos x) = -\sin x\, dx$	$d(e^x) = e^x dx$
$d(\arcsin x) = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$d(\arccos x) = -\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$d(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{dx}{1+x^2}$

Приклад. Обчислити інтеграли:

$$1)\ \int \cos(7x+4)\,dx = \frac{1}{7}\int \cos(7x+4)\,d(7x+4) = \frac{1}{7}\sin(7x+4) + C.$$

$$3)\ \int e^{5-7x}dx = -\frac{1}{7}\int e^{5-7x}d(5-7x) = -\frac{1}{7}e^{5-7x} + C.$$

$$4)\ \int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$$

$$5)\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+5}} = \int \frac{d\left(x-\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{4}}} = \ln\left|x-\frac{3}{2}+\sqrt{x^2-3x+5}\right| + C.$$

7.7. Інтегрування частинами

Теорема. Нехай функції $u = u(x)$ та $v = v(x)$ неперервно диференційвні на деякому проміжку $(a; b)$. Тоді у кожній точці даного проміжку справедлива рівність:

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Розглянемо основні типи інтегралів, до яких застосовують інтегрування частинами.

I. Інтеграли вигляду $\int P_n(x)e^{ax}dx$, $\int P_n(x)a^{bx}dx$, $\int P_n(x)\sin(bx)\,dx$, $\int P_n(x)\cos(bx)\,dx$, де $P_n(x)$ – многочлен степеню n; a і b – const. Тут зручно

вибрати $u = P_n(x)$, а через dv позначити інший співмножник у підінтегральному виразі. Формула інтегрування частинами застосовується n разів.

II. Інтеграли вигляду $\int P_n(x)\ln(bx)\,dx$, $\int P_n(x)\arcsin(bx)\,dx$, $\int P_n(x)\arccos(bx)\,dx$, $\int P_n(x)\operatorname{arctg}(bx)\,dx$, $\int P_n(x)\operatorname{arcctg}(bx)dx$, де $P_n(x)$ – многочлен степеню n; a і b – const. Тут зручно вибрати $dv = P_n(x)dx$, а через u позначити інший співмножник. Формула інтегрування частинами застосовується n разів.

III. Інтеграли вигляду $\int e^{ax}\sin(bx)\,dx$, $\int e^{ax}\cos(bx)\,dx$, $\int \sin(\ln x)\,dx$, $\int \cos(\ln x)\,dx$, де a і b – const. За u можна вибрати e^{ax}, а через dv позначити інший співмножник у підінтегральному виразі. Формула інтегрування частинами застосовується 2 рази. Потім, позначаючи через I один з вказаних інтегралів, приходимо до рівняння першого порядку відносно I, із якого і знаходиться відповідний інтеграл.

IV. Інтеграли вигляду $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx$, $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}dx$, де a – const. Тут зручно вибрати $u = \sqrt{a^2 - x^2}$ або $u = \sqrt{x^2 \pm a^2}$, а $dv = dx$. Формула інтегрування частинами застосовується 2 рази. Потім, позначаючи через I один з вказаних інтегралів, приходимо до рівняння першого порядку відносно I, із якого і знаходиться відповідний інтеграл.

Приклад. Обчислити інтеграл $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx$.

$$I = \int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \left\| \begin{matrix} u = \sqrt{a^2 - x^2},\ du = -\dfrac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \\ dv = dx,\ v = \int dx = x \end{matrix} \right\| =$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2 - a^2 + a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx =$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2 - a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx + a^2\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} =$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} - \underbrace{\int \sqrt{a^2 - x^2}dx}_{=I} + a^2\arcsin\frac{x}{a};$$

$$2I = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a},$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C.$$

7.8. Інтегрування раціональних дробів

Нехай $P_n(x)$ та $Q_m(x)$ – це многочлени з дійсними коефіцієнтами степенів відповідно n та m:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0;$$
$$Q_m(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0.$$

Означення. *Раціональним дробом* називають функцію $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, де $m \geq 1$.

Означення. Раціональний дріб називається *правильним*, якщо степінь многочлена у чисельнику менше степеню у знаменнику, тобто $n < m$. У іншому випадку ($m \geq n$) раціональний дріб називають *неправильним*.

Означення. *Елементарними раціональними дробами* називають раціональні дроби таких чотирьох видів:

$$1)\frac{1}{x-a};\ 2)\frac{1}{(x-a)^{\alpha}};\ 3)\frac{Mx+N}{x^2+px+q};\ 4)\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\lambda}},$$

де $\alpha,\ \lambda \in \mathbb{N}, \alpha \geq 2, \lambda \geq 2, D = p^2 - 4q < 0, a,\ p,\ q,\ M,\ N \in \mathbb{R}$.

Теорема. Будь-яка раціональна функція інтегрується в елементарних функціях.

$$1)\ \int \frac{Adx}{x-a} = A\ln|x-a| + C.$$

$$2)\ \int \frac{Adx}{(x-a)^n} = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C, n \neq 1.$$

$$3)\ \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{N-\frac{Mp}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C.$$

$$4)\ \int \frac{(Mx+N)}{(x^2+px+q)^n}dx =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^n} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}\right)^n}, n > 1.$$

Приклад. Обчислити інтеграл

$$\int \frac{xdx}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}.$$

Підінтегральний дріб є правильним, розкладемо його на суму елементарних раціональних дробів:

$$\frac{x}{(x-1)^2(x^2+2x+2)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+2} =$$

$$= \frac{A(x^2+2x+2) + B(x-1)(x^2+2x+2) + (Cx+D)(x^2-2x+1)}{(x-1)^2(x^2+2x+2)} =$$

$$= \frac{x^3(B+C) + x^2(A+2B-B-2C+D) + x(2A+C-2D) + (2A-2B+D)}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}.$$

Коефіцієнти обчислюємо за методом невизначених коефіцієнтів, прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x:

$$\begin{array}{l|c} x^3 & B+C=0, \\ x^2 & A+2B-B-2C+D=0, \\ x^1 & 2A+C-2D=1, \\ x^0 & 2A-2B+D=0. \end{array} \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{1}{5}, \\ B=\dfrac{1}{25}, \\ C=-\dfrac{1}{25}, \\ D=-\dfrac{8}{25}. \end{cases}$$

Таким чином, отримаємо:

$$I=\int\left(\frac{1}{5(x-1)^2}+\frac{1}{25(x-1)}-\frac{1}{25}\cdot\frac{x+8}{x^2+2x+2}\right)dx=$$

$$=-\frac{1}{5(x-1)}+\frac{1}{25}\ln|x-1|-\frac{1}{25}\int\frac{\frac{1}{2}(2x+2)+7}{x^2+2x+2}dx=$$

$$=-\frac{1}{5(x-1)}+\frac{1}{25}\ln|x-1|-\frac{1}{50}\int\frac{d(x^2+2x+2)}{x^2+2x+2}-\frac{7}{25}\int\frac{dx}{(x+1)^2+1}=$$

$$=-\frac{1}{5(x-1)}+\frac{1}{50}\ln(x-1)^2-\frac{1}{50}\ln(x^2+2x+2)-\frac{7}{25}\operatorname{arctg}(x+1)+C=$$

$$=-\frac{1}{5(x-1)}+\frac{1}{50}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+2x+2}-\frac{7}{25}\operatorname{arctg}(x+1)+C.$$

7.9. Інтегрування тригонометричних функцій

Означення. *Раціональною функцією двох змінних* u та v називають функцію вигляду:

$$R(u,v)=\frac{P_n(u,v)}{Q_m(u,v)}.$$

Означення. Функцію $R(u,v)$ називають *парною відносно* u *та* v, якщо $R(-u,-v)=R(u,v)$; *непарною відносно* u, якщо $R(-u,v)=-R(u,v)$; *непарною відносно* v, якщо $R(u,-v)=-R(u,v)$; *непарною відносно* u *та* v, якщо $R(-u,-v)=-R(u,v)$.

Розглянемо інтеграл наступного вигляду:

$$\int R(\sin x,\cos x)dx,$$

де $R(u,v)$ – раціональна функція змінних u та v, який завжди можна звести до обчислення інтеграла від раціональної функції за допомогою *універсальної тригонометричної підстановки*.

Теорема. Інтеграл $\int R(\sin x,\cos x)dx$ за допомогою підстановки $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $x\in(-\pi;\pi)$ зводиться до інтеграла від раціональної функції однієї змінної t:

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2}{1+t^2}dt.$$

Теорема. Нехай функція $R(\sin x,\cos x)$ – парна відносно $\sin x$ та $\cos x$: $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$. Тоді інтеграл $\int R(\sin x,\cos x)dx$ за

допомогою підстановки $t = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ зводиться до інтеграла від раціональної функції однієї змінної t.

Теорема. Нехай функція $R(\sin x, \cos x)$ – непарна відносно $\sin x$: $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$. Тоді інтеграл $\int R(\sin x, \cos x)dx$ за допомогою підстановки $t = \cos x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ зводиться до інтеграла від раціональної функції однієї змінної t.

Теорема. Нехай функція $R(\sin x, \cos x)$ – непарна відносно $\cos x$: $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$. Тоді інтеграл $\int R(\sin x, \cos x)dx$ за допомогою підстановки $t = \sin x$, $x \in (0; \pi)$ зводиться до інтеграла від раціональної функції однієї змінної t.

Теорема. Інтеграл $\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)dx$ за допомогою підстановки $t = \operatorname{th}\frac{x}{2}$ зводиться до інтеграла від раціональної функції однієї змінної t, причому:

$$\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1-t^2}, \frac{1+t^2}{1-t^2}\right) \cdot \frac{2}{1-t^2}\,dt.$$

7.10. Інтегрування деяких ірраціональних функцій

Означення. *Дробово-лінійною ірраціональністю* називають функцію вигляду $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, де $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $ad - bc \neq 0$.

Інтеграл $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ зводиться до інтеграла від раціональної функції за допомогою підстановки $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.

Теорема (*Ейлера*). Інтеграл $\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)dx$ виражається через інтеграл від раціональної функції підстановками Ейлера:

1) $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm x\sqrt{a}$, якщо $a > 0$ (перша підстановка Ейлера);
2) $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c}$, якщо $c > 0$ (друга підстановка Ейлера);
3) $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_1)$, якщо $b^2 - 4ac > 0$ (третя підстановка Ейлера), де x_1 – один із коренів квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$.

Розглянемо інтеграл наступного вигляду:

$$\int x^m (ax^n + b)^p dx,$$

де a, b – дійсні числа, m, n, p – раціональні числа, при цьому $a \neq 0$, $b \neq 0$, $n \neq 0$, $p \neq 0$. Інтеграл такого вигляду називають *інтегралом від диференціального бінома*.

Теорема (*Чебишева*). Інтеграл $\int x^m (ax^n + b)^p dx$ виражається через інтеграл від раціональної функції підстановками Чебишева:

1) якщо p – ціле число, то виконується підстановка $x = t^q$, де q – спільний знаменник дробів m і n;

2) якщо $\frac{m+1}{n}$ – ціле число, то виконується підстановка $ax^n + b = t^s$, де s – знаменник дробу p;
3) якщо $\frac{m+1}{n} + p$ – ціле число, то виконується підстановка $a + bx^{-n} = t^s$, де s – знаменник дробу p.

Приклад. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}}$.

$$\int \frac{dx}{x^3 \sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}} = \int x^{-3}(x^{-1}+1)^{-\frac{1}{5}} dx =$$

$$= \left\| x^{-1} + 1 = t^5, x = \frac{1}{t^5 - 1} \Rightarrow dx = \frac{-5t^4}{(t^5-1)^2} dt \right\| =$$

$$= \int \left(\frac{1}{t^5-1}\right)^{-3} (t^5 - 1 + 1)^{-\frac{1}{5}} \frac{-5t^4}{(t^5-1)^2} dt = -5 \int t^3 (t^5 - 1) dt =$$

$$= -5 \int (t^8 - t^3) dt = -5 \left(\frac{t^9}{9} - \frac{t^4}{4}\right) + C = \frac{5}{4} t^4 - \frac{5}{9} t^9 + C = \left\| t = \sqrt[5]{1+\frac{1}{x}} \right\| =$$

$$= \frac{5}{4} \sqrt[5]{\left(1+\frac{1}{x}\right)^4} - \frac{5}{9} \sqrt[5]{\left(1+\frac{1}{x}\right)^9} + C.$$

Питання та завдання для самоконтролю до теми 7

1. Дайте означення первісною для функції $f(x)$ на проміжку $(a; b)$.
2. Сформулюйте достатню умову існування невизначеного інтеграла.
3. Перерахуйте властивості невизначеного інтеграла.
4. Наведіть приклади інтегралів, які не виражаються через елементарні функції.
5. Які методи інтегрування ви знаєте? Наведіть приклади.
6. Наведіть універсальну тригонометричну підстановку для знаходження невизначеного інтеграла.
7. Наведіть підстановки Ейлера для знаходження невизначеного інтеграла.
8. Наведіть підстановки Чебишева для знаходження невизначеного інтеграла.
9. Знайдіть інтеграли:

$$1) \int \frac{(x+1)^3}{\sqrt{x}} dx;\ 2) \int \frac{\sqrt[4]{\operatorname{tg} x}}{\sin^2 x} dx;\ 3) \int e^{-x^4} x^3 dx;$$

$$4) \int x^3 \operatorname{arctg} x\, dx;\ 5) \int \frac{x+1}{2x - x^2} dx;\ 6) \int \frac{x^2 - 5}{(x^2 - 4x + 5)(x^2 + 9)} dx;$$

$$7) \int \frac{1}{(x-2)^2 (x^2 - 2x + 2)^2} dx;\ 8) \int e^{4x} \cos 4x\, dx;\ 9) \int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 - 9}} dx;$$

10) $\int \frac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx$; 11) $\int x^{-\frac{2}{3}}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{-3}dx$; 12) $\int \frac{3\,\mathrm{ch}\,x}{2\,\mathrm{sh}\,x+3\,\mathrm{ch}\,x}dx$;

13) $\int \frac{1}{3-4\sin 2x+2\cos^2 x}dx$; 14) $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[5]{\sin^3 x}}dx$; 15) $\int \frac{\ln 2x}{x\ln 4x}dx$.

8. Визначений інтеграл Рімана

8.1. Площа криволінійної трапеції

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на відрізку $[a; b]$.

