Міністерство освіти і науки України
Запорізький національний університет

І. В. Зіновєєв, Н. І.-В. Манько

АЛГЕБРА ТА ГЕОМЕТРІЯ

Методичні рекомендації
до практичних занять для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра
спеціальності «Комп’ютерні науки»

Затверджено
Вченою радою ЗНУ
Протокол № 12 від 01.07.2025

Запоріжжя
2025

УДК 512.1+514(075.8)
З 247

Зіновєєв І. В., Манько Н. І.-В. Алгебра та геометрія: Методичні рекомендації до практичних занять для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра спеціальності «Комп'ютерні науки». Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2025. 96 с.

Методичні рекомендації з дисципліни «Алгебра та геометрія» призначені для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за освітньо-професійною програмою «Комп'ютерні науки». Видання розроблено відповідно до чинного силабусу дисципліни та спрямоване на забезпечення якісної підготовки студентів до практичних занять.

У методичці викладено теоретичні питання, умови типових і варіативних завдань, а також наведено приклади розв'язання задач з основних розділів курсу: матричного апарату лінійної алгебри, алгебраїчних структур і числових систем, векторної алгебри та аналітичної геометрії. Розглянуто матриці та операції над ними, визначники, обернені матриці, системи лінійних алгебраїчних рівнянь і методи їх розв'язання, комплексні числа, многочлени, систему поліномів Штурма, лінійні векторні простори та оператори, системи числення, вектори, рівняння прямих і площин, криві та поверхні другого порядку.

Методичні вказівки сприяють формуванню у студентів математичного мислення, умінь застосовувати алгебраїчні та геометричні методи для розв'язування прикладних задач, а також створюють підґрунтя для вивчення фахових дисциплін у галузі комп'ютерних наук. Видання може бути використане під час аудиторної роботи та для самостійної підготовки студентів.

Рецензент
А. М. Андрєєв, доктор педагогічних наук наук, професор, завідувач кафедри загальної та прикладної фізики

Відповідальний за випуск
С. М. Гребенюк, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри фундаментальної та прикладної математики

ЗМІСТ

Вступ..... 3
Розділ 1 Матричний апарат лінійної алгебри..... 5
1 Матриці. Лінійні операції над матрицями. Добуток матриць..... 5
2 Визначник. Обернена матриця..... 9
3 Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Метод Крамера розв'язання СЛАР..... 13
4 Матричний метод і метод Гаусса розв'язання СЛАР..... 16
Розділ 2 Алгебраїчні структури та числові системи..... 24
5 Комплексні числа..... 24
6 Многочлени..... 33
7 Система поліномів Штурма..... 43
8 Лінійні векторні простори. Оператори..... 46
9 Системи числення..... 54
Розділ 3 Векторна алгебра та аналітична геометрія..... 57
10 Вектори та дії над ними..... 57
11 Добутки векторів..... 59
12 Рівняння прямої та площини у просторі. Рівняння прямої на площині... 64
13 Поняття кривої другого порядку. Еліпс, гіпербола, парабола..... 80
14 Загальне рівняння кривої другого порядку. Зведення рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду..... 87
15 Загальне рівняння поверхні другого порядку. Канонічні рівняння поверхонь другого порядку..... 89
Список літератури..... 94

ВСТУП

Дисципліна «Алгебра та геометрія» є фундаментальною складовою математичної підготовки здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за освітньо-професійною програмою «Комп'ютерні науки». Вона формує теоретичну базу, необхідну для опанування спеціальних фахових дисциплін, а також для подальшого застосування математичних методів у задачах програмування, аналізу даних, комп'ютерної графіки, машинного навчання, криптографії та моделювання.

Метою вивчення дисципліни є формування у студентів системних знань з лінійної алгебри, алгебраїчних структур, векторної алгебри та аналітичної геометрії, а також набуття практичних навичок використання алгебраїчних і геометричних методів для розв'язування прикладних задач, характерних для галузі комп'ютерних наук.

Методичні вказівки розроблено відповідно до силабусу дисципліни та охоплюють такі основні розділи: матричний апарат лінійної алгебри; алгебраїчні структури та числові системи; векторна алгебра та аналітична геометрія. У межах зазначених розділів розглядаються матриці та операції над ними, визначники, обернені матриці, системи лінійних алгебраїчних рівнянь і методи їх розв'язання, комплексні числа, многочлени та система поліномів Штурма, лінійні векторні простори й оператори, системи числення, вектори та їх добутки, рівняння прямих і площин, а також криві й поверхні другого порядку.

У методичних вказівках наведено теоретичні питання для підготовки до практичних занять, умови типових завдань, а також приклади розв'язання, що сприяє кращому засвоєнню навчального матеріалу та розвитку логічного й алгоритмічного мислення. Матеріал структуровано таким чином, щоб забезпечити послідовний перехід від базових понять до більш складних математичних моделей і методів.

Методичні вказівки призначені для студентів денної та заочної форм навчання і можуть бути використані як під час аудиторної роботи, так і для самостійної підготовки до практичних занять та підсумкового контролю з дисципліни «Алгебра та геометрія».

РОЗДІЛ 1 МАТРИЧНИЙ АПАРАТ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

1 МАТРИЦІ. ЛІНІЙНІ ОПЕРАЦІЇ НАД МАТРИЦЯМИ. ДОБУТОК МАТРИЦЬ

Теоретичні питання:

1. Поняття матриці. Розмірність матриці.
2. Рівність матриць.
3. Види матриць: квадратні, прямокутні, матриця-рядок, матриця-стовпець.
4. Нульова матриця та одинична матриця.
5. Діагональна, скалярна, трикутна матриці.
6. Транспонування матриці та його властивості.
7. Додавання матриць. Умови виконання додавання. Властивості додавання матриць.
8. Множення матриці на число.
9. Означення добутку двох матриць. Умова сумісності матриць для множення. Розмірність добутку матриць. Алгоритм обчислення добутку матриць.
10. Властивості множення матриць.
11. Піднесення квадратної матриці до степеня.
12. Добуток матриці-рядка на матрицю.
13. Добуток матриці на матрицю-стовпець.

Практичні завдання:

Дано матриці A, B, C, D, E.

1. Знайдіть $2B + E^t; E - 3B^t$.
2. Серед заданих укажіть всі пари таких матриць, для яких можна обчислити добутки типу MN, M^tN або MN^t. Обчисліть по два варіанти таких добутків.
3. Знайдіть $A^2 - BB^t$.
4. Оберіть із заданих трійку матриць, щоб можна було сформувати добуток типу MNP. Знайдіть цей добуток.

Варіанти завдань:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}; E = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}; E = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} -3 & 2 \end{pmatrix}; E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

4. $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 3\end{pmatrix}; C=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}; D=\begin{pmatrix}4 & 1\end{pmatrix}; E=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$

5. $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & -3 & 1\end{pmatrix}; C=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}; D=\begin{pmatrix}-1 & 1\end{pmatrix}; E=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 4 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$

6. $A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 4 & -1\end{pmatrix}; C=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ -2\end{pmatrix}; D=\begin{pmatrix}-3 & 0\end{pmatrix}; E=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$

7. $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -1\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}0 & 3 & -1\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}; C=\begin{pmatrix}-2\\ 0\\ -1\end{pmatrix}; D=\begin{pmatrix}2 & 1\end{pmatrix}; E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -4\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$

8. $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}; C=\begin{pmatrix}1\\ 3\\ 0\end{pmatrix}; D=\begin{pmatrix}0 & 2\end{pmatrix}; E=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 1 & 0\\ -4 & 1\end{pmatrix}.$

9. $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}; C=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}; D=\begin{pmatrix}4 & 0\end{pmatrix}; E=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$

10. $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & -3 & 1\end{pmatrix}; C=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}; D=\begin{pmatrix}-2 & 1\end{pmatrix}; E=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\\ -4 & 0\end{pmatrix}.$

11. $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 0\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & -4 & 2\end{pmatrix}; C=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 0\end{pmatrix}; D=\begin{pmatrix}-1 & 3\end{pmatrix}; E=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$

12. $A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}; C=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}; D=\begin{pmatrix}-1 & 2\end{pmatrix}; E=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 4\\ -1 & 2\end{pmatrix}.$

13. $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 3 & 0 & 2\end{pmatrix}; C=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}; D=\begin{pmatrix}2 & -1\end{pmatrix}; E=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}.$

14. $A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}; C=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 4\end{pmatrix}; D=\begin{pmatrix}0 & -1\end{pmatrix}; E=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}.$

15. $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}0 & 3 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}; C=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}; D=\begin{pmatrix}4 & -2\end{pmatrix}; E=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$

16. $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}; C=\begin{pmatrix}0\\ 3\\ 1\end{pmatrix}; D=\begin{pmatrix}-1 & 1\end{pmatrix}; E=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 0 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}.$

17. $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}; C=\begin{pmatrix}4\\ 0\\ -1\end{pmatrix}; D=\begin{pmatrix}2 & 0\end{pmatrix}; E=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}.$

18. $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}; C=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}; D=(-1 \quad 0); E=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}.$

19. $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}; C=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}; D=(1 \quad 4); E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$

20. $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 4 & 0 & 1\end{pmatrix}; C=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 2\end{pmatrix}; D=(-2 \quad 3); E=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}.$

Приклади розв'язання задач:

Приклад 1. Знайдіть добуток матриць $A=(1 \quad 2),\ B=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}$.

Розв'язання.

$$AB=(1 \quad 2)\cdot\begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}=(3+10 \quad 4+12)=(13 \quad 16);$$

$BA=\varnothing$ не існує.

Приклад 2. Дано матриці $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & 4 & 1\\ 1 & -4 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\ 3\\ 2\end{pmatrix}$ і $C=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$. Знайдіть $A^T\cdot B+2C$.

Розв'язання.

$$A^T=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 4 & -4\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix},\ A^TB=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 4 & -4\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 3\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot3+1\cdot2\\ 0\cdot1+4\cdot3-4\cdot2\\ 3\cdot1+1\cdot3+2\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\ 4\\ 10\end{pmatrix};$$

$$2C=\begin{pmatrix}-2\\ 4\\ 2\end{pmatrix};\ A^T\cdot B+2C=\begin{pmatrix}9\\ 4\\ 10\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\ 4\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\ 8\\ 12\end{pmatrix}.$$

Приклад 3. Дано матрицю $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$. Знайдіть A^3.

Розв'язання.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix};$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 47 & 78 \\ 39 & 86 \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що дані матриці $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix}$ є переставними.

2 ВИЗНАЧНИК. ОБЕРНЕНА МАТРИЦЯ

Теоретичні питання:

1. Поняття визначника квадратної матриці.
2. Визначник матриці другого порядку та його обчислення.
3. Визначник матриці третього порядку.
4. Означення визначника матриці n-го порядку.
5. Розклад визначника за елементами рядка або стовпця.
6. Мінори та алгебраїчні доповнення.
7. Властивості визначників.
8. Означення оберненої матриці.
9. Умова існування оберненої матриці.
10. Єдиність оберненої матриці.
11. Формула оберненої матриці через алгебраїчні доповнення.
12. Властивості оберненої матриці.
13. Обернена матриця до добутку матриць, до транспонованої матриці, до оберненої.
14. Роль визначника та оберненої матриці в комп'ютерних обчисленнях.

Практичні завдання:

1. Обчисліть визначник $det(A)$ матриці A третього порядку:
а) за правилом трикутників;
б) за правилом Саррюса;
в) розкривши його за i рядком, попередньо отримавши в ньому максимальну кількість нулів;
г) розкривши його за j стовпцем, попередньо отримавши в ньому максимальну кількість нулів;
д) попередньо звівши його до трикутного вигляду.
2. Для даної матриці A знайдіть обернену A^{-1}:
а) методом алгебраїчних доповнень;
б) методом приєднання одиничної матриці.

Варіанти завдань:

1. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 10 \end{pmatrix}$, $i = 2, j = 3$.

2. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, $i = 3, j = 3$.

3. $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$, $i = 1, j = 3$.

4. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -4 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $i = 2, j = 2$.

5. $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, $i = 3, j = 1$.

6. $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $i = 1, j = 2$.

7. $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $i = 2, j = 1.$

8. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & -5 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, $i = 1, j = 1.$

9. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $i = 3, j = 2.$

10. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$, $i = 2, j = 3.$

11. $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $i = 3, j = 2.$

12. $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $i = 1, j = 1.$

13. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $i = 1, j = 2.$

14. $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $i = 1, j = 3.$

15. $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $i = 2, j = 1.$

16. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $i = 3, j = 2.$

17. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$, $i = 2, j = 1.$

18. $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, $i = 1, j = 3.$

19. $\begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$, $i = 1, j = 2.$

20. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $i = 3, j = 1.$

Приклади розв'язання задач:

Приклад 1. Для заданих матриць $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ обчисліть $\det(AB)$.

Розв'язання.

Знайдемо добуток заданих матриць:

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ -18 & 15 \end{pmatrix}.$$

Тоді визначник отриманої матриці дорівнює: $\det(AB) = \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ -18 & 15 \end{vmatrix} = 150$.

Приклад 2. Обчисліть визначники:

$$1)\ \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix};\ 2)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix};\ 3)\ \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання.

$$1)\ \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1;$$

$$2)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 0 + 18 - (-6 + 3 + 0) = 19;$$

$$3)\ \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} -\text{III} \\ \\ \\ +\text{II} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 6 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 7 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} +\text{II}\cdot 3 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \overset{\downarrow}{=} \begin{vmatrix} 0 & 21 & 4 & 9 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 7 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= -1\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 21 & 4 & 9 \\ 5 & 3 & 2 \\ 6 & 7 & 5 \end{vmatrix} = 122\ .$$

Приклад 3. Знайдіть матрицю, обернену до $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ двома способами.

Розв'язання.
І спосіб.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5;\ A_{11} = (-1)^{1+1}\cdot 1 = 1;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\cdot(-1) = 1;\ A_{21} = (-1)^{2+1}\cdot 3 = -3;\ A_{21} = (-1)^{2+1}\cdot 3 = -3;$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

ІІ спосіб.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)\cdot 2 + \text{I} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \end{array}\right)\cdot 5 - \text{II}\cdot 3 \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 10 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \end{array}\right)\cdot 1/10 \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/5 & -3/5 \\ 0 & 1 & 1/5 & 2/5 \end{array}\right);$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3 СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ. МЕТОД КРАМЕРА РОЗВ'ЯЗАННЯ СЛАР

Теоретичні питання:

1. Поняття системи лінійних алгебраїчних рівнянь.
2. Загальний вигляд СЛАР з n рівнянь і n невідомих.
3. Матричний запис системи лінійних рівнянь. Матриця системи, розширена матриця системи.
4. Розв'язок системи лінійних рівнянь. Поняття сумісності.
5. Класифікація СЛАР: сумісна визначена, сумісна невизначена, несумісна.
6. Геометричний зміст розв'язків СЛАР (для 2 і 3 змінних).
7. Роль визначника матриці системи у дослідженні СЛАР.
8. Умова існування єдиного розв'язку СЛАР.
9. Вироджені та невироджені системи лінійних рівнянь.
10. Зв'язок між лінійною залежністю рівнянь системи та значенням визначника.
11. Формулювання методу Крамера.
12. Умови застосування методу Крамера.
13. Алгоритм розв'язування СЛАР методом Крамера.
14. Обчислювальна складність методу Крамера.
15. Переваги та недоліки методу Крамера.
16. Доцільність використання методу Крамера в практичних обчисленнях.
17. Чисельна нестійкість методу Крамера для великих систем.
18. Застосування СЛАР у задачах комп'ютерних наук.
19. Інтерпретація розв'язку СЛАР у прикладних задачах.
20. Типові помилки при застосуванні методу Крамера.
21. Метод Крамера як теоретичний інструмент дослідження СЛАР.

Практичні завдання:

1. Серед заданих СЛАР за теоремою Крамера визначте, яка з них несумісна; сумісна, але невизначена; сумісна і визначена. Для останньої знайдіть її розв'язок.

Варіанти завдань:

1.
$$\begin{cases} 2x - y + z = 3, \\ x + y + 2z = 6, \\ 3x + z = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y + z = 1, \\ x + 2y - z = 4, \\ 3x + y = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y + z = 1, \\ x + 2y - z = 4, \\ 3x + y = 6. \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ 2x + 3y + z = 7, \\ 3x + 4y + 2z = 10; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z = 4, \\ 2x - y + 3z = 7, \\ x + 2y - z = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z = 3, \\ 2x + 3y + z = 7, \\ 3x + 4y + 2z = 11. \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} x - y + z = 2, \\ 2x + y = 5, \\ 3x - z = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} x - y + z = 2, \\ 2x + y = 5, \\ 3x - z = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y = 5, \\ y + z = 3, \\ x + z = 4. \end{cases}$$

4. $\begin{cases} x+2y-z=1, \\ 2x-y+z=3, \\ x+y+z=4; \end{cases} \begin{cases} 2x+y-z=1, \\ x-2y+3z=4, \\ 3x-y+2z=5; \end{cases} \begin{cases} 2x+y-z=1, \\ x-2y+3z=4, \\ 3x-y+2z=6. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x-y=0, \\ y+z=3, \\ 2x+z=5; \end{cases} \begin{cases} x+y-z=2, \\ 2x-y+z=1, \\ 3x+z=5; \end{cases} \begin{cases} x+y-z=2, \\ 2x-y+z=1, \\ 3x+z=5. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x+2y+z=5, \\ 2x+y+3z=8, \\ 3x+3y+4z=13; \end{cases} \begin{cases} x+2y+z=5, \\ 2x+y+3z=8, \\ 3x+3y+4z=14; \end{cases} \begin{cases} x+y+z=6, \\ 2x-y+z=3, \\ x+2y-z=4. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x-y+2z=3, \\ 2x+z=5, \\ 3x-y+3z=9; \end{cases} \begin{cases} 2x+y=5, \\ y+z=4, \\ x+z=5; \end{cases} \begin{cases} x-y+2z=3, \\ 2x+z=5, \\ 3x-y+3z=8. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x+y-z=1, \\ x+3y+z=6, \\ 3x+4y=7; \end{cases} \begin{cases} 2x+y-z=1, \\ x+3y+z=6, \\ 3x+4y=8; \end{cases} \begin{cases} x+2y-z=2, \\ 2x-y+z=4, \\ x+y+z=5. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x+y=4, \\ y+z=5, \\ x+z=6; \end{cases} \begin{cases} x+2y+3z=6, \\ 2x+3y+z=5, \\ 3x+5y+4z=11; \end{cases} \begin{cases} x+2y+3z=6, \\ 2x+3y+z=5, \\ 3x+5y+4z=12. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x-y+z=1, \\ x+2y-z=3, \\ 3x+y=4; \end{cases} \begin{cases} x-y+z=2, \\ 2x+z=4, \\ y+z=3; \end{cases} \begin{cases} 2x-y+z=1, \\ x+2y-z=3, \\ 3x+y=5. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x+y-z=2, \\ 2x+3y=7, \\ 3x+4y-z=10; \end{cases} \begin{cases} x+y-z=2, \\ 2x+3y=7, \\ 3x+4y-z=9; \end{cases} \begin{cases} x+2y=5, \\ y-z=1, \\ x+z=4. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x+2y-z=3, \\ 2x+y+z=5, \\ 3x+3y=9; \end{cases} \begin{cases} 2x-y=1, \\ y+z=3, \\ x+z=4; \end{cases} \begin{cases} x+2y-z=3, \\ 2x+y+z=5, \\ 3x+3y=8. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x+y+z=3, \\ 2x-y+z=1, \\ x+2y-z=4; \end{cases} \begin{cases} 2x+y+z=4, \\ x+3y-z=5, \\ 3x+4y=9; \end{cases} \begin{cases} 2x+y+z=4, \\ x+3y-z=5, \\ 3x+4y=10. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x+2y+z=5, \\ 2x+3y-z=4, \\ 3x+5z=9; \end{cases} \begin{cases} x-y=1, \\ y+z=2, \\ 2x+z=4; \end{cases} \begin{cases} x+2y+z=5, \\ 2x+3y-z=4, \\ 3x+5z=10. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x+y+z=6, \\ x+z=3, \\ y+z=4; \end{cases} \begin{cases} x-y+z=2, \\ 2x+3y=5, \\ 3x+2y+z=7; \end{cases} \begin{cases} x-y+z=2, \\ 2x+3y=5, \\ 3x+2y+z=8. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x+2y-z=1, \\ 2x+y+z=4, \\ 3x+3y=5; \end{cases} \begin{cases} x+y=3, \\ 2x+z=5, \\ x+z=5; \end{cases} \begin{cases} x+2y-z=1, \\ 2x+y+z=4, \\ 3x+3y=6. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x+y+z=4, \\ 2x+3y=6, \\ 3x+4y+z=11; \end{cases} \begin{cases} x+y+z=4, \\ 2x+3y=6, \\ 3x+4y+z=10; \end{cases} \begin{cases} x-y+z=3, \\ 2x+z=5, \\ y+z=4. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x-y+z=2, \\ x+z=3, \\ y+z=3; \end{cases} \begin{cases} x+2y=4, \\ 2x+3y-z=5, \\ 3x+5y=10; \end{cases} \begin{cases} x+2y=4, \\ 2x+3y-z=5, \\ 3x+5y=9. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x-y+z=1, \\ 2x+3y=4, \\ 3x+2y+z=5; \end{cases} \begin{cases} x-y+z=1, \\ 2x+3y=4, \\ 3x+2y+z=6; \end{cases} \begin{cases} x+y+z=5, \\ 2x-y+z=3, \\ x+2y-z=2. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x+2y-z=2, \\ 2x+y+z=4, \\ 3x+3y=6; \end{cases} \begin{cases} x-y=0, \\ y+z=3, \\ 2x+z=4; \end{cases} \begin{cases} x+2y-z=2, \\ 2x+y+z=4, \\ 3x+3y=7. \end{cases}$

Приклади розв'язання задач:

Приклад 1. Розв'яжіть систему рівнянь методом Крамера $\begin{cases} 3x+2y+z=5, \\ x+y-z=-2, \\ 4x-y+5z=3. \end{cases}$

Розв'язання.

Обчислимо визначник Δ та визначники Δ_x, Δ_y, Δ_z:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -11 \neq 0,\ \Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 33,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -55,\ \Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -44.$$

За формулами Крамера одержимо єдиний розв'язок системи:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{33}{-11} = -3,\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-55}{-11} = 5,\ z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-44}{-11} = 4.$$

4 МАТРИЧНИЙ МЕТОД І МЕТОД ГАУССА РОЗВ'ЯЗАННЯ СЛАР

Теоретичні питання:

1. Матрична форма запису системи лінійних алгебраїчних рівнянь.
2. Матриця коефіцієнтів, вектор вільних членів, вектор невідомих.
3. Умова застосування матричного методу розв'язання СЛАР.
4. Алгоритм розв'язування СЛАР матричним методом.
5. Переваги та недоліки матричного методу.
6. Обчислювальні труднощі матричного методу для систем великого порядку.
7. Порівняння матричного методу та методу Крамера.
8. Розширена матриця СЛАР. Сутність методу Гаусса.
9. Елементарні перетворення рядків розширеної матриці. Приведення матриці до східчастого вигляду.
10. Головні (опорні) та вільні змінні.
11. Алгоритм розв'язування СЛАР методом Гаусса.
12. Геометричний зміст методу Гаусса.
13. Визначення кількості розв'язків СЛАР методом Гаусса.
14. Ознаки сумісності та несумісності СЛАР.
15. Визначена та невизначена сумісні системи.
16. Поняття рангу матриці. Ранг матриці коефіцієнтів і ранг розширеної матриці.
17. Теорема Кронекера–Капеллі. Застосування теореми Кронекера–Капеллі в методі Гаусса.
18. Порівняння методу Гаусса з методом Крамера та матричним методом.
19. Метод Гаусса як основа чисельних алгоритмів лінійної алгебри.
20. Застосування методу Гаусса в комп'ютерних науках.
21. Типові помилки при застосуванні методу Гаусса.
22. Роль методу Гаусса в теорії та практиці розв'язування СЛАР.

Практичні завдання:

1. Розв'яжіть визначену систему з попереднього завдання матричним методом і методом Гаусса.
2. Дано блочну матрицю $(A|B_1\ |B_2)$. Розв'яжіть дві неоднорідні системи, які задано розширеними матрицями $(A|B_1)$ та $(A|B_2)$.

Варіанти завдань:

1. $\left(\begin{array}{cccc|c|c} 12 & -4 & 0 & -3 & 14 & 1 \\ 25 & -11 & -1 & -10 & 27 & 2 \\ 12 & -4 & 1 & -1 & 20 & 1 \\ 25 & -11 & -1 & -10 & 27 & 3 \end{array}\right)$.

2. $\left(\begin{array}{cccc|c|c} 12 & 4 & -1 & 3 & 0 & 12 \\ 25 & 11 & -4 & 11 & -1 & 21 \\ 0 & -1 & -3 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & -1 & 1 & 12 \end{array}\right)$.

3. $\left(\begin{array}{cccc|c|c} 12 & 4 & 0 & 1 & 1 & 16 \\ 25 & 11 & -1 & 5 & 2 & 33 \\ 12 & 4 & 1 & -1 & 1 & 20 \\ 25 & 11 & -1 & 5 & 3 & 33 \end{array}\right)$.

