МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра фундаментальної та прикладної математики

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА

на тему: **«Апроксимація функцій в методі скінченних елементів на основі розкладань у ряд Тейлора»**

Виконав: студент 2 курсу, групи 8.1113

спеціальності 111 Математика
(шифр і назва спеціальності)

освітньої програми Математика
(назва освітньої програми)

І.К. Тімошенко
(ініціали та прізвище)

Керівник доцент кафедри фундаментальної та прикладної математики, доцент, к.ф.-м.н. Клименко М.І.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Рецензент декан математичного факультету, професор, д.т.н. Гоменюк С.І.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Запоріжжя – 2024

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет математичний

Кафедра фундаментальної та прикладної математики

Рівень вищої освіти магістр

Спеціальність 111 Математика
(шифр і назва)

Освітня програма Математика

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри
фундаментальної та прикладної
математики, професор, д.т.н.

_____ Гребенюк С.М.
(підпис)

« ____ » _____ 2024 р.

ЗАВДАННЯ
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТУ

Тімошенку Іллі Костянтиновичу
(прізвище, ім'я та по-батькові)

1. Тема роботи (проекту) Апроксимація функцій в методі скінченних елементів на основі розкладань у ряд Тейлора

керівник роботи (проекту) Клименко Михайло Іванович, доцент, к.ф.-м.н.
(прізвище, ім'я та по-батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом ЗНУ від « 1 » березня 2024 року № 385-с

2. Строк подання студентом роботи 15.11.2024

3. Вихідні дані до роботи 1. Постановка задачі.
2. Перелік літератури.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень)
Презентація

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання 16.04.2024

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів кваліфікаційної роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	Розробка плану роботи.	14.05.2024	
2.	Збір вихідних даних.	03.06.2024	
3.	Розробка першого розділу.	27.06.2024	
4.	Розробка другого розділу.	16.09.2024	
5.	Розробка третього розділу.	21.10.2024	
6.	Оформлення та нормоконтроль	15.11.2024	
	кваліфікаційної роботи.		
7.	Захист кваліфікаційної роботи.	09.12.2024	

Студент _____ І. К. Тімошенко
(підпис) (ініціали та прізвище)

Керівник роботи _____ М. І. Клименко
(підпис) (ініціали та прізвище)

Нормоконтроль пройдено

Нормоконтролер _____ О. Г. Спиця

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота магістра «Апроксимація функцій в методі скінченних елементів на основі розкладань у ряд Тейлора»: 46 с., 5 рис., 1 табл., 16 джерел.

РЯД ТЕЙЛОРА, ФУНКЦІЇ ФОРМИ, АПРОКСИМАЦІЯ ФУНКЦІЙ, МЕТОД СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ, МОМЕНТНА СХЕМА.

Об’єкт дослідження – розкладання функцій у ряд Тейлора при апроксимації в методі скінченних елементів.

Мета роботи: отримати аналітичні співвідношення для матриць жорсткості трикутних скінченних елементів на основі розкладання апроксимуючих функцій у ряд Тейлора.

Метод дослідження – аналітичний, чисельний, порівняльний.

У даній кваліфікаційній роботі проведено аналіз використання розкладання функцій у ряд Тейлора при розв’язанні різних математичних та технічних задач. Описано основні співвідношення методу скінченних елементів та його модифікації моментної схеми скінченного елементу.

Для тривузлового та шестивузлового трикутних скінченних елементів для апроксимації функцій використано їх розкладання у ряд Тейлора з подальшим їх перетворенням згідно моментної схеми скінченного елементу. На основі отриманих апроксимацій побудовано матриці жорсткості тривузлового та шестивузлового трикутних елементів.

За допомогою отриманих співвідношень для матриць жорсткості отримано розв’язок задачі плоскої теорії пружності про згин консольної балки при різних сітках розбиття на скінченні елементи. Проведено порівняльний аналіз чисельних результатів з відомим аналітичним розв’язком.

SUMMARY

Master's qualification work "Function Approximation in the Finite Element Method Based on Taylor Series Expansions": 45 pages, 8 figures, 3 tables, 11 sources.

TAYLOR'S SERIES, FUNCTIONS OF THE FORM, APPROXIMATION OF FUNCTIONS, FINITE ELEMENT METHOD, MOMENT SCHEME.

The object of the study is the expansion of functions into a Taylor series with approximation in the finite element method.

The purpose of the work: to obtain analytical relations for the stiffness matrices of triangular finite elements based on the expansion of approximating functions into a Taylor series.

The research method is analytical, numerical, comparative.

In this qualification work, an analysis of the use of the Taylor series expansion for functions in solving various mathematical and technical problems was carried out. The main relationships of the finite element method and its modification – finite element moment scheme are described.

For three-node and six-node triangular finite elements, their expansion into a Taylor series was used to approximate the functions, followed by their transformation according to the finite element moment scheme. Based on the obtained approximations, stiffness matrices of three-node and six-node triangular elements were constructed.

With the help of the obtained ratios for the stiffness matrices, the solution of the problem of the plane elasticity theory about the bending of the console beam with different meshes of the finite elements was obtained. A comparative analysis of numerical results with a known analytical solution was carried out.

ЗМІСТ

ЗАВДАННЯ НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТУ 2
РЕФЕРАТ 4
SUMMARY 5
ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ, СКОРОЧЕНЬ І ТЕРМІНІВ 8
ВСТУП 9
1 ЗАСТОСУВАННЯ МНОГОЧЛЕНА ТЕЙЛОРА ДО ОПИСУ ФУНКЦІЙ. АПРОКСИМУЮЧІ ФУНКЦІЇ У МЕТОДІ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ 11
1.1 Основні теоретичні відомості про многочлен Тейлора 11
1.2 Функції форми у методі скінченних елементів 15
2 ПОБУДОВА МАТРИЦЬ ЖОРСТКОСТІ ТРИВУЗЛОВОГО ТА ШЕСТИВУЗЛОВОГО ТРИКУТНИХ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ЗА ДОПОМОГОЮ РОЗКЛАДАННЯ ФУНКЦІЙ У РЯД ТЕЙЛОРА 20
2.1 Основні співвідношення 20
2.2 Класична схема побудови матриці жорсткості трикутного скінченного елементу 23
2.3 Використання розкладання у ряд Тейлора в моментній схемі скінченного елементу 29
2.4 Моментна схема побудови матриці жорсткості шестивузлового трикутного скінченного елементу 31
3 ЗАСТОСУВАННЯ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ПЛОСКОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ НА ОСНОВІ МОМЕНТНОЇ ТА КЛАСИЧНОЇ СХЕМ 38
3.1 Постановка задачі та розрахункова схема 38
3.2 Використання моментної та класичної схеми для трикутного шестивузлового скінченного елементу у задачі про згин балки 39
ВИСНОВКИ 41
ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ 42

ДОДАТОК А 44

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ, СКОРОЧЕНЬ І ТЕРМІНІВ

СЕ – скінченний елемент

МСЕ – метод скінченних елементів

МСР – метод скінченних різниць

МГЕ – метод граничних елементів

МССЕ – моментна схема скінченного елементу

САПР – системи автоматизованого проєктування робіт

ВСТУП

Сучасний стан розвитку математичних та інженерних наук, ускладнення об’єктів дослідження потребує застосування нових та вдосконалення існуючих підходів при дослідженні математичних, природніх та технічних об’єктів. Важливим елементом математичного моделювання є апроксимація функцій, що дає можливість створення нових ефективних обчислювальних алгоритмів для розв’язування важливих науково-технічних задач.

Для розв’язання задачі апроксимації можна використати розкладання функцій у ряд Тейлора, яке дозволяє представляти складні функції у вигляді степеневого ряду, що у більшості випадків спрощує їх вивчення та застосування. Прикладами, застосування розкладання функцій у ряд Тейлора є наближене обчислення функцій та визначених інтегралів, отримання формул для чисельного диференціювання, апроксимації функцій, розв’язання початкових задач для диференціальних рівнянь та багато інших.

Використання многочлена Тейлора, як й інших видів многочленів, у апроксимації функцій відіграє велику роль. З використанням апроксимації функцій на основі поліноміального представлення побудовано багато ефективних методів розв’язання математичних та технічних задач. Так, більшість сучасних систем автоматизованого проєктування робіт (САПР) неможливо уявити без наявності метода скінченних елементів (МСЕ) для розв’язання прикладних крайових задач.