Означення. *Криволінійною трапецією* називається плоска фігура, яка обмежена невід'ємною функцією $y = f(x)$, відрізками прямих $x = a$, $x = b$ та $y = 0$:

$$D = \{(x; y): a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\}.$$

Розіб'ємо відрізок $[a; b]$ на n частин точками $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Множина точок $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ називається *розбиттям* відрізку інтегрування $[a; b]$ і позначається $R = \{x_i\}_{i=0}^{n}$. На кожному відрізку $[x_{i-1}; x_i]$ оберемо довільним чином точку ξ_i, $i = \overline{1, n}$ і побудуємо вертикальні прямокутники з основами на відрізках розбиття $[x_{i-1}; x_i]$ і висотою $f(\xi_i)$, $i = \overline{1, n}$ (Рис. 2). Об'єднання таких прямокутників утворює *ступінчасту фігуру* (див. рис. 9) .

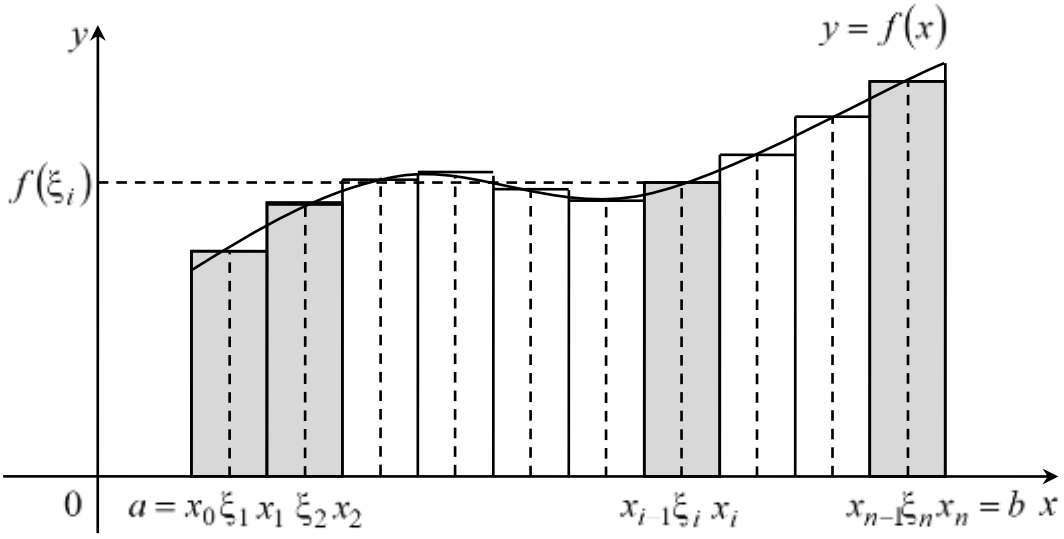


Рисунок 9 – Ступінчаста фігура

Означення. *Інтегральною сумою Рімана* для функції $y = f(x)$ на відрізку $[a; b]$, яка відповідає розбиттю $R = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ та вибору проміжних точок ξ_i, називають суму:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sigma_f([a; b], x_i, \xi_i),$$

де $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Позначимо через d довжину найбільшого елементарного відрізка: $d = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i$.

Означення. Величину $d = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i$ називають *діаметром розбиття*.

Значення $f(\xi_i)\Delta x_i$ відповідає площі прямокутника, що є складовою ступінчастої фігури. Інтегральна сума дорівнює площі ступінчастої фігури, і її природно вважати наближеним значенням площі криволінійної трапеції.

Означення. Число I називають *границею інтегральних сум* $\sigma_f([a;b],x_i,\xi_i)$ при $d\to 0$ і позначають

$$I=\lim_{d\to 0}\sigma_f([a;b],x_i,\xi_i),$$

якщо $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\forall R=\{x_i\}_{i=0}^n,\forall\{\xi_i\}: d<\delta\Rightarrow\left|I-\sigma_f([a;b],x_i,\xi_i)\right|<\varepsilon.$ Якщо таке число I існує, то функція $y=f(x)$ називається *інтегровною за Ріманом на відрізку* $[a;b]$, а значення границі – *визначеним інтегралом Рімана*.

Позначається визначений інтеграл Рімана:

$$I=\int_a^b f(x)dx,$$

число a називають *нижньою межею інтегрування*, а число b – *верхньою межею інтегрування*.

Отже, задача обчислення площі криволінійної трапеції приводить до поняття визначеного інтеграла, а для обчислення цієї площі маємо формулу:

$$S=\int_a^b f(x)dx.$$

У цьому полягає геометричний зміст визначеного інтеграла.

8.2. Верхня та нижня інтегральні суми Дарбу.

Нехай функція $y=f(x)$ визначена на відрізку $[a;b]$, обмежена на цьому відрізку і нехай задано розбиття $R=\{x_i\}_{i=0}^n$ відрізку $[a;b]$:

$$R=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_n=b\},$$

$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$. Введемо позначення:

$$M_i=\sup_{[x_{i-1};x_i]}f(x),\ \ m_i=\inf_{[x_{i-1};x_i]}f(x).$$

Означення. Суми вигляду

$$\overline{S}=\overline{S}_f([a;b],R)=\sum_{i=1}^n M_i\Delta x_i,$$

$$\underline{S}=\underline{S}_f([a;b],R)=\sum_{i=1}^n m_i\Delta x_i,$$

називаються відповідно *верхньою* і *нижньою інтегральними сумами Дарбу*.

Означення. Верхнім інтегралом Дарбу називається інфінум верхніх інтегральних сум за довільним розбиттям і позначають:

$$I^*=\inf_R\overline{S}_f([a;b],R).$$

Означення. Нижнім інтегралом Дарбу називається супремум нижніх інтегральних сум за довільним розбиттям і позначають:

$$I_*=\sup_R\underline{S}_f([a;b],R).$$

Теорема (*критерій Дарбу інтегровності функції за Ріманом*). Нехай дійсна функція $y=f(x)$ визначена і обмежена на відрізку $[a;b]$, I^* та I_* – верхній та нижній інтеграл Дарбу функції $y=f(x)$ на заданому відрізку. Тоді, такі три умови еквівалентні:

1) функція $y=f(x)$ інтегровна за Ріманом на відрізку $[a;b]$;

2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists R' = \{x_i'\}: \left|\overline{S}_f([a;b], R') - \underline{S}_f([a;b], R')\right| < \varepsilon$;

3) $I^* = I_* = \int_a^b f(x)dx$.

8.3. Властивості визначеного інтеграла

Нехай функція $y = f(x)$ інтегровна за Ріманом на відрізку $[a;b]$.

1) Величина визначеного інтеграла не залежить від позначення змінної інтегрування:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du.$$

2) Визначений інтеграл з однаковими межами інтегрування дорівнює нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

3) Від перестановки меж інтегрування інтеграл змінює знак на протилежний:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

3) Інтеграл від диференціалу змінної дорівнює:

$$\int_a^b dx = b - a.$$

5) Визначений інтеграл від алгебраїчної суми інтегровних функцій дорівнює алгебраїчній сумі визначених інтегралів від цих функцій:

$$\int_a^b \big(f(x) \pm \varphi(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b \varphi(x)dx.$$

6) Сталий множник можна виносити за знак визначеного інтеграла, тобто

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

7) Якщо $\exists c \in [a;b]: a < c < b$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

8) Якщо у кожній точці відрізку $[a;b]$ $f(x) \geq 0$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

9) Якщо у кожній точці відрізку $[a;b]$ $f(x) \leq \varphi(x)$, то має місце нерівність:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx.$$

10) Якщо функція $f(x)$ інтегрована на відрізку $[a;b]$, то її абсолютна величина $|f(x)|$ також інтегрована на $[a;b]$ і справедлива нерівність:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$$

11) Якщо функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a;b]$ і $\exists m, M: \forall x \in [a;b]$: $m \le f(x) \le M$, то виконується нерівність:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

12) **Теорема1** (*про середнє значення інтегралу*). Нехай функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ задовольняють наступні умови: 1) функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ інтегровні за Ріманом на відрізку $[a;b]$; 2) $\exists m, M: \forall x \in [a;b]$: $m \le f(x) \le M$, де $m = \inf\limits_{[a;b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{[a;b]} f(x)$; 3) функція $\varphi(x)$ не змінює знак на відрізку $[a;b]$: $\varphi(x) \ge 0$ $(\varphi(x) \le 0)$ при $x \in [a;b]$. Тоді $\exists \mu \in [m;M]$:

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \mu \int_a^b \varphi(x)dx.$$

Наслідок. Якщо функція $f(x)$ неперервна відрізку $[a;b]$, а функція $\varphi(x)$ інтегровна за Ріманом на відрізку $[a;b]$ і не змінює знак, то

$$\exists c \in [a;b]: \int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(c)\int_a^b \varphi(x)dx.$$

Якщо $\varphi(x) = 1$, то

$$\exists c \in [a;b]: \int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Означення. *Середнім значенням* інтегровної за Ріманом на відрізку $[a;b]$ функції $f(x)$ називають значення величини:

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}.$$

8.4. Основна теорема інтегрального числення

Теорема (*формула Ньютона-Лейбніца*). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, а $F(x)$ – будь-яка її первісна на $[a;b]$, то має місце формула:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$$

Приклад. Обчислити інтеграл $\int_1^2 (3x^2 - 5x + 3)dx$.

$$\int_1^2 (3x^2 - 5x + 3)dx = \left(x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 3x\right)\Big|_1^2 = (8 - 10 + 6) - \left(1 - \frac{5}{2} + 3\right) = \frac{5}{2}.$$

Питання та завдання для самоконтролю до теми 8

1. Сформулюйте, що називають криволінійною трапецією.
2. Дайте означення інтегральної суми Рімана.
3. Сформулюйте означення визначеного інтеграла Рімана.
4. Сформулюйте означення верхньої і нижньої інтегральної суми Дарбу.

5. Для функції $f(x) = (x-1)(x+2)x$ знайдіть верхню і нижню інтегральну суму Дарбу на відрізку $[-1; 0]$.
6. Перерахуйте властивості визначеного інтеграла.
7. Сформулюйте основну теорему інтегрального числення.
8. Знайдіть значення інтеграла:

$$1) \int_0^{\pi} (8x^2 + 16x + 17)\cos 4x\, dx; \quad 2) \int_2^9 \frac{x}{\sqrt[3]{x-1}}\, dx;$$

$$3) \int_{\arcsin\frac{1}{\sqrt{37}}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{6\operatorname{tg} x}{3\sin 2x + 5\cos^2 x}\, dx; \quad 4) \int_0^{2\pi} \sin^4 3x \cos^4 3x\, dx;$$

$$5) \int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\, dx; \quad 6) \int_0^3 \frac{1}{(9+x^2)^{\frac{3}{2}}}\, dx; \quad 7) \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{(4-x^2)^3}}\, dx;$$

$$8) \int_{\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}}^{0} \frac{3\operatorname{tg}^2 x - 50}{2\operatorname{tg} x + 7}\, dx; \quad 9) \int_{-3}^{0} (x^2 + 6x + 9)\sin 2x\, dx.$$

9. Застосування визначеного інтегралу

9.1. Довжина дуги кривої

Нехай задано довільне розбиття $T = \{t_i\}_{i=0}^{n}$, $t \in [\alpha; \beta]$:

$$T = \{\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_{i-1} < t_i < \cdots < t_n = \beta\}.$$

Позначимо через M_0, M_1, …, M_n відповідні точки кривої L і задамо відношення упорядкування на параметризованій кривій L: т. M_1 передує т. M_2 (позначення: $M_1 \prec M_2$) на простій кривій L, якщо відповідні значення параметрів t_1 і t_2, що задають точки M_1 і M_2 пов'язані нерівністю $t_1 < t_2$. Якщо на простій кривій L задано відношення упорядкування, то кажуть, що на цій кривій задано *напрямок обходу*. Тоді $M_0\big(\varphi(t_0); \psi(t_0)\big)$, $M_1\big(\varphi(t_1); \psi(t_1)\big)$, …,$M_n\big(\varphi(t_n); \psi(t_n)\big)$.

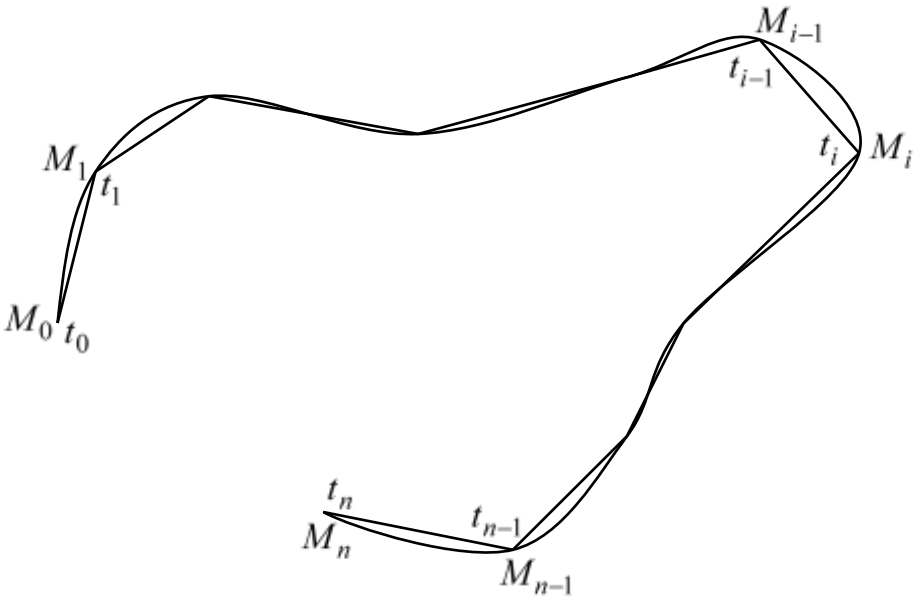


Рисунок 10 – Ламана $M_0M_1M_2 \ldots M_n$

Означення. $M_0M_1M_2 \ldots M_n$ будемо називати *ламаною*, яка вписана у криву L і яка відповідає розбиттю T відрізка $[\alpha; \beta]$ (див. рис. 10).