4. $\left(\begin{array}{cccc|c|c} 12 & -4 & 0 & -3 & 14 & 1 \\ 25 & -11 & -1 & -10 & 27 & 2 \\ -1 & -4 & 10 & 313 & -6 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right)$.

5. $\left(\begin{array}{cccc|c|c} 12 & -4 & 1 & -1 & 20 & 2 \\ 25 & -11 & 2 & -4 & 45 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -4 & 1 & -1 & 20 & 3 \end{array}\right)$.

6. $\left(\begin{array}{cccc|c|c} 12 & 4 & 0 & 1 & 1 & 16 \\ 25 & 11 & -1 & 5 & 2 & 33 \\ -1 & -4 & -1 & 0 & 3 & -9 & -1 & -14 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right)$.

7. $\left(\begin{array}{cccc|c|c} 12 & 4 & 1 & -1 & 2 & 20 \\ 25 & 11 & 2 & -1 & 5 & 45 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & -1 & 3 & 20 \end{array}\right)$.

8. $\left(\begin{array}{cccc|c|c} 12 & -4 & 1 & -1 & 20 & 2 \\ 25 & -11 & 2 & -4 & 45 & 5 \\ 12 & -4 & 2 & 1 & 26 & 2 \\ 25 & -11 & 2 & -4 & 45 & 6 \end{array}\right)$

9. $\left(\begin{array}{cccc|c|c} 12 & -4 & -1 & -5 & 8 & 0 \\ 25 & -11 & -4 & -16 & 9 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & 8 & 13 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & -1 & -5 & 8 & 1 \end{array}\right)$.

10. $\left(\begin{array}{cccc|c|c} 12 & 4 & 1 & -1 & 2 & 20 \\ 25 & 11 & 2 & -1 & 5 & 2 & 45 \\ 12 & 4 & 2 & -3 & 2 & 24 \\ 25 & 11 & 2 & -1 & 6 & 45 \end{array}\right)$.

11. $\left(\begin{array}{cccc|c|c} 12 & 4 & -1 & 3 & 0 & 12 \\ 25 & 11 & -4 & 11 & -1 & 21 \\ 12 & 4 & 0 & 1 & 0 & 16 \\ 25 & 11 & -4 & 11 & 0 & 21 \end{array}\right)$.

12. $\left(\begin{array}{cccc|c|c} 12 & 4 & 0 & 1 & 1 & 16 \\ 25 & 11 & -1 & 5 & 2 & 33 \\ 25 & 11 & 0 & 3 & 2 & 37 \\ 38 & 18 & -2 & 9 & 4 & 50 \end{array}\right)$.

13. $\left(\begin{array}{cccc|c|c} 12 & -4 & 1 & -1 & 20 & 2 \\ 25 & -11 & 2 & -4 & 45 & 5 \\ -1 & -4 & 10 & 07 & -24 & -4 \\ 0 & -1 & 3 & 02 & -5 & 0 \end{array}\right)$.

14. $\left(\begin{array}{cccc|c|c} 12 & -4 & 21 & 26 & 3 \\ 25 & -11 & 52 & 63 & 8 \\ 12 & -4 & 33 & 32 & 3 \\ 25 & -11 & 22 & 63 & 9 \end{array}\right)$.

15. $\left(\begin{array}{cccc|c|c} 12 & 4 & 1 & -1 & 2 & 20 \\ 25 & 11 & 2 & -1 & 5 & 45 \\ -1 & -4 & -10 & 0 & -3 & -4 & -26 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & -1 & 0 & -5 \end{array}\right)$.

16. $\left(\begin{array}{cccc|c|c} 12 & 4 & 2 & -3 & 3 & 24 \\ 25 & 11 & 5 & -7 & 8 & 57 \\ 12 & 4 & 3 & -5 & 3 & 28 \\ 25 & 11 & 5 & -7 & 9 & 57 \end{array}\right)$.

17. $\left(\begin{array}{cccc|c|c} 12 & -4 & -1 & -5 & 8 & 0 \\ 25 & -11 & -4 & -16 & 9 & -1 \\ -1 & -4 & 10 & 619 & 12 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & 6 & 7 & 2 \end{array}\right)$.

18. $\left(\begin{array}{cccc|c|c} 12 & -4 & 1 & -1 & 20 & 2 \\ 25 & -11 & 2 & -4 & 45 & 5 \\ 25 & -11 & 3 & -2 & 51 & 5 \\ 38 & -18 & 3 & -7 & 70 & 9 \end{array}\right)$.

19. $\left(\begin{array}{cccc|c|c} 12 & 4 & 2 & -3 & 3 & 24 \\ 25 & 11 & 5 & -7 & 8 & 57 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & -1 & -2 & -5 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & -3 & 4 & 24 \end{array}\right)$.

20. $\left(\begin{array}{cccc|c|c} 12 & -4 & 1 & -1 & 20 & 2 \\ 25 & -11 & 2 & -4 & 45 & 5 \\ 12 & -4 & 2 & 1 & 26 & 2 \\ 25 & -11 & 2 & -4 & 45 & 6 \end{array}\right)$.

3. Задано матрицю однорідної системи. Побудуйте її фундаментальну систему розв’язків.

Варіанти завдань:

1. $\begin{pmatrix} -5 & -1 & -7 & -3 & 16 & 13 \\ -3 & 3 & -15 & 1 & 14 & -3 \\ -2 & -4 & 8 & -2 & 0 & 16 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} -3 & 1 & -7 & -1 & -8 & 11 \\ -1 & 3 & 3 & 1 & 12 & 9 \\ 0 & -2 & -4 & 0 & -6 & -4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 10 & -1 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} -5 & -1 & -17 & -3 & -28 & 13 \\ -3 & 3 & -3 & 1 & 8 & 15 \\ -2 & -4 & -14 & -2 & -26 & -2 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 10 & -1 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} -3 & 1 & -11 & -1 & 8 & 7 \\ -1 & 3 & -9 & 1 & 12 & -3 \\ 0 & -24 & 0 & -6 & 4 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} -5 & -1 & -13 & -3 & 4 & 17 \\ -3 & 3 & -15 & 1 & 16 & 3 \\ -2 & -42 & -2 & -10 & 14 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$.

6. $\begin{pmatrix} -2 & 22 & 0 & -2 & 10 \\ 0 & 39 & 1 & 11 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 6 & -5 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 10 & 1 \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} -4 & 0 & -8 & -2 & -22 & 8 \\ -2 & 3 & 5 & 1 & 5 & 13 \\ -1 & -3 & -11 & -1 & -14 & -7 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 10 & 1 \end{pmatrix}$.

8. $\begin{pmatrix} -2 & 2 & -10 & 0 & 10 & -2 \\ 0 & 3 & -9 & 1 & 5 & -9 \\ 1 & -1 & 5 & 1 & -6 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$.

9. $\begin{pmatrix} -4 & 0 & -8 & -2 & 14 & 8 \\ -2 & 3 & -13 & 1 & 11 & -5 \\ -1 & -3 & 7 & -1 & -2 & 11 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$.

10. $\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 & 0 & 2 & 10 \\ 0 & 3 & 6 & 1 & 14 & 6 \\ 1 & -11 & 1 & 4 & -5 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 10 & -1 \end{pmatrix}$.

11. $\begin{pmatrix} -4 & 0 & -12 & -2 & -18 & 12 \\ -2 & 3 & 0 & 1 & 10 & 12 \\ -1 & -3 & -9 & -1 & -16 & -3 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 10 & -1 \end{pmatrix}$.

12. $\begin{pmatrix} -2 & 2 & -10 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 3 & -6 & 1 & 10 & -6 \\ 1 & -15 & 1 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$.

13. $\begin{pmatrix} -4 & 0 & -12 & -2 & 6 & 12 \\ -2 & 3 & -12 & 1 & 14 & 0 \\ -1 & -33 & -1 & -8 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$.

14. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 7 & 1 & 8 & 11 \\ 1 & 3 & 11 & 1 & 14 & 7 \\ 2 & 0 & 4 & 2 & 16 & -4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 10 & 1 \end{pmatrix}$.

15. $\begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 & -1 & -12 & 9 \\ -1 & 3 & 7 & 1 & 8 & 11 \\ 0 & -2 & -6 & 0 & -4 & -6 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 10 & 1 \end{pmatrix}$.

16. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -11 & 18 & -7 \\ 1 & 3 & -7 & 12 & -11 \\ 2 & 0 & 4 & 2 & -8 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$.

17. $\begin{pmatrix} -3 & 1 & -9 & -1 & 12 & 3 \\ -1 & 3 & -11 & 1 & 8 & -7 \\ 0 & -2 & 6 & 0 & -4 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$.

18. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 1 & 12 & 9 \\ 1 & 3 & 9 & 1 & 16 & 3 \\ 2 & 0 & 6 & 2 & 14 & -6 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 10 & -1 \end{pmatrix}$.

19. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -9 & 1 & 12 & -3 \\ 1 & 3 & -3 & 1 & 8 & -9 \\ 2 & 0 & 6 & 2 & -2 & -6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$.

20. $\begin{pmatrix} 0 & 4 & -8 & 2 & 14 & -8 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 6 & -12 \\ 3 & 17 & 30 & -11 \\ 1 & 11 & 12 & -5 \end{pmatrix}$.

Приклади розв’язання задач:

Приклад 1. Розв’яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 3x + 2y + z = 5, \\ x + y - z = -2, \\ 4x - y + 5z = 3 \end{cases}$ матричним методом.

Розв'язання.

Перепишемо вихідну систему у вигляді $A\cdot X=B$, де $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 4 & -1 & 5\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5\\ -2\\ 3\end{pmatrix}$.

Обчислимо визначник матриці системи: $|A|=\begin{vmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 4 & -1 & 5\end{vmatrix}=-11\neq 0$, отже система має єдиний розв'язок.

Обчислимо алгебраїчні доповнення до всіх елементів матриці системи й запишемо обернену матрицю:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 5\end{vmatrix}=4,\ A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 4 & 5\end{vmatrix}=-9,\ A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 4 & -1\end{vmatrix}=-5,$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 5\end{vmatrix}=-11,\ A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 4 & 5\end{vmatrix}=11,\ A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 4 & -1\end{vmatrix}=11,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-3,\ A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=4,\ A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1,$$

$$A^{-1}=-\frac{1}{11}\begin{pmatrix}4 & -11 & -3\\ -9 & 11 & 4\\ -5 & 11 & 1\end{pmatrix}.$$

Визначимо розв'язок:

$$X=A^{-1}\cdot B=-\frac{1}{11}\begin{pmatrix}4 & -11 & -3\\ -9 & 11 & 4\\ -5 & 11 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\ -2\\ 3\end{pmatrix}=-\frac{1}{11}\begin{pmatrix}33\\ -55\\ -44\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\ 5\\ 4\end{pmatrix}.$$

Приклад 2. Розв'яжіть системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гаусса:

$$1)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10, \\ x_2 - x_4 = -2, \\ x_1 + x_4 = 5, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 13; \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3; \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_3 + 13x_5 = 9, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$$

Розв'язання.

1) Розширена матриця $\tilde{A}$ системи рівнянь має вигляд:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 13 \end{pmatrix}.$$

Виконаємо елементарні перетворення рядків та зведемо матрицю A до ступінчастого виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 13 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ -\text{I} \\ \text{IV} - 2\cdot\text{I} \end{matrix} \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -7 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ +\text{II} \\ \\ \end{matrix} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -7 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ \\ -\text{III} \end{matrix} \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \tilde{B}.$$

З виду матриці $\tilde{B}$ випливає, що вихідна система рівнянь сумісна й що головними невідомими є x_1, x_2, x_3, а вільною невідомою – x_4. Виразимо головні невідомі x_1, x_2, x_3, розв'язуючи систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10 - x_4, \\ x_2 = -2 + x_4, \\ -x_3 = -7 + x_4. \end{cases}$$

Рухаючись від останнього рівняння до першого, отримаємо $\begin{cases} x_1 = 5 - x_4, \\ x_2 = -2 + x_4, \\ x_3 = 7 - x_4. \end{cases}$

Поклавши $x_4 = c$, де c – довільне число, одержимо загальний розв'язок:

$$\begin{cases} x_1 = 5 - c, \\ x_2 = -2 + c, \\ x_3 = 7 - c, \\ x_4 = c. \end{cases}$$

$$2) \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 7 & -4 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & -4 & -6 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot 3 - \text{I} \cdot 7 \\ \cdot 3 - \text{I} \cdot 5 \end{array} \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 23 & -11 & -19 & 1 \\ 5 & 46 & -22 & -38 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -\text{II} \cdot 2 \end{array} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & -3 & -5 & 1 \\ 0 & 23 & -11 & -19 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right).$$

В останньому рядку отриманої ступінчастої матриці перший ненульовий елемент стоїть на останньому місці, ранг матриці системи менше ранга розширеної матриці. Отже, за теоремою Кронекера-Капеллі система несумісна.

$$3) \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 6 & -3 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 6 & -3 & 4 & 8 & 13 & 9 \\ 4 & -2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -3 \cdot \text{I} \\ -3 \cdot \text{I} \\ -2 \cdot \text{I} \end{array} \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -4 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ + \text{II} \\ + \text{III} \end{array} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \cdot (-1) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці, отже система сумісна. Але ранг матриці менше кількості змінних, тому система невизначена. В ній x_3, x_4, x_5 – головні невідомі, x_1, x_2 – вільні невідомі.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 3, \\ x_4 = 0. \end{cases} \begin{cases} x_1 = x_1, \\ x_2 = x_2, \\ x_3 = -1 - 8x_1 + 4x_2, \\ x_4 = 0, \\ x_5 = 1 + 2x_1 - x_2. \end{cases}$$

Приклад 3. Знайдіть загальний розв'язок та ФСР однорідної СЛАР:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання.
Зведемо матрицю системи до ступінчастого виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & -1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -\text{I} \\ +\text{I} \\ -\text{I}\cdot 3 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 6 & -1 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 13 & -2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \cdot 6 - \text{II} \\ -\text{III}\cdot 13 \end{matrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 6 & -1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & -22 & -22 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ +\text{III}\cdot 2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 6 & -1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -8 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що $\text{rang}A = 4 < n = 5 \Rightarrow$ система має безліч розв'язків. Запишемо систему, що відповідає отриманій ступінчастій матриці й розв'яжемо її:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 = 0, \\ 6x_2 - x_3 + 5x_4 + 5x_5 = 0, \\ x_3 + 7x_4 + 7x_5 = 0, \\ 8x_4 + 8x_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2(-x_5) + x_5 = -x_5, \\ x_2 = -5(-x_5) - 5x_5 = 0, \\ x_3 = -7 \cdot (-x_5) - 7x_5 = 0, \\ x_4 = -x_5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -x_5, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = -x_5 \end{cases} \text{ – загальний розв'язок системи;}$$

$(-1;\ 0;\ 0;\ -1;\ 1)$ – фундаментальна система розв’язків.

РОЗДІЛ 2 АЛГЕБРАЇЧНІ СТРУКТУРИ ТА ЧИСЛОВІ СИСТЕМИ

5 КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА

Теоретичні питання:

1. Поняття комплексного числа. Уявна одиниця та її властивості.
2. Алгебраїчна форма комплексного числа.
3. Дійсна та уявна частини комплексного числа. Рівність комплексних чисел.
4. Комплексна площина. Геометричне зображення комплексного числа.
5. Додавання та віднімання комплексних чисел.
6. Множення комплексних чисел.
7. Ділення комплексних чисел. Комплексно-спряжене число.
8. Поняття модуля комплексного числа. Геометричний зміст модуля.
9. Поняття аргументу комплексного числа. Головне значення аргументу. Геометричний зміст аргументу.
10. Зв'язок між алгебраїчною та тригонометричною формами.
11. Тригонометрична форма комплексного числа.
12. Показникова форма комплексного числа. Формула Ейлера.
13. Перехід між різними формами запису комплексного числа.
14. Множення та ділення комплексних чисел у тригонометричній формі.
15. Піднесення комплексного числа до натурального степеня.
16. Формула Муавра.
17. Корені n-го степеня з комплексного числа.
18. Геометричний зміст коренів комплексного числа. Розташування коренів на комплексній площині.
19. Роль комплексних чисел у розв'язуванні алгебраїчних рівнянь.
20. Застосування комплексних чисел у комп'ютерних науках.
21. Комплексні числа в електротехніці та обробці сигналів.

Практичні завдання:

1. Розв'яжіть квадратне рівняння.

Варіанти завдань:

1.	$z^2-(3+i)z+4+3i=0.$	**2.**	$z^2-(2+2i)z+4+2i=0.$
3.	$z^2-(3-i)z+4-3i=0.$	**4.**	$z^2-(2-2i)z+4-2i=0.$
5.	$z^2-(3+3i)z+5i=0.$	**6.**	$z^2-(2-4i)z-2-4i=0.$
7.	$z^2-(3-3i)z-5i=0.$	**8.**	$z^2-(3+4i)z-1+7i=0.$
9.	$z^2-(2+4i)z-2+4i=0.$	**10.**	$z^2-(4-2i)z+7-4i=0.$
11.	$z^2-(3+2i)z+5+5i=0.$	**12.**	$z^2-(4-4i)z+1-8i=0.$
13.	$z^2-(3-2i)z+5-5i=0.$	**14.**	$z^2-(4+3i)z+1+5i=0.$

15. $z^2-(3-4i)z-1-7i=0$. **16.** $z^2-(4+i)z+5-i=0$.

17. $z^2-(3+4i)z-1+5i=0$. **18.** $z^2-(5+3i)z+4+7i=0$.

19. $z^2-(3+2i)z+5+i=0$. **20.** $z^2-(5+i)z+8+i=0$.

2. Обчисліть значення виразу. Зобразіть отримане число на комплексній площині.

Варіанти завдань:

1. $\dfrac{(1+i)^2(1+2i)}{2+i}$. **2.** $\dfrac{(1+2i)^2(2-3i)}{3+i}$. **3.** $\dfrac{(1+3i)^2(3-4i)}{4+i}$.

4. $\dfrac{(1+i)^2(1+3i)}{3+i}$. **5.** $\dfrac{(1+2i)^2(2-4i)}{4+i}$. **6.** $\dfrac{(1+3i)^2(3-5i)}{5+i}$.

7. $\dfrac{(1+i)^2(1+4i)}{4+i}$. **8.** $\dfrac{(1+2i)^2(2-5i)}{5+i}$. **9.** $\dfrac{(1+4i)^2(4-i)}{1+i}$.

10. $\dfrac{(1+i)^2(1+5i)}{5+i}$. **11.** $\dfrac{(1+3i)^2(3-i)}{1+i}$. **12.** $\dfrac{(1+4i)^2(4-2i)}{2+i}$.

13. $\dfrac{(1+2i)^2(2-2i)}{1+i}$. **14.** $\dfrac{(1+3i)^2(3-2i)}{2+i}$. **15.** $\dfrac{(1+4i)^2(4-3i)}{3+i}$.

16. $\dfrac{(1+2i)^2(2-2i)}{2+i}$. **17.** $\dfrac{(1+3i)^2(3-3i)}{3+i}$. **18.** $\dfrac{(1+4i)^2(4-4i)}{4+i}$.

19. $\dfrac{(1+4i)^2(4-5i)}{5+i}$. **20.** $\dfrac{(1-i)^2(4i-1)}{i-4}$.

3. Обчисліть значення виразу.

Варіанти завдань:

1. $\left(\dfrac{-1+5i}{\sqrt{2}(2+3i)}\right)^{-25}$. **2.** $\left(\dfrac{\sqrt{2}(2+i)}{1+3i}\right)^{-41}$. **3.** $\left(\dfrac{\sqrt{2}(-1-3i)}{2(2+i)}\right)^{-25}$.

4. $\left(\dfrac{5+i}{\sqrt{2}(2+3i)}\right)^{-33}$. **5.** $\left(\dfrac{\sqrt{2}(1-2i)}{1+3i}\right)^{-49}$. **6.** $\left(\dfrac{\sqrt{2}(3+i)}{2(2-i)}\right)^{-41}$.

7. $\left(\dfrac{-1+3i}{\sqrt{2}(1+2i)}\right)^{-57}$. **8.** $\left(\dfrac{\sqrt{2}(-2-i)}{1+3i}\right)^{-57}$. **9.** $\left(\dfrac{1+3i}{\sqrt{2}(1-2i)}\right)^{-51}$.

10. $\left(\dfrac{3+i}{\sqrt{2}(1+2i)}\right)^{-65}$. **11.** $\left(\dfrac{\sqrt{2}(1+2i)}{3+i}\right)^{-73}$. **12.** $\left(\dfrac{-3+i}{\sqrt{2}(2+i)}\right)^{-47}$.

13. $\left(\dfrac{1-3i}{\sqrt{2}(1+2i)}\right)^{-73}$.

14. $\left(\dfrac{\sqrt{2}(2+i)}{1+3i}\right)^{-41}$.

15. $\left(\dfrac{\sqrt{2}(5+i)}{2(2+3i)}\right)^{-33}$.

16. $\left(\dfrac{-3-i}{\sqrt{2}(1+2i)}\right)^{-25}$.

17. $\left(\dfrac{\sqrt{2}(3-i)}{2(2+i)}\right)^{-73}$.

18. $\left(\dfrac{-1-3i}{\sqrt{2}(2+i)}\right)^{-25}$.

19. $\left(\dfrac{1+3i}{\sqrt{2}(2+i)}\right)^{-65}$.

20. $\left(\dfrac{\sqrt{2}(1-3i)}{2(2-i)}\right)^{-49}$.

4. Знайдіть всі значення кореня з комплексного числа. Запишіть відповідь в алгебраїчній та показниковій формах.

Варіанти завдань:

1. $\sqrt[4]{\dfrac{5\sqrt{3}+23i}{\sqrt{3}-i}-\dfrac{8\sqrt{3}+9i}{\sqrt{3}+2i}}$.

2. $\sqrt[4]{\dfrac{8\sqrt{3}+20i}{i-\sqrt{3}}-\dfrac{13\sqrt{3}+13i}{2\sqrt{3}+i}}$.

3. $\sqrt[4]{\dfrac{3\sqrt{3}-21i}{\sqrt{3}+i}-\dfrac{12\sqrt{3}+7i}{2\sqrt{3}-i}}$.

4. $\sqrt[4]{\dfrac{6i\sqrt{3}-22}{1+i\sqrt{3}}+\dfrac{9i\sqrt{3}-11}{2-i\sqrt{3}}}$.

5. $\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt{3}+11i}{\sqrt{3}-i}+\dfrac{3i-16\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2i}}$.

6. $\sqrt[4]{\dfrac{18-22i\sqrt{3}}{3+i\sqrt{3}}-\dfrac{13-13i\sqrt{3}}{1-2i\sqrt{3}}}$.

7. $\sqrt[4]{\dfrac{5\sqrt{3}-19i}{\sqrt{3}+i}-\dfrac{16\sqrt{3}+5i}{2\sqrt{3}-i}}$.

8. $\sqrt[4]{\dfrac{5i\sqrt{3}-19}{1+i\sqrt{3}}-\dfrac{8-11i\sqrt{3}}{2-i\sqrt{3}}}$.

9. $\sqrt[4]{\dfrac{19i-9\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}-\dfrac{4\sqrt{3}-15i}{\sqrt{3}-2i}}$.

10. $\sqrt[4]{\dfrac{9-13i\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}-\dfrac{31-10i\sqrt{3}}{1-2i\sqrt{3}}}$.

11. $\sqrt[4]{\dfrac{7\sqrt{3}+7i}{i-\sqrt{3}}-\dfrac{12\sqrt{3}+19i}{2\sqrt{3}+i}}$.

12. $\sqrt[4]{\dfrac{7+7i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}-\dfrac{20+3i\sqrt{3}}{2+i\sqrt{3}}}$.

13. $\sqrt[4]{\dfrac{20i-8\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}-\dfrac{5\sqrt{3}-17i}{\sqrt{3}-2i}}$.

14. $\sqrt[4]{\dfrac{3-15i\sqrt{3}}{3+i\sqrt{3}}-\dfrac{29-6i\sqrt{3}}{1-2i\sqrt{3}}}$.

15. $\sqrt[4]{\dfrac{16+8i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}-\dfrac{18+2i\sqrt{3}}{2+i\sqrt{3}}}$.

16. $\sqrt[4]{\dfrac{2i\sqrt{3}-10}{1+i\sqrt{3}}+\dfrac{1+17i\sqrt{3}}{2-i\sqrt{3}}}$.

17. $\sqrt[4]{\dfrac{9-7i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}-\dfrac{22+3i\sqrt{3}}{2-i\sqrt{3}}}$.

18. $\sqrt[4]{\dfrac{14-6i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}-\dfrac{23-i\sqrt{3}}{2-i\sqrt{3}}}$.

19. $\sqrt[4]{\dfrac{3+16i\sqrt{3}}{2-i\sqrt{3}}-\dfrac{11-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}}$.

20. $\sqrt[4]{\dfrac{2i\sqrt{3}-10}{1+i\sqrt{3}}+\dfrac{1+17i\sqrt{3}}{2-i\sqrt{3}}}$.