В основу цього методу покладено розбиття області дослідження на підобласті малих, але скінченних розмірів, – скінченні елементи (СЕ). Всередині СЕ шукана функція описується апроксимуючими функціями, які зазвичай є многочленами. І від якості цієї апроксимації залежить точність отриманих розв’язків та така важлива характеристика методу як швидкість збіжності чисельних результатів до точного розв’язку.

Тому удосконалення апроксимуючих функцій, отримання нових схем та

правил апроксимації для різних типів СЕ представляється важливою задачею не тільки у теоретичному плані, але й має значний практичний інтерес для різних проєктних організацій, конструкторських бюро тощо. Одним із шляхів такого вдосконалення є застосування розкладання функцій, пов’язаних із скінченним елементом у ряд Тейлора із подальшим його перетворенням згідно певних правил.

1 ЗАСТОСУВАННЯ МНОГОЧЛЕНА ТЕЙЛОРА ДО ОПИСУ ФУНКЦІЙ. АПРОКСИМУЮЧІ ФУНКЦІЇ У МЕТОДІ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

1.1 Основні теоретичні відомості про многочлен Тейлора

Многочлен Тейлора широко використовується при розв'язанні математичних задач, тому його визначення, властивості та сфери застосування описані у розділах диференціального числення функції однієї та багатьох змінних у численних навчальних посібниках, підручниках, а також у науковій літературі [1].

Для функції $y = f(x)$, яка є диференційованою $(n+1)$ раз у околі деякої точки x_0 побудуємо многочлен ступені n

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n, \qquad (1.1)$$

для якого в точці x_0 його значення та значення його похідних до n порядку збігаються зі значеннями функції $y = f(x)$ та її похідних до n порядку в точці x_0, а саме:

$$P_n(x_0) = f(x_0), P_n'(x_0) = f'(x_0), P_n''(x_0) = f''(x_0), \ldots,$$
$$P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0). \qquad (1.2)$$

В результаті будемо мати многочлен такого виду

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots +$$
$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \qquad (1.3)$$

або у згорнутому виді

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x - x_0)^m, \tag{1.4}$$

Такий многочлен називається многочленом Тейлора для функції $f(x)$.

Якщо позначити різницю між функцією $f(x)$ та $P_n(x)$ як $R_n(x)$, то можемо записати

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x), \tag{1.5}$$

або у розгорнутому виді

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x), \tag{1.6}$$

де $R_n(x)$ – залишковий член формули Тейлора.

Тут залишковий член $R_n(x)$ можна взяти у різних формах. Так, форма Пеано дає залишковий член у такому вигляді

$$R_n(x) = o((x - x_0)^n). \tag{1.7}$$

Залишковий член у формі Лагранжа має вигляд:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}\big(x_0 + \theta(x - x_0)\big)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \tag{1.8}$$

тут $\theta \in (0,1)$.

Залишковий член у формі Коші, або у інтегральній формі можна записати так:

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt. \qquad (1.9)$$

Більшою мірою узагальнюючим є представлення залишкового члена у формі Шльомильха-Роша:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}\big(x_0 + \theta(x-x_0)\big)(1-\theta)^{n-p+1}}{n!\,p}(x-x_0)^{n+1}, \qquad (1.10)$$

тут $\theta \in (0,1),\ p > 0$.

При $p = n+1$ співвідношення перетворюється у залишковий член у формі Лагранжа (1.8).

Поняття многочлену Тейлора може бути розширене і на багатовимірні функції. Так, для функції двох змінних $f(x,y)$ цей многочлен може бути представлений у виді:

$$T(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{f_x(x_0,y_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f_y(x_0,y_0)}{1!}(y-y_0) +$$
$$+\frac{1}{2!}\big((x-x_0)^2 f_{xx}(x_0,y_0) + 2(x-x_0)(y-y_0)f_x(x_0,y_0)f_y(x_0,y_0) +$$
$$+(y-y_0)^2 f_{yy}(x_0,y_0)\big) + \ldots, \qquad (1.11)$$

де частинні похідні функції $f(x,y)$ в точці (x_0,y_0):

$$f_x(x_0,y_0) = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}, f_y(x_0,y_0) = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}, f_{xy}(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y}.$$

У загальному вигляді для функції k змінних $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ в околі точки $(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{k0})$ многочлен Тейлора можна записати у вигляді:

$$T(x_1, x_2, \dots, x_k) = f(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{k0}) + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{k0})}{\partial x_i}(x_i - x_{i0}) +$$

$$+ \frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial^2 f(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{k0})}{\partial x_i \partial x_j}(x_i - x_{i0})\left(x_j - x_{j0}\right) +$$

$$+ \frac{1}{3!}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{k} \frac{\partial^3 f(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{k0})}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}(x_i - x_{i0})\left(x_j - x_{j0}\right)(x_l - x_{l0}) + \cdots \quad (1.12)$$

Якщо розкладання функції відбувається у околі початку системи координат, тобто при $x_0 = 0$ у формулах (1.3), (1.4) для функції однієї змінної або $x_{10} = 0, x_{20} = 0, \dots, x_{k0} = 0$ у формулі (1.12) для функції багатьох змінних, то отримуємо частинний випадок ряду Тейлора – ряд Маклорена. Для функції однієї змінної він має вигляд:

$$P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n, \quad (1.13)$$

або

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \frac{f^{(m)}(0)}{m!}x^m. \quad (1.14)$$

Для функції багатьох змінних ряд Маклорена має вигляд:

$$T(x_1, x_2, \dots, x_k) = f(0,0, \dots,0) + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f(0,0, \dots,0)}{\partial x_i}x_i +$$

$$+\frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial^2 f(0,0,\dots,0)}{\partial x_i \partial x_j}x_i\,x_j+\frac{1}{3!}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{k}\frac{\partial^3 f(0,0,\dots,0)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}x_i\,x_j x_l+\cdots \quad (1.15)$$

Для багатьох відомих функцій розкладання у ряд Маклорена отримано й наведено у довідковій літературі. Так, на практиці часто використовують наступні розкладання функцій у ряд Маклорена:

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}, -\infty < x < +\infty;$$

$$\frac{1}{1+x} = 1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots, -1 < x < 1;$$

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\cdots, -1 < x < 1.$$

Використання розкладання у ряд Тейлора можна знайти у різних галузях та задачах. Так у роботі [2] розкладання у ряд Тейлора застосовано у спеціальній теорії відносності, а саме до виразу для швидкості частинки для знаходження енергії частинки. Застосування рядів Тейлора до моделювання ціноутворювання цінних паперів показано у роботі [3]. Розкладання у ряд Тейлора для функцій багатьох змінних також широко використовується для розв’язання різноманітних задач [4]. У статті [5] для підвищення точності ідентифікації та апроксимації багатовимірних нелінійних об’єктів систем керування розв’язується оптимізаційна задача із використанням багатовимірного ряду Тейлора.

1.2 Функції форми у методі скінченних елементів

Одним із основних наукових напрямків в математичній та інженерних галузях є розвиток методів розв’язання крайових задач як для звичайних диференціальних рівнянь, так і для диференціальних рівнянь у частинних

похідних. Задачі, що виникають у таких дослідженнях, мають велику математичну та обчислювальну складність, тому на перший план виходять чисельні методи. У більшості таких методів передбачається пошук не аналітичного розв’язку задачі, а знаходження числових значень шуканої функції у визначеній кількості дискретних точок – вузлах сіткової області. Так, як зазначалось, МСЕ базуються на представленні області, що займає досліджуваний об’єкт, великою сукупністю підобластей малих розмірів (СЕ), що сполучаються між собою у вузлових точках. Застосування МСЕ у різних галузях можна знайти у багатьох публікаціях, наприклад [6-9]. Інший сітковий метод, у якому похідні, що містяться у диференціальному рівнянні та крайових умовах, замінюються скінченними різницями – метод скінчених різниць (МСР) – також знаходить застосування до розв’язання крайових задач [10].

Метод граничних елементів (МГЕ) використовує дискретизацію (сітки) тільки для межі області, що займає об’єкт, й розв'язує крайові задачі шляхом апроксимації розв'язку на межі області [11].

Розглянемо детальніше МСЕ, а особливості вибору апроксимуючих функцій, які в МСЕ прийнято називати функціями форми. Як функції форми найчастіше використовують інтерполяційні многочлени невисокого ступеня. На вигляд многочлена впливає розмірність задачі. Так, у одновимірних задачах для апроксимації шуканої функції $f(x)$ можемо записати загальний вид многочлена:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i,$$

де α_i – сталі коефіцієнти, x – незалежна змінна.