Довжина ланцюга ламаної обчислюється за формулою:

$$|L_i| = M_{i-1}M_i = \sqrt{\big(\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})\big)^2 + \big(\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})\big)^2}.$$

Тоді довжина всієї ламаної може бути записана:

$$|L_n| = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\big(\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})\big)^2 + \big(\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})\big)^2}.$$

Означення. Крива L називається *спрямлюваною*, якщо довжини усіх ламаних, вписаних у криву, які відповідають різноманітним розбиттям T відрізка $[\alpha; \beta]$, утворюють множину, яка є обмеженою зверху. Значення величини

$$L = \sup \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\big(\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})\big)^2 + \big(\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})\big)^2}$$

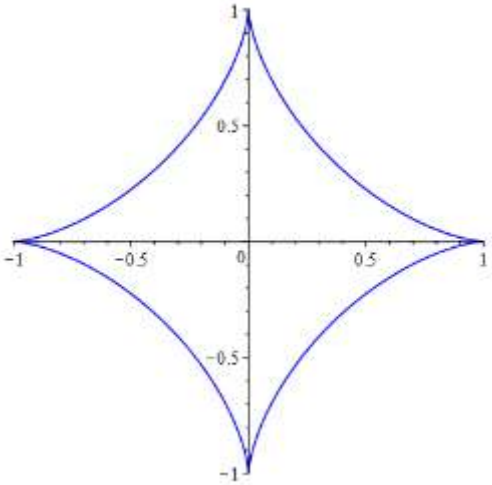
називається *довжиною кривої*.

Означення. Просту криву, параметризовану рівняннями $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} t \in [\alpha; \beta]$ називають *простою гладкою кривою*, якщо функції $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ – неперервно диференційовні на відрізку $[\alpha; \beta]$.

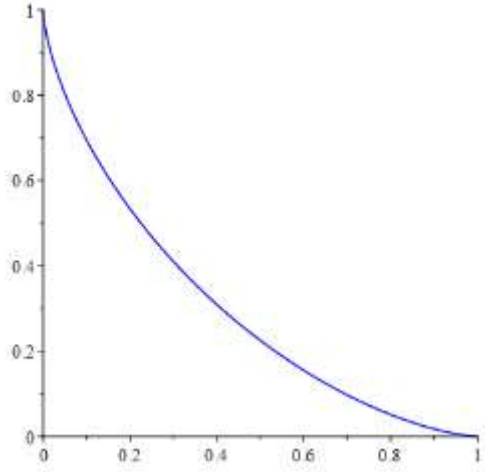
Теорема (*критерій спрямлюваності кривої*). Проста гладка крива $L: \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} t \in [\alpha; \beta]$ є спрямлюваною, а її довжина $|L|$ обчислюється за формулою:

$$|L| = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2}\, dt.$$

Приклад. Знайти довжину дуги L кривої, заданої у параметричній формі:
$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$, $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $a > 0$ (*астроїда* див. рис. 11).



а) $a = 1$, $t \in [0; 2\pi]$.



б) $a = 1$, $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Рисунок 11 – Астроїда

$$|L| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(3a\cos^2 t \cdot (-\sin t)\right)^2 + (3a\sin^2 t \cdot \cos t)^2}\, dt =$$

$$= 3a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2 t \cos^2 t\, (\cos^2 t + \sin^2 t)}\, dt =$$

$$= 3a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t\, dt = \frac{3a}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\, dt =$$

$$= \frac{3a}{2} \cdot \frac{1}{2}(-\cos 2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{3a}{4}(-1 - 1) = \frac{3a}{2}.$$

Якщо неперервна крива $y = f(x)$ задана явно на відрізку $[a; b]$ і має неперервну похідну, то крива є спрямлюваною, а її довжина визначається за формулою:

$$|L| = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx,$$

так як $\begin{cases} x = x \\ y = f(x) \end{cases}$ – параметризація кривої $y = f(x)$, $x \in [a; b]$.

Нехай $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha; \beta]$, функція $\rho(\varphi)$ – неперервно диференційована на відрізку $[\alpha; \beta]$. Тоді, у полярній системі координат довжина дуги визначається за формулою:

$$|L| = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\rho(\varphi)\right)^2 + \left(\rho'(\varphi)\right)^2} d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi.$$

9.2. Обчислення площ криволінійної трапеції та криволінійного сектора

1) Нехай функція $y = f(x)$ неперервна і невід'ємна на відрізку $[a; b]$. Тоді площа криволінійної трапеції (див. рис. 12) дорівнює:

$$S = \int_{a}^{b} f(x)dx.$$

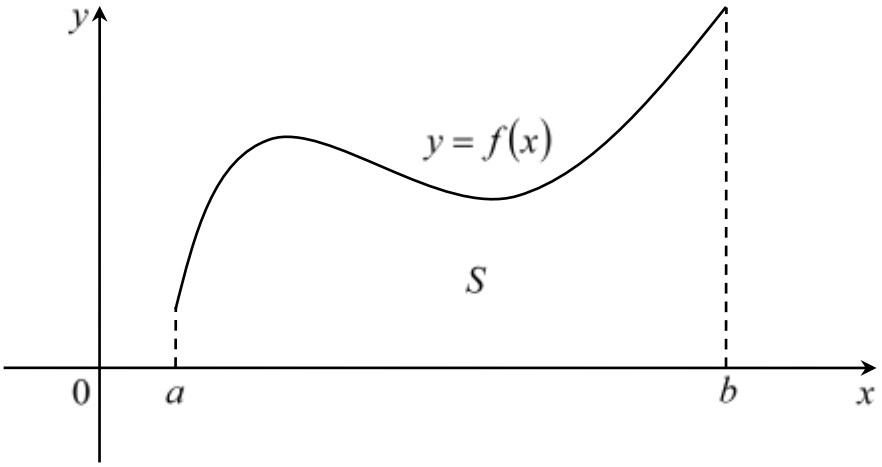


Рисунок 12 – Криволінійна трапеція, обмеженої прямими $x = a$, $x = b$, віссю OX та кривою $y = f(x)$

2) Нехай $f(x) < 0$ на відрізку $[a; b]$. Тоді функція $y = f(x)$ розташована нижче осі OX і $\int_a^b f(x)dx < 0$. У цьому випадку площа криволінійної трапеції дорівнює:

$$S = -\int_{a}^{b} f(x)dx,$$

або

$$S = \int_{a}^{b} |f(x)|dx.$$

3) Нехай функція $y = f(x)$ перетинає ось OX на відрізку $[a; b]$ у точках x_1, x_2 (тобто змінює знак), то потрібно область, яку вона обмежує розбити на ділянки постійності знаку функції і просумувати їх площі (див. рис. 13).

$$S = \int_{a}^{b} |f(x)|dx = \int_{a}^{x_1} f(x)dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{b} f(x)dx.$$

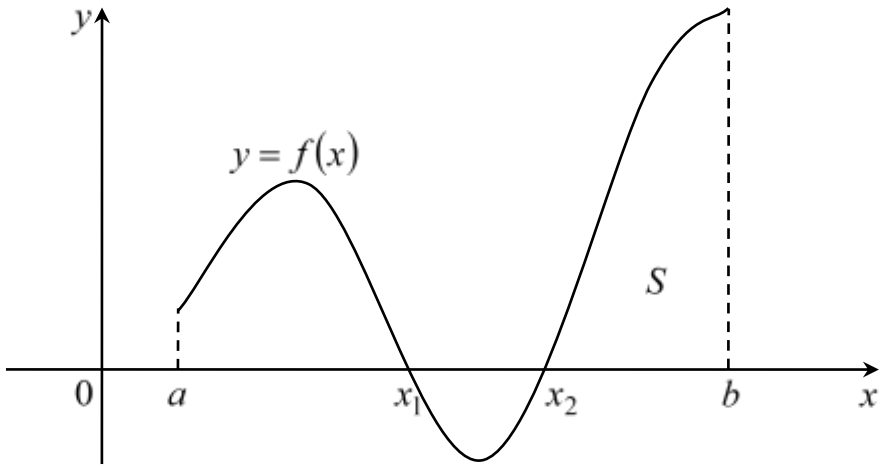


Рисунок 13 – Криволінійна трапеція, яка розбита на ділянки постійності знаку функції

4) Нехай функції $y = f(x)$ та $y = g(x)$ неперервні і $f(x) > g(x) > 0$ на відрізку $[a; b]$. Площа плоскої фігури D, що обмежена функціями $y = f(x)$ та $y = g(x)$, відрізками прямих $x = a$, $x = b$, обчислюється за формулою:

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$$

5) Нехай криву задано у параметричній формі рівняннями $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} t \in [t_1; t_2]$, де функції $\varphi(t)$ та $\psi(t)$ неперервні, причому $\varphi(t)$ має неперервну похідну $\varphi'(t)$ на відрізку $[t_1; t_2]$ та $\varphi(t_1) = a$, $\varphi(t_2) = b$. Для обчислення площі, достатньо в інтегралі $S = \int_a^b f(x)dx$ зробити заміну змінних $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Тоді, площа криволінійної трапеції, обмеженою кривою, заданою параметричними рівняннями дорівнює:

$$S = \left| \int_{t_1}^{t_2} \psi(t)d\varphi(t) \right| = \left| \int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\varphi'(t)dt \right|,$$

або

$$S = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} [\varphi(t)\psi'(t) - \varphi'(t)\psi(t)]dt.$$

6) Нехай функція $x = g(y)$ неперервна на відрізку $[c; d]$ осі OY. Тоді площа криволінійної трапеції, обмеженої прямими $y = c$, $y = d$, віссю OY та кривою $x = g(y)$ (див. рис. 14) дорівнює:

$$S = \int_c^d g(y)dy.$$

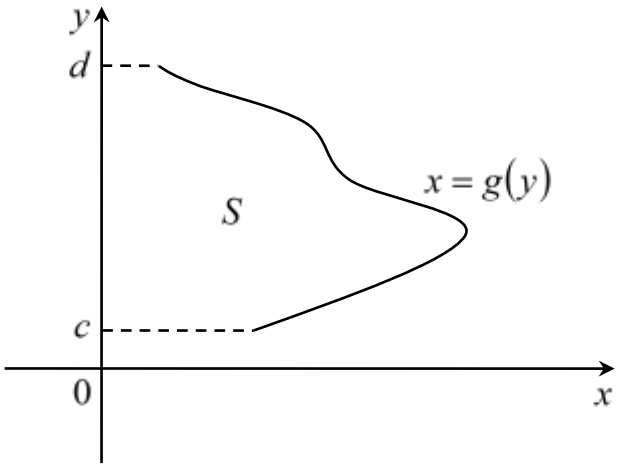


Рисунок 14 – Криволінійна трапеція, обмеженої прямими $y = c$, $y = d$, віссю OY та кривою $x = g(y)$

7) Нехай криву задано у полярній системі координат рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, де функція $\rho(\varphi)$ неперервна і невід'ємна на відрізку $[\alpha; \beta]$. Плоску фігуру, обмежену функцією $\rho(\varphi)$ і двома променями, що утворюють з полярною віссю кути α та β, називають *криволінійним сектором* (див. рис. 15):

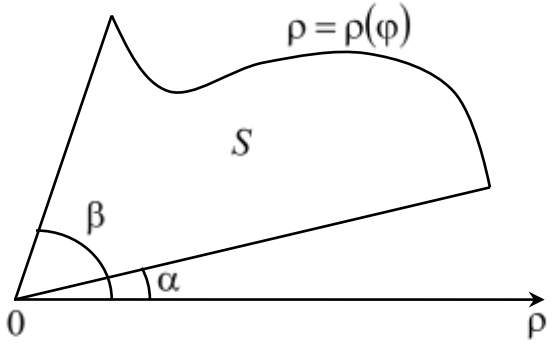


Рисунок 15 – Криволінійний сектор, обмежений функцією $\rho(\varphi)$ і двома променями, що утворюють з полярною віссю кути α та β

Площа криволінійного сектору у полярній системі координат дорівнює:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi.$$

9.3. Об'єм тіл обертання

Розглянемо окремий випадок задачі на обчислення об'єму тіла. Нехай задано тіло Ω (див. рис. 16), у якого площа довільного перерізу σ, перпендикулярного до осі OX, є відомою неперервною функцією x:

$$\sigma = S(x), \quad a \le x \le b.$$

Абсциси $x = a$ і $x = b$ відповідають крайнім точкам тіла Ω. Припустимо, що довільна пара перерізів площинами (проходять через точки з абсцисами $x =$

x_{k-1} і $x = x_k$), перпендикулярними до осі OX, проектується на площину, де отримуються фігури, одна з яких міститься в іншій.