5. Розв’яжіть систему лінійних алгебраїчних рівнянь, задану своєю розширеною матрицею.

Варіанти завдань:

1. $\left(\begin{array}{cc|c} 1+i & 2+i & 3+6i \\ 3-2i & 1+3i & 4+8i \end{array}\right)$.

2. $\left(\begin{array}{cc|c} 1+i & 3+i & 3+7i \\ 2-3i & 1+2i & 6-i \end{array}\right)$.

3. $\left(\begin{array}{cc|c} 1+i & 2+i & 2+6i \\ 3-2i & 1+3i & 6+3i \end{array}\right)$.

4. $\left(\begin{array}{cc|c} 1+i & 3+i & 7-i \\ 2-3i & 1+2i & 4-7i \end{array}\right)$.

5. $\left(\begin{array}{cc|c} 1+i & 3+i & 5+7i \\ 2-3i & 1+2i & 5+4i \end{array}\right)$.

6. $\left(\begin{array}{cc|c} 2+i & 1+2i & 1+8i \\ 3-i & 1+3i & 3+9i \end{array}\right)$.

7. $\left(\begin{array}{cc|c} 1+i & 3+i & 9-i \\ 2-3i & 1+2i & 3-2i \end{array}\right)$.

8. $\left(\begin{array}{cc|c} 3+i & 1+3i & 11+i \\ 2-i & 1+2i & 6-3i \end{array}\right)$.

9. $\left(\begin{array}{cc|c} 2+i & 1+2i & 8+i \\ 3-i & 1+3i & 9-3i \end{array}\right)$.

10. $\left(\begin{array}{cc|c} 1+i & 3+i & 5+7i \\ 2-3i & 1+2i & 5+4i \end{array}\right)$.

11. $\left(\begin{array}{cc|c} 2+i & 3+2i & 5+10i \\ 1-3i & 1+i & 5+i \end{array}\right)$.

12. $\left(\begin{array}{cc|c} 3+i & 2+3i & 3+12i \\ 1-2i & 1+i & 4+2i \end{array}\right)$.

13. $\left(\begin{array}{cc|c} 2+i & 3+2i & 4+9i \\ 1-3i & 1+i & 5-3i \end{array}\right)$.

14. $\left(\begin{array}{cc|c} 1+i & 3+i & -5-7i \\ 2-3i & 1+2i & 5+4i \end{array}\right)$.

15. $\left(\begin{array}{cc|c} 2+i & 3+2i & 10-i \\ 1-3i & 1+i & 1-7i \end{array}\right)$.

16. $\left(\begin{array}{cc|c} 3+i & 2+3i & 11+2i \\ 1-2i & 1+i & 2-2i \end{array}\right)$.

17. $\left(\begin{array}{cc|c} 3+i & 1+3i & 1+11i \\ 2-i & 1+2i & 3+6i \end{array}\right)$.

18. $\left(\begin{array}{cc|c} 2+i & 1+2i & 2+7i \\ 3-i & 1+3i & 5+5i \end{array}\right)$.

19. $\left(\begin{array}{cc|c} 3+i & 1+3i & 3+9i \\ 2-i & 1+2i & 4+3i \end{array}\right)$.

20. $\left(\begin{array}{cc|c} 2+i & 1+2i & 7+2i \\ 3-i & 1+3i & 7+i \end{array}\right)$.

Приклади розв’язання задач:

Приклад 1. Знайдіть суму чисел z_1 і z_2, z_2 і z_3, де $z_1=3-2i$, $z_2=5+2i$, $z_3=1-i$.

Розв’язання.

$$z_1+z_2=(3-2i)+(5+2i)=(3+5)+i(-2+2)=8+0\cdot i=8;$$

$$z_2 + z_3 = (5 + 2i) + (1 - i) = 6 + 1 \cdot i = 6 + i .$$

Приклад 2. Знайдіть різницю $z_1 - z_2$, $z_2 - z_3$ для чисел із приклада 1.3.
Розв'язання.

$$z_1 - z_2 = (3 - 2i) - (5 + 2i) = (3 - 5) + (-2i - 2i) = -2 - 4i ;$$

$$z_2 - z_3 = (5 + 2i) - (1 - i) = 4 + 3i .$$

Приклад 3. Знайдіть добуток чисел: $z_1 = 1 - 2i$ і $z_2 = 3 + 4i$.
Розв'язання.

$$z_1 \cdot z_2 = (1 - 2i) \cdot (3 + 4i) = 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4i - 2i \cdot 3 - 2i \cdot 4i = 3 - 2i - 8i^2 = 11 - 2i .$$

Приклад 4. Знайдіть частку від ділення числа $z_1 = 3 + 2i$ на $z_2 = 2 - i$.
Розв'язання.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 + 2i}{2 - i} = \frac{(3 + 2i) \cdot (2 + i)}{(2 - i) \cdot (2 + i)} = \frac{(6 - 2) + i(3 + 4)}{4 + 1} = \frac{4}{5} + \frac{7}{5} i .$$

Приклад 5. Знайдіть корінь $\sqrt{3 - 4i}$.
Розв'язання.
Позначимо $\sqrt{3 - 4i} = x + iy$, тоді $(x + iy)^2 = 3 - 4i$, або $x^2 - y^2 + i2xy = 3 - 4i$. Використовуючи умову рівності комплексних чисел, запишемо систему:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ 2xy = -4. \end{cases}$$

Розв'язуючи її, знайдемо $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, $y_1 = -1$, $y_2 = 1$. В результаті отримаємо два значення квадратного кореня: $\sqrt{3 - 4i} = 2 - i$ та $\sqrt{3 - 4i} = -2 + i$.

Приклад 6. Знайдіть модулі комплексних чисел:
а) $z_1 = 2$, $z_2 = -2 + \sqrt{3}$; б) $z_3 = -2i$, $z_4 = (2 - \sqrt{3}) \cdot i$; в) $z_5 = -1 + 2i$.
Розв'язання.
а) Числа z_1 і z_2 – дійсні, причому $z_1 = x_1 = 2 > 0$, $z_2 = x_2 = -2 + \sqrt{3} < 0$. Тому $|z_1| = z_1 = 2$, $|z_2| = -z_2 = 2 - \sqrt{3}$.
б) Числа z_3 і z_4 – чисто уявні, причому $z_3 = iy_3$, $y_3 = -2 < 0$; $z_4 = iy_4$, $y_4 = 2 - \sqrt{3} > 0$. Тому $|z_3| = |y_3| = -y_3 = 2$, тобто $|-2i| = 2$; $|z_4| = |y_4| = y_4 = 2 - \sqrt{3}$, або $|(2 - \sqrt{3}) \cdot i| = 2 - \sqrt{3}$.

в) Для числа $z_5 = -1+2i$ маємо $x_5 = \operatorname{Re} z_5 = -1$, $y_5 = \operatorname{Im} z_5 = 2$. Тому $|z_5| = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{5}$.

Приклад 7. Знайдіть аргументи чисел з попереднього прикладу.

Розв'язання.

а) Числа $z_1 = 2$ і $z_2 = -2+\sqrt{3}$ – дійсні, причому $z_1 = x_1 > 0$, $z_2 = x_2 < 0$, тому $\arg z_1 = 0$, $\arg z_2 = \pi$.

б) Числа $z_3 = -2i$ і $z_4 = \left(2-\sqrt{3}\right)\cdot i$ – чисто уявні $\left(x_3 = x_4 = 0\right)$, причому $y_3 = \operatorname{Im} z_3 = -2 < 0$, $y_4 = \operatorname{Im} z_4 = 2-\sqrt{3} > 0$, тому $\arg z_3 = -\frac{\pi}{2}$, $\arg z_4 = \frac{\pi}{2}$.

в) Для числа $z_5 = -1+2i$ $\operatorname{Re} z_5 = -1 \neq 0$, тому з $tg\varphi = \frac{y}{x}$ знаходимо $tg\varphi = -2$; так як при цьому $\operatorname{Im} z_5 > 0$, $\operatorname{Re} z_5 < 0$ (точка знаходиться у другій чверті, то отримаємо $\varphi = \pi + arctg\left(-2\right)$ (рис. 1.4) або $\varphi = \pi - arctg2$.

Приклад 8. Запишіть в тригонометричній формі число $\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$.

Розв'язання.

Позначимо $z = \frac{z_1}{z_2}$, $z_1 = 1+i$, $z_2 = \sqrt{3}-i$. Для чисел z_1 та z_2 знайдемо модулі та аргументи: $|z_1| = \sqrt{2}$, $arg\, z_1 = \frac{\pi}{4}$; $|z_2| = 2$, $arg\, z_2 = -\frac{\pi}{6}$. За правилом знаходження частки комплексних чисел, записаних в тригонометричній формі отримаємо

$$|z| = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2},\ arg\, z = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{5\pi}{12}$$

і

$$\frac{1+i}{\sqrt{3}-i} = \sqrt{2}\left(cos\left(\frac{5\pi}{12}+2k\pi\right) + i\, sin\left(\frac{5\pi}{12}+2k\pi\right)\right),\ k \in Z.$$

Приклад 9. Запишіть в тригонометричній формі число $(1+i)^5\left(\sqrt{3}-i\right)^7$.

Розв'язання.

Позначимо $z = z_1 \cdot z_2$, $z_1 = (1+i)^5$, $z_2 = \left(\sqrt{3}-i\right)^7$. Знайдемо модулі і аргументи чисел z_1 і z_2. Для числа z_1 маємо:

$$|z_1| = \left(\sqrt{2}\right)^5,\ arg\, z_1 = -\frac{3\pi}{4}.$$

Для числа z_2 послідовно знаходимо:

$$\left|\sqrt{3}-i\right|=2,\ arg\left(\sqrt{3}-i\right)=-\frac{\pi}{6},$$

$$\left|z_2\right|=2^7,\ Argz_2=7arg\left(\sqrt{3}-i\right)=-\frac{7\pi}{6},$$

або, знаходячи головне значення аргументу: $arg\,z_2=\frac{5\pi}{6}$. Таким чином, отримаємо

$$|z|=\left(\sqrt{2}\right)^5\cdot 2^7=2^9\sqrt{2}\ \text{ і }\ Argz=\frac{5\pi}{6}-\frac{3\pi}{4}=\frac{\pi}{12}.$$

Запишемо число $z=z_1\cdot z_2$ в тригонометричній формі:

$$z=2^9\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}+2k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}+2k\pi\right)\right),\ k\in Z.$$

Алгоритм розв'язання рівнянь вигляду $z^n-a=0\ \left(z^n=a\right)$**.**

1. Знайти модуль і аргумент числа $a: r=|a|,\ \varphi=arg\,a$.
2. Записати формулу при заданому значенні n:

$$\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{r}\left(cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\,sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right).$$

3. Виписати значення коренів рівняння z_k, при $k=0,1,...,n-1$.

Приклад 10. Розв'яжіть рівняння: а) $z^6-1=0$; б) $z^3-i=0$.

Розв'язання.

Ця задача рівносильна задачі знаходження всіх значень кореня з комплексного числа. Розв'язуємо в кожному випадку за алгоритмом.

а) Знайдемо $z=\sqrt[6]{1}$.

1. Знайдемо модуль і аргумент числа 1: $r=1,\ \varphi=0$.

2. Для отриманих значень запишемо формулу:

$$z=\sqrt[6]{1}=\sqrt[6]{1}\cdot\left(cos\frac{2k\pi}{6}+i\,sin\frac{2k\pi}{6}\right),\ k=0,1,...,5.$$

Помітимо, що справа стоїть $\sqrt[6]{1}$ – арифметичний корінь, його єдине значення дорівнює 1.

3. Надаючи k послідовно значень від 0 до 5, випишемо розв'язки рівнянь:

$$z_1=\cos 0+i\sin 0=1,$$

$$z_2 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$z_3 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$z_4 = \cos\pi + i\sin\pi = -1,$$
$$z_5 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$z_6 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Геометрично відповідні точки розташовані в вершинах правильного шестикутника, вписаного в коло радіуса $R = 1$, одна з точок (відповідає $k = 0$) $z_1 = 1$. Помітимо властивості коренів цього рівняння з дійсними коефіцієнтами – його комплексні корені являються попарно спряженими: $z_6 = \overline{z_2}$, $z_5 = \overline{z_3}$, z_1 і z_4 – дійсні числа.

б) Знайдемо $z = \sqrt[3]{i}$.

1. Визначимо модуль і аргумент числа i: $r = |i| = 1$, $\varphi = \arg i = \frac{\pi}{2}$.

2. За формулою запишемо:

$$\sqrt[3]{i} = 1\cdot\left(cos\frac{\pi/2 + 2\pi k}{3} + i\,sin\frac{\pi/2 + 2\pi k}{3}\right) =$$

$$= cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi k\right) + i\,sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi k\right), k = 0,1,2.$$

3. Випишемо корені z_1, z_2, z_3:

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2},\ z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2},\ z_3 = -i.$$

Для геометричного представлення розв'язків рівняння достатньо зобразити одне значення, наприклад $z_1 = cos\frac{\pi}{6} + i\,sin\frac{\pi}{6}$ (при $k = 0$) – це точка кола $|z| = 1$, що лежить на промені $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Після цього будуємо правильний трикутник, вписаний в коло $|z| = 1$.

Приклад 11. Обчисліть $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{-1-i}\right)^{20}$.

Розв'язання.

Розглянемо окремо чисельник і знаменник дробу $z = \frac{z_1}{z_2}$:

1. $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$;
1. $|z_1| = \sqrt{1+3} = 2$;
3. $z_1 \in I$, $\varphi = arctg\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$;
4. $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$;

1. $z_2 = 1 - i$;
1. $|z_2| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$;
3. $z_2 \in III$, $\varphi = arctg1 - \pi = -\frac{3\pi}{4}$;
4. $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$.

Тепер знайдемо модуль та аргумент частки:

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2},\ Arg\,\frac{z_1}{z_2} = arg\,z_1 - arg\,z_2 = \frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{4} = \frac{13\pi}{12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow arg\,z = \frac{13\pi}{12} - 2\pi = -\frac{11\pi}{12}.$$

Залишилося піднести z до степеня:

$$z^{20} = \sqrt{2}^{20}\left(cos\left(-\frac{11\pi}{12}\cdot 20\right) + i\,sin\left(-\frac{11\pi}{12}\cdot 20\right)\right) =$$

$$= 2^{10}\left(cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\,sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2^9\left(1 - \sqrt{3}i\right).$$

6 МНОГОЧЛЕНИ

Теоретичні питанння:

1. Степінь многочлена та його коефіцієнти. Старший коефіцієнт і вільний член. Рівність многочленів.
2. Значення многочлена в точці. Нулі (корені) многочлена та їх кратність.
3. Розклад многочлена на множники.
4. Додавання і віднімання многочленів. Множення многочленів.
5. Ділення многочлена на многочлен з остачею. Теорема Безу.
6. Незвідні многочлени над різними полями.
7. Означення найбільшого спільного дільника (НСД) многочленів. Алгоритм Евкліда для знаходження НСД многочленів.
8. Алгоритм обчислення значення многочлена за схемою Горнера.
9. Застосування схеми Горнера для ділення многочлена на двочлен.
10. Кількість дійсних коренів многочлена. Кратність дійсних коренів.
11. Локалізація дійсних коренів. Теорема Коші про межі коренів многочлена.
12. Верхня та нижня оцінки дійсних коренів.
13. Застосування перетворення змінної для оцінювання коренів.
14. Практичне значення оцінок коренів у чисельних методах.
15. Означення многочленів Штурма. Побудова системи многочленів Штурма.
16. Властивості системи многочленів Штурма.
17. Теорема Штурма про кількість дійсних коренів на відрізку.
18. Алгоритм знаходження кількості дійсних коренів многочлена.
19. Роль многочленів у комп'ютерних науках.

Практичні завдання:

1. Для даного многочлена:
   а) за допомогою схеми Горнера знайдіть його значення в точці $x_0 = -1$;
   б) знайдіть неповну частку і остачу від його ділення на $(x - x_0)$;
   в) запишіть його розкладання за степенями $(x - x_0)$.

Варіанти завдань:

1.	$12x^3 + 16x^2 - 3x - 4.$	**2.**	$12x^3 - 16x^2 - 3x + 4.$
3.	$16x^3 + 8x^2 - 36x - 18.$	**4.**	$16x^3 - 12x^2 - 36x + 27.$
5.	$16x^3 + 12x^2 - 36x - 27.$	**6.**	$16x^3 - 20x^2 - 36x + 45.$
7.	$16x^3 + 20x^2 - 36x - 45.$	**8.**	$12x^3 + 4x^2 - 3x - 1.$
9.	$12x^3 - 4x^2 - 3x + 1.$	**10.**	$12x^3 + 8x^2 - 3x - 2.$
11.	$16x^3 + 4x^2 - 36x - 9.$	**12.**	$12x^3 - 8x^2 - 3x + 2.$
13.	$12x^3 + 16x^2 - 75x - 100.$	**14.**	$16x^3 - 4x^2 - 36x + 9.$
15.	$12x^3 + 8x^2 - 75x - 50.$	**16.**	$12x^3 - 16x^2 - 75x + 100.$

17. $12x^3 + 4x^2 - 75x - 25.$ **18.** $16x^3 - 8x^2 - 36x + 18.$

19. $12x^3 - 4x^2 - 75x + 25.$ **20.** $12x^3 - 8x^2 - 75x + 50.$

2. Знайдіть частку від ділення многочлена $P(x)$ на $Q(x)$.

1. $P(x) = -12x^5 - 6x^4 + 34x^3 + 6x^2 - 32x - 12; Q(x) = 3x^2 + 6x + 2.$

2. $P(x) = 8x^5 + 28x^4 + 32x^3 + 20x^2 + 8x + 24; Q(x) = 2x^2 + 4x + 4.$

3. $P(x) = 10x^5 - 22x^4 - 26x^3 + 54x^2 + 14x - 30; Q(x) = 5x^2 - x - 5.$

4. $P(x) = 10x^5 - 12x^4 + x^3 - 24x^2 + 14x - 2; Q(x) = -2x^2 + 4x - 1.$

5. $P(x) = 3x^5 + 7x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 3x - 2; Q(x) = x^2 + x - 2.$

6. $P(x) = -15x^5 - 3x^4 + 10x^3 - 3x^2 + 9x + 2; Q(x) = -5x^2 + 4x + 1.$

7. $P(x) = -20x^5 + 22x^4 - 12x^3 + 27x^2 - 7x + 20; Q(x) = -5x^2 + 3x - 4.$

8. $P(x) = 12x^5 - 30x^4 + 14x^3 + 33x^2 - 31x + 5; Q(x) = -6x^2 + 6x - 1.$

9. $P(x) = 8x^5 - 24x^4 + 24x^3 - 23x^2 + 6x + 5; Q(x) = -4x^2 + 2x + 1.$

10. $P(x) = -16x^5 - 24x^4 + 3x^3 + 22x^2 + 13x + 2; Q(x) = -4x^2 - 5x - 1.$

11. $P(x) = -2x^5 + 4x^4 + 17x^3 - 31x^2 - 7x + 10; Q(x) = -x^2 - x + 5.$

12. $P(x) = -24x^5 - 20x^4 - 4x^3 - 22x^2 - 4x + 10; Q(x) = 4x^2 + 2x - 2.$

13. $P(x) = 24x^5 + 16x^4 - 48x^3 - 7x^2 - 2x - 3; Q(x) = 6x^2 - 5x - 3.$

14. $P(x) = -12x^5 - 10x^4 + 20x^3 + 3x^2 - 12x + 5; Q(x) = -6x^2 - 2x + 5.$

15. $P(x) = 24x^5 - 24x^4 - 38x^3 + 28x^2 + 9x - 2; Q(x) = -6x^2 + 3x + 2.$

16. $P(x) = -15x^5 - 11x^4 - 10x^3 - 25x^2 - 28x - 10; Q(x) = 3x^2 + 4x + 2.$

17. $P(x) = -20x^5 + 31x^4 + 14x^3 - 5x^2 - 20x - 12; Q(x) = -5x^2 + 4x + 4.$

18. $P(x) = 2x^5 + 3x^4 - 11x^3 - 7x^2 + 11x + 6; Q(x) = 2x^2 - x - 3.$

19. $P(x) = 20x^5 - 34x^4 + 17x^3 + 15x^2 - 21x + 9; Q(x) = 4x^2 - 6x + 3.$

20. $P(x) = -8x^5 - 28x^4 + 2x^3 - 14x^2 - 3x + 15; Q(x) = 2x^2 + 6x - 5.$

3. Розв’яжіть рівняння, якщо відомий один з його коренів.

Варіанти завдань:

1. $z^4 - 6z^3 + 23z^2 - 34z + 26 = 0; z_1 = 1 + i.$

2. $z^4 - 8z^3 + 34z^2 - 72z + 65 = 0; z_1 = 2 - i.$

3. $z^4 - 10z^3 + 47z^2 - 118z + 130 = 0; z_1 = 3 + i.$

4. $z^4 - 12z^3 + 62z^2 - 172z + 221 = 0; z_1 = 4 - i.$

5. $z^4 - 6z^3 + 26z^2 - 46z + 65 = 0; z_1 = 1 + 2i.$

6. $z^4 - 2z^3 + 7z^2 + 18z + 26 = 0; z_1 = -1 + i.$

7. $z^4 + 2z^2 + 32z + 65 = 0; z_1 = -2 - i.$

8. $z^4 + 2z^3 - z^2 + 38z + 130 = 0; z_1 = -3 + i.$

9. $z^4 + 4z^3 - 2z^2 + 36z + 221 = 0; z_1 = -4 - i.$

10. $z^4 - 8z^3 + 37z^2 - 84z + 104 = 0; z_1 = 2 - 2i.$

11. $z^4 - 10z^3 + 50z^2 - 130z + 169 = 0; z_1 = 3 + 2i.$

12. $z^4 - 12z^3 + 65z^2 - 184z + 260 = 0; z_1 = 4 - 2i.$

13. $z^4 - 2z^3 + 10z^2 + 6z + 65 = 0; z_1 = -1 + 2i.$

14. $z^4 + 5z^2 + 20z + 104 = 0; z_1 = -2 - 2i.$

15. $z^4 + 2z^3 + 2z^2 + 26z + 169 = 0; z_1 = -3 + 2i.$

16. $z^4 + 4z^3 + z^2 + 24z + 260 = 0; z_1 = -4 - 2i.$

17. $z^4 - 6z^3 + 38z^2 - 94z + 221 = 0; z_1 = 1 + 4i.$

18. $z^4 - 8z^3 + 49z^2 - 132z + 260 = 0; z_1 = 2 - 4i.$

19. $z^4 - 10z^3 + 62z^2 - 178z + 325 = 0; z_1 = 3 + 4i.$

20. $z^4 - 12z^3 + 77z^2 - 232z + 416 = 0; z_1 = 4 - 4i.$

4. Знайдіть найбільший спільний дільник та найменше спільне кратне многочленів $f(x)$ і $g(x)$.

Варіанти завдань:

1. $f(x) = x^6 + x^3 + x^2 + x + 1; g(x) = x^4 + 3x^2 + 2.$

2. $f(x) = x^6 - 2x^5 + 2x^4 + 3x^2 - 6x + 6; g(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2.$

3. $f(x) = x^6 - 2x^4 - 2x^2 - 3; g(x) = x^4 + x^2 - 12.$

4. $f(x) = x^6 + 2x^5 + 5x^4 + x^2 + 2x + 5; g(x) = x^4 + 2x^3 + 7x^2 + 4x + 10.$

5. $f(x) = x^6 - 4x^4 + 2x^3 - 8x - 12; g(x) = x^4 - 3x^2 - 4.$

6. $f(x) = x^6 + x^5 + x^4 + 2x^2 + 2x + 2; g(x) = x^4 + x^3 + 4x^2 + 3x + 3.$

7. $f(x) = x^6 - 2x^5 + 5x^4 + x^2 - 2x + 5; g(x) = x^4 - 2x^3 + 9x^2 - 8x + 20.$

8. $f(x) = x^6 + 5x^4 + 6x^2 + 8; g(x) = x^4 + 3x^2 - 4.$

9. $f(x) = x^6 + 2x^4 + 2x^2 - 5; g(x) = x^4 + x^2 - 2.$

10. $f(x) = x^6 + 3x^5 + 4x^4 + x^2 + 3x + 4;$
$g(x) = x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 15x + 20.$

11. $f(x) = x^6 - 5x^4 + 2x^2 - 10; g(x) = x^4 - 2x^2 - 15.$

12. $f(x) = x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 3x^2 + 6x + 6; g(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2.$

13. $f(x) = x^6 - 3x^5 + 7x^4 + x^2 - 3x + 7; g(x) = x^4 - 3x^3 + 9x^2 - 6x + 14.$

14. $f(x) = x^6 + 7x^4 + 7x^2 + 6; g(x) = x^4 + 5x^2 - 6.$

15. $f(x) = x^6 - 2x^4 + 5x^2 - 10; g(x) = x^4 + x^2 - 6.$

16. $f(x) = x^6 + 5x^4 + 9x^2 + 5; g(x) = x^4 + 3x^2 + 2.$

17. $f(x) = x^6 - 4x^5 + 8x^4 + x^2 - 4x + 8;$
$g(x) = x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 12x + 24.$

18. $f(x) = x^6 + 5x^5 + 6x^4 + 2x^2 + 10x + 12;$
$g(x) = x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 5x + 6.$

19. $f(x) = x^6 - 6x^4 - 4x^2 - 21; g(x) = x^4 - 5x^2 - 14.$

20. $f(x) = x^6 - x^4 + 2x^2 - 2; g(x) = x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 3x - 5.$

Приклади розв'язання задач:

Приклад 1. Знайдіть остачу від ділення многочлена $f(x) = ix^4 + (3-2i)x^3 + (2i-4)x^2 + (3-3i)x + 3i + 2$ на двочлен $g(x) = x + 1 - i$.