Аналогічно для двомірного випадку, можна записати:

$$f(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^i y^j \,, (i + j \le k),$$

де α_k – сталі коефіцієнти, x, y – незалежні змінні.

Для тривимірного випадку будемо мати:

$$f(x,y,z) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^i y^j z^m \,, (i + j + m \le k),$$

де α_k – сталі коефіцієнти, x, y, z – незалежні змінні.

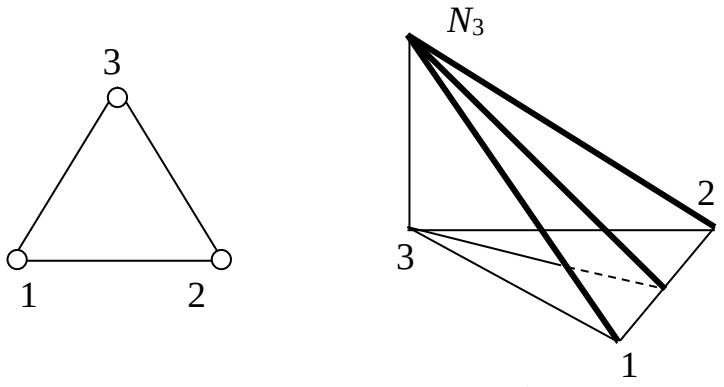
Кількість доданків, що знаходяться під знаком суми, визначаються типом вибраного СЕ, і у більшості випадків дорівнює числу вузлів у скінченному елементу.

Для апроксимації шуканої функції у скінченному елементу функції форми визначаються для кожного вузла (функцію форми і-го вузла позначимо N_i), при цьому умовами для її визначення є те, що вона повинна дорівнювати нулю у всіх вузлах, окрім того вузла, якому вона відповідає – де вона дорівнює одиниці.

Зупинимось на двовимірних крайових задачах, в цьому випадку у МСЕ використовуються скінченні елементи двох типів – у вигляді трикутників та чотирикутників. Розглянемо більш детально найпростіший з цих двох елементів, а саме трикутний, у таких елементах, як правило, використовують лінійну (рис. 1.1 а), квадратичну (рис. 1.2 а) або кубічну (рис.1.3) апроксимацію. Функції форми для деяких вузлів зазначених елементів показані на рис. 1.1 б, 1.2 б, в.

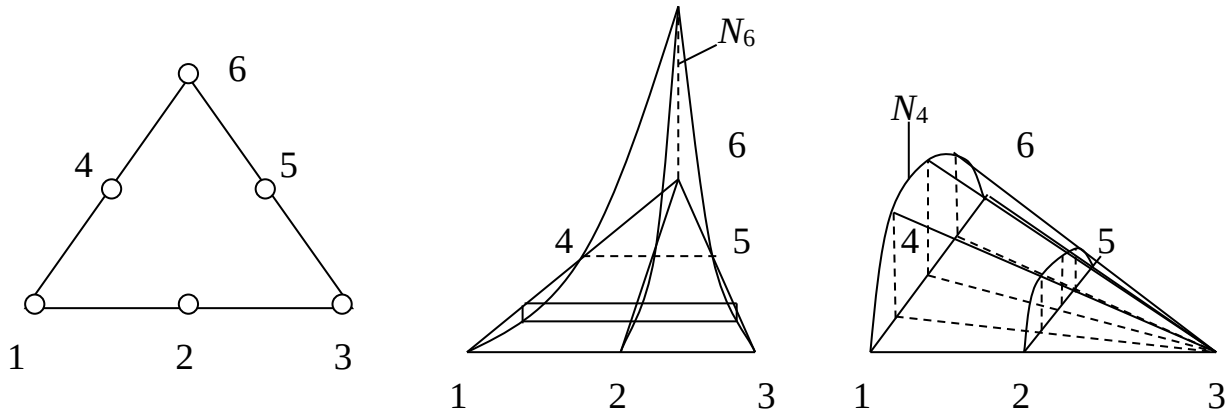
В методі скінченних елементів сполучення СЕ у всій композиції відбувається у вузлах, тобто по межі скінченних елементів, тому наявність внутрішніх вузлів (в середині СЕ) не суттєво впливає на точність подальших обчислень. Для зменшення обчислювальних витрат у деяких елементах

внутрішні вузли вилучаються – в результаті маємо СЕ серендипова сімейства (рис. 1.3 б), на відміну від СЕ із внутрішніми вузлами – СЕ лагранжева сімейства (рис. 1.3 а).



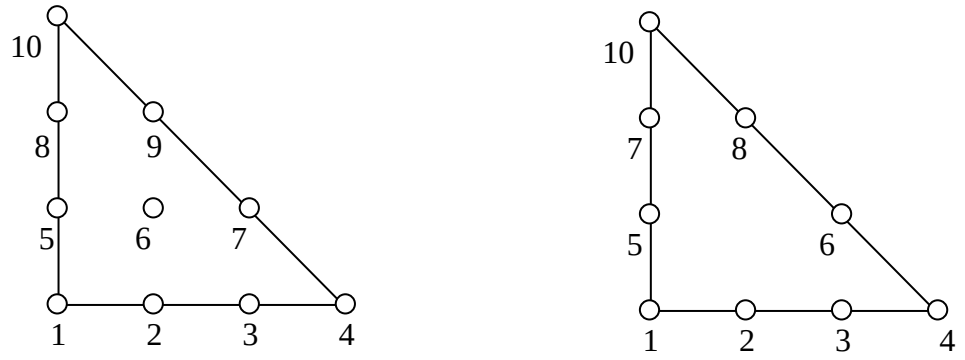
а) б)

Рисунок 3.1 – Трикутний скінченний елемент із лінійною апроксимацією



а) б) в)

Рисунок 3.2 – Трикутний скінченний елемент із квадратичною апроксимацією



а) б)

Рисунок 3.3 – Трикутний скінченний елемент із кубічною апроксимацією

Існують інші види апроксимуючих функцій, які використовують як функції форми у МСЕ, а саме сплайни, інші інтерполяційні многочлени тощо [12, 13].

2 ПОБУДОВА МАТРИЦЬ ЖОРСТКОСТІ ТРИВУЗЛОВОГО ТА ШЕСТИВУЗЛОВОГО ТРИКУТНИХ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ЗА ДОПОМОГОЮ РОЗКЛАДАННЯ ФУНКЦІЙ У РЯД ТЕЙЛОРА

2.1 Основні співвідношення

Розглянемо застосування МСЕ із застосуванням запропонованих СЕ до розв'язання крайових задач плоскої теорії пружності. Передбачається, що об'єкт дослідження – деформівне тверде тіло – має певні обмеження по переміщенню його частин, а на інших частинах діють зовнішні сили. Цей вплив визиває реакцію тіла, у ньому виникають внутрішні сили – напруження, а відстані між точками тіла змінюються – воно деформується. Цей напружено-деформований стан характеризується трьома незалежними напруженнями – двома нормальними σ_{11}, σ_{22} та дотичним σ_{12}. Деформація теж складається із трьох незалежних компонентів – лінійних деформацій $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}$ та кутової γ_{12}. У векторній формі ці компоненти можна записати так:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}; \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}. \quad (2.1)$$

Іншою функцією, що описує стан деформованого тіла, є функція переміщень точок тіла, яка у двовимірному випадку складається з двох компонент. Їх теж можна записати у векторній формі:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}. \quad (2.2)$$

Напруження, деформації та переміщення є залежними між собою. Так, деформації та переміщення пов'язані між собою співвідношеннями Коші, або

геометричними співвідношеннями:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \gamma_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \tag{2.3}$$

або в матричній формі:

$$\{\varepsilon\} = [\partial]\{u\}, \tag{2.4}$$

тут матриця диференціювання має вигляд:

$$[\partial] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix}.$$

Зв’язок між компонентами деформацій та компонентами напружень описується фізичними рівняннями. Візьмемо цей зв’язок лінійним – у формі закону Гука:

$$\sigma_{11} = (2\mu + \lambda)\varepsilon_{11} + \lambda\varepsilon_{22},$$
$$\sigma_{22} = \lambda\varepsilon_{11} + (2\mu + \lambda)\varepsilon_{22},$$
$$\sigma_{12} = \mu\gamma_{12}.$$

В матричній формі цей закон має вигляд:

$$\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\}, \tag{2.5}$$

тут матриця пружних сталих матеріалу запишеться так:

$$[E] = \begin{bmatrix} 2\mu + \lambda & \lambda & 0 \\ \lambda & 2\mu + \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Елементи цієї матриці записуються через сталі μ та λ, які в свою чергу можуть бути представлені через такі механічні характеристики матеріалу як модуль пружності E та коефіцієнт Пуассона ν. У плоскій задачі теорії пружності деформоване тіло може знаходитися в одному із двох станів – у плосконапруженому стані або у стані плоскої деформації. Тому для сталих μ та λ маємо:

для плоскої деформації

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)};\ \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)},$$

для плоского напруженого стану

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)};\ \lambda = \frac{E\nu}{(1-\nu^2)}.$$

Тоді матриця пружних сталих для цих двох станів буде приймати такий вид:

для плоско-деформованого стану

$$[E] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

для плоско-напруженого стану

$$[E] = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}.$$

2.2 Класична схема побудови матриці жорсткості трикутного скінченного елементу

Побудуємо матрицю жорсткості шестивузлового скінченного елементу (рис. 2.1) за класичною схемою.