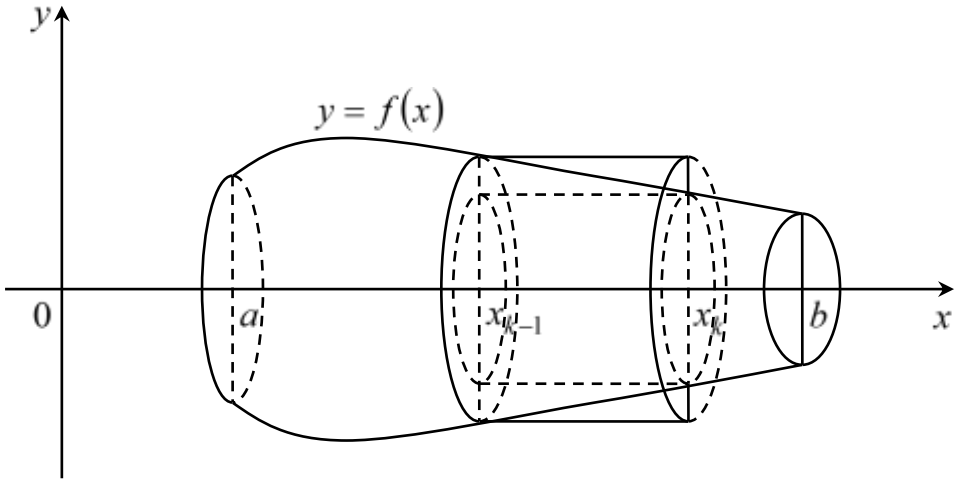


Рисунок 16 – Тіло Ω

Твердження. При вказаних вище умовах тіло Ω є кубовним, а його об'єм визначається формулою:

$$V = \int_a^b S(x)dx.$$

Теорема. Якщо тіло Ω утворене обертанням криволінійної трапеції $D = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b \wedge 0 \le y \le f(x)\}$ навколо осі OX, де функція $y = f(x)$ – неперервна на відрізку $[a;b]$, то це тіло є кубовним, а його об'єм можна визначити за формулою:

$$V_{OX} = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

Об'єм тіла, утвореного від обертання криволінійної трапеції $D = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b \wedge 0 \le y \le f(x)\}$ навколо осі OY, обчислюється за формулою:

$$V_{OY} = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x)dx.$$

Об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі OX плоскої фігури D, що обмежена на декартовій площині графіками неперервних на відрізку $[a;b]$ функції $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$, де $0 \le f_1(x) \le f_2(x)$, відрізками прямих $x = a$ і $x = b$, обчислюється за формулою:

$$V_{OX} = \pi \int_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)]dx.$$

Якщо криволінійний сектор, обмежений кривою $\rho = \rho(\varphi)$ і променями $\varphi_1 = \alpha$ та $\varphi_2 = \beta$ $(0 \le \alpha \le \beta \le 2\pi)$, обертається навколо полярної осі, то об'єм тіла обертання обчислюється за формулою:

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_\alpha^\beta \rho^3(\varphi) \cdot \sin\varphi \, d\varphi.$$

9.4. Обчислення площі поверхні обертання

Нехай крива, задана неперервною функцією $y = f(x) \geq 0,\ x \in [a; b]$, обертається навколо осі OX. Для кривої, заданої у декартовій системі координат, площа поверхні дорівнює:

$$P_{OX} = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}dx.$$

Для кривої, заданої параметрично $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} t \in [\alpha; \beta]$, площа поверхні дорівнює:

$$P_{OX} = 2\pi \int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2}dt.$$

Для кривої, заданої у полярній системі координат $\rho = \rho(\varphi),\ \varphi \in [\alpha; \beta]$, площа поверхні дорівнює:

$$P_{OX} = 2\pi \int_\alpha^\beta \rho(\varphi) \cdot \sin\varphi \sqrt{\rho^2(\varphi) + \left(\rho'(\varphi)\right)^2}d\varphi.$$

Питання та завдання для самоконтролю до теми 9

1. Сформулюйте означення ламаної.
2. Яка крива називається спрямлюваною?
3. Наведіть формулу для знаходження довжини дуги кривої.
4. Обчисліть довжину дуги кривої:

$$1)\ \begin{cases} x = \frac{5}{3}\cos^3 t, \\ y = \frac{5}{2}\sin^3 t, \end{cases} t \in [0; 2\pi];\ \ 2)\ \rho = \frac{2}{\cos^4\frac{\varphi}{4}};\ \ 3)\ \rho = 5\sin^4\frac{\varphi}{4}.$$

5. Опишіть можливі випадки розташування криволінійної трапеції та криволінійного сектора у декартовій та полярній системі координат і вкажіть формулу для обчислення площі.
6. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій:

$$1)\ y = \operatorname{arctg}\sqrt{x}, y + x^2 = 0, x = 1;$$
$$2)\ = 4^{-x}, y = -\log_4 x, y = 0, x = 0;$$
$$3)\ y = x^2, y = x^2 + x - 1, y = \frac{5}{2}\sqrt{2x}, y \leq x^2.$$

7. За якою формулою можна знайти об'єм тіла обертання, якщо тіло Ω утворене обертанням криволінійної трапеції D навколо осі OX.
8. За якою формулою можна знайти об'єм тіла обертання, якщо тіло Ω утворене обертанням криволінійної трапеції D навколо осі OY.
9. Наведіть формули для знаходження площі поверхні обертання?

10. Числові ряди

10.1. Знакопостійні числові ряди

Розглянемо числову послідовність $\{a_n\} = a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$.

Означення. Суму $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ елементів послідовності $\{a_n\}$ називають *числовим рядом* і позначають символом $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, при цьому числа $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ називаються *членами ряду*, а a_n *– загальним членом* ряду.

Наприклад, якщо $a_n = \frac{1}{n}$, то маємо ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$, який називається гармонічним рядом.

Означення. Суму перших n членів ряду називають *n-ою частковою сумою* ряду. Очевидно, що

$$S_1 = a_1,\ \ S_2 = a_1 + a_2, \dots,\ \ S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Часткові суми ряду утворюють послідовність $\{S_n\}$, яка при $n \to \infty$ може мати або не мати границю.

Означення 3. Якщо існує скінченна границя послідовності часткових сум $\{S_n\}$, тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називають *збіжним*, при цьому число $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ називається *сумою* ряду. Позначається:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

Якщо послідовність часткових сум не має скінченної границі (не існує або нескінченна), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називають *розбіжним*.

Приклад. Дослідити на збіжність наступні числові ряди:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)};\ \ 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

1) Запишемо n-й член ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ у вигляді: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Знайдемо n-у часткову суму даного ряду:

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$, то даний ряд збігається, а його сума

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

2) Відомо, що $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Логарифмуючи цю нерівність за основою e, отримаємо:

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \ln e \Rightarrow n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1,$$

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}\Rightarrow\frac{1}{n}>\ln\frac{n+1}{n}\Rightarrow\frac{1}{n}>\ln(n+1)-\ln n\,,\forall n\in\mathbb{N}.$$

Таким чином:

$$1>\ln 2-\ln 1\,,\frac{1}{2}>\ln 3-\ln 2\,,\frac{1}{3}>\ln 4-\ln 3\,,\ldots,\frac{1}{n}>\ln(n+1)-\ln n\,,\ldots$$

Додаючи ліві і праві частини отриманих нерівностей, для часткової суми гармонічного ряду отримаємо, що $S_n>\ln(n+1)$. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}\ln(n+1)=+\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=+\infty$, тобто гармонічний ряд є розбіжним за означенням.

Властивості збіжних рядів:

1) Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ є збіжним і його сума дорівнює S, то і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}Ca_n$, де $C=\text{const}$, також є збіжним і його сума дорівнює CS.

2) Якщо ряди $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ є збіжними і їхні суми відповідно рівні S і σ, то і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ є збіжним і його сума дорівнює $S+\sigma$.

3) Збіжність і розбіжність ряду не порушиться, якщо відкинути чи додати скінченне число членів ряду.

4) При групуванні членів збіжного ряду одержимо новий теж збіжний ряд.

Теорема (*критерій Коші збіжності числового ряду*). Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ збігається тоді і лише тоді, коли:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}:\ \forall n\geq n_0,\ \forall p\in\mathbb{N}:\ \left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k\right|<\varepsilon.$$

Теорема (*необхідна умова збіжності числового ряду*). Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ є збіжним, то $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

Зауваження. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ розбігається.

10.2. Ознаки збіжності знакопостійних рядів

Означення 4. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, у якого $a_n\geq 0$ $(a_n\leq 0)$ $\forall n\in\mathbb{N}$, називають *рядом з невід'ємними* (*недодатними*) членами або *знакопостійним рядом*.

Далі будемо розглядати ряди з невід'ємними членами.

Теорема (*загальна ознака порівняння*). Нехай $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ – ряди з невід'ємними членами, тобто такі, що $a_n\geq 0$, $b_n\geq 0$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Тоді 1) якщо $a_n\leq b_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$ і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ є збіжним, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ також буде збіжним; 2) якщо $a_n\leq b_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$ і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ є розбіжним, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ також буде розбіжним.

Зауваження. Ознака порівняння залишається в силі, якщо нерівність $a_n\leq b_n$ виконується з деякого номера.

Теорема (*ознака порівняння в граничній формі*). Нехай $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ – ряди з додатними членами, тобто такі, що $a_n>0$, $b_n>0$ $\forall n\in\mathbb{N}$ і існує скінченна границя $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\text{const}\neq 0,\neq+\infty$, то ряди $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ збігаються або розбігаються одночасно.

Теорема (*ознака Даламбера*). Нехай задано ряд з додатними членами $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ $(a_n>0)$. Якщо існує границя відношення наступного члена ряду a_{n+1} до попереднього a_n при $n\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l,$$

то

1) при $l<1$ ряд збіжний;

2) при $l>1$ ряд розбіжний;

3) при $l=1$ ознака однозначної відповіді щодо збіжності чи розбіжності ряду не дає.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2022^n}{n^2}$.

$\lim_{n\to\infty}\frac{2022^{n+1}}{(n+1)^2}\cdot\frac{n^2}{2022^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2022n^2}{n^2+2n+1}=2022>1$ – ряд розбіжний.

Теорема (*радикальна ознака Коші*). Нехай задано ряд з додатними членами $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ $(a_n>0)$. Якщо існує границя кореня n-го степеню $\sqrt[n]{a_n}$ при $n\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q,$$

то

1) при $q<1$ ряд збіжний;

2) при $q>1$ ряд розбіжний;

3) при $q=1$ ознака однозначної відповіді щодо збіжності чи розбіжності ряду не дає.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2022n+1}{n+2}\right)^n$.

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2022n+1}{n+2}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2022n+1}{n+2}=2022>1$ – ряд розбіжний.

Теорема (*інтегральна ознака Маклорена-Коші*). Нехай задано ряд з додатними членами $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ $(a_n>0)$, причому формула загального члена $a_n=f(n)$ така, що функція $f(x)$ невід'ємна, неперервна та монотонно спадає на півінтервалі $[1;+\infty)$. Тоді невласний інтеграл $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ є збіжними або розбіжними одночасно.

Теорема (*ознака Раабе*). Нехай задано ряд з додатними членами $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ $(a_n>0)$. Якщо існує границя виразу $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$ при $n\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=r,$$

то

1) при $r<1$ ряд розбіжний;

2) при $r>1$ ряд збіжний;

3) при $r=1$ ознака однозначної відповіді щодо збіжності чи розбіжності ряду не дає.

10.3. Знакозмінні числові ряди

Означення. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, який містить нескінченну кількість як додатних так і від'ємних членів ряду, називається *знакозмінним*.

Означення. Знакозмінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ називається *знакопочережним*, якщо його члени по черзі змінюють знаки:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1}a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n, \;\; a_n > 0.$$

Означення. Знакозмінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається *абсолютно збіжним*, якщо збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ із абсолютних величин цього ряду.

Означення. Знакозмінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається *умовно збіжним*, якщо він сам збіжний, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ – розбіжний.

10.4. Ознаки збіжності знакозмінних рядів

Теорема (*ознака Лейбніца*). Знакопочережний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n, \;\; a_n > 0$$

збігається якщо:

1) члени ряду утворюють незростаючу послідовність:

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_{n-1} \geq a_n \geq \cdots;$$

2) границя загального члену ряду при $n \to \infty$ дорівнює нулю, тобто

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

При цьому сума S ряду $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ задовольняє нерівності:

$$0 < S \leq a_1.$$

(сума додатна і не перевищує значення першого члену ряду).

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

За ознакою Лейбніца ряд збігається, так як:

$$1)\ 1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \cdots > \frac{1}{n-1} > \frac{1}{n} > \cdots;\ 2)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

Теорема (*ознака Діріхле*). Нехай виконуються такі умови:

1) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ можна записати у вигляді $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\beta_n$;

2) послідовність $B_n = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \cdots + \beta_n$ обмежена, тобто

$$\exists M > 0:\ |B_n| \leq M\ \forall n \in \mathbb{N};$$

3) послідовність $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ – монотонно спадна: $\alpha_n \geq \alpha_{n+1}, \forall n \in N, \alpha_n > 0$ і $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0$.

Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\beta_n$ є збіжним.

Теорема 10 (*ознака Абеля*). Нехай виконуються такі умови:

1) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ можна записати у вигляді $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\beta_n$;

2) послідовність $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонна і обмежена: $\alpha_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n \downarrow 0$ і

$$\exists k > 0:\ \alpha_n < k\ \forall n \in \mathbb{N};$$

3) числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n$ є збіжним.

Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\beta_n$ є збіжним.

Питання та завдання для самоконтролю до теми 10

1. Надайте означення числового ряду.
2. Сформулюйте означення n-ої часткової суми ряду.
3. Надайте означення збіжного і розбіжного ряду.

4. Користуючись означенням, знайдіть суму числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Обчислити часткову суму S_n для $n = 10,\ 100$. У кожному випадку знайдіть абсолютну похибку Δ_n та відносну похибку δ_n наближеної рівності $S \approx S_n$:

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{4n^2+4n-15};\ 2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{9n^2+12n-5}\ \ 3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{9n^2+6n-8};$$

$$4)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{9n^2+21n-8};\ \ 5)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{14}{49n^2-28n-45};\ \ 6)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{4n^2+8n+3}.$$

5. Наведіть властивості збіжних рядів.
6. Сформулюйте необхідну умову збіжності числового ряду.
7. Перевірте виконання необхідної умови збіжності. Зробіть висновки:

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sqrt{9n^2+5}}{3n^2-1};\ \ 2)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{3n+2}\right)^n;\ \ 3)\sum_{n=1}^{\infty} n\ln\left(\frac{5n}{5n+1}\right).$$

8. Наведіть ознаки збіжності знакопостійних рядів.
9. Дослідіть числові ряди на збіжність:

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^n(n-1)!};\ \ 2)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+2}{3n+1}\right)^n(n+1)^3;\ \ 3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)\ln^2(2n+1)};$$

$$4)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^3+2}}{n^2\sin^2 n};\ \ 5)\sum_{n=1}^{\infty} n^4\,\mathrm{arctg}^{2n}\left(\frac{\pi}{4n}\right);\ \ 6)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^{n-1}+n-1}.$$

10. Який ряд називається знакозмінним, а який знакопочережним. Наведіть приклади.
11. Дослідіть числові ряди на абсолютну та умовну збіжність:

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{\sqrt{n^3}};\ \ 2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln(2n)};\ \ 3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^2};$$

$$4)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin\frac{\pi}{2\sqrt{n}}}{\sqrt{3n+1}};\ \ 5)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot\sqrt[4]{n+4}};\ \ 6)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+3}{2n-3}\right)^n.$$

12. Наведіть ознаки збіжності знакозмінних рядів.
13. Дослідь на збіжність нескінченний добуток:

$$1)\prod_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{n};\ \ 2)\prod_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right);\ \ 3)\prod_{n=1}^{\infty}\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right);$$

$$4)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right);\ \ 5)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{8}{n}\right)e^{-\frac{8}{n}};\ \ 6)\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2+2n}.$$

11. Функціональні послідовності і функціональні ряди

11.1. Основні поняття

Означення. Якщо у відповідність до кожного натурального $n \in \mathbb{N}$ ставиться деяка функція $f_n(x)$, яка визначена на множині $\{x\}$, то множину занумерованих функцій $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ називають *функціональною послідовністю*.