Розв'язання.

Ділення виконаємо за схемою Горнера:

	i	$3-2i$	$2i-4$	$3-3i$	$3i+2$
$-(1-i)$	i	$2-3i$	$-3+7i$	$-1-13i$	$16+5i$

Щоб знайти коефіцієнти частки і остачі, доцільно виконувати проміжні обчислення:

$$3-2i-i(1-i) = 2-3i,\ 2i-4-(1-i)(2-3i) = -3+7i,$$

$$3-3i-(1-i)(-3+7i) = -1-13i,\ 3i+2-(1-i)(-1-13i) = 16+15i.$$

Отже, остача дорівнює $16+15i$.

Приклад 2. Знайдіть найбільший спільний дільник $d(x)$ многочленів $f(x)=2x^4+3x^3-3x^2-5x+2$ і $g(x)=2x^3+x^2-x-1$ та підберіть такі многочлени $m(x)$ і $n(x)$, що $f(x)m(x)+g(x)n(x)=d(x)$.

Розв'язання.

До многочленів $f(x)$ і $g(x)$ застосовуємо алгоритм Евкліда:

$$\begin{array}{r} 2x^4+3x^3-3x^2-5x+2 \\ \underline{2x^4+x^3-x^2-x} \\ -2x^3-2x^2-4x+2 \\ \underline{2x^3+x^2-x-1} \\ -3x^2-3x+3 \end{array} \left| \begin{array}{l} 2x^3+x^2-x-1 \\ \hline x+1 \end{array} \right. \qquad \begin{array}{r} 2x^3+x^2-x-1 \\ \underline{2x^3+2x^2-2x} \\ -x^2+x-1 \\ \underline{-x^2-x+1} \\ 2x-2 \end{array} \left| \begin{array}{l} -3x^2-3x+3 \\ \hline -\frac{2}{3}x+\frac{1}{3} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} -3x^2-3x+3 \\ \underline{-3x^2+3x} \\ -6x+3 \\ \underline{-6x+6} \\ -3 \end{array} \left| \begin{array}{l} 2x-2 \\ \hline -\frac{3}{2}x-3 \end{array} \right.$$

Отже, в результаті ділення одержуємо:

$$f(x)=g(x)q_1(x)+r_1(x), q_1(x)=x+1, r_1(x)=-3x^2-3x+3,$$

$$g(x)=r_1(x)q_2(x)+r_2(x), q_2(x)=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}, r_2(x)=2x-2,$$

$$g_2(x)=r_2(x)q_3(x)+r_3(x), q_3(x)=-\frac{3}{2}x-3, r_3(x)=-3.$$

Так як $r_3(x)=-3$ це стале число, а на стале число без остачі ділиться будь-який многочлен, то наступна остача $r_4(x)$ буде дорівнювати нулю. Отже, алгоритм Евкліда записався тут у три рядки, а найбільший спільний дільник дорівнює 1, або $d(x)=1$. Щоб виразити $d(x)$ через многочлени $m(x)$ і $n(x)$ виразимо спочатку через них $r_3(x)$.

$$r_3(x)=r_1(x)-r_2(x)q_3(x)=r_1(x)-(g(x)-r_1(x)q_2(x))q_3(x)=$$
$$=r_1(x)(1+q_2(x)q_3(x))-g(x)q_3(x)=(f(x)-g(x)q_1(x))(1+q_2(x)q_3(x))-g(x)q_3(x)=$$
$$=f(x)(1+q_2(x)q_3(x))-g(x)(q_1(x)+q_1(x)q_2(x)q_3(x)+q_3(x)).$$

Враховуючи, що $d(x)=-\frac{1}{3}r_3(x)$, запишемо:

$$d(x)=\frac{1+q_2(x)q_3(x)}{-3}\cdot f(x)+g(x)\frac{q_1(x)+q_1(x)q_2(x)q_3(x)+q_3(x)}{3}.$$

Отже,

$$m(x)=\frac{1+q_2(x)q_3(x)}{-3},\ n(x)=\frac{q_1(x)+q_1(x)q_2(x)q_3(x)+q_3(x)}{3},$$

де

$$q_1(x)=x+1,\ q_2(x)=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3},\ q_3(x)=-\frac{3}{2}x-3.$$

Остаточно одержуємо:

$$m(x)=-\frac{2x^2+3x}{6},\ n(x)=\frac{2x^3+5x^2-6}{6}.$$

Приклад 3. Користуючись схемою Горнера:

1) розкладіть многочлен $f(x)$ за степенями $(x-\alpha)$ і одержаний розклад розташуйте за спадними степенями x;

2) знайдіть значення многочлена $f(x)$ та його похідних при $x=\alpha$, якщо $f(x)=x^6-6x^4-4x^3+9x^2+12x+4,\ \alpha=-2$.

3) знайдіть канонічний розклад $f(x)$ (відокремте кратні множники).

Розв'язання.

1) За схемою Горнера маємо:

	1	0	–6	–4	9	12	4	
–2	1	–2	–2	0	9	–6	16	$=h_0$
–2	1	–4	6	–18	33	–72	$=h_1$	
–2	1	–6	18	–48	129	$=h_2$		
–2	1	–8	34	–116	$=h_3$			
–2	1	–10	54	$=h_4$				
–2	1	–12	$=h_5$					
–2	1	$=h_6$						

Звідси

$$f(x)=(x+2)^6-12(x+2)^5+54(x+2)^4-116(x+2)^3+129(x+2)^2-72(x+2)+16.$$

2) Для многочлена $f(x)$ запишемо формулу Тейлора:

$$f(x)=f(-2)+\frac{f'(-2)}{1!}(x+2)+\frac{f''(-2)}{2!}(x+2)^2+\ldots+\frac{f^{VI}(-2)}{6!}(x+2)^6.$$

Порівняємо цю формулу з розкладом многочлена $f(x)$ за степенями $(x+2)$. Одержуємо, що $f^{(k)}(x_0) = k!\cdot h_k$:

$$f(-2)=16,\ f'(-2)=-72,\ f''(-2)=2!\cdot 129,\ f'''(-2)=-3!\cdot 116,$$
$$f^{IV}(-2)=4!\cdot 54,\ f^{V}(-2)=-5!\cdot 12,\ f^{VI}(-2)=6!.$$

3) Старший коефіцієнт многочлена $a_0 = 1$, тому многочлен, якщо і має раціональні корені, то вони можуть бути лише цілими. Будемо шукати їх серед дільників вільного члена $a_6 = 4$: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$. За схемою Горнера:

α	1	0	–6	–4	9	12	4
2	1	2	–2	–8	–7	–2	0

Отже, $\alpha = 2$ – корінь даного многочлена та

$$f(x) = (x-2)\left(x^5 + 2x^4 - 2x^3 - 8x^2 - 7x - 2\right).$$

Визначимо його кратність. Застосуємо схему Горнера до многочлена

$$g(x) = x^5 + 2x^4 - 2x^3 - 8x^2 - 7x - 2:$$

α	1	2	–2	–8	–7	–2
2	1	4	6	4	1	0

Це означає, що $\alpha = 2$ – корінь многочлена $f(x)$ та

$$f(x) = (x-2)^2\left(x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1\right).$$

Продовжимо працювати з многочленом

$$h(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1:$$

α	1	4	6	4	1
2	1	6	18	40	81

Останнє число $81 \neq 0$. Таким чином, коренем многочлена $h(x)$ число $\alpha = 2$ не являється. Представлені кроки можна об'єднати в одну таблицю:

α	1	0	–6	–4	9	12	4
2	1	2	–2	–8	–7	–2	0
2	1	4	6	4	1	0	
2	1	6	18	40	81		

Продовжимо пошук його коренів серед ± 1. Результати можна коротко представити у вигляді таблиці:

α	1	4	6	4	1
–1	1	3	3	1	0
–1	1	2	1	0	
–1	1	1	0		
–1	1	0			
–1	1				

Чотири нулі даної таблиці кажуть про кратність 4 кореня $\alpha = -1$. Інших коренів немає. Тому вихідний многочлен можна представити у канонічному вигляді:

$$f(x) = (x-2)^2 (x+1)^4.$$

Приклад 4. Знайдіть раціональні корені многочлена

$$f(x) = 12x^6 + 64x^5 + 123x^4 + 113x^3 + 65x^2 + 24x + 4.$$

Розв'язання.

Старший коефіцієнт $a_0 = 12 \neq 1$, тому многочлен, якщо має раціональні корені, то вони можуть бути як цілими, так і дробовими.

Будемо шукати їх серед чисел:

$$\pm 1;\ \ \pm 2;\ \ \pm 4;\ \ \pm\ \frac{1}{2};\ \ \pm\frac{1}{3};\ \ \pm\frac{2}{3};\ \ \pm\frac{4}{3};\ \ \pm\frac{1}{4};\ \ \pm\frac{1}{6};\ \ \pm\frac{1}{12}.$$

Для скорочення обчислень знайдемо межі коренів многочлена $f(x)$. Так як коефіцієнти многочлена $f(x)$ додатні, то він не має додатних коренів і тому верхня межа дорівнює 0.

Знайдемо нижню межу многочлена $f(x)$ методом Ньютона. Так

$$f(-x) = 12x^6 - 64x^5 + 123x^4 - 113x^3 + 65x^2 - 24x + 4.$$

Для $f(-x)$ знаходимо методом Ньютона верхню межу коренів: –3, отже, –3 – нижня межа коренів для многочлена $f(x)$.

Тоді усі корені многочлена $f(x)$ знаходяться у проміжку $(-3;\ 0)$. Тому залишилися для випробувань числа:

$$-1;\ \ -2;\ \ -\ \frac{1}{2};\ \ -\frac{1}{3};\ \ -\frac{2}{3};\ \ -\frac{4}{3};\ \ -\frac{1}{4};\ \ -\frac{1}{6};\ \ -\frac{1}{12}.$$

Знайдемо цілі корені, ними можуть бути числа –1, –2. Обчислюємо $f(1)=405$, $f(-1)=3$. Так як $f(-1)\neq 0$, то число –1 не є коренем $f(x)$. Для числа –2 застосуємо "сито". Результат запишемо у таблицю:

α	$\frac{f(1)}{\alpha-1}$	$\frac{f(-1)}{\alpha+1}$
–2	ціле	ціле

Отже, число –2 підозріле на корінь. За схемою Горнера перевіряємо, чи буде –2 коренем многочлена. Якщо так, то визначимо його кратність:

	12	64	123	113	65	24	4
–2	12	40	43	27	11	2	0
–2	12	16	11	5	1	0	
–2	12	4	3	–1	3		

З таблиці видно, що $\alpha=-2$ є двократним коренем многочлена $f(x)$. Знайдемо дробові корені. До чисел, що залишилися для перевірки, застосовуємо "сито". Результати заносимо до таблиці:

$\frac{p}{q}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{12}$
$\frac{f(1)}{p-q}$	ц	д	ц	д	ц	д	Д
$\frac{f(-1)}{p+q}$	ц		д		ц		

Числа $-\frac{1}{2}$ і $-\frac{1}{4}$ підозрілі на корінь. Так як –2 є двократним коренем многочлена $f(x)$, то $f(x)=(x+2)^2 g(x)$, де $g(x)=12x^4+16x^3+11x^2+5x+1$, то кожне з чисел $-\frac{1}{2}$ і $-\frac{1}{4}$ перевіряємо на корінь за схемою Горнера для многочлена $g(x)$:

	12	16	11	5	1
$-\frac{1}{2}$	12	10	6	2	0
$-\frac{1}{2}$	12	4	4	0	
$-\frac{1}{2}$	12	–2	5		

Отже, $\alpha = -\frac{1}{2}$ є двократним коренем многочлена $g(x)$ і тому $f(x) = (x+2)^2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 h(x)$, де $h(x) = 12x^2 + 4x + 4$. Для останнього ж многочлена легко з'ясуємо, що його дискримінант $D = 16 - 4 \cdot 12 \cdot 4 < 0$, а тому дійсних коренів він не має.

Отже, многочлен $f(x)$ має два двократні корені $\alpha_1 = -2,\ \alpha_2 = -\frac{1}{2}$.

7 СИСТЕМА ПОЛІНОМІВ ШТУРМА

Теоретичні питання:

1. Локалізація дійсних коренів. Теорема Коші про межі коренів многочлена.
2. Верхня та нижня оцінки дійсних коренів.
3. Застосування перетворення змінної для оцінювання коренів.
4. Практичне значення оцінок коренів у чисельних методах.
5. Означення многочленів Штурма. Побудова системи многочленів Штурма.
6. Властивості системи многочленів Штурма.
7. Теорема Штурма про кількість дійсних коренів на відрізку.
8. Алгоритм знаходження кількості дійсних коренів многочлена.
9. Роль многочленів у комп'ютерних науках.

Практичні завдання:

1. Для даного многочлена побудуйте систему поліномів Штурма, визначте кількість від'ємних та додатних його коренів, локалізуйте корені.

Варіанти завдань:

1.	$12x^3+16x^2-3x-4.$	**2.**	$12x^3-16x^2-3x+4.$
3.	$16x^3+8x^2-36x-18.$	**4.**	$16x^3-12x^2-36x+27.$
5.	$16x^3+12x^2-36x-27.$	**6.**	$16x^3-20x^2-36x+45.$
7.	$16x^3+20x^2-36x-45.$	**8.**	$12x^3+4x^2-3x-1.$
9.	$12x^3-4x^2-3x+1.$	**10.**	$12x^3+8x^2-3x-2.$
11.	$16x^3+4x^2-36x-9.$	**12.**	$12x^3-8x^2-3x+2.$
13.	$12x^3+16x^2-75x-100.$	**14.**	$16x^3-4x^2-36x+9.$
15.	$12x^3+8x^2-75x-50.$	**16.**	$12x^3-16x^2-75x+100.$
17.	$12x^3+4x^2-75x-25.$	**18.**	$16x^3-8x^2-36x+18.$
19.	$12x^3-4x^2-75x+25.$	**20.**	$12x^3-8x^2-75x+50.$

Приклади розв'язання задач.

Приклад 1. Побудувавши систему Штурма, відокремте корені многочлена $f(x)=x^4-x^3-4x^2+4x+1.$

Розв'язання.

Визначимо границі дійсних коренів многочлена. Для цього побудуємо допоміжні многочлени:

$$f_1(x)=-f(x)=x^4+x^3-4x^2-4x+1,$$

$$f_2(x)=x^4 f\left(\frac{1}{x}\right)=x^4\left(\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^3}-\frac{4}{x^2}+\frac{4}{x}+1\right)=x^4+4x^3-4x^2-x+1,$$

$$f_3(x)= =x^4 f\left(-\frac{1}{x}\right)=x^4-4x^3-4x^2+x+1.$$

Знайдемо верхні межі їх коренів за схемою Горнера:

$f(x)$:

	1	−1	−4	4	1
3	1	2	2	10	1

$f_1(x)$:

	1	1	−4	−4	1
2	1	3	2	0	1

$f_2(x)$:

	1	4	−4	−1	1
1	1	5	1	0	1

$f_3(x)$:

	1	−4	−4	1	1
5	1	1	1	6	31

Отже, 3 – верхня границя додатних коренів; –2 – нижня границі від'ємних коренів, $\frac{1}{1}=1$ – нижня границя додатних коренів, $-\frac{1}{5}$ – верхня границя від'ємних коренів (можна взяти нуль).

Отже, всі дійсні корені належать проміжкам: $(-2;0)\cup(1;3)$.

Побудуємо систему поліномів Штурма. Покладемо:

$$f_0(x)= f(x)=x^4-x^3-4x^2+4x+1,\ f_1(x)= f'(x)=4x^3-3x^2-8x+4,$$

$$f_2(x)=-(f_0(x), f_1(x))=7x^2-8x-4,\ f_3(x)=-(f_1(x), f_2(x))=4x-5,$$

$$f_4(x)=-(f_2(x), f_3(x))=1.$$

Визначимо знаки отриманих функцій на $\pm\infty$ та в точці 0:

	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	Кількість змін знаку
$-\infty$	+	–	+	–	+	4
0	+	+	–	–	+	2
∞	+	+	+	+	+	0

Таким чином, на інтервалі $(-\infty;0)$ лежить 4–2=2 корені та на інтервалі $(0;\infty)$: 2–0=2 корені. Відокремимо корені поліному. Для цього побудуємо ще одну таблицю:

	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	Кількість змін знаку
–2	+	–	+	–	+	4
–1	–	+	+	–	+	3
0	+	+	–	–	+	2
1	+	–	–	–	+	2
3/2	–	–	–	+	+	1
2	+	+	+	+	+	0

Як видно з таблиці, корені належать інтервалам: $(-2;-1)$, $(-1;0)$, $(1;3/2)$ та $(3/2;2)$ (дробове значення $3/2$ було взяте у зв'язку з тим, що інтервалу $(1;2)$ належать два корені).

8 ЛІНІЙНІ ВЕКТОРНІ ПРОСТОРИ. ОПЕРАТОРИ

Теоретичні питання:

1. Поняття векторного простору над полем дійсних (комплексних) чисел.
2. Приклади векторних просторів, що використовуються в комп'ютерних науках.
3. Лінійні комбінації векторів.
4. Лінійна оболонка системи векторів.
5. Лінійна залежність і незалежність векторів. Критерії лінійної залежності системи векторів.
6. Базис векторного простору. Розмірність векторного простору.
7. Координати вектора в заданому базисі. Зміна базису векторного простору.
8. Поняття лінійного оператора у векторному просторі.
9. Приклади лінійних операторів у задачах комп'ютерних наук.
10. Матриця лінійного оператора в заданому базисі.
11. Дія лінійного оператора на вектор у координатній формі.
12. Означення власного числа та власного вектора лінійного оператора.
13. Характеристичне рівняння лінійного оператора.
14. Знаходження власних чисел матриці.
15. Геометричний зміст власних векторів і власних чисел.
16. Застосування власних чисел і власних векторів у комп'ютерних науках (аналіз даних і метод головних компонент; комп'ютерна графіка; моделювання процесів; пошук і класифікація).

Практичні завдання:

1. Дано матриці M_1, M_2, M_3, M_4, M_5. Знайдіть розмірність та базис лінійної оболонки та лінійні залежності між ними.

Варіанти завдань:

1. $\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-10 & -9\\ 5 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}10 & 5\\ -6 & -2\end{pmatrix}.$
2. $\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2 & 6\\ 1 & 5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 14\\ 4 & 10\end{pmatrix}.$
3. $\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-10 & -6\\ 5 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}10 & 10\\ -4 & 2\end{pmatrix}.$
4. $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7 & 11\\ 4 & 5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}8 & 14\\ 16 & 10\end{pmatrix}.$
5. $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-11 & -7\\ 4 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}8 & 2\\ -8 & -2\end{pmatrix}.$
6. $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3 & 9\\ 6 & 5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}12 & 16\\ 14 & 10\end{pmatrix}.$
7. $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-9 & -3\\ 6 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}12 & 8\\ -2 & 2\end{pmatrix}.$
8. $\begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}12 & 13\\ 9 & 5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}18 & 17\\ 26 & 10\end{pmatrix}.$

9. $\begin{pmatrix}0 & 2\\3 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4 & 3\\1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-12 & -5\\3 & -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2 & 1\\3 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}6 & -1\\-10 & -2\end{pmatrix}.$

10. $\begin{pmatrix}0 & 2\\3 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4 & 3\\1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}8 & 12\\11 & 5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2 & 1\\3 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}22 & 18\\24 & 10\end{pmatrix}.$

11. $\begin{pmatrix}0 & 2\\3 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4 & 3\\1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-8 & 0\\7 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2 & 1\\3 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}14 & 6\\0 & 2\end{pmatrix}.$

12. $\begin{pmatrix}-5 & -3\\-2 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1 & 3\\-4 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-13 & 3\\-16 & 5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3 & 1\\-2 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-32 & 2\\-24 & 10\end{pmatrix}.$

13. $\begin{pmatrix}-5 & -3\\-2 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1 & 3\\-4 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-7 & -15\\8 & -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3 & 1\\-2 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}16 & 14\\0 & -2\end{pmatrix}.$

14. $\begin{pmatrix}-5 & -3\\-2 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1 & 3\\-4 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-17 & -3\\-14 & 5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3 & 1\\-2 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-28 & 8\\-26 & 10\end{pmatrix}.$

15. $\begin{pmatrix}-5 & -3\\-2 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1 & 3\\-4 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-13 & -15\\2 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3 & 1\\-2 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4 & 16\\-10 & 2\end{pmatrix}.$

16. $\begin{pmatrix}-4 & -2\\-1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 3\\-3 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-8 & 5\\-11 & 5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-22 & 5\\-14 & 10\end{pmatrix}.$

17. $\begin{pmatrix}-4 & -2\\-1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 3\\-3 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-8 & -13\\7 & -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}14 & 11\\-2 & -2\end{pmatrix}.$

18. $\begin{pmatrix}-4 & -2\\-1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 3\\-3 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-12 & 0\\-9 & 5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-18 & 10\\-16 & 10\end{pmatrix}.$

19. $\begin{pmatrix}-4 & -2\\-1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 3\\-3 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-12 & -12\\3 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}6 & 14\\-8 & 2\end{pmatrix}.$

20. $\begin{pmatrix}-3 & -1\\0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 3\\-2 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3 & 7\\-6 & 5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-12 & 8\\-4 & 10\end{pmatrix}.$

2. З’ясуйте, чи є лінійно незалежними стовпці A, B, C, чи утворюють вони базис деякого лінійного векторного простору. Якщо так, то представте стовпець X у вигляді їх лінійної комбінації.

Варіанти завдань:

1. $X=\begin{pmatrix}27\\0\\23\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}-4\\1\\7\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-6\\3\\5\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}.$

2. $X=\begin{pmatrix}-26\\-31\\28\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}7\\-1\\2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-1\\-6\\6\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}-1\\-7\\7\end{pmatrix}.$

3. $X=\begin{pmatrix}-24\\-42\\-17\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}3\\3\\5\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-1\\4\\-5\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}3\\-1\\4\end{pmatrix}.$

4. $X=\begin{pmatrix}-14\\-1\\41\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}-2\\1\\6\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-6\\2\\3\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}5\\-5\\7\end{pmatrix}.$

5. $X=\begin{pmatrix}-18\\41\\19\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}-7\\5\\3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}.$

6. $X=\begin{pmatrix}7\\-13\\12\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}-3\\-2\\-7\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2\\-6\\1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}5\\-1\\5\end{pmatrix}.$

7. $X=\begin{pmatrix}0\\16\\-4\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}-5\\-1\\-5\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3\\1\\-7\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}-4\\-5\\2\end{pmatrix}.$

8. $X=\begin{pmatrix}2\\20\\5\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}-6\\-2\\1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1\\5\\1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}3\\-4\\-2\end{pmatrix}.$

9. $X=\begin{pmatrix}-47\\2\\-10\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}4\\-1\\7\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}7\\-5\\6\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}-1\\-3\\5\end{pmatrix}.$

10. $X=\begin{pmatrix}-12\\46\\29\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-1\\-6\\-5\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1\\-5\\4\end{pmatrix}.$

11. $X=\begin{pmatrix}19\\10\\2\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}-3\\-7\\-5\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-4\\-7\\-3\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}-7\\4\\-4\end{pmatrix}.$

12. $X=\begin{pmatrix}-11\\-12\\33\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}5\\1\\-3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-6\\-3\\6\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}-7\\-1\\-3\end{pmatrix}.$

13. $X=\begin{pmatrix}-20\\-12\\-46\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}1\\4\\6\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-5\\4\\-7\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}3\\-7\\2\end{pmatrix}.$

14. $X=\begin{pmatrix}60\\-17\\-39\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}3\\-4\\-5\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}5\\-3\\-4\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}-6\\-5\\-2\end{pmatrix}.$

15. $X=\begin{pmatrix}3\\-56\\-6\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}-2\\-5\\3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-4\\3\\-2\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1\\-5\\-5\end{pmatrix}.$

16. $X=\begin{pmatrix}-4\\38\\4\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}6\\1\\-2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-5\\7\\-6\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix}.$

17. $X=\begin{pmatrix}-43\\-27\\14\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}3\\6\\4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-7\\6\\5\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1\\-5\\6\end{pmatrix}.$

18. $X = \begin{pmatrix} 17 \\ 1 \\ -33 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$

19. $X = \begin{pmatrix} 12 \\ 25 \\ 39 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$

20. $X = \begin{pmatrix} 42 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$

3. Знайдіть власні числа і власні вектори матриці лінійного оператора третього порядку.