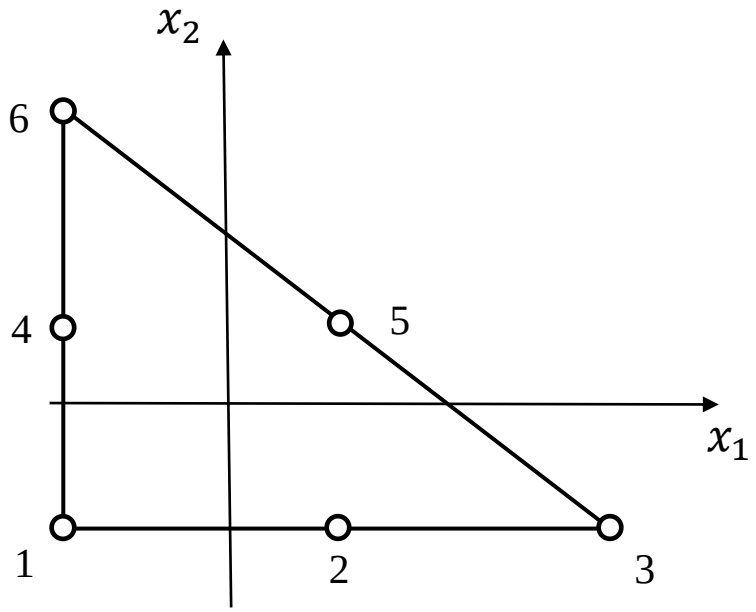


Рисунок 2.1 – Шестивузловий трикутний скінченний елемент

Зробимо це для стандартного прямокутного скінченного елементу із сторонами (катетами), що дорівнюють 1. При розрахунку реальних об’єктів, коли наявні скінченні елементи за формою та розмірами відрізняються від описаного, будемо перетворювати основні співвідношення матриці жорсткості за допомогою формул перетворення координат. Для цього введемо місцеву систему координат, яку розмістимо у центрі ваги трикутника. Кожен вузол у цій системі координат буде визначатися двома координатами $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}$

(i = 1,…,6 – номера вузлів). При такому виборі локальної системи координат та запропонованій нумерації вузлів, кожен вузол скінченного елементу буде мати такі координати:

1 (-1/3; -1/3), 2 (1/6; -1/3),
3 (2/3; -1/3), 4 (-1/3; 1/6),
5 (1/6; 1/6), 6 (-1/3; 2/3).

Якщо розв’язувати плоску задачу теорії пружності, то кожен вузол буде характеризуватися двома компонентами вектору переміщень $u_1^{(i)}, u_2^{(i)}$ у напрямку координатних осей x_1 та x_2.

Тоді вектор вузлових переміщень трикутного шестивузлового СЕ прийме вид:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \\ u_1^{(3)} \\ u_2^{(3)} \\ u_1^{(4)} \\ u_2^{(4)} \\ u_1^{(5)} \\ u_2^{(5)} \\ u_1^{(6)} \\ u_2^{(6)} \end{Bmatrix}. \qquad (2.7)$$

Побудуємо апроксимуючі функції всередині СЕ у вигляді многочленів для двох шуканих функцій переміщень $u_1(x_1, x_2)$ і $u_2(x_1, x_2)$, притримуючись симетрії відносно змінних x_1 та x_2:

$$u_1(x_1, x_2) = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_2 \alpha_1 + \alpha_4 x_1 x_2 + \alpha_5 x_1^2 + \alpha_6 x_2^2, \quad (2.8)$$

$$u_2(x_1, x_2) = \beta_1 + \beta_2 x_1 + \beta_3 x_2 \alpha_1 + \beta_4 x_1 x_2 + \beta_5 x_1^2 + \beta_6 x_2^2, \quad (2.9)$$

Дванадцять сталих α_i та β_i знаходяться з тієї умови, що при підстановці вузлових координат $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}$ ці функції повинні дорівнювати вузловим значенням переміщень. Так, для апроксимації (2.8) матимемо систему таких рівнянь:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 x_1^{(1)} + \alpha_3 x_2^{(1)} + \alpha_4 x_1^{(1)} x_2^{(1)} + \alpha_5 \left(x_1^{(1)}\right)^2 + \alpha_6 \left(x_2^{(1)}\right)^2 = u_1^{(1)}, \\ \alpha_1 + \alpha_2 x_1^{(2)} + \alpha_3 x_2^{(2)} + \alpha_4 x_1^{(2)} x_2^{(2)} + \alpha_5 \left(x_1^{(2)}\right)^2 + \alpha_6 \left(x_2^{(2)}\right)^2 = u_1^{(2)}, \\ \alpha_1 + \alpha_2 x_1^{(3)} + \alpha_3 x_2^{(3)} + \alpha_4 x_1^{(3)} x_2^{(3)} + \alpha_5 \left(x_1^{(3)}\right)^2 + \alpha_6 \left(x_2^{(3)}\right)^2 = u_1^{(3)}, \\ \alpha_1 + \alpha_2 x_1^{(4)} + \alpha_3 x_2^{(4)} + \alpha_4 x_1^{(4)} x_2^{(4)} + \alpha_5 \left(x_1^{(4)}\right)^2 + \alpha_6 \left(x_2^{(4)}\right)^2 = u_1^{(4)}, \\ \alpha_1 + \alpha_2 x_1^{(5)} + \alpha_3 x_2^{(5)} + \alpha_4 x_1^{(5)} x_2^{(5)} + \alpha_5 \left(x_1^{(5)}\right)^2 + \alpha_6 \left(x_2^{(5)}\right)^2 = u_1^{(5)}, \\ \alpha_1 + \alpha_2 x_1^{(6)} + \alpha_3 x_2^{(6)} + \alpha_4 x_1^{(6)} x_2^{(6)} + \alpha_5 \left(x_1^{(6)}\right)^2 + \alpha_6 \left(x_2^{(6)}\right)^2 = u_1^{(6)}. \end{cases} \quad (2.10)$$

Розв’язання системи (2.10) з конкретними координатами вузлів скінченного елементу дасть нам шість сталих α_i, підстановка яких у співвідношення (2.8) визначить функцію переміщень точок СЕ у першому напрямку. А подальше її перетворення й перегрупування доданків відносно вузлових значень переміщень $u_1^{(i)}$ надає змогу записати цю апроксимацію у такому виді:

$$u_1(x_1, x_2) = u_1^{(1)} N_1 + u_1^{(2)} N_2 + u_1^{(3)} N_3 + u_1^{(4)} N_4 + u_1^{(5)} N_5 + u_1^{(6)} N_6, \quad (2.11)$$

тут апроксимуючі функції (функції форми) шестивузлового трикутного скінченного елемента матимуть вид:

$$N_1 = -2\left(\frac{1}{6} + x_1 + x_2\right)\left(\frac{1}{3} - x_1 - x_2\right);$$

$$N_2 = 4\left(\frac{1}{3} + x_1\right)\left(\frac{1}{3} - x_1 - x_2\right);$$

$$N_3 = -2\left(\frac{1}{3} + x_1\right)\left(\frac{1}{6} - x_1\right);$$

$$N_4 = 4\left(\frac{1}{3} + x_2\right)\left(\frac{1}{3} - x_1 - x_2\right);$$

$$N_5 = 4\left(\frac{1}{3} + x_1\right)\left(\frac{1}{3} + x_2\right);$$

$$N_6 = -2\left(\frac{1}{3} + x_2\right)\left(\frac{1}{6} - x_2\right). \qquad (2.12)$$