Множину $\{x\}$ на якій визначена кожна із функції $f_n(x)$ називають *множиною визначення функціональною послідовності.*

Нехай функціональна послідовність $\{u_n(x)\}$ задана на $\{x\}$.

Означення. Формально утворену суму вигляду $u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ – називають *функціональним рядом,* а множину $\{x\}$ – множиною визначення функціонального ряду.

$u_n(x)$ – загальний член функціонального ряду, $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ – часткова сума функціонального ряду.

Означення. Функціональну послідовність (ряд) називають *збіжною* (*збіжним*) у точці $x_0 \in \{x\}$, якщо збігається числова послідовність $\{f_n(x_0)\}$ (числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$).

Означення. Множину точок X, в яких функціональна послідовність (ряд) збігається, називають *областю збіжності послідовності (ряду).*

Зрозуміло, що область збіжності X є підмножиною множини визначення $\{x\}$ функціональної послідовності (ряду), тобто $X \subseteq \{x\}$.

Означення. Якщо $x_0 \in X$, де X – область збіжності послідовності (ряду), то їй можна поставити у відповідність єдине значення границі послідовності $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)$ (суми ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$). Таким чином утворюється функція, визначена на області збіжності X. Ця функція називається *граничною функцією (сумою)* відповідної послідовності (ряду). А саме:

$$f(x) \overset{X}{=} \lim_{n\to\infty} f_n(x) \left(S(x) \overset{X}{=} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right).$$

Щоб підкреслити збіжність функціональної послідовності (ряду) у кожній окремій точці із множини визначення X, цю функцію називають *поточковою границею функціональною послідовності (поточковою сумою функціонального ряду).* Застосовують також інше позначення:

$$f_n(x) \underset{X}{\to} f(x) \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \underset{X}{\to} S(x) \right), \ X \subseteq \{x\}.$$

Означення. Функціональну послідовність $\{f_n(x)\}$ називають *рівномірно збіжною* до функції $f(x)$ на множині $A \subseteq X$ і позначають $f_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} f(x)$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \ \ \forall n \geq n_0 \ \forall x \in A \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Теорема (*критерій Коші рівномірної збіжності*). Для того щоб $f_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} f(x)$ в області X необхідно і достатньо, щоб

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0\ \forall p \in N\ \left|f_{n+p}(x) - f_n(x)\right| < \varepsilon.$$

Теорема (*критерій рівномірної збіжності*). Для того щоб $f_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} f(x)$ в області X необхідно і достатньо, щоб $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in X} r_n(x) = 0$, де $r_n(x) = |f_n(x) - f(x)|$.

Приклад. Дослідити послідовність $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$ на рівномірну збіжність на відрізку $[0; 1]$.

Спочатку знайдемо поточкову границю:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{1+n^2x^2} = 0\ \forall x \in [0; 1].$$

Знайдемо

$$r_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{x}{1+n^2x^2} - 0\right| = \left|\frac{x}{1+n^2x^2}\right|.$$

Знайдемо $\sup\limits_{x\in[0;1]} r_n(x)$:

$$r_n'(x) = \frac{1+n^2x^2 - x\cdot 2n^2x}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2};$$

$$\frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2} = 0 \ \Leftrightarrow\ x = \pm\frac{1}{n};\ -\frac{1}{n} \notin [0; 1];$$

$$r_n\left(\frac{1}{n}\right) = \left|\frac{\frac{1}{n}}{1+n^2\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2}\right| = \left|\frac{1}{2n}\right| = \frac{1}{2n};$$

$$r_n(0) = \left|\frac{0}{1+n^2\cdot(0)^2}\right| = 0;\ r_n(1) = \left|\frac{1}{1+n^2\cdot(1)^2}\right| = \frac{1}{1+n^2}.$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n} = 0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+n^2} = 0.$$

За критерієм рівномірної збіжності послідовність $f_n(x) \underset{[0;1]}{\rightrightarrows} f(x)$.

11.2. Рівномірна збіжність функціональних рядів

Означення. Функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ називають *абсолютно збіжним* на множині X, якщо збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$, $\forall x \in X$.

При дослідженні на абсолютну збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ застосовують, вважаючи x фіксованим, відомі ознаки збіжності для знакопостійних числових рядів.

Означення. Функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ називають *рівномірно збіжним* до $S(x)$, якщо функціональна послідовність його часткових сум рівномірно збігається на X, тобто $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} S(x) \ \Leftrightarrow S_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} S(x)$.

Теорема (*критерій Коші рівномірної збіжності функціонального ряду*). Для того щоб $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} S(x)$ в області X необхідно і достатньо, щоб

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0\ \forall p \in \mathbb{N}: \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \varepsilon.$$

Теорема (*критерій рівномірної збіжності функціонального ряду*). Для того щоб $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} S(x)$ в області X необхідно і достатньо, щоб $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in X} r_n(x) = 0$, де $r_n(x) = |S_n(x) - S(x)|$.

11.3 Ознаки рівномірної збіжності функціональних рядів

Теорема (*ознака Вейєрштрасса*). Якщо функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на множині X можна мажорувати $(|u_n(x)| \le a_n \ \forall n \in \mathbb{N})$ числовим знакопостійним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ (a_n \ge 0)$, то функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ збігається рівномірно на множині X.

Означення. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ (a_n \ge 0)$ називають *мажорантним рядом.*

Приклад. Дослідити функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ на рівномірну збіжність на множині $[0;\pi]$.

$\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$ на множині $[0;\pi] \ \forall n \in \mathbb{N}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ – збіжний. Тоді, функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ рівномірно збігається за ознакою Вейєрштрасса.

Теорема (*ознака Діріхле*). Якщо члени функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на множині X можна представити у вигляді $u_n(x) = \alpha_n(x)\beta_n(x)$ за умов: 1) послідовність $\{\alpha_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – монотонно спадна і рівномірно збіжна до нуля: $\alpha_n(x) \ge \alpha_{n+1}(x) \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \alpha_n(x) > 0$ і $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n(x) = 0$; 2) $B_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k(x)$, $|B_n(x)| \le k$, $\forall x \in X$. Тоді $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x)\beta_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} S(x)$ на множині X.

Теорема (*ознака Абеля*). Якщо члени функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на множині X можна представити у вигляді $u_n(x) = \alpha_n(x)\beta_n(x)$ за умов: 1) послідовність $\{\alpha_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – незростаюча і рівномірно обмежена на множині X: $\exists c > 0: \ \forall n \in \mathbb{N} \ \forall x \in X \ |\alpha_n(x)| \le c$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} B(x), \quad \forall x \in X$. Тоді $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x)\beta_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} S(x)$ на множині X.

11.4. Степеневі ряди

Означення. Функціональний ряд вигляду

$$C_0 + C_1(x - x_0) + C_2(x - x_0)^2 + \cdots + C_n(x - x_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x - x_0)^n$$

називають *степеневим рядом*, а числа C_0, C_1, C_2, …, C_n, … – *коефіцієнтами степеневого ряду*.

Якщо $x_0 = 0$, ряд приймає вигляд:

$$C_0 + C_1x + C_2x^2 + \cdots + C_nx^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} C_nx^n.$$

Очевидно, що ряд $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x - x_0)^n$ збіжний у точці x_0, а ряд $\sum_{n=0}^{\infty} C_nx^n$ збіжний у точці $x = 0$.

Теорема (*Абеля*). Якщо степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} C_nx^n$ збіжний при деякому значенні x_0, не рівному нулю, то він абсолютно збіжний при довільному значенні

x, для якого $|x| < |x_0|$. Якщо степеневий ряд розбіжний при деякому значенні x_0, то він розбіжний при довільному значенні x, для якого $|x| > |x_0|$.

Означення. *Радіусом збіжності* степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ називають значення величини

$$R = \sup\{|x| : x \in D\},$$

де D – область збіжності степеневого ряду.

Теорема. Для будь-якого степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ існує таке додатне число R (радіус збіжності ряду), що для всіх $|x| < R$ ряд абсолютно збіжний, а для всіх $|x| > R$ ряд розбіжний.

Формули для обчислення радіуса інтервалу збіжності степеневого ряду:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right|;$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|C_n|}}.$$

Означення. Проміжок $(-R; R)$ називається *інтервалом збіжності* степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$.

11.5. Розвинення функцій в степеневі ряди

Означення. Кажуть, що функція $f(x)$ на $(-r; r)$ може бути *розвиненою в степеневий ряд*, якщо існує степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, який поточково збігається до $f(x)$ на $(-r; r)$, тобто

$$\exists \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n : \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x), \forall x \in (-r; r).$$

В більш загальному випадку

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = f(x), \ \ \forall x \in (-r + x_0; r + x_0).$$

Означення. Якщо функція $f(x)$ визначена у деякому околі точки x_0 і має у цій точці похідні будь-якого порядку, то ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \ \ x \in \mathbb{R},$$

називається *рядом Тейлора функції $f(x)$ у точці x_0*.

Означення. Частинний випадок ряду Тейлора, коли $x_0 = 0$, називається *рядом Маклорена*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \ \ x \in \mathbb{R}.$$

Розглянемо основні розклади елементарних функцій:

$$1)\ e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \ \ \forall -\infty < x < +\infty.$$

$$2)\ \sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1},$$

$$\forall -\infty < x < +\infty.$$

$$3)\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n},$$

$$\forall -\infty < x < +\infty.$$

$$4)\ \ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1},$$

$$\forall -1 < x \leq 1.$$

$$5)\ (1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n, \quad \forall |x| < 1.$$

Питання та завдання для самоконтролю до теми 11

1. Сформулюйте означення функціональної послідовності і функціонального ряду.
2. Що розуміють під областю збіжності послідовності (ряду)?
3. Визначте множини збіжності (абсолютної та умовної) функціональних рядів:

$$1)\ \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{1-2x}{1+2x}\right)^n;\ \ 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2+\sqrt{n}};\ \ 3)\ \sum_{n=1}^{\infty} n^2\left(\frac{2x-3}{2x}\right)^n;$$

$$4)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+x)^n}{n^n};\ \ 5)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)^2};\ \ 6)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2-6x+12)^n}{4^n(n^2+1)};$$

$$7)\ \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n}{n^2-4}\left(\frac{x-2}{2x+1}\right)^n;\ \ 8)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n+x}.$$

4. Сформулюйте означення поточкової границі функціональної послідовності (поточкової суми функціонального ряду).
5. Яка послідовність називається рівномірно збіжною до функції $f(x)$ на множині $A \subseteq X$?
6. Сформулюйте критерій рівномірної збіжності функціональної послідовності.
7. Дослідіть функціональні послідовності на рівномірну збіжність на вказаних множинах X_1, X_2:

$$1)\ f_n(x) = \frac{nx^2}{1+n^2x^4};\ X_1 = [0;1], X_2 = [1;+\infty).$$

$$2)\ f_n(x) = \operatorname{arctg}\frac{n}{x};\ X_1 = (0;a), X_2 = [0;+\infty), a > 0.$$

$$3)\ f_n(x) = \frac{nx^2}{n^3 + x^3};\ X_1 = [0;1], X_2 = [0;+\infty).$$

$$4)\ f_n(x) = \frac{x}{n}\ln\frac{x}{n};\ X_1 = (0;2), X_2 = [0;+\infty).$$

$$5)\ f_n(x) = \ln\left(x^2 + \frac{1}{n}\right);\ X_1 = (0;+\infty), X_2 = (a;+\infty), a > 0.$$

$$6)\ f_n(x) = \frac{nx^2}{1 + 2n + x}; X_1 = [0;2], X_2 = [1;+\infty).$$

$$7)\ f_n(x) = e^{-(x-n)^2};\ X_1 = [-2;2], X_2 = (-\infty;+\infty).$$

8. Сформулюйте критерій Коші рівномірної збіжності функціонального ряду.
9. Які ознаки рівномірної збіжності функціональних рядів ви знаєте?
10. Дослідіть функціональний ряд на рівномірну збіжність на заданій множині X:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{5n-6}, X = [0;1];\ \ 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}x^2e^{-nx}, X = [0;+\infty);$$

$$3)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{8n-12}, X = [0;1];\ \ 4)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{\sqrt{n+1}}, X = [0;1];$$

$$5)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{e^{nx}}, X = [1;+\infty);\ \ 6)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{4n+7}, X = [0;1].$$

11. Сформулюйте означення степеневого ряду.
12. Який ряд називається рядом Тейлора, я який рядом Маклорена?
13. Наведіть основні розклади елементарних функцій у ряд Маклорена.
14. Побудуйте розклад функції в ряд Маклорена. Знайдіть радіус збіжності ряду:

$$1)\ f(x) = x\ln\left(x + \sqrt{x^2+2}\right);\ \ 2)\ f(x) = \operatorname{arctg}\frac{3-4x^2}{6+2x^2};$$

$$3)\ f(x) = \ln\left(x^3 + \sqrt{x^6+9}\right);\ \ 3)\ f(x) = \operatorname{arctg}\frac{2-x}{1+2x};$$

$$4)\ f(x) = \ln\left(x^3 + \sqrt{x^6+64}\right);\ \ 5)\ f(x) = \operatorname{arctg}\frac{2x-3}{x+6};$$

$$6)\ f(x) = x\ln\left(x^2 + \sqrt{x^4+9}\right);\ \ 7)\ (x) = \operatorname{arctg}\frac{2+x^2}{2-x^2};$$

$$8)\ f(x) = (x^2-1)\arcsin(2x^2);\ \ 8)\ f(x) = \operatorname{arctg}\frac{x-\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}}.$$

12. Подвійні та потрійні інтеграли

12.1. Поняття подвійного інтеграла

Нехай задано деяку поверхню $z = f(x, y)$ у просторі $\mathbb{R}^3$, причому $f(x, y) \geq 0$. Проекцією поверхні $z = f(x, y)$ на площину xOy є область D.

Означення. Тіло V, яке обмежене зверху поверхнею $z = f(x, y)$, знизу областю D з кусково-гладкою межею L, з боків циліндричною поверхнею з напрямною L і твірними, які паралельні осі Oz, називають *циліндричним* або *криволінійним циліндром*.