Варіанти завдань:

1. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ **5.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ **6.** $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **8.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ **9.** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ **11.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ **12.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **15.** $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ **17.** $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ **18.** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **20.** $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Приклади розв'язування задач:

Приклад 1. Знайдіть координати вектора $\bar{x}$ в базисі $\bar{e}'$, якщо він заданий в базисі $\bar{e}$:

$$\bar{x} = (1,4,-8); \quad \bar{e}_1' = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 - 3\bar{e}_3, \bar{e}_2' = \frac{3}{4}\bar{e}_1 - \bar{e}_2, \bar{e}_3' = -\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3.$$

Розв'язання.

Нехай (α,β,γ) – координати вектора $\bar{x}$ в базисі $\bar{e}'$. Складемо матрицю переходу від базису $\bar{e}$ до базису $\bar{e}'$:

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 3/4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тоді координати вектора $\bar{x}$ в базисі $\bar{e}'$ можна визначити з матричного рівняння:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3/4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3/4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Надаємо читачеві можливість самостійно переконатися в тому, що

$$\begin{pmatrix} 1 & 3/4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 3/4 & 1/4 \\ 4 & 2 & 2 \\ 3 & 9/4 & 7/4 \end{pmatrix}.$$

Тому координати вектора $\bar{x}$ в новому базисі набувають вигляду:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3/4 & 1/4 \\ 4 & 2 & 2 \\ 3 & 9/4 & 7/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Приклад 2. Знайдіть власні значення і власні вектори матриці оператора:

$$A=\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

Складемо характеристичне рівняння матриці $det(A-\lambda E)=0$:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 & 2 \\ 0 & 5-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}=0 \Rightarrow (5-\lambda)^2(3-\lambda)=0.$$

Значить, $\lambda=3;5$ – власні значення матриці A.

Власні вектори $\bar{x}$, що відповідають власному значенню λ, знайдемо з рівняння $(A-\lambda E)\bar{x}=\bar{0}$. Так при $\lambda=3$ власні вектори мають вид:

$$\alpha\,(1,0,-1),\ \alpha\in R,$$

а при $\lambda=5$:

$$\beta(1,0,0)+\gamma(0,1,1),\ \beta,\gamma\in R.$$

Приклад 3. Знайдіть матрицю оператора A в базисі $e'=\{\bar{e}_1',\bar{e}_2',\bar{e}_3'\}$, де $\bar{e}_1'=\bar{e}_1-\bar{e}_2+\bar{e}_3$, $\bar{e}_2'=-\bar{e}_1+\bar{e}_2-2\bar{e}_3$, $\bar{e}_3'=-\bar{e}_1+2\bar{e}_2+\bar{e}_3$, якщо вона задана в базисі $e=\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$:

$$A_e=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&2&1\\1&-1&0\end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

Знайдемо елементи матриці в новому базисі за формулою $A_{e'}=T^{-1}A_eT$, де T – матриця переходу від базису e до e':

$$T=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&2\\1&-2&1\end{pmatrix},\ T^{-1}=\begin{pmatrix}5&3&-1\\3&2&-1\\1&1&0\end{pmatrix}.$$

Тоді

$$A_{e'}=\begin{pmatrix}5&3&-1\\3&2&-1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&2\\0&2&1\\1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&2\\1&-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-18&33\\2&-10&22\\1&-4&8\end{pmatrix}.$$

Приклад 4. З'ясуєте, чи можна привести матрицю A_φ оператора φ до діагонального виду шляхом переходу до нового базису. У разі позитивної відповіді знайдіть цей базис і відповідний вид матриці, якщо:

$$A_\varphi=\begin{pmatrix}1&2&0&3\\-1&-2&0&-3\\0&0&2&0\\1&2&0&3\end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

Знайдемо власні значення матриці, а також їх алгебраїчні кратності як коренів характеристичного рівняння:

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & 0 & 3\\ -1 & -2-\lambda & 0 & -3\\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0\\ 1 & 2 & 0 & 3-\lambda\end{vmatrix} \Rightarrow \lambda^2(2-\lambda)^2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}\lambda_1=0, k_1=2,\\ \lambda_2=2, k_2=2.\end{bmatrix}$$

Тепер знайдемо геометричну кратність власних значень, тобто кількість власних векторів, що їм відповідають.

При $\lambda_1=0$ запишемо матрицю однорідної системи $(A-0\cdot E)\bar{x}=\bar{0}$ та зведемо її до ступінчастого виду:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 3\\ -1 & -2 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-2x_2-3x_4,\\ x_2=x_2,\\ x_3=0,\\ x_4=x_4.\end{cases}$$

Фундаментальну систему розв'язків даної системи утворюють вектори $\bar{a}_1(-2,1,0,0)$ та $\bar{a}_2(-3,0,0,1)$ – лінійно незалежні власні вектори, що відповідають власному значенню $\lambda_1=0$. Отже, геометрична кратність цього кореня дорівнює двом і збігається з його алгебраїчною кратністю.

Аналогічно, при $\lambda_2=2$ отримаємо:

$$\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0 & 3\\ -1 & -4 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-x_2,\\ x_2=x_2,\\ x_3=x_3,\\ x_4=-x_2.\end{cases}$$

Фундаментальну систему розв'язків цієї системи утворюють вектори $\bar{b}_1(-1,1,0,-1)$ та $\bar{b}_2(0,0,1,0)$ – лінійно незалежні власні вектори, що відповідають власному значенню $\lambda_2=2$. Отже, геометрична кратність і цього кореня дорівнює двом і також збігається з його алгебраїчною кратністю.

Як видно з приведеного розв'язання, геометрична кратність всіх власних значень збігається з їх алгебраїчною кратністю. Тому матрицю оператора можна привести до діагонального виду. При чому у базисі, що складається з власних векторів $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{b}_1,\bar{b}_2$, матриця оператора набуває вигляду:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

9 СИСТЕМИ ЧИСЛЕННЯ

Теоретичні питання:

1. Поняття системи числення. Позиційні та непозиційні системи числення.
2. Основні характеристики позиційної системи числення: основа системи, алфавіт цифр, ваги розрядів.
3. Запис числа в позиційній системі числення. Розрядна структура числа.
4. Десяткова система числення та її властивості.
5. Загальний принцип переведення цілого числа з довільної позиційної системи числення в десяткову.
6. Подання чисел у двійковій системі числення. Значення двійкової системи для комп'ютерних наук.
7. Алгоритм переведення цілого числа з десяткової системи числення в систему числення з основою p (частинний випадок – в двійкову систему числення).
8. Загальний принцип переведення десяткового дробу в систему числення з основою p (частинний випадок – в двійкову систему числення).
9. Особливості подання дробових чисел у двійковій системі числення. Питання точності.
10. Переведення числа з двійкової (восьмкової та шістнадцяткової) системи числення в десяткову (ціла та дробова частини).
11. Арифметичні дії в позиційних системах числення: додавання, віднімання, множення, ділення.
12. Виконання арифметичних дій у двійковій системі числення.
13. Зв'язок між двійковою та восьмковою, двійковою та шістнадцятковою системами числення.
14. Алгоритм швидкого переведення чисел між двійковою, восьмковою та шістнадцятковою системами.
15. Порівняння чисел у різних системах числення.
16. Застосування різних систем числення в комп'ютерних науках.

Практичні завдання:

1. Представте дане число у двійковій системі числення (отримавши 6 цифр після коми).

Варіанти завдань:

1.	131,23;	**2.**	161,49;	**3.**	147,53;	**4.**	135,41;
5.	142,43;	**6.**	132,61;	**7.**	168,19;	**8.**	149,51;
9.	151,47;	**10.**	153,21;	**11.**	133,39;	**12.**	157,57;
13.	132,29;	**14.**	143,67;	**15.**	167,27;	**16.**	134,59;
17.	144,37;	**18.**	157,17;	**19.**	159,33;	**20.**	145,71.

2. Знайдіть значення суми, різниці та добутку даних чисел. Виконайте перевірку, представивши кожне з даних чисел і результати в десятковій системі числення.

Варіанти завдань:

1.	$7654_8, 546_8$;	**2.**	$4765_8, 546_8$;	**3.**	$4765_8, 767_8$;
4.	$6756_8, 764_8$;	**5.**	$7654_8, 474_8$;	**6.**	$3567_8, 764_8$;
7.	$3567_8, 376_8$;	**8.**	$6756_8, 774_8$;	**9.**	$7654_8, 474_8$;
10.	$4765_8, 474_8$;	**11.**	$3567_8, 546_8$;	**12.**	$6756_8, 474_8$;
13.	$7654_8, 764_8$;	**14.**	$4765_8, 764_8$;	**15.**	$4765_8, 576_8$;
16.	$6756_8, 546_8$;	**17.**	$7654_8, 764_8$;	**18.**	$7654_8, 376_8$;
19.	$3567_8, 474_8$;	**20.**	$6756_8, 474_8$;		

3. Дане число переведіть у шістнадцяткову систему числення:

Варіанти завдань:

1.	$(10)504(11)_{12}$	**2.**	$5(10)(11)46_{12}$	**3.**	$504(11)(10)_{12}$	**4.**	$2(10)9(11)8_{12}$
5.	$12(10)7(11)_{12}$	**6.**	$(10)801(11)_{12}$	**7.**	$9(10)23(11)_{12}$	**8.**	$89(10)2(11)_{12}$
9.	$(10)756(11)_{12}$	**10.**	$2(10)4(11)9_{12}$	**11.**	$29(10)4(11)_{12}$	**12.**	$789(10)(11)_{12}$
13.	$40(10)2(11)_{12}$	**14.**	$3(10)2(11)8_{12}$	**15.**	$261(10)(11)_{12}$	**16.**	$(10)2(11)11_{12}$
17.	$2(10)87(11)_{12}$	**18.**	$(10)34(11)9_{12}$	**19.**	$56(10)(11)2_{12}$	**20.**	$9(10)9(11)0_{12}$

4. Виконайте ділення даного числа на 23_4 та перевірте отриманий результат множенням:

Варіанти завдань:

1.	210101_4	**2.**	223110_4	**3.**	231002_4	**4.**	232323_4
5.	221330_4	**6.**	300112_4	**7.**	233331_4	**8.**	223222_4
9.	230230_4	**10.**	232300_4	**11.**	300310_4	**12.**	230223_4
13.	230112_4	**14.**	230313_4	**15.**	221301_4	**16.**	230201_4
17.	211103_4	**18.**	212111_4	**19.**	220121_4	**20.**	222013_4

5. Виконайте ділення та перевірте отриманий результат множенням:

Варіанти завдань:

1.	$83(14)2(10)08_{16}$ на 28_{16}	**2.**	$(13)997(10)34_{16}$ на 32_{16}
3.	$(11)2(14)8503_{16}$ на 29_{16}	**4.**	$1007(15)3(10)(14)_{16}$ на 31_{16}
5.	$7(15)5(14)(14)(14)8_{16}$ на 26_{16}	**6.**	$812464(11)_{16}$ на 27_{16}

7. (13)1562(14)(14)$_{16}$ на 29$_{16}$
8. (13)53(13)9(12)(14)$_{16}$ на 31$_{16}$
9. (12)(15)0(11)(15)(15)(13)$_{16}$ на 27$_{16}$
10. (13)6(15)0(15)(11)(10)$_{16}$ на 29$_{16}$
11. (14)4(14)(10)(11)91$_{16}$ на 33$_{16}$
12. 1065210(10)$_{16}$ на 32$_{16}$
13. (11)54(15)76(10)$_{16}$ на 29$_{16}$
14. 85811(15)4$_{16}$ на 33$_{16}$
15. (13)5999(14)4$_{16}$ на 27$_{16}$
16. (13)6(15)176(10)$_{16}$ на 29$_{16}$
17. (12)(15)52(12)6(10)$_{16}$ на 31$_{16}$
18. (14)785(11)51$_{16}$ на 33$_{16}$
19. (13)8(11)6604$_{16}$ на 27$_{16}$
20. (10)(14)1(15)77(14)$_{16}$ на 29$_{16}$

6. Переведіть число, записане в двійковій системі числення, в іншу систему числення.

Варіанти завдань:

1. $10101010101011_2 \rightarrow x_4$
2. $11101010111010_2 \rightarrow x_8$
3. $10101011101010_2 \rightarrow x_8$
4. $10111010111011_2 \rightarrow x_{16}$
5. $10101010101011_2 \rightarrow x_{16}$
6. $10101110101110_2 \rightarrow x_4$
7. $10111110101010_2 \rightarrow x_4$
8. $10101011101111_2 \rightarrow x_8$
9. $10111011101011_2 \rightarrow x_8$
10. $10111010101110_2 \rightarrow x_{16}$
11. $10111010101010_2 \rightarrow x_{16}$
12. $11101010101011_2 \rightarrow x_4$
13. $10101110101011_2 \rightarrow x_4$
14. $11101010111010_2 \rightarrow x_8$
15. $10111110101010_2 \rightarrow x_8$
16. $11101110101011_2 \rightarrow x_{16}$
17. $10101110101011_2 \rightarrow x_{16}$
18. $10111010101010_2 \rightarrow x_4$
19. $10101010111010_2 \rightarrow x_4$
20. $11101010101011_2 \rightarrow x_8$

РОЗДІЛ 3 ВЕКТОРНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

10 ВЕКТОРИ ТА ДІЇ НАД НИМИ

Теоретичні питання:

1. Поняття вектора. Геометричний та алгебраїчний підхід.
2. Нульовий вектор. Протилежний вектор.
3. Рівність векторів. Довжина (модуль) вектора. Напрям вектора.
4. Додавання векторів (геометричний та координатний способи).
5. Віднімання векторів.
6. Множення вектора на число. Властивості операцій над векторами.
7. Лінійна комбінація векторів.
8. Колінеарні вектори та умови колінеарності.
9. Компланарні вектори.
10. Координати вектора на площині. Координати вектора у просторі.
11. Перехід від геометричного до координатного опису вектора.
12. Модуль вектора через його координати.
13. Лінійно залежні вектори. Лінійно незалежні вектори.
14. Критерії лінійної залежності векторів. Геометричний зміст лінійної залежності.
15. Базис на площині та у просторі. Координати вектора в заданому базисі.
16. Застосування векторів у геометрії.
17. Застосування векторів у комп'ютерній графіці.
18. Векторний опис руху та сил.

Практичні завдання:

1. Задано шестикутник $ABCDEF$, причому $\overline{AB} = \overline{a}, \overline{BC} = \overline{b}, \overline{CD} = \overline{c}$, $\overline{DE} = \overline{d}, \overline{EF} = \overline{e}, \overline{FA} = \overline{f}$. Побудуйте вектори $\overline{m} = \bar{a} - \left[\frac{N}{5}\right] \cdot \bar{b} + \left[\frac{N}{3}\right] \cdot \bar{c}$ і $\overline{n} = \bar{d} + \left[\frac{N}{2}\right] \cdot \bar{e} - \left[\frac{N}{4}\right] \cdot \bar{f}$, які є лінійними комбінаціями заданих векторів. Тут N – номер студента за списком академічної групи.

2. Відомі розкладання векторів $\overline{x}, \overline{f_1}, \overline{f_2}$ за базисом $\overline{e_1}, \overline{e_2}$. Знайдіть розкладання вектора $\overline{x}$ за базисом $\overline{f_1}, \overline{f_2}$.

Варіанти завдань:

1. $\overline{x} = -5\overline{e_1} - 2\overline{e_2}, \overline{f_1} = \overline{e_1} - 4\overline{e_2}, \overline{f_2} = 5\overline{e_1} - 5\overline{e_2}.$
2. $\overline{x} = 5\overline{e_1} - \overline{e_2}, \overline{f_1} = 7\overline{e_1} + 7\overline{e_2}, \overline{f_2} = 6\overline{e_1} + 2\overline{e_2}.$
3. $\overline{x} = 2\overline{e_1} - 7\overline{e_2}, \overline{f_1} = \overline{e_1} - 6\overline{e_2}, \overline{f_2} = -7\overline{e_1} - 5\overline{e_2}.$
4. $\overline{x} = 4\overline{e_1} - 4\overline{e_2}, \overline{f_1} = -2\overline{e_1} - 5\overline{e_2}, \overline{f_2} = -5\overline{e_1} - 3\overline{e_2}.$
5. $\overline{x} = -5\overline{e_1} - 5\overline{e_2}, \overline{f_1} = 3\overline{e_1} - 5\overline{e_2}, \overline{f_2} = -2\overline{e_1} + 6\overline{e_2}.$

6. $\overline{x} = -3\overline{e_1} + 2\overline{e_2}, \overline{f_1} = -2\overline{e_1} - 3\overline{e_2}, \overline{f_2} = -3\overline{e_1} + 3\overline{e_2}.$

7. $\overline{x} = 2\overline{e_1} + 5\overline{e_2}, \overline{f_1} = -7\overline{e_1} - 3\overline{e_2}, \overline{f_2} = \overline{e_1} - \overline{e_2}.$

8. $\overline{x} = 6\overline{e_1} + 2\overline{e_2}, \overline{f_1} = -3\overline{e_1} - 6\overline{e_2}, \overline{f_2} = -3\overline{e_1} + \overline{e_2}.$

9. $\overline{x} = 4\overline{e_1} + 6\overline{e_2}, \overline{f_1} = 3\overline{e_1} + 4\overline{e_2}, \overline{f_2} = -2\overline{e_1} - 7\overline{e_2}.$

10. $\overline{x} = -4\overline{e_1} + 3\overline{e_2}, \overline{f_1} = -6\overline{e_1} - 3\overline{e_2}, \overline{f_2} = 7\overline{e_1} - 5\overline{e_2}.$

11. $\overline{x} = -2\overline{e_1} + 5\overline{e_2}, \overline{f_1} = 7\overline{e_1} + 4\overline{e_2}, \overline{f_2} = -\overline{e_1} - 6\overline{e_2}.$

12. $\overline{x} = -2\overline{e_1} + 2\overline{e_2}, \overline{f_1} = -5\overline{e_1} - 7\overline{e_2}, \overline{f_2} = -\overline{e_1} - 4\overline{e_2}.$

13. $\overline{x} = -4\overline{e_1} + 3\overline{e_2}, \overline{f_1} = -7\overline{e_1} + \overline{e_2}, \overline{f_2} = 3\overline{e_1} - 2\overline{e_2}.$

14. $\overline{x} = 5\overline{e_1} + 2\overline{e_2}, \overline{f_1} = \overline{e_1} - 3\overline{e_2}, \overline{f_2} = -6\overline{e_1} - 4\overline{e_2}.$

15. $\overline{x} = \overline{e_1} - 6\overline{e_2}, \overline{f_1} = 5\overline{e_1} - 7\overline{e_2}, \overline{f_2} = 3\overline{e_1} - 5\overline{e_2}.$

16. $\overline{x} = -\overline{e_1} + 4\overline{e_2}, \overline{f_1} = 5\overline{e_1} + 6\overline{e_2}, \overline{f_2} = -3\overline{e_1} - 5\overline{e_2}.$

17. $\overline{x} = 2\overline{e_1} - 4\overline{e_2}, \overline{f_1} = 5\overline{e_1} - 2\overline{e_2}, \overline{f_2} = 3\overline{e_1} + 4\overline{e_2}.$

18. $\overline{x} = -6\overline{e_1} + 2\overline{e_2}, \overline{f_1} = 3\overline{e_1} - 4\overline{e_2}, \overline{f_2} = \overline{e_1} + 6\overline{e_2}.$

19. $\overline{x} = 5\overline{e_1} - 2\overline{e_2}, \overline{f_1} = 6\overline{e_1} - 3\overline{e_2}, \overline{f_2} = \overline{e_1} + 7\overline{e_2}.$

20. $\overline{x} = 4\overline{e_1} + 2\overline{e_2}, \overline{f_1} = -4\overline{e_1} + 3\overline{e_2}, \overline{f_2} = 7\overline{e_1} + 4\overline{e_2}.$

11 ДОБУТКИ ВЕКТОРІВ

Теоретичні питання:

1. Означення скалярного добутку.
2. Геометричний зміст скалярного добутку.
3. Аналітична формула скалярного добутку в координатах.
4. Властивості скалярного добутку.
5. Проєкція одного вектора на інший.
6. Означення векторного добутку.
7. Геометричний зміст векторного добутку.
8. Напрям векторного добутку (правило правого гвинта).
9. Аналітична формула векторного добутку в координатах.
10. Властивості векторного добутку. Умова колінеарності векторів.
11. Зв'язок векторного добутку з площею паралелограма і трикутника.
12. Означення мішаного добутку трьох векторів.
13. Геометричний зміст мішаного добутку.
14. Аналітична формула мішаного добутку.
15. Властивості мішаного добутку. Умова компланарності трьох векторів.
16. Зв'язок мішаного добутку з об'ємом паралелепіпеда.
17. Означення подвійного векторного добутку.
18. Формула розкриття подвійного векторного добутку.
19. Основні властивості та приклади застосування подвійного векторного добутку.
20. Практичні застосування скалярного, векторного та мішаного добутків у геометрії та фізиці.

Практичні завдання:

1. Дано три вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$.

а) Обчисліть скалярні добутки $\overline{a} \cdot \overline{c}, \overline{a} \cdot \overline{b}$.

б) Знайдіть лінійну комбінацію $\overline{b}(\overline{a} \cdot \overline{c}) - \overline{c}(\overline{a} \cdot \overline{b})$.

в) Знайдіть векторний добуток $\overline{b} \times \overline{c}$.

г) Знайдіть подвійний векторний добуток $\overline{a} \times (\overline{b} \times \overline{c})$.

д) Обчисліть мішаний добуток $\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c}$. Зробіть висновок про лінійну залежність чи незалежність даних векторів. Чи компланарні вектори? Праву чи ліву трійку утворюють вектори?

Варіанти завдань:

1. $\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix}-4\\5\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\1\\-4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix}1\\-4\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\-3\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\-1\\-2\end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix}-5\\5\\-4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\2\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-4\\-3\end{pmatrix}$.

6. $\begin{pmatrix}-2\\-2\\-5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\-5\end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix}-4\\5\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-5\\1\\-5\end{pmatrix}$.

8. $\begin{pmatrix}-2\\-4\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-5\\3\end{pmatrix}$.

9. $\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\-2\\-4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

10. $\begin{pmatrix}-1\\-1\\-5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\5\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\-4\\-4\end{pmatrix}$.

11. $\begin{pmatrix}-4\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-4\\-4\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-4\\1\\4\end{pmatrix}$.

12. $\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\-4\end{pmatrix}$.

13. $\begin{pmatrix}-3\\2\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\-5\\-5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\4\\-5\end{pmatrix}$.

14. $\begin{pmatrix}-5\\5\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-5\\1\end{pmatrix}$.

15. $\begin{pmatrix}-4\\0\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-5\\-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\-5\\0\end{pmatrix}$.

16. $\begin{pmatrix}3\\5\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\4\\-5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\-4\\1\end{pmatrix}$.

17. $\begin{pmatrix}-1\\-4\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\-4\\3\end{pmatrix}$.

18. $\begin{pmatrix}1\\-1\\-5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-5\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\4\\-4\end{pmatrix}$.

19. $\begin{pmatrix}-5\\3\\-5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\4\\-5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\-3\end{pmatrix}$.

20. $\begin{pmatrix}3\\-4\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-5\\-3\end{pmatrix}$.

2. Знайдіть ортогональну проєкцію $\overline{pr}_{\overline{a}}\overline{b}$ вектора $\overline{b}$ на вектор $\overline{a}$ та ортогональну складову $\overline{b}^{\perp}$ вектора $\overline{b}$ відносно вектора $\overline{a}$.

Варіанти завдань:

1. $\overline{a}=(1;2;1);\overline{b}=(2;3;1)$.

2. $\overline{a}=(3;-1;0);\overline{b}=(2;-2;2)$.

3. $\overline{a}=(-1;2;2);\overline{b}=(3;-1;1)$.

4. $\overline{a}=(2;-2;2);\overline{b}=(3;-1;5)$.

5. $\overline{a}=(1;-1;3);\overline{b}=(2;-3;9)$.

6. $\overline{a}=(3;-1;5);\overline{b}=(2;-1;2)$.

7. $\overline{a}=(2;2;1);\overline{b}=(1;2;1)$.

8. $\overline{a}=(2;-1;2);\overline{b}=(3;4;5)$.

9. $\overline{a}=(2;-2;1);\overline{b}=(1;-2;2)$.

10. $\overline{a}=(3;4;5);\overline{b}=(-1;0;-2)$.

11. $\overline{a}=(2;-2;1);\overline{b}=(3;2;-1)$.

12. $\overline{a}=(2;2;3);\overline{b}=(5;-6;1)$.

13. $\overline{a}=(3;2;-1);\overline{b}=(3;2;1)$.

14. $\overline{a}=(5;-6;1);\overline{b}=(2;2;3)$.