Невизначені сталі β_i, що входять у представлення (2.9) для $u_2(x_1, x_2)$, знаходяться аналогічно послідовною підстановкою у (2.9) вузлових координат $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}$ та значень вузлових переміщень $u_2^{(i)}$. Тоді будемо мати абсолютно ідентичну систему:

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 x_1^{(1)} + \beta_3 x_2^{(1)} + \beta_4 x_1^{(1)} x_2^{(1)} + \beta_5 \left(x_1^{(1)}\right)^2 + \beta_6 \left(x_2^{(1)}\right)^2 = u_2^{(1)}, \\ \beta_1 + \beta_2 x_1^{(2)} + \beta_3 x_2^{(2)} + \beta_4 x_1^{(2)} x_2^{(2)} + \beta_5 \left(x_1^{(2)}\right)^2 + \beta_6 \left(x_2^{(2)}\right)^2 = u_2^{(2)}, \\ \beta_1 + \beta_2 x_1^{(3)} + \beta_3 x_2^{(3)} + \beta_4 x_1^{(3)} x_2^{(3)} + \beta_5 \left(x_1^{(3)}\right)^2 + \beta_6 \left(x_2^{(3)}\right)^2 = u_2^{(3)}, \\ \beta_1 + \beta_2 x_1^{(4)} + \beta_3 x_2^{(4)} + \beta_4 x_1^{(4)} x_2^{(4)} + \beta_5 \left(x_1^{(4)}\right)^2 + \beta_6 \left(x_2^{(4)}\right)^2 = u_2^{(4)}, \\ \beta_1 + \beta_2 x_1^{(5)} + \beta_3 x_2^{(5)} + \beta_4 x_1^{(5)} x_2^{(5)} + \beta_5 \left(x_1^{(5)}\right)^2 + \beta_6 \left(x_2^{(5)}\right)^2 = u_2^{(5)}, \\ \beta_1 + \beta_2 x_1^{(6)} + \beta_3 x_2^{(6)} + \beta_4 x_1^{(6)} x_2^{(6)} + \beta_5 \left(x_1^{(6)}\right)^2 + \beta_6 \left(x_2^{(6)}\right)^2 = u_2^{(6)}. \end{cases} \qquad (2.13)$$

Розв’язання системи (2.13) з координатами вузлів досліджуваного шестивузлового трикутного СЕ елементу дасть шість сталих β_i, підстановка яких у співвідношення (2.9) визначить функцію переміщень точок СЕ у другому напрямку. Після математичних перетворень для функції $u_2(x_1, x_2)$

будемо мати:

$$u_2(x_1, x_2) = u_2^{(1)} N_1 + u_2^{(2)} N_2 + u_2^{(3)} N_3 + u_2^{(4)} N_4 + u_2^{(5)} N_5 + u_2^{(6)} N_6, \quad (2.14)$$

де функції форми шестивузлового трикутного скінченного елемента матимуть такий же самий вид, як (2.12).

Після того, як було визначено функції форми скінченного елементу перейдемо безпосередньо до побудови матриці жорсткості шестивузлового трикутного скінченного елементу, для цього вирази (2.11) та (2.14) запишемо у матричній формі:

$$\{U\} = [N]\,\{u\}, \quad (2.15)$$

тут $\{U\} = \begin{Bmatrix} u_1(x_1, x_2) \\ u_2(x_1, x_2) \end{Bmatrix}$ – вектор переміщень будь-якої внутрішньої точки СЕ,

$\{u\}$ – вектор вузлових переміщень виду (2.7),

$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 \end{bmatrix}$ – матриця функцій форми, як сформована таким чином, щоб виконувались права частина співвідношень (2.11) та (2.14).

При побудові матриці жорсткості скінченних елементів для розв’язання механічних задач використовують величину пружної енергії деформування скінченного елемента:

$$W = \int_V \frac{\{\varepsilon\}^T \{\sigma\}}{2} dV, \quad (2.16)$$

де V – об’єм скінченного елементу, S – його площа.

Якщо перейти від просторової постановки задачі до двовимірної, то це

співвідношення можна записати так:

$$W = t \int_S \frac{\{\varepsilon\}^T \{\sigma\}}{2} dS, \tag{2.17}$$

де t – товщина скінченного елементу, S – його площа, а вектори $\{\varepsilon\}$ та $\{\sigma\}$ визначаються співвідношенням (2.1).

Враховуючи представлення функції переміщень через функції форми у співвідношеннях Коші для вектору деформацій будемо мати:

$$\{\varepsilon\} = [\partial]\{U\} = [\partial][N]\{u\} = [B]\{u\},$$

де $[B] = [\partial][N]$.

Так само підставимо вектор деформацій у матричний вираз для закону Гука:

$$\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\} = [E][B]\{u\},$$

Тоді, з урахуванням запропонованих представлень, енергія пружної деформації СЕ запишеться так:

$$W = \frac{1}{2} t \int_S ([B]\{u\})^T [E][B]\{u\}\, dS. \tag{2.18}$$

Використавши правила матричного множення, а саме $([B]\{u\})^T = \{u\}^T [B]^T$, для виразу (2.18) можемо записати:

$$W = \frac{1}{2} t\{u\}^T \int_S [B]^T [E][B]\, dS \cdot \{u\}. \quad (2.19)$$

Аналізуючи вираз для пружної енергії матеріалу (2.19), можемо виокремити із нього частину, яка описує властивості області, яку займає СЕ, ця частина виразу називається матрицею жорсткості скінченного елементу й має вид:

$$[K] = t \int_S [B]^T [E][B]\, dS. \quad (2.20)$$

Розмірність матриці жорсткості (вона є квадратною) залежить від розмірності задачі та кількості вузлів СЕ, у даному випадку для шестивузлового плоского трикутного скінченного елементу розмірність буде дорівнювати – 12×12.

2.3 Використання розкладання у ряд Тейлора в моментній схемі скінченного елементу

Ключовим недоліком класичної схеми побудови матриць жорсткості у методі скінченних елементів є низка збіжність результатів розрахунків до точного розв’язку при розв’язанні певних класів задач теорії пружності, наприклад, у задачах де є значні деформації згину. Це обумовлено двома недоліками цього методу, а саме неврахуванню зміщень СЕ як абсолютно жорсткого цілого та ефектом «хибного зсуву». Для нівелювання цих недоліків була розроблена моментна схема скінченного елементу, яка полягає у подвійній апроксимації шуканих функцій за допомогою розкладань у ряд Тейлора.

Якщо брати розв’язання задач теорії пружності, то у ряд Тейлора в околі

початку системи координат (ряд Маклорена) розкладаються функції переміщень (для тривимірного випадку) [13, 14]:

$$u_{k\prime} = \sum_{p=0}^{M}\sum_{q=0}^{N}\sum_{r=0}^{L} \omega_{k\prime}^{(pqr)}\,\psi^{(pqr)},$$

тут $\omega_{k\prime}^{(pqr)}$ – тейлоровські коефіцієнти розкладання переміщень; $\psi^{(pqr)}$ – система степеневих функцій, яка має вид:

$$\psi^{(pqr)} = \frac{(x_1)^p (x_2)^q (x_3)^r}{p!\,q!\,r!}.$$

де $p = 0, \dots, M; q = 0, \dots, N;\ r = 0, \dots, L$ – степені многочленів у відповідних координатних напрямках.

Так само розкладемо складові деформацій в ряд Маклорена в околі початку системи координат [13, 14]:

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{p=0}^{M}\sum_{q=0}^{N}\sum_{r=0}^{L} e_{ij}^{(pqr)}\,\psi^{(pqr)},$$

де $e_{ij}^{(pqr)}$ – коефіцієнти розкладання деформацій.

При подальшому аналізі цих розкладань та із урахуванням співвідношень, що пов’язують обидві розкладені функції між собою, з’ясовується, що певні доданки у розкладаннях є неузгодженими, тому згідно певних правил вони повинні бути вилучені із наведених розкладань компонентів деформацій. Це дозволяє нівелювати описані вище недоліки традиційного МСЕ.

2.4 Моментна схема побудови матриці жорсткості шестивузлового трикутного скінченного елементу

За допомогою розкладання шуканих функцій у ряд Тейлора побудуємо матрицю жорсткості для трикутного шестивузлового скінченного елементу (рис. 2.1).