Розіб'ємо область D довільним чином на $n \cdot m$ ділянок D_{ij} з кусково-гладкими межами L_{ij} $\left(i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}\right)$. Область D буде покрита сіткою, D_{ij} – клітинки сітки. Позначимо діаметр кожної клітинки – d_{ij} (діагональ прямокутника дорівнює діаметру), а її площу – ΔS_{ij}. У кожній клітинці D_{ij} довільним чином виберемо точку $M(\xi_i; \eta_j)$ і обчислимо значення у цій точці $f(\xi_i, \eta_j)$. Через межі L_{ij} проведемо циліндричні поверхні із твірними, паралельними осі Oz (див. рис. 17).

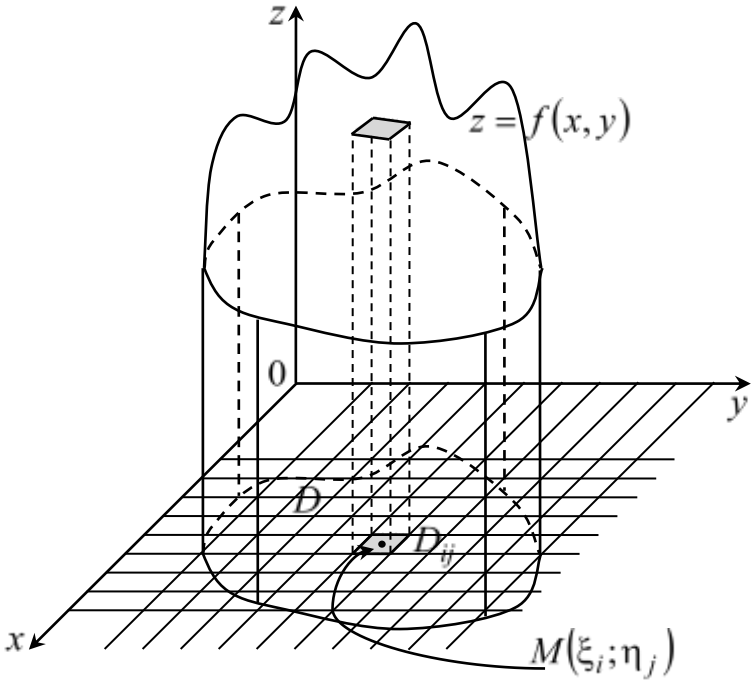


Рисунок 17 – Тіло V (криволінійний циліндр)

Ці поверхні розіб'ють задане тіло на $n \cdot m$ стовпчиків з основами D_{ij} і висотами $f(\xi_i, \eta_j)$, об'єм кожного з яких дорівнює:

$$\Delta V_{ij} = f(\xi_i, \eta_j)\Delta S_{ij}.$$

Тоді об'єм V_{nm} $n \cdot m$-ступінчастого тіла, утвореного стовпчиками, дорівнює:

$$V_{nm} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \Delta V_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(\xi_i, \eta_j)\Delta S_{ij},$$

і наближено дорівнює об'єму криволінійного циліндра $V \approx V_{nm}$.

Означення. Сума $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(\xi_i, \eta_j)\Delta S_{ij}$ називається *інтегральною сумою* для функції $z = f(x, y)$ в області D.

Нехай d найбільше з чисел d_{ij}.

Означення. Величину $d = \max\limits_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}} d_{ij}$ називають *діаметром розбиття*.

Точне значення об'єму криволінійного циліндра дорівнює границі суми $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(\xi_i, \eta_j)\Delta S_{ij}$ при $d \to 0$ $(n, m \to \infty)$:

$$V = \lim_{d\to 0} V_{ij} = \lim_{d\to 0} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(\xi_i, \eta_j)\Delta S_{ij}.$$

Означення. Якщо існує скінченна границя $I = \lim\limits_{d\to 0} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(\xi_i, \eta_j)\Delta S_{ij}$, яка не залежить від способу розбиття області D на ділянки D_{ij} та від вибору точок $M(\xi_i; \eta_j)$, то число I називається *подвійним інтегралом за областю D* і позначається $\iint_D f(x, y)dS$ або $\iint_D f(x, y)dxdy$.

Отже, задача обчислення об'єму криволінійного циліндра приводить до поняття подвійного інтеграла, а для обчислення цього об'єму маємо формулу:

$$V = \iint_D f(x, y)dxdy.$$

У цьому полягає геометричний зміст подвійного інтеграла.

12.2. Обчислення подвійних інтегралів у декартовій системі координат

Означення. Область D називається *правильною у напрямку осі Oy* (*область першого типу*), якщо будь-яка вертикальна пряма, що проходить через внутрішню точку області, перетинає межу області не більше як у двох точках.

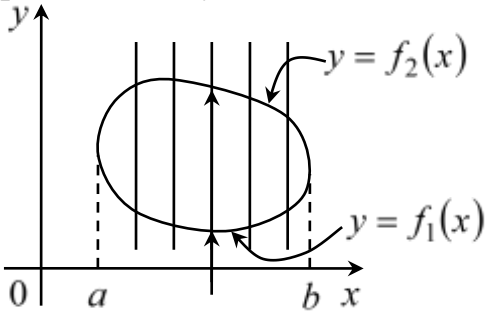


Рисунок 18 – Область першого типу

$\begin{cases} a \le x \le b, \\ f_1(x) \le y \le f_2(x). \end{cases}$ – область першого типу (див. рис. 18).

Тоді

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dy = \int_a^b \left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$

Означення. Праву частину одержаної формули називають *повторним інтегралом*. Інтеграл $\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dy$ називають *внутрішнім*, а інтеграл $\int_a^b \left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dy \right) dx$ – *зовнішнім*.

Означення. Область D називається *правильною у напрямку осі* Ox (*область другого типу*), якщо будь-яка горизонтальна пряма, що проходить через внутрішню точку області, перетинає межу області не більше як у двох точках.

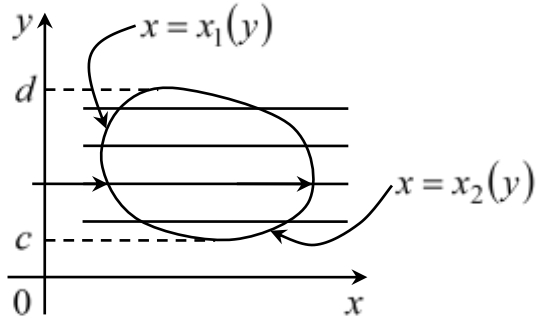


Рисунок 19 – Область другого типу

$\begin{cases} c \le y \le d, \\ x_1(y) \le x \le x_2(y). \end{cases}$ – область другого типу (див. рис. 19).

Тоді

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx = \int_c^d \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \right) dy.$$

Єдиним випадком сталих меж у внутрішньому інтегралі буде випадок, коли область D обмежена прямими $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx.$$

12.3. Заміна змінних у подвійному інтегралі

Нехай у подвійному інтегралі $\iint_D f(x,y)dxdy$ необхідно перейти від змінних x і y до змінних u і v, які пов'язані між собою співвідношеннями:

$$\begin{cases} u = u(x,y), \\ v = v(x,y), \end{cases}$$

які взаємно однозначно відображають область D в область $\widetilde{D}$. Це означає, що існує обернене неперервно диференційовне відображення:

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \end{cases}$$

яке взаємно однозначно відображає область $\widetilde{D}$ в область D.

Нехай функції $x = x(u,v)$ і $y = y(u,v)$ мають в області $\widetilde{D}$ неперервні частинні похідні першого порядку по змінним u і v та

$$J = J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial x(u,v)}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial y(u,v)}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Означення. Визначник $J(u,v)$ називається *якобіаном* (або *визначником Якобі-Остроградського*).

Його модуль є коефіцієнтом спотворення площі за такої зміни змінних, тобто $dxdy = |J(u,v)|dudv$. Тобто абсолютне значення якобіана відіграє роль локального коефіцієнта деформації області $\widetilde{D}$ при відображенні її на область D (у цьому полягає *геометричний зміст якобіана*).

Теорема. Нехай виконуються умови:

1) заміни $x = x(u,v)$ і $y = y(u,v)$ взаємно однозначно відображають область $\widetilde{D}$ в область D;

2) функції $x = x(u,v)$ і $y = y(u,v)$ мають в області $\widetilde{D}$ неперервні частинні похідні і $J(u,v) \neq 0$;

3) функція $f(x,y)$ є неперервною в області D.

Тоді перехід до нових змінних у подвійному інтегралі здійснюється за формулою:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{\widetilde{D}} f\big(x(u,v), y(u,v)\big)|J(u,v)|dudv,$$

(*формула заміни змінних у подвійному інтегралі*).

Частинним випадком заміни змінних у подвійному інтегралі є перехід від прямокутних до полярних координат. *Полярну систему координат* зручно використовувати у випадках, коли функція $f(x,y)$ або межі області D містять вирази $x^2 + y^2$. У цьому випадку роблять заміну змінних:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \end{cases} \rho \geq 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Знайдемо якобіан:

$$J(\rho,\varphi) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x(\rho,\varphi)}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x(\rho,\varphi)}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y(\rho,\varphi)}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y(\rho,\varphi)}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \rho.$$

Враховуючи, що $\rho \geq 0$, маємо $|J(\rho,\varphi)| = |\rho| = \rho$. Тоді формула заміни змінних у подвійному інтегралі набуде наступного вигляду:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{\widetilde{D}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\varphi d\rho.$$

Якщо рівняння межі області D або підінтегральна функція $f(x,y)$ містить вираз $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, то зручно обчислювати подвійний інтеграл в *узагальненій полярній системі координат*. У цьому випадку роблять заміну змінних:

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi, \\ y = b\rho\sin\varphi, \end{cases} \rho \geq 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

$$J(\rho,\varphi)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x(\rho,\varphi)}{\partial\rho} & \dfrac{\partial x(\rho,\varphi)}{\partial\varphi}\\ \dfrac{\partial y(\rho,\varphi)}{\partial\rho} & \dfrac{\partial y(\rho,\varphi)}{\partial\varphi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a\cos\varphi & -a\rho\sin\varphi\\ b\sin\varphi & b\rho\cos\varphi\end{vmatrix}=$$

$$=ab\rho(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=ab\rho.$$

$$\iint_D f(x,y)dxdy=ab\iint_{\widetilde{D}} f(a\rho\cos\varphi\,,b\rho\sin\varphi)\rho d\rho\,d\varphi.$$

Приклад. Обчислити інтеграл $\iint_D xydxdy$, де D: $(x^2+y^2)^2=2xy$.

Перейдемо до поряної системи координат:

$$\begin{cases}x=\rho\cos\varphi\,,\\ y=\rho\sin\varphi\,,\end{cases}\ \rho\geq 0, 0\leq\varphi\leq 2\pi:$$

$$(\rho^2)^2=2\rho^2\sin\varphi\cos\varphi\Rightarrow\rho^2=2\sin\varphi\cos\varphi\Rightarrow\rho^2=\sin 2\,\varphi.$$

Так як $\rho\geq 0$, то

$$\sin 2\,\varphi\geq 0,$$

$$0+2\pi n\leq 2\varphi\leq\pi+2\pi n,\ \ n\in\mathbb{Z},$$

$$\pi n\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in\mathbb{Z}.$$

Область D складається з двох однакових областей. Наприклад, коли $\varphi\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, ρ змінюється від 0 до $\sqrt{\sin 2\varphi}$ (див. рис. 20). Якобіан $|J(\rho,\varphi)|=\rho$.

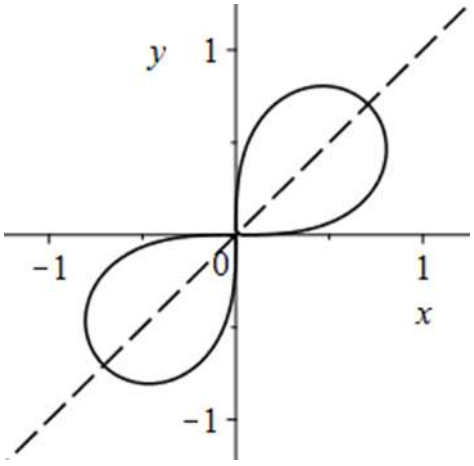


Рисунок 20 – Функція $\rho=\sqrt{\sin 2\varphi}$

Тоді

$$\iint_D xydxdy=\iint_{\widetilde{D}}\rho\cos\varphi\cdot\rho\sin\varphi\cdot\rho d\rho d\varphi=$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\sqrt{\sin 2\varphi}}\rho^3\cos\varphi\sin\varphi\,d\rho=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\sqrt{\sin 2\varphi}}\rho^3\sin 2\varphi\,d\rho=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\varphi\cdot\frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^{\sqrt{\sin 2\varphi}}d\varphi=$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\varphi\sin^2 2\varphi\,d\varphi=$$

$$= -\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 2\varphi)d\cos 2\varphi = -\frac{1}{8}\left(\cos 2\varphi - \frac{\cos^3 2\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{6}.$$

12.4. Застосування подвійного інтеграла

1. Площа плоскої області D знаходиться за формулою:

$$S = \iint_D dxdy.$$

2. Об'єм криволінійного циліндра знаходиться за формулою:

$$V = \iint_D f(x,y)dxdy.$$

У більш загальному випадку формула наступна:

$$V = \iint_D \left[f_1\big(x, y - f_2(x,y)\big)\right]dxdy.$$

3. Площа поверхні у тривимірному просторі $\mathbb{R}^3$ рівняння $z = f(x,y)$ визначає деяку поверхню, яка проектується на площину xOy в область D. Площа цієї поверхні обчислюється за формулою:

$$S = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dxdy.$$

4. Нехай в області D розподілена деяка маса і густина маси у кожній точці пластини визначається неперервною і невід'ємною функцією $\gamma(x,y)$. Маса пластини D знаходиться за формулою:

$$m = \iint_D \gamma(x,y)dxdy.$$

Якщо пластина однорідна, то $\gamma(x,y) = \gamma_0 = \text{const}$.

5. Статичні моменти.