15. $\bar{a} = (3; 2; 1); \bar{b} = (-1; 0; 4).$ **16.** $\bar{a} = (3; 0; 1); \bar{b} = (2; -2; 6).$

17. $\bar{a} = (-1; 0; 4); \bar{b} = (2; 5; -3).$ **18.** $\bar{a} = (2; -2; 6); \bar{b} = (3; -4; 1).$

19. $\bar{a} = (2; 5; -3); \bar{b} = (1; 1; 1).$ **20.** $\bar{a} = (3; -4; 1); \bar{b} = (2; -2; 6).$

Приклади розв'язання задач.

Приклад 1. Задано вектори $\bar{a} = m\bar{i} + 8\bar{j} + 4\bar{k}$ і $\bar{b} = 4\bar{i} + m\bar{j} - 7\bar{k}$, де $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – ортонормований базис. При якому значенні m ці вектори перпендикулярні?

Розв'язання.

Ненульові вектори перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли їх скалярний добуток дорівнює нулю, отже:

$$4m + 8m - 28 = 0,\ m = \frac{7}{3}.$$

Приклад 2. Знайдіть кут між векторами $\bar{a} = \bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}$ і $\bar{b} = 6\bar{i} + 4\bar{j} - 2\bar{k}$, $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – ортонормований базис.

Розв'язання.

Скористаємося формулами

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = |\bar{x}| \cdot |\bar{y}| \cdot cos\varphi,\ \bar{x} \cdot \bar{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

Тоді

$$\cos\varphi = \frac{1 \cdot 6 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot (-2)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} \cdot \sqrt{6^2 + 4^2 + (-2)^2}} = \frac{8}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{56}} = \frac{2}{7},$$

$$\varphi = \arccos\frac{2}{7}.$$

Приклад 3. Знайдіть площу паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}(1; 1; 1)$ і $\bar{b}(3; 2; 1)$, якщо координати цих векторів задані в правому ортонормованому базисі.

Розв'язання.

У випадку правого ортонормованого базису $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ має місце формула:

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}.$$

Таким чином, $\left[\bar{a}, \bar{b}\right]=(-1; 2; -1)$. Визначимо модуль вектора $\left[\bar{a}, \bar{b}\right]$ або, що теж саме, шукану площу паралелограма

$$S=\sqrt{(-1)^2+2^2+(-1)^2}=\sqrt{6} \text{ (кв. од).}$$

Приклад 4. В ортонормованому базисі задано вектори $\bar{a}(1; 2; 3)$, $\bar{b}(3; 2; 1)$, $\bar{c}(2; 3; 1)$. З'ясуйте, якою є трійка векторів $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$. Знайдіть об'єм паралелепіпеда, побудованого на цих векторах.

Розв'язання.

Обчислимо мішаний добуток векторів $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ через визначник:

$$\left(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\right)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=12.$$

Отримали додатне значення, тому трійка векторів – права. Об'єм паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, дорівнює $V=12$ (куб. од.).

Приклад 5. Знайдіть об'єм трикутної піраміди з вершинами $A(2; 2; 2)$, $B(4;3; 3)$, $C(4; 5; 4)$ і $D(5; 5; 6)$.

Розв'язання.

Знаходимо координати векторів $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ і $\overline{AD}$, які збігаються з ребрами піраміди, що виходять з вершини A: $\overline{AB}(2; 1; 1)$, $\overline{AC}(2; 3; 2)$, $\overline{AD}(3; 3; 4)$. Знайдемо мішаний добуток цих векторів:

$$\left(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}\right)=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}=24+6+6-9-12-8=7.$$

Оскільки об'єм піраміди дорівнює $\frac{1}{6}$ частині об'єму паралелепіпеда, побудованого на тих самих векторах, то $V=\frac{7}{6}$ (куб. од.).

Приклад 6. Обчисліть площу паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}+3\bar{b}$ і $3\bar{a}+\bar{b}$, якщо $|\bar{a}|=|\bar{b}|=1$, $\angle(\bar{a}, \bar{b})=30^\circ$.

Розв'язання.

Маємо

$$\left(\bar{a}+3\bar{b}\right)\times\left(3\bar{a}+\bar{b}\right)=\bar{a}\times\left(3\bar{a}\right)+\left(3\bar{b}\right)\times\left(3\bar{a}\right)+\bar{a}\times\bar{b}+\left(3\bar{b}\right)\times\bar{b}=$$

$$=3\cdot\bar{0}-9\bar{a}\times\bar{b}+\bar{a}\times\bar{b}+3\cdot\bar{0}=-8\bar{a}\times\bar{b}.$$

Отже,

$$S = \left|-8\bar{a} \times \bar{b}\right| = 8\left|\bar{a} \times \bar{b}\right| = 8 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 30^\circ = 4 \text{ (кв. од.).}$$

12 РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ ТА ПЛОЩИНИ У ПРОСТОРІ. РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ НА ПЛОЩИНІ

Теоретичні питання:

1. Поняття прямої на площині. Геометричний зміст рівняння прямої.
2. Загальне рівняння прямої на площині та його параметри.
3. Канонічне та параметричне рівняння прямої на площині.
4. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.
5. Нормальне рівняння прямої на площині.
6. Умови паралельності та перпендикулярності двох прямих на площині.
7. Взаємне розташування двох прямих на площині.
8. Відстань від точки до прямої на площині.
9. Кут між двома прямими на площині.
10. Поняття прямої у тривимірному просторі.
11. Векторний і параметричний способи задання прямої у просторі.
12. Канонічні рівняння прямої у просторі.
13. Взаємне розташування двох прямих у просторі (паралельні, перетинні, мимобіжні).
14. Умови паралельності та перпендикулярності прямих у просторі.
15. Кут між двома прямими у просторі.
16. Відстань між двома мимобіжними прямими.
17. Поняття площини в просторі. Способи задання площини.
18. Загальне рівняння площини та його геометричний зміст.
19. Нормальне рівняння площини.
20. Рівняння площини, заданої трьома точками.
21. Рівняння площини, що проходить через точку і паралельна (перпендикулярна) заданій прямій або площині.
22. Умови паралельності та перпендикулярності площин.
23. Кут між двома площинами.
24. Кут між прямою і площиною.
25. Відстань від точки до площини.
26. Умови належності прямої площині.
27. Умови паралельності прямої і площини.
28. Умови перетину прямої і площини.
29. Знаходження точки перетину прямої і площини.
30. Відстань від точки прямої до площини.
31. Застосування рівнянь прямої та площини в задачах аналітичної геометрії.
32. Використання рівнянь прямої та площини в комп’ютерній графіці та моделюванні.
33. Геометрична інтерпретація рівнянь у координатній та векторній формах.

Практичні завдання:

1. а) Запишіть рівняння площини за трьома точками (детермінантне).
б) Перетворіть отримане рівняння до загального вигляду.
в) Визначте координати вектора нормалі площини.

г) Запишіть рівняння площини у відрізках на осях. Виконайте відповідний схематичний рисунок.

д) За допомогою координат даних точок запишіть координати векторів $\vec{p}$ і $\vec{q}$ – напрямного бівектора площини, та складіть параметричні та векторно-параметричне рівняння площини.

е) Побудуйте площину в GeoGebra online (https://www.geogebra.org/3d) за загальним рівнянням, укажіть вихідні точки; перевірте, чи проходить площина через задані точки, наведіть скріншот рисунка, вкажіть координати точок перетину площини з осями координат.

Варіанти завдань:

1	$(-4;1;-5),(5;2;-1),(1;1;-5);$	**11**	$(-5;-3;0),(3;4;2),(-5;-5;-3);$
2	$(3;3;2),(0;-2;-1),(3;-4;-1);$	**12**	$(4;-3;-2),(-5;2;-5),(4;0;4);$
3	$(-4;-4;-4),(2;-4;1),(0;-1;4);$	**13**	$(5;-4;2),(5;0;-3),(0;-3;2);$
4	$(-3;-2;4),(3;4;4),(-4;-5;3);$	**14**	$(-1;-2;4),(-4;1;-4),(0;-1;3);$
5	$(-2;2;-1),(-4;0;-5),(-3;4;3);$	**15**	$(-3;-2;3),(3;0;-1),(5;-2;-5);$
6	$(-1;-1;2),(2;0;1),(-3;4;-4);$	**16**	$(-5;-1;0),(5;1;-5),(4;-2;1);$
7	$(-3;-3;3),(2;-5;4),(4;-5;-5);$	**17**	$(3;-1;-2),(5;4;-4),(2;5;1);$
8	$(1;-4;0),(5;-4;0),(2;5;-2);$	**18**	$(0;1;-4),(-4;0;2),(-2;0;-2);$
9	$(-4;-5;4),(0;-1;-5),(3;2;0);$	**19**	$(1;2;4),(-1;-5;4),(-5;-3;-4);$
10	$(4;2;5),(-4;2;-4),(-2;0;-5);$	**20**	$(3;4;-1),(-4;1;-5),(1;0;-3).$

2. Знайдіть кут між даними площинами. Напишіть векторно параметричне рівняння прямої, яку задано як перетин цих площин. В якості опорної точки можна взяти точку, що лежить в площині xOy.

Варіанти завдань:

1.	$3x+y-z=7,$ $2x+y=5.$	**2.**	$y+3z=2,$ $x-y-7z=1.$
3.	$3x+y-3z=11,$ $2x+y-z=8.$	**4.**	$x-y-9z=1,$ $2x-y-4z=3.$
5.	$2x+y-2z=11,$ $x+y+z=7.$	**6.**	$x+2y+4z=7,$ $x+y+z=5.$
7.	$2x+y-3z=14,$ $x+y+z=9.$	**8.**	$x+2y+5z=10,$ $x+y+z=7.$
9.	$3x+2y=13,$ $x+y+z=3.$	**10.**	$2x-y-4z=3,$ $3x-y-5z=5.$
11.	$4x+y-8z=19,$ $3x+y-5z=15.$	**12.**	$2x+3y+6z=17,$ $x+y+z=7.$

13. $4x + 3y + 2z = 11,$ $x + y + z = 3.$

14. $5x - 2y - 30z = 17,$ $2x - y - 13z = 6.$

15. $5x + 2y - 7z = 26,$ $2x + y - 2z = 11.$

16. $5x + 2y - 10z = 33,$ $2x + y - 3z = 14.$

17. $5x + 2y - 10z = 33,$ $2x + y - 3z = 14.$

18. $x - y - 3z = 1,$ $2x - y - 4z = 3.$

19. $y + 2z = 1,$ $x + y + z = 3.$

20. $x - y - 3z = 1,$ $2x - y - 4z = 3.$

3. Напишіть рівняння площини, що проходить через першу пряму паралельно другій.

Варіанти завдань:

1. $\frac{x-3}{3} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2}, \frac{x-3}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}.$

2. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{-2}, \frac{x+3}{1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{-1}.$

3. $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{0}, \frac{x+2}{3} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{1}.$

4. $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{-1}, \frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{3}.$

5. $\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{-3}, \frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{1}.$

6. $\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{0} = \frac{z-3}{-2}, \frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{-2}.$

7. $\frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}, \frac{x+3}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+2}{-2}.$

8. $\frac{x+2}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z}{2}, \frac{x+3}{1} = \frac{y+3}{3} = \frac{z}{-2}.$

9. $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{1}, \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{-3}.$

10. $\frac{x+3}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{-1}, \frac{x-3}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-3}.$

11. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{-1}, \frac{x+2}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+2}{-2}.$

12. $\frac{x}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+1}{-2}, \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+3}{1}.$

13. $\frac{x-3}{3}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-2}{-3}, \frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+2}{1}.$

14. $\frac{x-3}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{3}, \frac{x-1}{0}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+2}{-1}.$

15. $\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+1}{3}, \frac{x+3}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{1}.$

16. $\frac{x+2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z+2}{2}, \frac{x-1}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-1}{0}.$

17. $\frac{x}{3}=\frac{y+3}{-3}=\frac{z+3}{-1}, \frac{x+2}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+3}{-1}.$

18. $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-3}{-2}, \frac{x+2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z-2}{3}.$

19. $\frac{x+3}{3}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z+2}{2}, \frac{x-3}{2}=\frac{y-3}{0}=\frac{z+2}{1}.$

20. $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{3}, \frac{x-3}{1}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z+2}{2}.$

4. Дано площину α та три прямі l_1, l_2, l_3.

а) Для кожної з прямих з'ясуйте, чи перетинає вона площину, чи паралельна їй, чи лежить в цій площині.

б) У випадку перетину знайдіть координати спільної точки площини і прямої та кут між прямою і площиною.

в) У випадку, якщо пряма паралельна площині, то запишіть рівняння площини, яка проходить через цю пряму і паралельна площині α.

г) У випадку, якщо пряма належить площині, то запишіть рівняння площини, яка проходить через цю пряму і перпендикулярна площині α.

д) Побудуйте площину α та три прямі l_1, l_2, l_3 в GeoGebra для ілюстрації отриманих результатів.

Варіанти завдань:

1. $\alpha: \overline{r}=\begin{pmatrix}3\\0\\6\end{pmatrix}+m\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}+n\begin{pmatrix}6\\5\\3\end{pmatrix}, l_1: \overline{r}=\begin{pmatrix}7\\17\\-9\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}3\\13\\-17\end{pmatrix},$

$l_2: \overline{r}=\begin{pmatrix}5\\9\\-13\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}7\\9\\5\end{pmatrix}, l_3: \overline{r}=\begin{pmatrix}9\\5\\9\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}5\\1\\1\end{pmatrix}.$

2. $\alpha: \overline{r}=\begin{pmatrix}5\\4\\1\end{pmatrix}+m\begin{pmatrix}4\\6\\5\end{pmatrix}+n\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, l_1: \overline{r}=\begin{pmatrix}35\\9\\-29\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}9\\6\\10\end{pmatrix},$

$$l_2: \overline{r} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, l_3: \overline{r} = \begin{pmatrix} 43 \\ 21 \\ -19 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 34 \\ 11 \\ -25 \end{pmatrix}.$$

3.
$$\alpha: \overline{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, l_1: \overline{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix},$$
$$l_2: \overline{r} = \begin{pmatrix} -9 \\ 18 \\ 18 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -11 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix}, l_3: \overline{r} = \begin{pmatrix} -11 \\ 18 \\ 6 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

4.
$$\alpha: \overline{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, l_1: \overline{r} = \begin{pmatrix} 38 \\ 16 \\ -16 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \\ -11 \end{pmatrix},$$
$$l_2: \overline{r} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}, l_3: \overline{r} = \begin{pmatrix} 34 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

5.
$$\alpha: \overline{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, l_1: \overline{r} = \begin{pmatrix} -9 \\ 40 \\ -15 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix},$$
$$l_2: \overline{r} = \begin{pmatrix} -7 \\ 46 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -19 \\ 5 \end{pmatrix}, l_3: \overline{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

6.
$$\alpha: \overline{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, l_1: \overline{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix},$$
$$l_2: \overline{r} = \begin{pmatrix} -18 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, l_3: \overline{r} = \begin{pmatrix} -16 \\ 6 \\ 15 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -19 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

7.
$$\alpha: \overline{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, l_1: \overline{r} = \begin{pmatrix} 13 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 8 \\ -15 \\ 2 \end{pmatrix},$$
$$l_2: \overline{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, l_3: \overline{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

8.
$$\alpha: \overline{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, l_1: \overline{r} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix},$$
$$l_2: \overline{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, l_3: \overline{r} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

9.
$$\alpha: \overline{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, l_1: \overline{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$l_2: \overline{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 19 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix}, l_3: \overline{r} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

10. $\alpha: \overline{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, l_1: \overline{r} = \begin{pmatrix} 19 \\ 13 \\ 15 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix},$

$l_2: \overline{r} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, l_3: \overline{r} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 13 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$

11. $\alpha: \overline{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, l_1: \overline{r} = \begin{pmatrix} 10 \\ 23 \\ -10 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix},$

$l_2: \overline{r} = \begin{pmatrix} 12 \\ 29 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 5 \\ 25 \\ -9 \end{pmatrix}, l_3: \overline{r} = \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$

12. $\alpha: \overline{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, l_1: \overline{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$

$l_2: \overline{r} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, l_3: \overline{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$

13. $\alpha: \overline{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, l_1: \overline{r} = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix},$

$l_2: \overline{r} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, l_3: \overline{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$

14. $\alpha: \overline{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}, l_1: \overline{r} = \begin{pmatrix} -25 \\ 31 \\ 12 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix},$

$l_2: \overline{r} = \begin{pmatrix} 11 \\ 12 \\ 11 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, l_3: \overline{r} = \begin{pmatrix} -23 \\ 31 \\ 22 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 29 \\ -25 \\ -11 \end{pmatrix}.$

15. $\alpha: \overline{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, l_1: \overline{r} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix},$

$l_2: \overline{r} = \begin{pmatrix} 33 \\ 35 \\ -20 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 31 \\ 29 \\ -25 \end{pmatrix}, l_3: \overline{r} = \begin{pmatrix} 31 \\ 25 \\ -30 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix}.$

16. $\alpha: \overline{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, l_1: \overline{r} = \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix},$

$l_2: \overline{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, l_3: \overline{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ -1 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$

17. $\alpha: \overline{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, l_1: \overline{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix},$

$$l_2: \overline{r} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 13 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ -11 \\ 6 \end{pmatrix}, l_3: \overline{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

18.
$$\alpha: \overline{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, l_1: \overline{r} = \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$l_2: \overline{r} = \begin{pmatrix} -8 \\ 22 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, l_3: \overline{r} = \begin{pmatrix} -8 \\ 24 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 12 \\ -19 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

19.
$$\alpha: \overline{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}, l_1: \overline{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 16 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -11 \end{pmatrix},$$
$$l_2: \overline{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 14 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, l_3: \overline{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

20.
$$\alpha: \overline{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, l_1: \overline{r} = \begin{pmatrix} -30 \\ 23 \\ -2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix},$$
$$l_2: \overline{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix}, l_3: \overline{r} = \begin{pmatrix} -26 \\ 35 \\ 10 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 14 \\ -12 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5. Дано прямі l_1, l_2, l_3, l_4. Для кажної пари прямих з'ясуйте, чи є вони мимобіжними, паралельними, такими, що перетинаються чи співпадають. Для прямих, що перетинаються, знайдіть координати спільної точки та площини, що проходить через ці дві прямі. Для паралельних прямих знайдіть рівняння площини, що містить ці прямі.

Варіанти завдань:

1.
$$\begin{cases} x = 7 - 2s, \\ y = 6, \\ z = -2 - 2s; \end{cases} \begin{cases} x = 5 - 2t, \\ y = 6, \\ z = -4 - 2t; \end{cases} \begin{cases} x = -1 + 4u, \\ y = 0, \\ z = -2 + 4u; \end{cases} \begin{cases} x = -3v, \\ y = 2 + 2v, \\ z = 2. \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} x = -3, \\ y = -2 - 2s, \\ z = s; \end{cases} \begin{cases} x = -1, \\ y = -3 + 4t, \\ z = 3 - 2t; \end{cases} \begin{cases} x = -2 - u, \\ y = 1, \\ z = 2 + u; \end{cases} \begin{cases} x = -3, \\ y = -2v, \\ z = -1 + v. \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} x = 8 - 6s, \\ y = 8 - 6s, \\ z = -6 + 4s; \end{cases} \begin{cases} x = 1 - t, \\ y = 3 + t, \\ z = -4 - 2t; \end{cases} \begin{cases} x = -2 + 3u, \\ y = 10 + 3u, \\ z = 4 - 2u; \end{cases} \begin{cases} x = 1 + 3v, \\ y = 13 + 3v, \\ z = 2 - 2v. \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} x = 5 + 2s, \\ y = -4 - 2s, \\ z = 1; \end{cases} \begin{cases} x = 7 - 2t, \\ y = 2, \\ z = 5 + 2; \end{cases} \begin{cases} x = 5 - 2u, \\ y = 2, \\ z = 7 + 2u; \end{cases} \begin{cases} x = -1 + 4v, \\ y = -2, \\ z = 5 - 4v. \end{cases}$$

5. $\begin{cases} x=-4-3s, \\ y=3+s, \\ z=-5-2s; \end{cases} \begin{cases} x=-3+2t, \\ y=2t, \\ z=-5+2t; \end{cases} \begin{cases} x=2-u, \\ y=3-u, \\ z=-7-u; \end{cases} \begin{cases} x=1-v, \\ y=2-v, \\ z=-8-v. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x=2s, \\ y=-2, \\ z=-6+4s; \end{cases} \begin{cases} x=1-t, \\ y=3, \\ z=-4-2t; \end{cases} \begin{cases} x=-1-3u, \\ y=-2, \\ z=-3-u; \end{cases} \begin{cases} x=2-v, \\ y=3, \\ z=-2-2v. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x=-12-2s, \\ y=10-3s, \\ z=8+2s; \end{cases} \begin{cases} x=-10-2t, \\ y=13-3t, \\ z=6+2t; \end{cases} \begin{cases} x=5+3u, \\ y=6+3u, \\ z=5+2u; \end{cases} \begin{cases} x=-2+4v, \\ y=-3+6v, \\ z=7-4v. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x=10-2s, \\ y=10+2s, \\ z=-3+2s; \end{cases} \begin{cases} x=1+3t, \\ y=-5-3t, \\ z=3t; \end{cases} \begin{cases} x=-6+4u, \\ y=2-4u, \\ z=1-4u; \end{cases} \begin{cases} x=8-2v, \\ y=12+2v, \\ z=-1+2v. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x=1+s, \\ y=5-s, \\ z=-4-s; \end{cases} \begin{cases} x=2+t, \\ y=4-t, \\ z=-5-t; \end{cases} \begin{cases} x=2-2u, \\ y=2u, \\ z=-4+2u; \end{cases} \begin{cases} x=0, \\ y=-2v, \\ z=-5-v. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x=-9-s, \\ y=-1-3s, \\ z=-2-3s; \end{cases} \begin{cases} x=-4+2t, \\ y=-7+6t, \\ z=-4+6t; \end{cases} \begin{cases} x=-3-u, \\ y=-3-2u, \\ z=2; \end{cases} \begin{cases} x=-8-v, \\ y=2-3v, \\ z=1-3v. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x=-4+2s, \\ y=-2+4s, \\ z=2-2s; \end{cases} \begin{cases} x=-5-3t, \\ y=-2t, \\ z=3+3t; \end{cases} \begin{cases} x=-6-u, \\ y=2-2u, \\ z=-4+u; \end{cases} \begin{cases} x=-7-v, \\ y=-2v, \\ z=-3+v. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x=-4-s, \\ y=-3-2s, \\ z=-4-s; \end{cases} \begin{cases} x=-6-2t, \\ y=-3t, \\ z=-2-3t; \end{cases} \begin{cases} x=-8-2u, \\ y=-3-3u, \\ z=-5-3u; \end{cases} \begin{cases} x=-7+4v, \\ y=-7+6v, \\ z=-9+6v. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x=-3-3s, \\ y=0, \\ z=-4-3s; \end{cases} \begin{cases} x=2-2t, \\ y=-2+2t, \\ z=-7+6t; \end{cases} \begin{cases} x=3+u, \\ y=12-u, \\ z=-4-3u; \end{cases} \begin{cases} x=4+v, \\ y=11-v, \\ z=-7-3v. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x=-3+2s, \\ y=-7+6s, \\ z=-3+4s; \end{cases} \begin{cases} x=-4-t, \\ y=-3t, \\ z=-6-2t; \end{cases} \begin{cases} x=-2-u, \\ y=1+2u, \\ z=3+2u; \end{cases} \begin{cases} x=-3-v, \\ y=3-3v, \\ z=-4-2v. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x=-19-s, \\ y=2+3s, \\ z=4+3s; \end{cases} \begin{cases} x=-18-t, \\ y=-1+3t, \\ z=1+3t; \end{cases} \begin{cases} x=-3, \\ y=4+2u, \\ z=-3u; \end{cases} \begin{cases} x=-5+2v, \\ y=8-6v, \\ z=9-6v. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x=3s, \\ y=-2-2s, \\ z=3-2s; \end{cases} \begin{cases} x=-4-2t, \\ y=3+3t, \\ z=2t; \end{cases} \begin{cases} x=4-6u, \\ y=-4+4u, \\ z=-6+4u; \end{cases} \begin{cases} x=3+3v, \\ y=-4-2v, \\ z=1-2v. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x=8+s, \\ y=-1+3s, \\ z=4-2s; \end{cases} \begin{cases} x=9+t, \\ y=2+3t, \\ z=2-2t; \end{cases} \begin{cases} x=5-2u, \\ y=6-6u, \\ z=-1+4u; \end{cases} \begin{cases} x=3, \\ y=1+v, \\ z=4+v. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x=-5, \\ y=-7-3s, \\ z=1+3s; \end{cases} \begin{cases} x=-2, \\ y=-7+6t, \\ z=7-6t; \end{cases} \begin{cases} x=-3-u, \\ y=-1, \\ z=2+u; \end{cases} \begin{cases} x=-5, \\ y=-4-3v, \\ z=-2+3v. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x=-5+2s, \\ y=-2s, \\ z=2-4s; \end{cases} \begin{cases} x=3t, \\ y=-5-3t, \\ z=-1+t; \end{cases} \begin{cases} x=4-u, \\ y=5+u, \\ z=-2+2u; \end{cases} \begin{cases} x=3-v, \\ y=6+v, \\ z=2v. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x=-3+3s, \\ y=-1+2s, \\ z=2+s; \end{cases} \begin{cases} x=8-2t, \\ y=-10+2t, \\ z=-9-3t; \end{cases} \begin{cases} x=6-2u, \\ y=-8+2u, \\ z=-12-3u; \end{cases} \begin{cases} x=-4+4v, \\ y=1-4v, \\ z=-5+6v. \end{cases}$

6. Дано площину α і пряму l. Знайдіть точку їх перетину. Складіть векторно параметричне рівняння ортогональної проекції m прямої l на площину α, взявши в якості опорної точки точку перетину.