Представимо компоненти вектору переміщень точок СЕ у вигляді розкладання у ряд Тейлора у околі початку координат, утримаємо при цьому кількість доданків, що дорівнює кількості вузлів трикутного скінченного елементу:

$$u_1 = \zeta_1^{(1)} + \zeta_1^{(2)} x_1 + \zeta_1^{(3)} x_2 + \zeta_1^{(4)} x_1 x_2 + \frac{1}{2}\zeta_1^{(5)} x_1^2 + \frac{1}{2}\zeta_1^{(6)} x_2^2,$$

$$u_2 = \zeta_2^{(1)} + \zeta_2^{(2)} x_1 + \zeta_2^{(3)} x_2 + \zeta_2^{(4)} x_1 x_2 + \frac{1}{2}\zeta_2^{(5)} x_1^2 + \frac{1}{2}\zeta_2^{(6)} x_2^2$$

ці вирази у матричній формі приймуть вид:

$$\{u\} = \{\Psi\}[\mathrm{Z}] \tag{2.23}$$

де $\{u\} = \{u_1 \quad u_2\}$ – вектор переміщень будь-якої точки скінченного елементу,

$[Z] = [\{Z_1\} \quad \{Z_2\}]$ – це матриця коефіцієнтів розкладання переміщень $\zeta_i^{(k)}$, які не мають будь-якої фізичної інтерпретації:

$$(\{Z_i\} = \begin{Bmatrix} \zeta_i^{(1)} \\ \zeta_i^{(2)} \\ \zeta_i^{(3)} \\ \zeta_i^{(4)} \\ \zeta_i^{(5)} \\ \zeta_i^{(6)} \end{Bmatrix},$$

$\{\Psi\}$ – вектор степеневих функцій:

$$\{\Psi\} = \left\{1 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_1 x_2 \quad \frac{x_1^2}{2} \quad \frac{x_2^2}{2}\right\}.$$

Тепер скориставшись співвідношеннями Коші й враховуючи розкладання (2.23) складові вектору деформацій представимо через тейлоровські коефіцієнти розкладання переміщень:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \zeta_1^{(2)} + \zeta_1^{(5)} x_1 + \zeta_1^{(4)} x_2, \\ \varepsilon_{22} &= \zeta_2^{(3)} + \zeta_2^{(4)} x_1 + \zeta_2^{(6)} x_2, \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2}\zeta_1^{(3)} + \frac{1}{2}\zeta_2^{(2)} + \left(\frac{1}{2}\zeta_1^{(4)} + \frac{1}{2}\zeta_2^{(5)}\right) x_1 + \frac{1}{2}\left(\zeta_1^{(6)} x_2 + \zeta_2^{(4)}\right) x_2. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Запишимо співвідношення (2.24) у матричній формі:

$$\{\varepsilon\} = \left[\widehat{\Psi}\right][F]\{\hat{Z}\}, \tag{2.25}$$

де вектор деформацій має вид:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix},$$

а матрицю степеневих функцій запишемо у такому виді:

$$\left[\widehat{\Psi}\right] = \begin{bmatrix} \{\Psi\} & \{0\} & \{0\} & \{0\} \\ \{0\} & \{\Psi\} & \{0\} & \{0\} \\ \{0\} & \{0\} & \{\Psi\} & \{\Psi\} \end{bmatrix},$$

тут $\{0\}$ – нульовий вектор розмірністю 1×6,

матриця сталих коефіцієнтів $[F]$ має вигляд:

$$[F] = \begin{bmatrix} [F_{11}] & [0] & \left[\hat{0}\right]^T \\ [0] & [F_{22}] & \left[\hat{0}\right]^T \\ \left[\hat{0}\right] & \left[\hat{0}\right] & [F_{12}] \end{bmatrix},$$

де $[0], \left[\hat{0}\right]$ – нульові матриці розмірністю 6×6 та 12×6, відповідно,

матриця тейлоровських коефіцієнтів розкладання $\left\{\hat{Z}\right\}$ має вид:

$$\left\{\hat{Z}\right\}^T = \{\{Z_1\}^T \quad \{Z_2\}^T \quad \{Z_1\}^T \quad \{Z_2\}^T\}.$$

Щоб встановити зв'язок між тейлоровськими коефіцієнтами розкладання переміщень, які не мають фізичної інтерпретації, та вузловими значеннями переміщень, перепишемо співвідношення (2.15) у дещо іншій матричній формі:

$$\{U\} = \{N\}[u], \tag{2.26}$$

де $[u] = [\{u_1\}^T \quad \{u_2\}^T]$, $\{u_i\} = \left\{u_i^{(1)} \quad u_i^{(2)} \quad u_i^{(3)} \quad u_i^{(4)} \quad u_i^{(5)} \quad u_i^{(6)}\right\}$ – вектор вузлових переміщень,

$\{N\} = \{N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \quad N_5 \quad N_6\}$ – функція форми для шестивузлового трикутного скінченного елементу виду (2.12), які можна записати у канонічній для многочленів формі:

$$N_1 = -\frac{1}{9} - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + 4x_1x_2 + 2(x_1)^2 + 2(x_2)^2;$$

$$N_2 = \frac{4}{9} - \frac{4}{3}x_2 - 4x_1x_2 - 4(x_1)^2;$$

$$N_3 = -\frac{1}{9} + \frac{1}{3}x_1 + 2(x_1)^2;$$

$$N_4 = \frac{4}{9} - \frac{4}{3}x_1 - 4x_1x_2 - 4(x_2)^2;$$

$$N_5 = \frac{4}{9} + \frac{4}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2 + 4x_1x_2;$$

$$N_6 = -\frac{1}{9} + \frac{1}{3}x_2 + 2(x_2)^2.$$

Таким чином, співставляючи вирази (2.23) та (2.26) прийдемо до рівності:

$$\{\Psi\}\{\mathrm{Z}\} = [N]\{u\},$$

функції форми $\{N\}$ за своєю суттю теж є степеневими функціями, які можна представити за допомогою вектору $\{\Psi\}$ та деякої матриці $[A]$:

$$\{N\} = \{\Psi\}[A].$$

Матриця $[A]$ – матриця перетворень – може бути представлена у такому виді:

$$[A] = \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ 4 & -4 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Через цю матрицю перетворень та вузлові значення вектору переміщень можна виразити тейлоровські коефіцієнти розкладання переміщень у векторі $\{Z\}$:

$$\{Z_i\} = [A]\{u_i\}.$$

Тоді компоненти деформацій можна представити у такій матричній формі:

$$\{\varepsilon\} = \left[\widehat{\Psi}\right][F]\left[\hat{A}\right][\hat{u}], \tag{2.27}$$

де $\{\hat{u}\}^T = \{\{u_1\} \quad \{u_2\} \quad \{u_1\} \quad \{u_2\}\}$, $\left[\hat{A}\right] = \begin{bmatrix} [A] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [A] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [A] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [A] \end{bmatrix}$.

Матриця $[F]$ складається із числових сталих, які стоять попереду тейлоровських коефіцієнтів та степеневих функцій у розкладанні для деформації. Для ε_{11} маємо:

$$F_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для складової ε_{22} запишемо:

$$F_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для компоненти ε_{12} складова матриці $[F]$ набуде виду:

$$F_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

З урахуванням усіх отриманих підматриць підставляємо вираз для деформацій виду (2.27) у співвідношення для пружної енергії деформації шестивузлового трикутного скінченного елементу (2.17) і після певних матричних перетворень отримаємо вираз для цієї енергії із урахуванням розкладання шуканих функцій у ряд Тейлора:

$$W = \frac{1}{2}([\hat{u}])^T t \int_S \left([\hat{A}]\right)^T ([F])^T \left([\widehat{\Psi}]\right)^T [E][\widehat{\Psi}][F][\hat{A}]\, dS[\hat{u}], \qquad (2.28)$$

З останнього співвідношення виокремлюємо матрицю жорсткості шестивузлового трикутного скінченного елементу:

$$[K] = t \int_S \left([\hat{A}]\right)^T ([F])^T \left([\widehat{\Psi}]\right)^T [E][\widehat{\Psi}][F][\hat{A}]\, dS. \qquad (2.29)$$

Побудова матриць жорсткості скінченних елементів виду (2.19) та (2.29) із подальшим їх комбінуванням у глобальній матриці жорсткості реалізовано у математичному пакеті за допомогою комп’ютера.

3 ЗАСТОСУВАННЯ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ПЛОСКОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ НА ОСНОВІ МОМЕНТНОЇ ТА КЛАСИЧНОЇ СХЕМ

3.1 Постановка задачі та розрахункова схема

Розв'яжемо задачу плоскої теорії пружності про згин консольної балки. У цій задачі один край балки є жорстко защемлений, а до іншого, консольного краю балки прикладена зосереджена сила, як показано на рис. 3.1.