Означення. *Статичним моментом* M_x $\left(M_y\right)$ матеріальної точки маси m відносно осі Ox (осі Oy) називається величина, яка дорівнює добутку маси цієї точки на відстань її від осі, тобто

$$M_x = m \cdot y \left(M_y = m \cdot x\right).$$

Статичні моменти M_x та M_y пластини відносно координатних осей визначаються за формулами:

$$M_x = \iint_D y\gamma(x,y)dxdy,$$

$$M_y = \iint_D x\gamma(x,y)dxdy.$$

Якщо відомо масу та статичні моменти, то можна знайти координати центра маси пластини:

$$x_c = \frac{M_y}{m}, \quad y_c = \frac{M_x}{m}.$$

Якщо пластина однорідна, то $m = \gamma_0 \iint_D dxdy = \gamma_0 S$ і

$$x_c = \frac{\iint_D x dxdy}{S}, \quad y_c = \frac{\iint_D y dxdy}{S}.$$

6. Моменти інерцій пластини.

Означення. *Моментом інерції* матеріальної точки масою m відносно осей Ox і Oy називається добуток маси на квадрат відстані точки до відповідної осі, тобто $I_x = my^2$ і $I_y = mx^2$.

Моменти інерції I_x та I_y пластини D з масою m відносно координатних осей визначаються за формулами:

$$I_x = \iint_D y^2 \gamma(x,y) dxdy,$$
$$I_y = \iint_D x^2 \gamma(x,y) dxdy.$$

Означення. *Моментом інерції* I_O пластини D з масою m відносно початку координат називається величина, яка дорівнює сумі моментів інерції відносно осей:

$$I_O = \iint_D (x^2 + y^2) \gamma(x,y) dxdy.$$

12.5. Поняття потрійного інтеграла

Потрійний інтеграл є узагальненням поняття подвійного інтеграла на випадок тривимірного простору $\mathbb{R}^3$.

Нехай задано деяку функцію $u = f(x,y,z)$, яка неперервна у замкненій області $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. За допомогою сітки поверхонь розіб'ємо область Ω довільним чином на n елементарних областей Ω_i, $i = 1 \dots n$, які не мають спільних внутрішніх точок. Нехай об'єм кожної елементарної області Ω_i дорівнює ΔV_i, $i = 1 \dots n$. У кожній елементарній області Ω_i виберемо довільну внутрішню точку $P_i(\xi_i; \eta_i; \zeta_i)$ і складемо інтегральну суму функції $f(x,y,z)$ за областю Ω:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i; \eta_i; \zeta_i) \Delta V_i.$$

Означення. Сума $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i; \eta_i; \zeta_i) \Delta V_i$ називається *інтегральною сумою* для функції $f(x,y,z)$ за областю Ω.

За діаметр області Ω_i приймемо відстань між двома найбільш віддаленими точками замкненої області Ω_i.

Означення. Величину $d = \max\limits_{1 \le i \le n} d_i$ називають *діаметром розбиття* області Ω_i.

Означення. Якщо існує скінченна границя $I = \lim\limits_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i; \eta_i; \zeta_i) \Delta V_i$, яка не залежить від способу розбиття області Ω на елементарної області Ω_i та від вибору точок $P_i(\xi_i; \eta_i; \zeta_i)$, то число I називається *потрійним інтегралом за областю* Ω і позначається $\iiint_\Omega f(x,y,z) dV$ або $\iiint_\Omega f(x,y,z) dxdydz$.

Теорема 1 (*достатня умова інтегровності*). Нехай функція $f(x,y,z)$ неперервна в обмеженій замкненій області Ω, тоді вона інтегровна у цій області.

Нехай в області Ω розподілена деяка маса з об'ємною густиною $\gamma(x,y,z)$ матеріального тіла. Маса цього тіла знаходиться за формулою:

$$m = \iiint_{\Omega} \gamma(x,y,z)dxdydz.$$

У цьому полягає механічний зміст потрійного інтеграла. Якщо покласти $\gamma(x,y,z) = 1$, то отримаємо об'єм цього тіла:

$$V = \iiint_{\Omega} dxdydz.$$

У декартовій системі координат обчислення потрійного інтеграла зводиться до обчислення трьох визначених інтегралів.

Означення. Область Ω називається *правильною у напрямку осі* Oz (див. рис. 21), якщо будь-яка пряма, що проходить через внутрішню точку області паралельно осі Oz, перетинає межу області не більше як у двох точках, а множина D, в яку проектується область Ω на площину xOy, є правильною у напрямку Ox або Oy.

Для такої області справедлива формула:

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz =$$

$$= \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left[\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right] dy \right) dx.$$

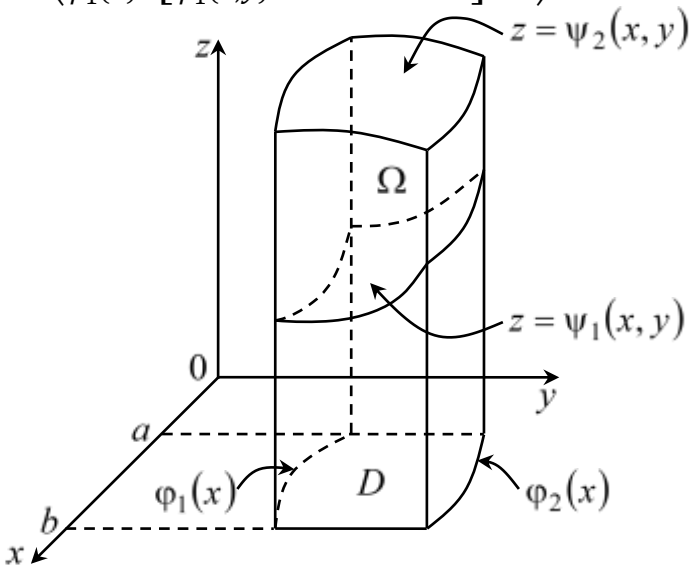


Рисунок 21 – Область Ω

12.6. Заміна змінних у потрійному інтегралі

Нехай у потрійному інтегралі $\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$ необхідно перейти від змінних x, y і z до змінних u, v і w що пов'язані між собою співвідношеннями:

$$\begin{cases} u = u(x, y, z), \\ v = v(x, y, z), \\ w = w(x, y, z), \end{cases}$$

які взаємно однозначно відображають область Ω в область $\widetilde{\Omega}$. Це означає, що існує обернене неперервно диференційовне відображення:

$$\begin{cases} x = x(u, v, w), \\ y = y(u, v, w), \\ z = z(u, v, w), \end{cases}$$

яке взаємно однозначно відображає область $\widetilde{\Omega}$ в область Ω.

Нехай функції $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$ і $z = z(u, v, w)$ мають в області $\widetilde{\Omega}$ неперервні частинні похідні першого порядку по змінним u, v і w та

$$J = J(u, v, w) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x(u,v,w)}{\partial u} & \dfrac{\partial x(u,v,w)}{\partial v} & \dfrac{\partial x(u,v,w)}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y(u,v,w)}{\partial u} & \dfrac{\partial y(u,v,w)}{\partial v} & \dfrac{\partial y(u,v,w)}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z(u,v,w)}{\partial u} & \dfrac{\partial z(u,v,w)}{\partial v} & \dfrac{\partial z(u,v,w)}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Означення. Визначник $J(u, v, w)$ називається *якобіаном* переходу до координати (u, v, w).

Теорема 2. Нехай виконуються умови:

1) заміни $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$ і $z = z(u, v, w)$ взаємно однозначно відображають область $\widetilde{\Omega}$ в область Ω;

2) функції $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$ і $z = z(u, v, w)$ мають в області $\widetilde{\Omega}$ неперервні частинні похідні і $J(u, v, w) \neq 0$;

3) функція $f(x, y, z)$ є неперервною в області Ω.

Тоді перехід до нових змінних у потрійному інтегралі здійснюється за формулою:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{\widetilde{\Omega}} f\big(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)\big)|J(u, v, w)|dudvdw$$

(*формула заміни змінних у потрійному інтегралі*).

У циліндричній системі координат точка $M \in \mathbb{R}^3$ однозначно визначається числами ρ, φ, z, де ρ і φ – полярні координати проекції точки M на площину xOy, z – апліката точки M.

Означення. Числа ρ, φ, z називають *циліндричними координатами* (див. рис. 22) точки M.

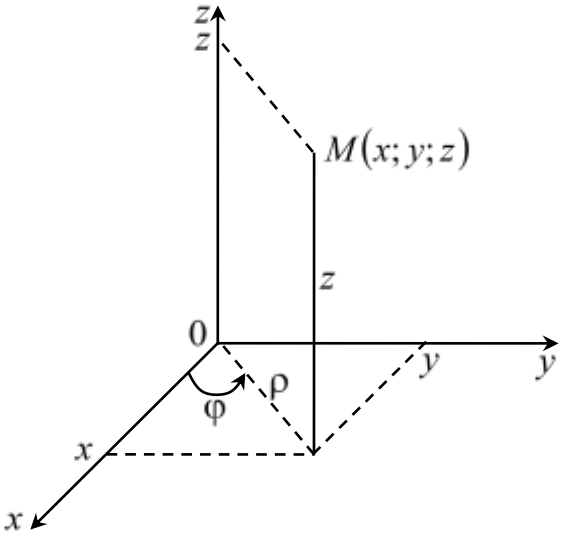


Рисунок 22 – Циліндрична система координат

Якщо полярна вісь співпадає з додатним напрямом осі Ox, а полюс O з початком координат, то циліндричні координати зв'язані з декартовими за формулами:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z, \end{cases} \quad \rho \geq 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty.$$

Знайдемо якобіан:

$$J(\rho,\varphi,z) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x(\rho,\varphi,z)}{\partial\rho} & \dfrac{\partial x(\rho,\varphi,z)}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial x(\rho,\varphi,z)}{\partial z} \\ \dfrac{\partial y(\rho,\varphi,z)}{\partial\rho} & \dfrac{\partial y(\rho,\varphi,z)}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial y(\rho,\varphi,z)}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z(\rho,\varphi,z)}{\partial\rho} & \dfrac{\partial z(\rho,\varphi,z)}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial z(\rho,\varphi,z)}{\partial z} \end{vmatrix} = \rho.$$

Враховуючи, що $\rho \geq 0$, маємо $|J(\rho,\varphi,z)| = |\rho| = \rho$. Тоді формула заміни змінних у потрійному інтегралі набуде наступного вигляду:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{\widetilde{\Omega}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\rho d\rho d\varphi dz.$$

Перехід від декартових до узагальнених циліндричних координат здійснюють за формулами:

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi, \\ y = b\rho\sin\varphi, \\ z = cz, \end{cases} \quad \rho \geq 0,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ -\infty < z < +\infty,\ |J(\rho,\varphi,z)| = abc\rho.$$

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = abc\iiint\limits_{\widetilde{\Omega}} f(a\rho\cos\varphi, b\rho\sin\varphi, cz)\rho d\rho d\varphi dz.$$

У сферичній системі координат положення точки $M \in \mathbb{R}^3$ однозначно визначається числами ρ, φ, θ, де ρ – відстань від точки M до початку координат,

φ – кут між віссю Ox і проекцією радіус-вектора $\overline{OM}$ точки M на площину xOy, θ – кут між віссю Oz і радіус-вектором $\overline{OM}$, що відраховується від осі Oz.

Означення. Числа ρ, φ, θ називають *сферичними координатами* (див. рис. 23) точки M.

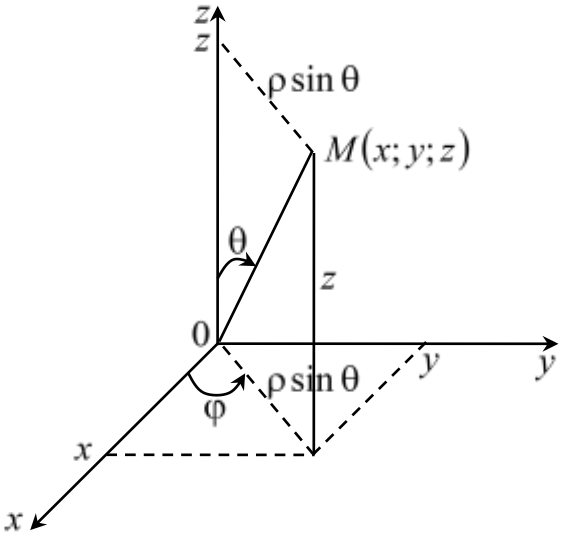


Рисунок 23 – Сферична система координат

Перехід від декартових координат до сферичних здійснюється за формулами:

$$\begin{cases} x = \rho \sin\theta \cos\varphi, \\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi, \\ z = \rho \cos\theta, \end{cases} \quad \rho \geq 0, \;\; 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \;\; 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Знайдемо якобіан:

$$J(\rho,\varphi,\theta) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x(\rho,\varphi,\theta)}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x(\rho,\varphi,\theta)}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial x(\rho,\varphi,\theta)}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y(\rho,\varphi,\theta)}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y(\rho,\varphi,\theta)}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y(\rho,\varphi,\theta)}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial z(\rho,\varphi,\theta)}{\partial \rho} & \dfrac{\partial z(\rho,\varphi,\theta)}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial z(\rho,\varphi,\theta)}{\partial \theta} \end{vmatrix} = -\rho^2 \sin\theta.$$

Враховуючи, що $\rho \geq 0$, маємо $|J(\rho,\varphi,\theta)| = |-\rho^2 \sin\theta| = \rho^2 \sin\theta$. Тоді формула заміни змінних у потрійному інтегралі набуде наступного вигляду:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{\widetilde{\Omega}} f(\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta)\rho^2 \sin\theta \, d\rho d\varphi d\theta.$$

Перехід від декартових до узагальнених сферичних координат здійснюють за формулами:

$$\begin{cases} x = a\rho \sin\theta \cos\varphi, \\ y = b\rho \sin\theta \sin\varphi, \\ z = c\rho \cos\theta, \end{cases} \quad \rho \geq 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad |J(\rho,\varphi,z)| =$$

$abc\rho^2 \sin\theta$.