1. $\alpha: 9x+348y-253z+2422=0;$
$l: x=7+2t, y=-7-5t, z=12+15t.$

2. $\alpha: 16x-37y+5z-181=0;$
$l: x=6+3t, y=-10-6t, z=-2+t.$

3. $\alpha: 73x-53y+352z-2345=0;$
$l: x=1-t, y=6+t, z=1-6t.$

4. $\alpha: 20x-2y+31z-140=0;$
$l: x=-4-t, y=-6+t, z=13+7t.$

5. $\alpha: 13x+234y-195z+1404=0;$
$l: x=2-t, y=-4+3t, z=-7-6t.$

6. $\alpha: 41x-54y+131z-296=0;$
$l: x=-3+2t, y=-5-3t, z=5+2t.$

7. $\alpha: 21x-59y-4z+254=0;$
$l: x=-2+3t, y=10+7t, z=-5+2t.$

8. $\alpha: 2x-3y-z+2=0;$
$l: x=9+5t, y=9+6t, z=-t.$

9. $\alpha: 215x-214y+337z+554=0;$
$l: x=-1+2t, y=-4-2t, z=2+3t.$

10. $\alpha: 15x-78y-79z-945=0;$
$l: x=-6-t, y=-6+t, z=-4+2t.$

11. $\alpha: 10x-16y+17z-111=0;$
$l: x=1-2t, y=-2+2t, z=-1-2t.$

12. $\alpha: 19x-y+2z-73=0;$

$l: x = 11 + 7t, y = 3t, z = -7 - 4t.$

13. $\alpha: 69x - 27y + 76z + 172 = 0;$

$l: x = 11 + 5t, y = 1 - t, z = -5 + 2t.$

14. $\alpha: 251x - 211y + 79z + 172 = 0;$

$l: x = -12 - 7t, y = -1 + 4t, z = -7 - 4t.$

15. $\alpha: 8x - 5y - 31z - 81 = 0;$

$l: x = 8 + 7t, y = 10 + 6t, z = 1 + 4t.$

16. $\alpha: 171x - 35y - 434z - 741 = 0;$

$l: x = -4 - 6t, y = 3 + 2t, z = 4 + 5t.$

17. $\alpha: 73x + 166y - 88z - 1112 = 0;$

$l: x = 3 - 3t, y = -2 - 5t, z = 2 + 4t.$

18. $\alpha: 117x + 12y + 125z + 528 = 0;$

$l: x = -1 + 6t, y = -6 + t, z = 8 + 5t.$

19. $\alpha: 37x - 35y + 16z - 370 = 0;$

$l: x = 3 - 4t, y = -2 + 3t, z = -6 - 3t.$

20. $\alpha: 57x + 45y + 41z + 94 = 0;$

$l: x = 2 + 4t, y = 10 + 5t, z = -3 + 2t.$

7. Складіть канонічне рівняння спільного перпендикуляра до двох даних мимобіжних прямих. Визначте координати точок перетину знайденої прямої зданими прямими.

Варіанти завдань:

1. $\frac{x-6}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-14}{1}, \frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-9}{-1}.$

2. $\frac{x-7}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-11}{1}, \frac{x-6}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-12}{-1}.$

3. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-1}{1}, \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{0}.$

4. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{1}, \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{1}.$

5. $\frac{x+1}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{1}, \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z}{1}.$

6. $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{1}, \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z}{1}.$

7. $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}, \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{-1}.$

8. $\frac{x+1}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-1}, \frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{-1}.$

9. $\frac{x+1}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1}, \frac{x+1}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z}{-1}.$

10. $\frac{x+1}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1}, \frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{-1}.$

11. $\frac{x-1}{2}=\frac{y-4}{1}=\frac{z+3}{1}, \frac{x-2}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{1}.$

12. $\frac{x+5}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+6}{1}, \frac{x+4}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+3}{1}.$

13. $\frac{x-5}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-6}{1}, \frac{x-4}{3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{1}.$

14. $\frac{x-5}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-6}{1}, \frac{x+4}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+3}{1}.$

15. $\frac{x-5}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-6}{1}, \frac{x+4}{3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+3}{1}.$

16. $\frac{x-5}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-6}{1}, \frac{x+4}{3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+3}{1}.$

17. $\frac{x-5}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-6}{1}, \frac{x-4}{3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+3}{1}.$

18. $\frac{x-5}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-6}{1}, \frac{x-4}{3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{1}.$

19. $\frac{x+5}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-6}{1}, \frac{x-4}{3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{1}.$

20. $\frac{x-5}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-1}{1}, \frac{x-4}{1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-6}{1}.$

8. Пряма l є бісектрисою гострого (у варіантах з непарними номерами) або тупого (у варіантах з парними номерами) кута, утвореного прямими l_1 і l_2. Запишіть рівняння прямої l в загальному вигляді. Визначте відстань від початку координат до прямої l. Обчисліть кут між прямою l кожною з прямих l_1 і l_2.

Варіанти завдань:

1. $l_1: \frac{x+2}{3}=\frac{y-3}{4}, l_2: \overline{r}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}5\\12\end{pmatrix}.$

2. $l_1: \frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{4}, l_2: \overline{r} = \begin{pmatrix} -4 \\ -13 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ -12 \end{pmatrix}.$

3. $l_1: \frac{x+5}{3} = \frac{y+1}{4}, l_2: \overline{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}.$

4. $l_1: \frac{x+5}{3} = \frac{y+1}{4}, l_2: \overline{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ -12 \end{pmatrix}.$

5. $l_1: \frac{x-1}{3} = \frac{y-7}{4}, l_2: \overline{r} = \begin{pmatrix} -4 \\ -13 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}.$

6. $l_1: \frac{x-1}{-3} = \frac{y-7}{7}, l_2: \overline{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}.$

7. $l_1: \frac{x-1}{-5} = \frac{y+4}{12}, l_2: \overline{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$

8. $l_1: \frac{x-6}{5} = \frac{y+16}{-12}, l_2: \overline{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$

9. $l_1: \frac{x-1}{-5} = \frac{y+4}{12}, l_2: \overline{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$

10. $l_1: \frac{x-6}{-5} = \frac{y+16}{12}, l_2: \overline{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$

11. $l_1: \frac{x+4}{-5} = \frac{y-8}{12}, l_2: \overline{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$

12. $l_1: \frac{x+4}{-5} = \frac{y-8}{-12}, l_2: \overline{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$

13. $l_1: \frac{x+5}{5} = \frac{y-3}{-12}, l_2: \overline{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$

14. $l_1: \frac{x+5}{-5} = \frac{y-3}{12}, l_2: \overline{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$

15. $l_1: \frac{x}{5} = \frac{y+9}{-12}, l_2: \overline{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$

16. $l_1: \frac{x+10}{-5} = \frac{y-15}{12}, l_2: \overline{r} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$

17. $l_1: \frac{x+4}{12} = \frac{y-1}{5}, l_2: \overline{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$

18. $l_1: \frac{x+16}{12} = \frac{y+4}{5}, l_2: \overline{r} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$

19. $l_1: \frac{x-8}{12} = \frac{y-6}{5}, l_2: \overline{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$

20. $l_1: \dfrac{x-1}{-5} = \dfrac{y+4}{12}, l_2: \bar{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$

Приклади розв'язання задач.

Приклад 1. На площині заданий ΔABC з вершинами $A(-1,0)$, $B(1,-4)$, $C(-8,-2)$. Знайдіть:

1) довжину сторони *BC*;

2) загальні рівняння медіани *AM*, висоти *AH* та бісектриси *AK* кута *A*;

3) відстань вершини *B* від медіани *AM*;

4) кут між медіаною *AM* і висотою *AH* (у градусах).

Розв'язання.

1) Знайдемо координати вектора $\overline{BC}(-9,2)$ та його довжину:

$$BC = \sqrt{(-9)^2 + 2^2} = \sqrt{81+4} = \sqrt{85}.$$

2) Медіана кута *A* ділить сторону *BC* навпіл, тому координати точки *M* – середини *BC* будуть:

$$M\left(\frac{-1-8}{2}, \frac{-4-2}{2}\right),\ M\left(-\frac{9}{2}, -3\right).$$

Тепер складемо рівняння медіани як рівняння прямої *AM* за двома точками:

$$\frac{x+1}{-\frac{9}{2}+1} = \frac{y-0}{-3-0},\ \frac{x+1}{-\frac{7}{2}} = \frac{y}{-3},$$

$$-3(x+1) = -\frac{7}{2}y,\ -3x-3+\frac{7}{2}y = 0,$$

$6x - 7y + 6 = 0$ – загальне рівняння медіани, проведеної з кута *A*.

Висота *AH*, проведена з кута *A* – це перпендикуляр до сторони *BC*, тому її нормальний вектор колінеарний до напрямного вектора прямої *BC*, тобто $\bar{n}_h(-9,2)$. Складемо рівняння висоти кута *A* за точкою та нормальним вектором:

$$-9(x+1)+2(y-0) = 0,\ -9x-9+2y = 0,$$

$9x - 2y + 9 = 0$ – загальне рівняння висоти кута *A*.

Бісектриса кута A ділить сторону BC у відношенні, що дорівнює відношенню прилеглих сторін, тобто $\frac{BN}{NC}=\frac{AB}{AC}$, N – основа бісектриси. Отримаємо:

$$\frac{BN}{NC}=\frac{\sqrt{2^2+(-4)^2}}{\sqrt{(-7)^2+(-2)^2}},\ \frac{BN}{NC}=\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{53}}.$$

Тепер знайдемо координати точки N, використовуючи формули ділення відрізка в даному відношенні:

$$x_N=\frac{-1+\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{53}}\cdot(-10)}{1+\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{53}}}=\frac{-\sqrt{53}-20\sqrt{5}}{\sqrt{53}+2\sqrt{5}},$$

$$y_N=\frac{-6+\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{53}}\cdot(-4)}{1+\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{53}}}=\frac{-6\sqrt{53}-8\sqrt{5}}{\sqrt{53}+2\sqrt{5}}.$$

Складемо рівняння бісектриси кута A за двома точками $A(-1,0)$ та $N\left(\frac{-\sqrt{53}-20\sqrt{5}}{\sqrt{53}+2\sqrt{5}},\frac{-6\sqrt{53}-8\sqrt{5}}{\sqrt{53}+2\sqrt{5}}\right)$:

$$AN:\ \frac{x+1}{\frac{-\sqrt{53}-20\sqrt{5}}{\sqrt{53}+2\sqrt{5}}+1}=\frac{y-0}{\frac{-6\sqrt{53}-8\sqrt{5}}{\sqrt{53}+2\sqrt{5}}-0},$$

$$\frac{x+1}{\frac{-18\sqrt{5}}{\sqrt{53}+2\sqrt{5}}}=\frac{y}{\frac{-6\sqrt{53}-8\sqrt{5}}{\sqrt{53}+2\sqrt{5}}},$$

$$\left(-6\sqrt{53}-8\sqrt{5}\right)(x+1)=\left(-18\sqrt{5}\right)y,$$

$$\left(-6\sqrt{53}-8\sqrt{5}\right)x+18\sqrt{5}y-6\sqrt{53}-8\sqrt{5}=0$$

– загальне рівняння бісектриси кута A.

3) Відстань від вершини B до медіани знайдемо за формулою відстані від точки до прямої. Отримаємо:

$$d = \frac{|6\cdot 1 - 7\cdot(-4) + 6|}{\sqrt{6^2 + (-7)^2}} = \frac{40}{\sqrt{36+49}} = \frac{40}{\sqrt{85}} = \frac{8\sqrt{85}}{17}.$$

4) Знайдемо кут між медіаною й висотою за формулою:

$$\cos\left(\hat{AM}, h\right) = \cos\left(\hat{\bar{n}_{AM}}, \bar{n}_h\right) = \frac{\bar{n}_{AM}\cdot\bar{n}_h}{|\bar{n}_{AM}|\cdot|\bar{n}_h|}.$$

Підставимо відповідні значення, отримаємо:

$$\cos\left(\hat{AM}, h\right) = \frac{6\cdot 9 + (-7)\cdot(-2)}{\sqrt{6^2 + (-7)^2}\cdot\sqrt{9^2 + (-2)^2}} = \frac{68}{\sqrt{85}\cdot\sqrt{85}} = \frac{68}{85} \approx 0{,}8,$$

$$\angle(AM, h) \approx 37^\circ.$$

Приклад 2. Трикутна піраміда задана вершинами $A_1(-1,0,1)$, $A_2(1,-1,1)$, $A_3(-1,-2,0)$, $A_4(5,2,10)$. Знайдіть:

1) рівняння грані $A_1A_2A_3$;

2) рівняння висоти піраміди, яка проходить через вершину A_4;

3) довжину цієї висоти;

4) кут між ребром A_1A_4 і гранню $A_1A_2A_3$ в градусах.

Розв'язання.

1) Складемо детермінантне рівняння грані $A_1A_2A_3$:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-0 & z-1 \\ 1+1 & -1-0 & 1-1 \\ -1+1 & -2-0 & 0-1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x+1 & y & z-1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

$x + 2y - 4z + 5 = 0$ – рівняння грані $A_1A_2A_3$.

2) Висота піраміди, яка проходить через вершину A_4, це перпендикуляр до грані $A_1A_2A_3$, тому її напрямний вектор колінеарний до нормального вектора грані $A_1A_2A_3$, тобто $\bar{a}_{A_4D}(1,2,-4)$. Складемо рівняння висоти A_4D

$$A_4D: \frac{x-5}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-10}{-4}$$

– канонічне рівняння висоти піраміди, яка проходить через вершину A_4.

3) Довжину висоти A_4D знайдемо як відстань вершини A_4 від грані $A_1A_2A_3$ за формулою відстані від точки до площини. Отримаємо:

$$d = \frac{|1\cdot 5 + 2\cdot 2 - 4\cdot 10 + 5|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-4)^2}} = \frac{26}{\sqrt{1+4+16}} = \frac{26}{\sqrt{21}}.$$

4) Знайдемо кут між ребром A_1A_4 і гранню $A_1A_2A_3$ за формулою:

$$\sin\left(A_1A_4, \hat{} \; A_1A_2A_3\right) = \sin\left(\bar{a}_{A_1A_4}, \hat{} \; \bar{n}_{A_1A_2A_3}\right) = \frac{\left|\bar{a}_{A_1A_4} \cdot \bar{n}_{A_1A_2A_3}\right|}{\left|\bar{a}_{A_1A_4}\right| \cdot \left|\bar{n}_{A_1A_2A_3}\right|}.$$

Для цього спочатку знайдемо координати напрямного вектора ребра A_1A_4: $\bar{a}_{A_1A_4}(6,2,9)$. Підставимо відповідні значення, отримаємо:

$$\sin\left(A_1A_4, \hat{A}_1A_2A_3\right) = \frac{|6\cdot 1 + 2\cdot 2 + 9\cdot(-4)|}{\sqrt{6^2+2^2+9^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+(-4)^2}} = \frac{26}{\sqrt{121}\cdot\sqrt{21}} = \frac{26}{11\sqrt{21}} \approx 0{,}515.$$

$$\angle(A_1A_4, A_1A_2A_3) \approx 31^\circ.$$

13 ПОНЯТТЯ КРИВОЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ. ЕЛІПС, ГІПЕРБОЛА, ПАРАБОЛА.

Теоретичні питання:

1. Означення кривої другого порядку (коніки).
2. Канонічні рівняння кривих другого порядку.
3. Означення та канонічне рівняння еліпса.
4. Основні елементи еліпса (півосі, фокуси, ексцентриситет).
5. Геометричний зміст параметрів канонічного рівняння еліпса.
6. Дотична до еліпса в заданій точці.
7. Оптична властивість еліпса.Означення та канонічне рівняння гіперболи.
8. Основні елементи гіперболи (півосі, фокуси, асимптоти).
9.
10. Геометричний зміст параметрів канонічного рівняння гіперболи.
11. Дотична до гіперболи.
12. Оптична властивість гіперболи.
13. Означення та канонічне рівняння параболи.
14. Основні елементи параболи (фокус, директриса).
15. Геометричний зміст параметрів канонічного рівняння параболи.
16. Дотична до параболи.
17. Оптична властивість параболи.
18. Побудова еліпса, гіперболи та параболи в декартовій системі координат.
19. Порівняльний аналіз канонічних рівнянь еліпса, гіперболи та параболи.
20. Застосування канонічних рівнянь кривих другого порядку.

Практичні завдання:

1. Запишіть канонічне рівняння еліпса за відомими даними. Позначення: C – відстань між фокусами, D – відстань між директрисами, K – відстань між фокусом та відповідною йому директрисою, ε – ексцентриситет.

Варіанти завдань:

1.	$C = 4, \varepsilon = 1/2.$	**2.**	$C = 4, D = 10.$	**3.**	$D = 28, \varepsilon = 1/\sqrt{2}.$
4.	$C = 4, D = 6.$	**5.**	$D = 32, \varepsilon = 1/4.$	**6.**	$K = 5, \varepsilon = 1/\sqrt{2}.$
7.	$D = 16, \varepsilon = 1/2.$	**8.**	$K = 4, \varepsilon = 1/2.$	**9.**	$C = 6, \varepsilon = 1/3.$
10.	$K = 3, \varepsilon = 1/2.$	**11.**	$C = 8, \varepsilon = 2/3.$	**12.**	$C = 2, D = 6.$
13.	$C = 4, \varepsilon = 1/3.$	**14.**	$C = 6, D = 8.$	**15.**	$D = 18, \varepsilon = 1/\sqrt{3}.$
16.	$C = 4, D = 8.$	**17.**	$D = 30, \varepsilon = 1/\sqrt{2}.$	**18.**	$K = 5, \varepsilon = 1/\sqrt{3}.$
19.	$D = 27, \varepsilon = 1/3.$	**20.**	$K = 8, \varepsilon = 1/2.$		

2. Пряма l дотикається еліпса, фокуси якого розташовані в точках F_1 і F_2. Запишіть канонічне рівняння цього еліпса, рівняння його директрис та знайдіть кординати точки дотику та ексцентриситет еліпса.

Варіанти завдань:

1. $l: x + 2y + 4 = 0, F_1 = (-1; 0), F_2 = (1; 0).$

2. $l: x - 2y - 6 = 0, F_1 = (-1; 0), F_2 = (1; 0).$

3. $l: -x + 2y + 9 = 0, F_1 = (-1; 0), F_2 = (1; 0).$

4. $l: x + 2y - 11 = 0, F_1 = (-1; 0), F_2 = (1; 0).$

5. $l: x - 2y + 14 = 0, F_1 = (-1; 0), F_2 = (1; 0).$

6. $l: -x + 2y + 3 = 0, F_1 = (-2; 0), F_2 = (2; 0).$

7. $l: x + 2y - 7 = 0, F_1 = (-2; 0), F_2 = (2; 0).$

8. $l: -x + 2y + 8 = 0, F_1 = (-2; 0), F_2 = (2; 0).$

9. $l: x - 2y - 12 = 0, F_1 = (-2; 0), F_2 = (2; 0).$

10. $l: x + 2y + 13 = 0, F_1 = (-2; 0), F_2 = (2; 0).$

11. $l: -x + 2y - 7 = 0, F_1 = (-3; 0), F_2 = (3; 0).$

12. $l: x - 2y + 8 = 0, F_1 = (-3; 0), F_2 = (3; 0).$

13. $l: x + 2y - 12 = 0, F_1 = (-3; 0), F_2 = (3; 0).$

14. $l: x - 2y + 13 = 0, F_1 = (-3; 0), F_2 = (3; 0).$

15. $l: -x + 2y - 6 = 0, F_1 = (-4; 0), F_2 = (4; 0).$

16. $l: x - 2y + 14 = 0, F_1 = (-4; 0), F_2 = (4; 0).$

17. $l: x + 2y + 10 = 0, F_1 = (-5; 0), F_2 = (5; 0).$

18. $l: -x + 2y - 15 = 0, F_1 = (-5; 0), F_2 = (5; 0).$

19. $l: x + 2y + 9 = 0, F_1 = (-6; 0), F_2 = (6; 0).$

20. $l: x + 2y - 11 = 0, F_1 = (-6; 0), F_2 = (6; 0).$

3. Запишіть рівняння дотичних, проведених до даного еліпса з даної точки , та знайдіть координати точок дотику. Знайдіть кут між дотичними.

Варіанти завдань:

1. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1, M(20; -15).$

2. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1, M(30; -15).$

3. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1, M(25; -10).$

4. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1, M(30; -20).$

5. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1, M(25; -15).$

6. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1, M\left(\frac{20}{7}; -\frac{15}{7}\right).$

7. $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{4}=1, M(30;-10).$

8. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1, M\left(\frac{25}{7};-\frac{10}{7}\right).$

9. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1, M\left(\frac{25}{7};-\frac{15}{7}\right).$

10. $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1, M(-30;20).$

11. $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{4}=1, M\left(\frac{30}{7};-\frac{10}{7}\right).$

12. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1, M\left(\frac{20}{7};-\frac{15}{7}\right).$

13. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1, M(-20;15).$

14. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1, M\left(\frac{25}{7};-\frac{10}{7}\right).$

15. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1, M(-25;10).$

16. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1, M\left(\frac{25}{7};-\frac{15}{7}\right).$

17. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1, M(-25;15).$

18. $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{4}=1, M\left(\frac{30}{7};-\frac{10}{7}\right).$

19. $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{4}=1, M(-30;10).$

20. $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1, M\left(\frac{30}{7};-\frac{15}{7}\right).$

4. Запишіть рівняння еліпса, якщо відомі його ексцентриситет, фокус і рівняння відповідної директриси. Представте рівняння у вигляді $F(x;y)$, де $F(x;y)$ – многочлен другого степеня від x та y.

Варіанти завдань:

1. $\frac{1}{2}, (-4;1), x+y+1=0;$

2. $\frac{1}{5}, (-2;3), -x+y+4=0;$

3. $\frac{1}{2}, (-3;1), -x+y+1=0;$

4. $\frac{2}{3}, (-3;1), x+y+1=0;$

5. $\frac{1}{2}, (-3;1), -x+y-3=0;$

6. $\frac{2}{3}, (3;-1), x+y-1=0;$

7. $\frac{1}{3}, (-3;2), -x+y-3=0;$

8. $\frac{2}{3}, (3;-3), x-y-1=0;$

9. $\frac{1}{3}, (-1;2), x+y+3=0;$

10. $\frac{3}{4}, (3;-2), x-y+2=0;$

11. $\frac{1}{3}, (-1;1), x+y+3=0;$

12. $\frac{3}{4}, (1;-2), x-y+3=0;$

13. $\frac{1}{3}, (-2;1), x-y+2=0;$

14. $\frac{1}{\sqrt{2}}, (1;-2), x-y+3=0;$

15. $\frac{1}{5}, (-2; 1), x - y + 2 = 0;$

16. $\frac{1}{\sqrt{2}}, (1; -2), x + y - 3 = 0;$

17. $\frac{1}{5}, (-2; 2), x + y + 3 = 0;$

18. $\frac{1}{\sqrt{3}}, (3; -2), x - y + 3 = 0;$

19. $\frac{1}{\sqrt{5}}, (1; -1), x + y + 2 = 0;$

20. $\frac{1}{\sqrt{5}}, (2; -1), x - y + 2 = 0.$

5. Складіть канонічне рівняння гіперболи, яка має спільні фокальні хорди з даним еліпсом. Визначте ексцентриситет гіперболи.

Варіанти завдань:

1	$\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1;$	**8**	$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1;$	**15**	$\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{6} = 1;$
2	$\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1;$	**9**	$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} = 1;$	**16**	$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{1} = 1;$
3	$\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{4} = 1;$	**10**	$\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{1} = 1;$	**17**	$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1;$
4	$\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{5} = 1;$	**11**	$\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{1} = 1;$	**18**	$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{3} = 1;$
5	$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{2} = 1;$	**12**	$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{1} = 1;$	**19**	$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1;$
6	$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = 1;$	**13**	$\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{2} = 1;$	**20**	$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{5} = 1.$
7	$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1;$	**14**	$\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{4} = 1;$		

6. З правого фокуса гіперболи під кутом α до осі Ox спрямовано промінь світла. Відомий $tg\alpha$. Дійшовши до гіперболи, промінь від неї відбився. Запишіть рівняння прямих, на яких лежать відбиті промені.