Розміри балки приймемо такими: товщина балки $t = 1$ м, ширина балки $b = 2$ м, довжина балки $a = 10$ м.

Механічні характеристики матеріалу консольної балки: модуль пружності $E = 2{,}1 \times 10^{11}$ Па, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0{,}3$.

Зосереджена сила $P = 4 \times 10^{8}$ Н.

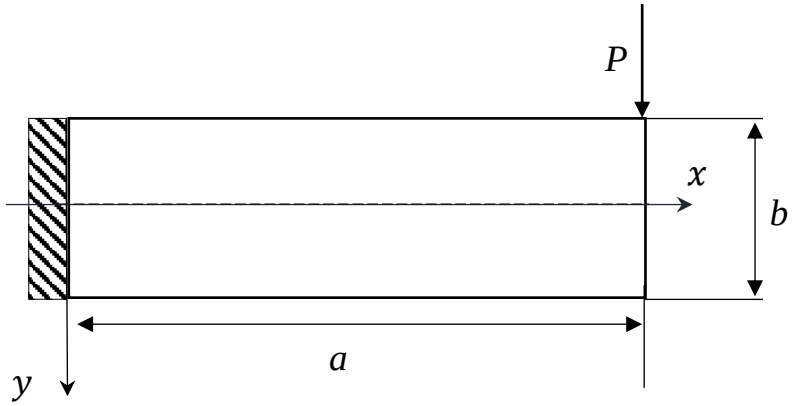


Рисунок 3.1 – Розрахункова схема для консольної балки

Розв'язання задачі полягає у визначенні напружено-деформованого стану усіх точок консольної балки при заданих умовах закріплення та навантаження, тобто визначається деформований стан (переміщення або деформації) і напружений стан (механічні напруження).

3.2 Використання моментної та класичної схеми для трикутного шестивузлового скінченного елементу у задачі про згин балки

Для плоскої задачі про згин балки відомий точний розв'язок, тобто знайдені функції переміщень, які описують двовимірні переміщення будь-якої точки консольної балки. Але, як правило, в таких задачах важливо визначити переміщення не всього масив точок, а окремих характерних точок, ліній, поверхонь. В даному випадку проаналізуємо прогин серединної лінії балки, тобто лінії $y = 0$. Також можна проаналізувати максимальне значення прогину серединної лінії балки, яке досягається на консольному кінці балки. Аналітичне співвідношення для прогину серединної лінії балки має вид [16]:

$$u_2(x) = \frac{12P\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)}{Eb^3}. \quad (3.1)$$

Для приведених вихідних даних прогин серединної лінії консольної балки прийме вид:

$$u_2(x) = 0{,}01429x^2 - 0{,}000476x^3.$$

Тоді максимальне значення прогину серединної лінії балки буде досягнуто на консольному кінці балки при $x = 10$ м – $u_{2max}(10) = 0{,}953$ м.

Для отримання скінченноелементних розв'язків цієї задачі будемо розбивати консольну балку на шестивузлові трикутні скінченні елементи. Розв'язки будемо отримувати із використанням матриць жорсткості, отриманих як на основі класичної схеми, так і на основі моментної схеми скінченного елементу. Також будемо варіювати (збільшувати) кількість скінченних елементів для дослідження збіжності отримуваних чисельних результатів.

В таблиці 3.1 наведені результати чисельних розрахунків максимального

прогину консольної балки. Похибка розраховувалась за формулою:

$$\varepsilon = \frac{u^*_{2max} - u_{2max}}{u_{2max}} 100\%,$$

де u_{2max} – аналітичне значення максимального прогину серединної лінії балки,

u_{2max} – чисельне значення максимального прогину серединної лінії балки.

Таблиця 3.1 – Максимальний прогин серединної лінії балки

Кількість вузлів (сітка СЕ)	Величина максимального прогину			
	МСЕ, м	Похибка, %	МССЕ, м	Похибка, %
7×3	0,868	-8,92	0,858	-9,97
9×3	0,874	-8,29	0,875	-8,19
9×5	0,878	-7,87	0,895	-6,09
11×5	0,881	-7,56	0,901	-5,46

Як можна зауважити, застосування шестивузлового трикутного скінченного елементу на основі моментної схеми до запропонованої задачі при грубих сітках скінченних елементів дає навіть гірший результат, ніж при застосуванні аналогічних СЕ на основі класичної схеми. Але при згущенні сіток швідкість збіжності чисельних результатів пришвидшується й чисельні результати прямують до точного розв’язку краще, ніж для СЕ на основі класичної схеми.

Візуальне представлення напружено-деформованого стану консольної балки, отримане при сітці вузлів скінченних елементів 11×5 за допомогою шестивузлових трикутних скінченних елементів на основі моментної схеми, показано у доданку А на рисунках А. 1-А. 5.

ВИСНОВКИ

В кваліфікаційній роботі розглядається застосування розкладання функцій у ряд Тейлора для апроксимації шуканих функцій у методі скінченних елементів. Розглянуто представлення розкладання функцій у ряд Тейлора, представлення залишкового члена у різних формах. Розглянуто застосування розкладання у ряд Тейлора до розв’язання прикладних задач. Описано методологію вибору апроксимуючих функцій у методі скінченних елементів, основні типи скінченних елементів та види апроксимуючих функцій.

На прикладі шестивузлового трикутного скінченного елементу показано формування функцій форми з подальшою побудовою матриці жорсткості на основі класичної схеми. Для такого ж скінченного елементу застосована моментна схема побудови матриці жорсткості, яка полягає в тому, що як апроксимуючі функції використовуються частинні суми розкладання шуканих функцій у ряд Тейлора.

Із використанням матриць жорсткості, отриманих на основі класичної та моментної схеми, розв’язано плоску задачу теорії пружності про згин консольної балки. Розрахунки проводились із різними сітками розбиття на скінченні елементи, проведено порівняння із відомим аналітичним розв’язком. Показано, що скінченний елемент на основі моментної схеми дає швидшу збіжність чисельних результатів до точного розв’язку у порівнянні із скінченним елементом на основі класичної схеми.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Ільченко О.В. Посібник з курсу “Математичний аналіз” для студентів ННІ «Інститут геології». Київ: КНУ імені Тараса Шевченка, 2021. 65 с.
2. Радзієвська О.І., Ковальська І.Б. Використання формули Тейлора для розв’язування фізичних задач. *Збірник наукових праць Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. Серія педагогічна концепція формування природничо-наукової компетентності та світогляду майбутнього фахівця в умовах stem-освіти*. 2021. № 27. С. 165–167.
3. Буртняк І.В., Малицька Г.П. Застосування рядів Тейлора для ціноутворення похідних цінних паперів. *Матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції «Економічна кібернетика: перспективи розвитку інформаційної економіки»*. Дніпро, 2018. С. 15–19.
4. Duistermaat J.J., Kolk J.A.C. Taylor Expansion in Several Variables. In: Distributions. Cornerstones. Boston: Birkhäuser Boston. 2010. P. 59–63.
5. Алтухова Т. Апроксимація багатовимірних нелінійних об’єктів степеневими рядами методом зворотнього поширення похибки. *Науковий журнал: МНУ імені В. О. Сухомлинського. Геометричне моделювання та інформаційні технології*.·2016. № 2. С. 6–10.
6. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z. The finite element method: its basis and fundamentals. Amsterdam: Elsevier, Butterworth-Heinemann. 2013. 714 p.
7. Barbero E.J. Finite Element Analysis of Composite Materials using Abaqus. Boca Raton: CRC Press, 2023. 571 p.
8. Szabó B., Babuška I. Finite element analysis: Method, verification and validation. New Jork: Wiley, 2021. 363 p.
9. Gupta R.K. Numerical Methods: Fundamentals and Applications. Cambridge: Cambridge University Press. 2019. 824 p.

10. Özişik M.N., Orlande H.R.B., Colaço M.J., Cotta R.M. Finite difference methods in heat transfer. Boca Raton: CRC Press, 2017. 600 p.
11. Kythe P.K. An introduction to boundary element methods. Boca Raton: CRC Press, 2020. 384 p.
12. Zienkiewicz O.C., Morgan K. Finite elements and approximation. New York: Courier Corporation, 2006. 328 p.
13. Ern A., Guermond J.-L. Finite elements I: Approximation and interpolation. Cham: Springer Nature, 2021. 277 p.
14. Киричевський В.В., Дохняк Б.М., Гребенюк С.М. Трикутні скінченні елементи у механіці руйнування еластомерів. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2000. Вип. 67. С. 72–83.
15. Гребенюк С.М., Гоменюк С.І., Клименко М.І. Напружено-деформований стан просторових конструкцій на основі гомогенізації волокнистих композитів. Херсон: Гельветика, 2019. 350 с.
16. Божидарник В.В., Сулим Г.Т. Елементи теорії пружності. Львів: Світ, 1994. 560 с.