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz =$$

$$= abc \iiint_{\tilde{\Omega}} f(\rho a\rho \sin\theta \cos\varphi\,, b\rho \sin\theta \sin\varphi\,, c\rho \cos\theta)\rho^2 \sin\theta \, d\rho d\varphi d\theta.$$

12.7. Застосування потрійного інтеграла у механіці

Маса тіла і об'єм тіла:

$$m = \iiint_{\Omega} \gamma(x,y,z)dxdydz\,, \;\; V = \iiint_{\Omega} dxdydz.$$

Статичні моменти:

$$M_{xy} = \iiint_{\Omega} z\gamma(x,y,z)dxdydz, \;\; M_{xz} = \iiint_{\Omega} y\gamma(x,y,z)dxdydz,$$

$$M_{yz} = \iiint_{\Omega} x\gamma(x,y,z)dxdydz.$$

Координати центра маси:

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m}, \;\; y_c = \frac{M_{xz}}{m}, \;\; z_c = \frac{M_{xy}}{m}.$$

Моменти інерції:

$$I_{xy} = \iiint_{\Omega} z^2\gamma(x,y,z)dxdydz, \;\; I_{xz} = \iiint_{\Omega} y^2\gamma(x,y,z)dxdydz,$$

$$I_{yz} = \iiint_{\Omega} x^2\gamma(x,y,z)dxdydz.$$

$$I_O = \iiint_{\Omega} (x^2+y^2+z^2)\gamma(x,y,z)dxdydz.$$

$$I_x = I_{xy} + I_{xz}, \;\; I_y = I_{yz} + I_{xy}, \;\; I_z = I_{xz} + I_{yz}.$$

Приклад. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $x^2 + y^2 = 3z^2$ і $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ (див. рис. 24).

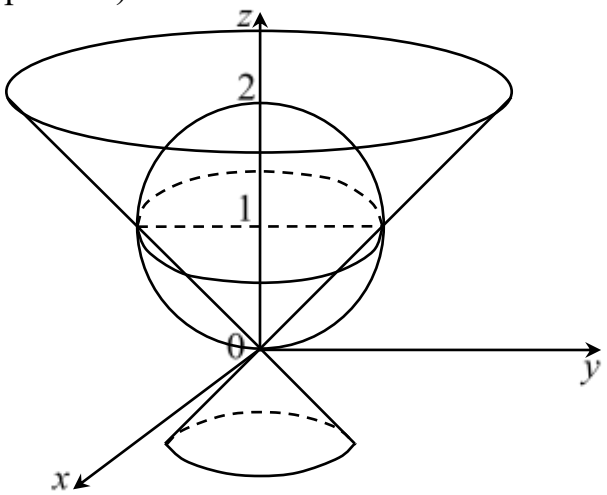


Рисунок 24 – Тіло, обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 = 3z^2$ і $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$.

Перейдемо до сферичних координат:

$$\begin{cases} x = \rho \sin\theta \cos\varphi, \\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi, \\ z = \rho \cos\theta, \end{cases} \quad \rho \geq 0, \ 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \ 0 \leq \theta \leq \pi, |J(\rho, \varphi, \theta)| = \rho^2 \sin\theta.$$

Рівняння конуса у сферичній системі координат:

$$\rho^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi + \rho^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi = 3\rho^2 \cos^2\theta \ \Rightarrow \ \theta = \frac{\pi}{3}.$$

Рівняння сфери у сферичній системі координат:

$$\rho^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi + \rho^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi + \rho^2 \cos^2\theta = 2\rho \cos\theta \ \Rightarrow \ \rho = 2\cos\theta.$$

Об'єм тіла:

$$V = \iiint\limits_{\Omega} dxdydz = \iiint\limits_{\widetilde{\Omega}} \rho^2 \sin\theta \, d\rho d\varphi d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} \rho^2 \sin\theta \, d\rho = \frac{5}{4}\pi,$$

(куб. од.).

Питання та завдання для самоконтролю до теми 12

1. Сформулюйте означення, що називають подвійним інтегралом за областю D?
2. За якою формулою знаходиться об'єму криволінійного циліндра?
3. У чому полягає різниця між областю першого і другого типу? Наведіть приклади.
4. Змініть порядок інтегрування:

$$1) \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{2-y}} f(x,y)dx;$$

$$2) \int_{-2}^{-1} dy \int_0^{\sqrt{2+y}} f(x,y)dx + \int_{-1}^{0} dy \int_0^{\sqrt{-y}} f(x,y)dx;$$

$$3) \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{0} f(x,y)dx + \int_1^e dy \int_{-1}^{-\ln y} f(x,y)dx.$$

5. Представити подвійний інтеграл $\iint_D f(x,y)dxdy$ за допомогою повторних із зовнішнім інтегруванням по x і по y:

$$1) \ D: \ x^2 = 2 - y, \ \ y + x = 0;$$

$$2) \ D: \ y = \sqrt{2 - x^2}, \ \ y = x^2;$$

$$3) \ D: \ y = x^2 - 2, \ \ y = x.$$

6. Який визначник називають називається якобіаном?
7. Сформулюйте теорему про формулу заміни змінних у подвійному інтегралі.
8. Обчисліть подвійні інтеграли:

$$1)\iint\limits_D x^2 y dxdy\,, D: y = 2 - x, x = y, x > 0;$$

$$2)\iint\limits_D (x^2 + 5y) dxdy\,, D: y = x^2 - 1, x \geq 0, y \leq 0;$$

$$3)\iint\limits_D (7y^2 - x^3) dxdy\,, D: 5y = x, x = y^2.$$

9. Наведіть приклади застосування подвійного інтеграла.
10. Сформулюйте означення, що називають потрійним інтегралом за областю Ω?
11. Сформулюйте теорему про формулу заміни змінних у потрійному інтегралі.
12. Обчисліть потрійні інтеграли:

$$1)\iiint\limits_V xyzdxdydz\,,\ \ V: 0 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 1, -3 \leq z \leq 4;$$

$$2)\iiint\limits_V (x + y + z) dxdydz\,,\ \ V: -5 \leq x \leq 4, -1 \leq y \leq 2, -6 \leq z \leq 0;$$

$$3)\iiint\limits_V (x^2 + 5y - z) dxdydz\,,\ \ V: 2 \leq x \leq 8, 4 \leq y \leq 5{,}3 \leq z \leq 7.$$

13. Наведіть приклади застосування потрійного інтеграла.
14. Знайдіть об’єм тіла, обмеженого поверхнями (за допомогою потрійного інтегралу):

$$1)\ z = y^2, x + y = 2, x \geq 0, z \geq 0;$$

$$2)\ x = \sqrt{9 - y^2}, x = \sqrt{25 - y^2}, x = z, y \geq 0, z \geq 0;$$

$$3)\ z = x^2, x - 2y + 2 = 0, x + y = 7, z \geq 0.$$

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Б

Безпосереднє інтегрування, 43
Біном Ньютона, 9

Г

Геометричний зміст похідної, 24
Градієнт, 39
Границя функції
– друга істотна, 19
– за Гейне, 18
– за Коші, 18
– перша істотна, 19
Границя числової послідовності, 16

Д

Диференціал
– n-го порядку, 34
– другого порядку, 34
– функції, 27
Діаметром розбиття, 75
Довжина кривої, 56
Дотична до графіка функції, 24
Дробово-лінійна ірраціональність, 48

І

Інтеграл
– визначений, 52
Інтегральна сума Рімана, 51
Інтегрування заміною змінної, 43
Інтервал збіжності степеневого ряду, 71
Інфінум, 13

К

Квантор загальності, 8
Квантор існування, 8
Координати
– сферичні, 84
– циліндричні, 82
Криволінійна трапеція, 51
Критерій Дарбу інтегровності функції за Ріманом, 52
Критерій спрямлюваності кривої, 57

Л

Ламана, 56
Лінія рівня, 36

М

Метод внесення функції під знак диференціала, 44
Метод математичної індукції, 9
Метрика, 36
Множина, 8
– дійсних чисел, 8
– зліченна, 10
– ірраціональних чисел, 8
– комплексних чисел, 8
– натуральних чисел, 8
– незліченна, 11
– нескінченна, 10
– раціональних чисел, 8
– скінченна, 10
– цілих чисел, 8
Моментом інерції, 80

Н

Невизначений інтеграл, 41
Необхідна умова збіжності числового ряду, 64

О

Об’єм криволінійного циліндра, 79
Об’єм тіл обертання, 61
Область
– другого типу, 76

– першого типу, 75
Область визначення функції, 9
Область значень функції, 9
Ознака
– Абеля, 66
– Даламбера, 64
– Діріхле, 66
– інтегральна, 65
– Лейбніца, 66
– порівняння, 64
– Раабе, 65
– радикальна Коші, 65
Ознаки рівномірної збіжності функціональних рядів, 70
О-символіка, 19

П

Первісна, 41
Підмножина, 10
Площа криволінійної трапеції, 58
Площа плоскої області, 79
Площа поверхні обертання, 62
Подвійний інтеграл за областю, 75
Полярна система координат, 77
Порожня множина, 8
Послідовність, 15
– збіжна, 16
– необмежена, 15
– нескінченно мала, 15
– обмежена, 15
Потрійний інтеграл за областю, 80
Потужність множини, 10
Похідна
– за даним напрямом, 38
– ліва, 23
– логарифмічна, 26
– оберненої функції, 27
– параметрично заданої функції, 27
– права, 23
– функції заданої неявно, 27
– частинна, 37
Похідна функції у точці, 23
Правило Лопіталя, 31
Простір
– n-вимірний, 36
– метричний, 36

Р

Радіус збіжності степеневого ряду, 71
Раціональний дріб, 45
Рівномірна збіжність послідовності, 68
Рівняння нормалі, 24
Ряд
– абсолютно збіжний, 66
– гармонічний, 64
– збіжний, 63
– знакопочережний, 65
– Маклорена, 71
– розбіжний, 63
– степеневий, 70
– Тейлора, 71
– умовно збіжний, 66
– функціональний, 68
– числовий, 63

С

Спрямлювана крива, 56
Статичні моменти, 79
Ступінчаста фігура, 51
Суми Дарбу, 52
Супремум, 13

Т

Таблиця
– невизначених інтегралів, 42
– похідних, 26

Ф

Формула

– заміни змінних у подвійному інтегралі, 77
– заміни змінних у потрійному інтегралі, 82
– Лейбніца, 31
– Маклорена, 33
– Ньютона-Лейбніца, 54
– Тейлора, 32
Функціональна послідовність, 68
Функція, 9
– диференційована на проміжку, 25
– диференційована у точці, 25
– непарна, 9
– неперервна у точці, 20
– нескінченно велика, 19
– нескінченно мала, 19
– парна, 9
– показниково-степенева, 26

Ч

Часткова сума ряду, 63
Числова послідовність, 15

Я

Якобіан, 77

ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Вища математика : Збірник задач : навчальний посібник / за ред. В. П. Дубовика, І. І. Юрика. Київ : А.С.К., 2005. 480 с.
2. Денисьєвський М. О., Чайковський А. В. Збірник задач з математичного аналізу. Функції кількох змінних. Київ : Київський університет, 2012. 276 с.
3. Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної : Ч. 1 / С. М. Гребенюк та ін. Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2014. 231 с.
4. Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної : Ч. 2 / С. М. Гребенюк та ін. Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2013. 499 с.
5. Д'яченко Н. М., Красікова І. В., Панасенко Є. В. Математичний аналіз ІІ : Числові та функціональні ряди : навчальний посібник. Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2017. 244 с.
6. Дороговцев А. Я. Математичний аналіз : підручник, частина 1. Київ : Либідь, 1993. 320 с.
7. Дороговцев А. Я. Математичний аналіз : підручник, частина 2. Київ : Либідь, 1994. 230 с.
8. Курченко О. О. Диференціальне числення функції однієї змінної. Київ, 2014. 238 с.
9. Ляшко І. І., Ємельянов В. Ф., Боярчук О. К. Математичний аналіз : підручник, частина 1. Київ : Вища школа, 1992. 495 с.
10. Ляшко І. І., Ємельянов В. Ф., Боярчук О. К. Математичний аналіз : підручник, частина 2. Київ : Вища школа, 1993. 375 с.
11. Математика в технічному університеті : підручник Т. 1. / І. В. Алєксєєва та ін. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2018. 496 с.
12. Математика в технічному університеті : підручник Т. 2. / І. В. Алєксєєва та ін. Київ : Кондор, 2019. 504 с.
13. Математика в технічному університеті : підручник Т. 3. / І. В. Алєксєєва та ін. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2021. 454 с.
14. Математичний аналіз : завдання для сам. роботи студентів : Ч. 1. / С. А. Кривошея та ін. Київ : Київський університет, 2013. 323 с.
15. Мулик О. В., Репета Л. А. Calculus part I. Differential calculus of function of one variable : Tutorial. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2022. 118 с.
16. Шкіль М. І. Математичний аналіз у 2-х томах : 3-тє видання. Київ : Вища школа, 2005. 447 с.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Бакун В. В. Математичний аналіз. Частина ІІІ. Числові й функціональні ряди. Інтеграли, залежні від параметра : підручник у 3-х ч. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2021. 435 с.
2. Безклубенко І. С., Баліна О. І. Математичний аналіз : підручник у 2 частинах : частина 1. Київ : Київський національний університет будівництва і архітектури, 2024. 224 с.
3. Вища математика. Математичний аналіз : навчальний посібник, частина 1 / Т. М. Бусарова, Т. С. Гришечкіна, О. В. Звонарьова, Г. І. Семенець. Дніпро : Український державний університет науки і технологій, 2023. 120 с.
4. Математичний аналіз : навчальний посібник / А. І. Щерба, А. М. Нестеренко, І. В. Мірошкіна, В. О. Щерба. Черкаси : Черкаський державний технологічний університет, 2023. 513 с.
5. Johar S. The Big Book of Real Analysis: From Numbers to Measures. Publisher : Springer, 2024. 965 p.
6. Kaminska A., Krasikova I., Popov M. Infinite distributive laws for the lateral operations on a Riesz space. *Karpathian Mathemetical Publications*. 2024, Vol.16, No 2. P. 461–468. URL : https://doi.org/10.15330/cmp.16.2.461-468
7. Krasikova I., Mykhaylyuk V., Popov M. A new characterization of C-complete Riesz Spaces. *Results in Mathematics*. 2025, Vol. 80, No 17. P. 1–23. URL : https://doi.org/10.1007/s00025-024-02320-2

Навчальне видання
(*українською мовою*)

Панасенко Євген Валерійович
Красікова Ірина Володимирівна
Д’яченко Наталія Миколаївна

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

Навчальний посібник
для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра
спеціальності Прикладна математика
освітньо-професійної програми «Комп’ютерне моделювання»

Рецензент *А.О. Лісняк*
Відповідальний за випуск *С.М. Гребенюк*
Коректор *Є.В. Панасенко*