ДОДАТОК А

ВІЗУАЛІЗАЦІЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ КОНСОЛЬНОЇ БАЛКИ

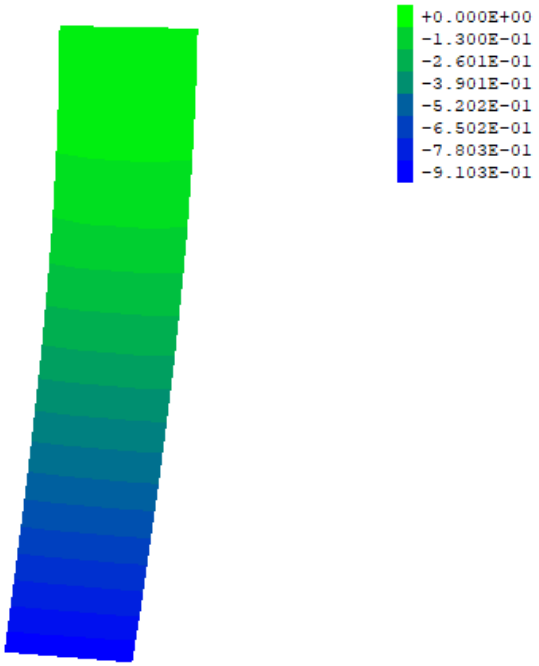


Рисунок А. 1 – Розподіл переміщень u_2

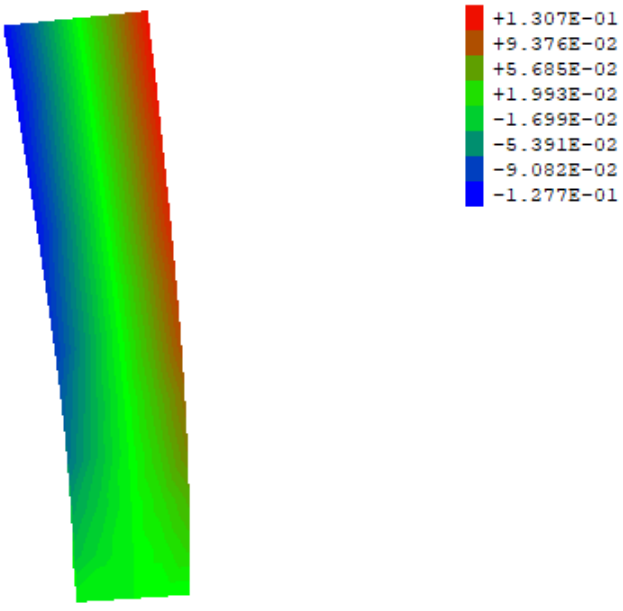


Рисунок А. 2 – Розподіл переміщень u_1

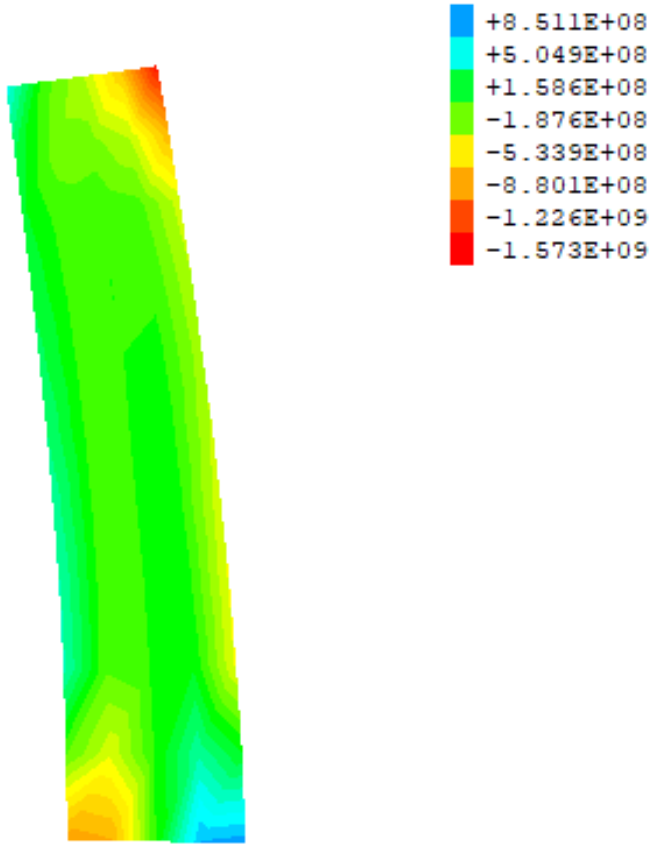


Рисунок А. 3 – Розподіл напружень σ_{22}

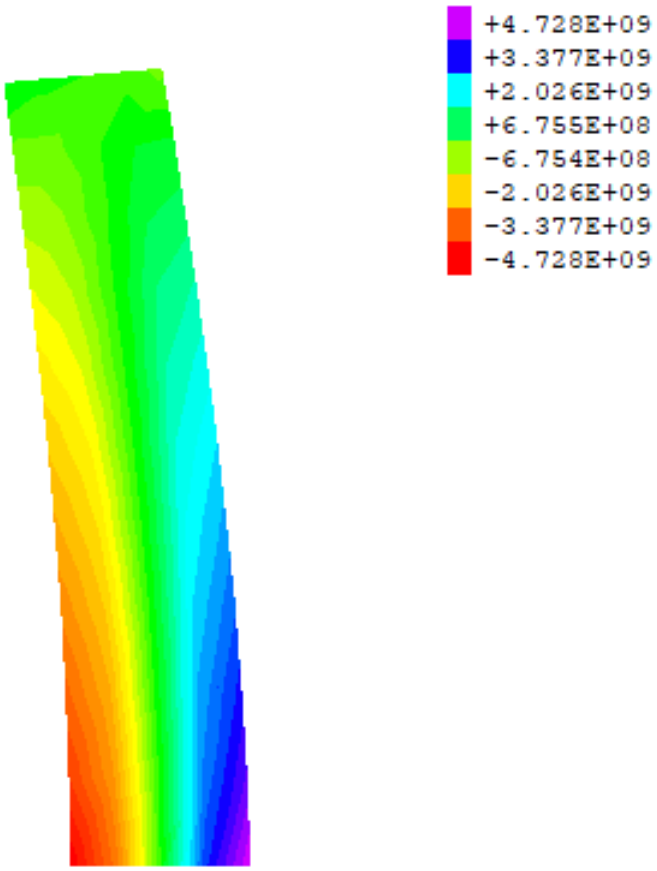


Рисунок А. 4 – Розподіл напружень σ_{11}

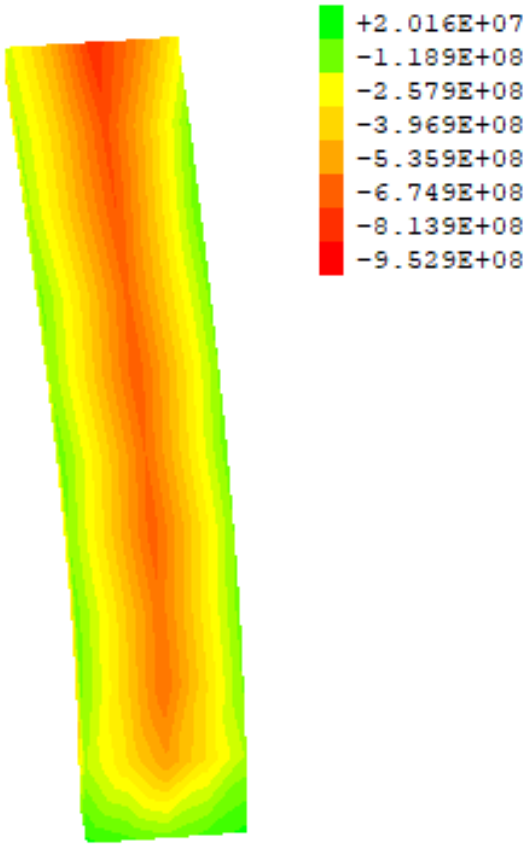


Рисунок А. 5 – Розподіл напружень σ_{12}