Варіанти завдань:

1	$\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1, tg\alpha = 2;$	**11**	$\frac{x^2}{90} - \frac{y^2}{135} = 1, tg\alpha = 3;$
2	$\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1, tg\alpha = -2;$	**12**	$\frac{x^2}{90} - \frac{y^2}{135} = 1, tg\alpha = -3;$
3	$\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1, tg\alpha = 2;$	**13**	$\frac{x^2}{17} - \frac{y^2}{8} = 1, tg\alpha = 4;$
4	$\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1, tg\alpha = -2;$	**14**	$\frac{x^2}{17} - \frac{y^2}{8} = 1, tg\alpha = -4;$

5	$\frac{x^2}{45}-\frac{y^2}{4}=1, tg\alpha=-2;$	**15**	$\frac{x^2}{17}-\frac{y^2}{32}=1, tg\alpha=4;$
6	$\frac{x^2}{45}-\frac{y^2}{36}=1, tg\alpha=2;$	**16**	$\frac{x^2}{17}-\frac{y^2}{32}=1, tg\alpha=-4;$
7	$\frac{x^2}{45}-\frac{y^2}{36}=1, tg\alpha=-2;$	**17**	$\frac{x^2}{17}-\frac{y^2}{32}=1, tg\alpha=4;$
8	$\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{6}=1, tg\alpha=3;$	**18**	$\frac{x^2}{17}-\frac{y^2}{208}=1, tg\alpha=4;$
9	$\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{6}=1, tg\alpha=-3;$	**19**	$\frac{x^2}{17}-\frac{y^2}{208}=1, tg\alpha=-4;$
10	$\frac{x^2}{40}-\frac{y^2}{24}=1, tg\alpha=3;$	**20**	$\frac{x^2}{90}-\frac{y^2}{54}=1, tg\alpha=3;$

7. Запишіть рівняння параболи, якщо відомий її фокус і директриса. Визначте параметр параболи та запишіть рівняння її осі симетрії.

Варіанти завдань:

1.	$(-2;3), -x+y+4=0;$	**2.**	$(-4;1), x+y+1=0;$
3.	$(-3;1), x+y+1=0;$	**4.**	$(-3;1), -x+y+1=0;$
5.	$(3;-1), x+y-1=0;$	**6.**	$(-3;1), -x+y-3=0;$
7.	$(3;-3), x-y-1=0;$	**8.**	$(-3;2), -x+y-3=0;$
9.	$(3;-2), x-y+2=0;$	**10.**	$(-1;2), x+y+3=0;$
11.	$(1;-2), x-y+3=0;$	**12.**	$(-1;1), x+y+3=0;$
13.	$(1;-2), x+y+3=0;$	**14.**	$(-2;1), x-y+2=0;$
15.	$(1;-2), x+y-3=0;$	**16.**	$(-2;1), x-y+2=0;$
17.	$(3;-2), x-y+3=0;$	**18.**	$(-2;2), x+y+3=0;$
19.	$(2;-1), x-y+2=0;$	**20.**	$(1;-1), x+y+2=0.$

Приклади розв'язання задач:

Приклад 1. Запишіть канонічне рівняння еліпса, що проходить через точки $M\left(\frac{5}{2};\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$ і $N\left(-2;\frac{\sqrt{15}}{5}\right)$.

Розв'язання.

Нехай $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ – шукане рівняння еліпса. Це рівняння повинні задовольняти координати даних точок. Маємо:

$$\begin{cases} \dfrac{25}{4a^2}+\dfrac{3}{8b^2}=1, \\ \dfrac{4}{a^2}+\dfrac{3}{b^2}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2=10, \\ b^2=1. \end{cases}$$

Отже, рівняння еліпса має вид:

$$\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{1}=1.$$

Приклад 2. Запишіть рівняння параболи, симетричної відносно осі *Ox*, з вершиною в початку координат, якщо довжина деякої хорди цієї параболи, що перпендикулярна до осі *Ox*, дорівнює 16, а відстань до цієї хорди від вершини дорівнює 6.

Розв'язання.

Оскільки відома довжина хорди й відстань до неї від вершини, то відомі координати кінця цієї хорди – точки *M*, що лежить на параболі. У рівнянні параболи $y^2=2px$ покладемо $x=6,\ y=8$. Тоді $2p=\dfrac{32}{3}$. Отже, рівняння параболи

$$y^2=\frac{32x}{3}.$$

Приклад 3. Зведіть до канонічного виду рівняння кривої другого порядку, використовуючи перетворення координат, а саме перетворення повороту та паралельного переносу: $5x^2-4\sqrt{2}xy+3y^2-14=0$.

Розв'язання.

У загальному рівнянні кривої присутній член xy, тому виконаємо перетворення повороту. У вихідному рівнянні $a_{22}=3\neq a_{11}=5$, тому $\operatorname{tg}2\varphi=\dfrac{2\cdot\left(-2\sqrt{2}\right)}{5-3}=-2\sqrt{2}$. Знайдемо $\sin\varphi$ та $\cos\varphi$, використовуючи формули:

$$\sin\varphi=\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}},\ \cos\varphi=\frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}.$$

Отримаємо:

$$\operatorname{tg}\varphi=\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}};\sqrt{2}\right\},$$

а $\sin\varphi$ і $\cos\varphi$ візьмемо, наприклад,

$$\sin\varphi=\frac{\sqrt{6}}{3},\ \cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Формули перетворення

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(\bar{x} - \bar{y}\sqrt{2}\right), \\ y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(\bar{x}\sqrt{2} + \bar{y}\right), \end{cases}$$

за допомогою яких отримаємо рівняння кривої в новій системі координат:

$$3\bar{x}^2 + 21\bar{y}^2 - 42 = 0 \text{ або } \frac{\bar{x}^2}{14} + \frac{\bar{y}^2}{2} = 1.$$

Маємо рівняння еліпса у новій системі координат: $\dfrac{\bar{x}^2}{14} + \dfrac{\bar{y}^2}{2} = 1$ з центром в початку координат та осями $\sqrt{14}$ і $\sqrt{2}$, при цьому системи координат зв’язані формулами:

$$\begin{cases} \bar{x} = \dfrac{x\sqrt{3}}{3} + \dfrac{y\sqrt{6}}{3}, \\ \bar{y} = -\dfrac{x\sqrt{6}}{3} + \dfrac{y\sqrt{3}}{3}. \end{cases}$$

14 ЗАГАЛЬНЕ РІВНЯННЯ КРИВОЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ. ЗВЕДЕННЯ РІВНЯННЯ КРИВОЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ДО КАНОНІЧНОГО ВИГЛЯДУ

Теоретичні питання:

1. Поняття кривої другого порядку на площині.
2. Загальний вигляд рівняння кривої другого порядку на площині.
3. Коефіцієнти загального рівняння та їх геометричний зміст.
4. Класифікація кривих другого порядку.
5. Інваріанти загального рівняння кривої другого порядку.
6. Дискримінант квадратичної форми та його роль у класифікації кривих другого порядку.
7. Умови, за яких крива другого порядку є: еліпсом; гіперболою; параболою.
8. Вироджені випадки кривих другого порядку та їх геометричний зміст.
9. Геометричний зміст членів з квадратами змінних та змішаного члена (xy).
10. Перенесення початку координат як спосіб зведення рівняння до спрощеного вигляду.
11. Формули переходу до нової системи координат при паралельному перенесенні.
12. Поворот осей координат та його мета при зведенні рівняння кривої другого порядку.
13. Формули перетворення координат при повороті осей.
14. Усунення змішаного члена (xy) у рівнянні кривої другого порядку.
15. Алгоритм зведення загального рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду.

Практичні завдання:

1. За допомогою інваріантів визначте тип кривої та запишіть її канонічне рівняння в деякій канонічній системі координат.
2. За допомогою перетворення координат зведіть криву до канонічного вигляду, визначте її тип та порівняйте з отриманим раніше.

Варіанти завдань:

1. $5x^2 - 6xy + 5y^2 + 2x - 14y - 19 = 0.$
2. $25x^2 - 14xy + 25y^2 - 22x - 86y - 191 = 0.$
3. $29x^2 - 42xy + 29y^2 + 26x - 74y - 139 = 0.$
4. $17x^2 - 16xy + 17y^2 - 2x - 52y - 172 = 0.$
5. $5x^2 - 6xy + 5y^2 + 22x - 26y + 5 = 0.$
6. $25x^2 - 14xy + 25y^2 + 78x - 114y - 135 = 0.$
7. $29x^2 - 42xy + 29y^2 + 142x - 158y + 29 = 0.$
8. $17x^2 - 16xy + 17y^2 + 66x - 84y - 108 = 0.$

9. $5x^2 - 6xy + 5y^2 + 26x - 22y + 5 = 0.$

10. $25x^2 - 14xy + 25y^2 + 114x - 78y - 135 = 0.$

11. $29x^2 - 42xy + 29y^2 + 158x - 142y + 29 = 0.$

12. $17x^2 - 16xy + 17y^2 + 84x - 66y - 108 = 0.$

13. $25x^2 + 14xy + 25y^2 - 22x + 86y - 191 = 0.$

14. $5x^2 + 6xy + 5y^2 + 2x + 14y - 19 = 0.$

15. $17x^2 + 16xy + 17y^2 - 2x + 52y - 172 = 0.$

16. $29x^2 + 42xy + 29y^2 + 26x + 74y - 139 = 0.$

17. $25x^2 + 14xy + 25y^2 - 114x - 78y - 135 = 0.$

18. $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 26x - 22y + 5 = 0.$

19. $17x^2 + 16xy + 17y^2 - 84x - 66y - 108 = 0.$

20. $29x^2 + 42xy + 29y^2 - 158x - 142y + 29 = 0.$

15. ЗАГАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ. КАНОНІЧНІ РІВНЯННЯ ПОВЕРХОНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ.

Теоретичні питання:

1. Поняття поверхні другого порядку у тривимірному просторі.
2. Загальний вигляд рівняння поверхні другого порядку в декартовій системі координат.
3. Коефіцієнти загального рівняння та їх геометричний зміст.
4. Квадратична форма трьох змінних і її роль у дослідженні поверхонь другого порядку.
5. Інваріанти квадратичної форми та їх значення для класифікації поверхонь другого порядку.
6. Класифікація поверхонь другого порядку за знаком інваріантів.
7. Невироджені та вироджені поверхні другого порядку.
8. Геометричний зміст змішаних членів (xy), (xz), (yz) у загальному рівнянні.
9. Перетворення координат у просторі як засіб спрощення рівняння поверхні другого порядку.
10. Паралельне перенесення початку координат та його вплив на рівняння поверхні.
11. Поворот осей координат у просторі та усунення змішаних членів.
12. Алгоритм зведення загального рівняння поверхні другого порядку до канонічного вигляду.
13. Канонічне рівняння еліпсоїда та його геометричні характеристики.
14. Канонічне рівняння однопорожнинного гіперболоїда.
15. Канонічне рівняння двопорожнинного гіперболоїда.
16. Канонічне рівняння еліптичного параболоїда.
17. Канонічне рівняння гіперболічного параболоїда.
18. Конічні поверхні другого порядку.
19. Циліндричні поверхні другого порядку.
20. Канонічні рівняння вироджених поверхонь другого порядку.
21. Перерізи поверхонь другого порядку площинами та їх класифікація.
22. Побудова та аналіз поверхонь другого порядку за їх канонічними рівняннями.
23. Приклади застосування поверхонь другого порядку в математиці, фізиці та техніці.

Практичні завдання:

1. Визначте вид поверхонь та побудуйте їх. Які криві утворюються при перетині поверхонь з площинами $x = c$, $y = c$, $z = c$ $(c = const)$?

Варіанти завдань:

1.	а)	$x^2 - 7y^2 - 14z^2 - 21 = 0;$	б)	$x^2 + 4z^2 = 2y.$
2.	а)	$6x^2 - y^2 + 3z^2 - 12 = 0;$	б)	$8y^2 + 2z^2 = x.$
3.	а)	$-16x^2 + y^2 + 4z^2 - 32 = 0;$	б)	$6x^2 + y^2 - z = 0.$

4.	а)	$5x^2 - y^2 - 15z^2 + 15 = 0;$	б)	$x^2 = 4z.$
5.	а)	$6x^2 + y^2 + 3z^2 - 18 = 0;$	б)	$3x^2 + y^2 - 6z = 0.$
6.	а)	$-7x^2 + 14y^2 - z^2 + 21 = 0;$	б)	$y^2 + 2z^2 = 6x^2.$
7.	а)	$6x^2 - 3y^2 - z^2 - 18 = 0;$	б)	$x^2 - 2y + z^2 = 0.$
8.	а)	$4x^2 - 6y^2 + 3z^2 = 0;$	б)	$4x^2 - y^2 - 3z = 12.$
9.	а)	$x^2 + y^2 + z = 4;$	б)	$3x^2 + 12y^2 + 4z^2 = 48.$
10.	а)	$5x^2 - 10y^2 + 4z^2 = 60;$	б)	$7y^2 + z^2 = 14x^2.$
11.	а)	$9x^2 - 6y^2 - 3z^2 + 1 = 0;$	б)	$6x^2 + 10y^2 = 15z.$
12.	а)	$5x^2 + 5y^2 = z^2;$	б)	$3x^2 + 2y^2 - z^2 = 36.$
13.	а)	$4x^2 + 3y^2 = 12z;$	б)	$4x^2 - 3y^2 - 2z^2 + 12 = 0.$
14.	а)	$8x^2 - y^2 - 2z^2 - 32 = 0;$	б)	$x - 4y^2 = 3x^2.$
15.	а)	$x^2 + y^2 - 6z^2 - 12 = 0;$	б)	$z - 3y^2 = 9z^2.$
16.	а)	$2x^2 - 3y^2 - 5z^2 + 30 = 0;$	б)	$2y^2 = -3z.$
17.	а)	$7x^2 + 2y^2 + 6z^2 - 42 = 0;$	б)	$2x^2 + 4y^2 = 5z.$
18.	а)	$12x^2 - 4y^2 - 3z^2 + 24 = 0;$	б)	$2y^2 + 3z^2 = 6x.$
19.	а)	$3x^2 + y^2 - 9z^2 + 27 = 0;$	б)	$x^2 - 2y + 4z^2 = 0.$
20.	а)	$27x^2 - 63y^2 + 21z^2 = 0;$	б)	$7x^2 - 3y^2 - 2z = 42.$

2. В GeoGebra online побудуйте тіло, обмежене заданими поверхнями. Наведіть скріншот рисунка.

Варіанти завдань:

1.	$z = 10x^2 + 10y^2 + 1,\ \ z = 1 - 20y.$
2.	$y = 16\sqrt{x},\ \ y = \sqrt{2x},\ \ z = 0,\ \ x + z = 2.$
3.	$x = \sqrt{y},\ \ z = 2x,\ \ z = 0.$
4.	$x^2 + y^2 = 4x,\ \ z = 0,\ \ z = x.$
5.	$x^2 + y^2 = 8y,\ \ z = 0,\ \ y + z = 6.$
6.	$x = 1,\ \ y = 3,\ \ x + 5y + 10z = 20,\ \ x = 0,\ \ y = 0,\ \ z \geq 0.$
7.	$x + 2y + 3z = 6,\ \ 2x = y,\ \ 2x + 3y = 6,\ \ y = 0,\ \ z = 0.$
8.	$4x^2 + 4y^2 = z^2,\ \ x^2 + y^2 = 4,\ \ y \geq 0,\ \ z \geq 0.$
9.	$x^2 + y^2 + z^2 = 16,\ \ x^2 + y^2 \leq 4,\ \ x \geq 0.$
10.	$x^2 + z^2 = y^2,\ \ x \geq 0,\ \ y \geq 0,\ \ z \geq 0.$
11.	$4x^2 + 4y^2 = z^2,\ \ 4x^2 + 4y^2 = 1,\ \ y \geq 0,\ \ z \geq 0.$
12.	$z - 4 = 6x^2 + 6y^2,\ \ z = 4x + 1.$
13.	$z = 4\sqrt{x^2 + y^2},\ \ z = 5 - x^2 - y^2.$
14.	$z - 2 = 6x^2 + 6y^2,\ \ z = 1 - 4y.$

15. $x + y = 2,\ \ y = \sqrt{x},\ \ z = 12y,\ \ z = 0,\ \ x = 0.$

16. $x^2 + y^2 = 6x,\ \ z = 0,\ \ z = 2x.$

17. $x^2 + y^2 = 4y,\ \ z = 0,\ \ y + z = 6.$

18. $x = 1,\ \ y = 3,\ \ x + 2y + 4z = 24,\ \ x = 0,\ \ y = 0,\ \ z \geq 0.$

19. $x + y + z = 8,\ \ x + 2y = 4,\ \ x + 4y = 4,\ \ y = 0,\ \ z = 0.$

20. $4x^2 + 4y^2 = z^2,\ \ x^2 + y^2 = 4,\ \ y \geq 0,\ \ z \geq 0.$

3. Еліптичний параболоїд $x^2 + 2y^2 = 2z$ перетинається з площиною α. Запишіть рівняння проекціє перерізу на площину Oxy. Доведіть, що проекція являє собою еліпс, знайдіть його центр, півосі, ексцентриситет. Запишіть параметричні рівняння перерізу.

Варіанти завдань:

	α:		α:
1.	$2x + 4y + z - 1 = 0;$	**2.**	$-4x + 6y + z - 1 = 0;$
3.	$2x - 4y + z - 1 = 0;$	**4.**	$-4x - 6y + z - 1 = 0;$
5.	$-2x + 4y + z - 1 = 0;$	**6.**	$2x + 4y + z - 3 = 0;$
7.	$-2x - 4y + z - 1 = 0;$	**8.**	$2x - 4y + z - 3 = 0;$
9.	$4x + 2y + z - 1 = 0;$	**10.**	$-2x + 4y + z - 3 = 0;$
11.	$4x - 2y + z - 1 = 0;$	**12.**	$-2x - 4y + z - 3 = 0;$
13.	$-4x + 2y + z - 1 = 0;$	**14.**	$4x + 2y + z - 3 = 0;$
15.	$-4x - 2y + z - 1 = 0;$	**16.**	$-4x + 2y + z - 3 = 0;$
17.	$4x + 6y + z - 1 = 0;$	**18.**	$4x - 2y + z - 3 = 0;$
19.	$4x - 6y + z - 1 = 0;$	**20.**	$-4x + 2y + z - 3 = 0.$

4. Запишіть рівняння конуса, вершина якого знаходиться в початку координат, а напрямна задана системою рівнянь. Побудуйте поверхню та її напрямну лінію в GeoGebra online.

Варіанти завдань:

1.	$\begin{cases}(x-1)^2 + y^2 = 16,\\ z = 2.\end{cases}$	**2.**	$\begin{cases}x^2 + y^2 + z^2 = 9,\\ x + y + z = 2.\end{cases}$
3.	$\begin{cases}x^2 - 2z + 1 = 0,\\ y - z + 1 = 0.\end{cases}$	**4.**	$\begin{cases}x^2 + (y+2)^2 = 16,\\ z = 4.\end{cases}$
5.	$\begin{cases}(x+1)^2 + y^2 = 16,\\ z = 3.\end{cases}$	**6.**	$\begin{cases}x^2 + 2z + 1 = 0,\\ y - z + 1 = 0.\end{cases}$
7.	$\begin{cases}x^2 + y^2 + z^2 = 9,\\ x - y + z = 3.\end{cases}$	**8.**	$\begin{cases}y^2 + (z+3)^2 = 25,\\ x = 2.\end{cases}$

9. $\begin{cases} x^2 + (y-2)^2 = 16, \\ z = 2. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ x - y + z = 2. \end{cases}$

11. $\begin{cases} y^2 - 2z + 1 = 0, \\ x - z + 1 = 0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x^2 + (z+3)^2 = 9, \\ y = 2. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x^2 + (y+2)^2 = 16, \\ z = 3. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ x + y - z = 1. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ x - y + z = 2. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x^2 + (z-4)^2 = 9, \\ y = 2. \end{cases}$

17. $\begin{cases} y^2 + (z-3)^2 = 25, \\ x = 4. \end{cases}$

18. $\begin{cases} z^2 - 2x + 1 = 0, \\ y - z + 1 = 0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x^2 - 2y - 1 = 0, \\ y - z + 1 = 0. \end{cases}$

20. $\begin{cases} (x-2)^2 + (z+3)^2 = 9, \\ y = 4. \end{cases}$

5. Запишіть рівняння поверхні, утвореної обертанняь прямої l навколо заданої осі m. Побудуйте поверхню та її твірну в GeoGebra online, наведіть відповідний скріншот.

Варіанти завдань:

1. l: $\begin{cases} z = 2y, \\ x = 0; \end{cases}$ m: Oy.

2. l: $\begin{cases} x = z, \\ y = 0; \end{cases}$ m: Ox.

3. l: $\begin{cases} z = -y, \\ x = 0; \end{cases}$ m: Oy.

4. l: $\begin{cases} x = -z, \\ y = 0; \end{cases}$ m: Ox.

5. l: $\begin{cases} z = 3y, \\ x = 0; \end{cases}$ m: Oz.

6. l: $\begin{cases} z = y, \\ x = 0; \end{cases}$ m: Oy.

7. l: $\begin{cases} z = -y, \\ x = 0; \end{cases}$ m: Oz.

8. l: $\begin{cases} z = -2y, \\ x = 0; \end{cases}$ m: Oy.

9. l: $\begin{cases} x = y, \\ z = 0; \end{cases}$ m: Oy.

10. l: $\begin{cases} z = y, \\ x = 0; \end{cases}$ m: Oz.

11. l: $\begin{cases} x = -2y, \\ z = 0; \end{cases}$ m: Oy.

12. l: $\begin{cases} z = -y, \\ x = 0; \end{cases}$ m: Oz.

13. l: $\begin{cases} x = y, \\ z = 0; \end{cases}$ m: Ox.

14. l: $\begin{cases} x = 3y, \\ z = 0; \end{cases}$ m: Oy.

15. l: $\begin{cases} x = -3y, \\ z = 0; \end{cases}$ m: Ox.

16. l: $\begin{cases} x = -y, \\ z = 0; \end{cases}$ m: Oy.

17. l: $\begin{cases} x = z, \\ y = 0; \end{cases}$ m: Oz.

18. l: $\begin{cases} x = 2y, \\ z = 0; \end{cases}$ m: Ox.

19. l: $\begin{cases} x = -z, \\ y = 0; \end{cases}$ m: Oz.

20. l: $\begin{cases} x = -y, \\ z = 0; \end{cases}$ m: Ox.

6. Запишіть рівняння циліндра, якщо його твірна паралельна вектору $\bar{a}$, а напрямна задана кривою l. Побудуйте поверхню та її напрямну в GeoGebra online, наведіть відповідний скріншот.

Варіанти завдань:

1. $\bar{a} = (1,1,1);\ l: \begin{cases} y^2 = 4x, \\ z = 0. \end{cases}$

2. $\bar{a} = (-2,1,1);\ l: \begin{cases} x^2 + y^2 = 2x, \\ z = 0. \end{cases}$

3. $\bar{a} = (2,1,1);\ l: \begin{cases} x^2 + z^2 = 4x, \\ y = 0. \end{cases}$

4. $\bar{a} = (1,2,1);\ l: \begin{cases} z^2 = 3x, \\ y = 2. \end{cases}$

5. $\bar{a} = (-2,1,2);\ l: \begin{cases} x^2 + z^2 = 8x, \\ y = -2. \end{cases}$

6. $\bar{a} = (1,2,2);\ l: \begin{cases} x^2 + z^2 = 8x, \\ y = -1. \end{cases}$

7. $\bar{a} = (1,-1,1);\ l: \begin{cases} y^2 = 4x, \\ z = 1. \end{cases}$

8. $\bar{a} = (1,1,2);\ l: \begin{cases} x^2 + z^2 = 6x, \\ y = 1. \end{cases}$

9. $\bar{a} = (2,1,-1);\ l: \begin{cases} x^2 + z^2 = -4x, \\ y = 0. \end{cases}$

10. $\bar{a} = (-1,2,1);\ l: \begin{cases} z^2 = 2x, \\ y = 1. \end{cases}$

11. $\bar{a} = (1,-1,2);\ l: \begin{cases} x^2 + z^2 = -6x, \\ y = 1. \end{cases}$

12. $\bar{a} = (-1,1,2);\ l: \begin{cases} x^2 + y^2 = 6y, \\ z = -1. \end{cases}$

13. $\bar{a} = (1,1,-1);\ l: \begin{cases} y^2 = -2x, \\ z = 0. \end{cases}$

14. $\bar{a} = (2,-1,1);\ l: \begin{cases} y^2 + z^2 = 4y, \\ x = 0. \end{cases}$

15. $\bar{a} = (-1,-1,2);\ l: \begin{cases} x^2 + z^2 = 6z, \\ y = 1. \end{cases}$

16. $\bar{a} = (1,-2,1);\ l: \begin{cases} z^2 = 4x, \\ y = 0. \end{cases}$

17. $\bar{a} = (2,1,2);\ l: \begin{cases} z^2 + y^2 = 6y, \\ x = 1. \end{cases}$

18. $\bar{a} = (-2,1,2);\ l: \begin{cases} x^2 + z^2 = 4x, \\ y = -1. \end{cases}$

19. $\bar{a} = (-1,1,1);\ l: \begin{cases} y^2 = 4x, \\ z = -1. \end{cases}$

20. $\bar{a} = (1,2,-1);\ l: \begin{cases} z^2 = -2x, \\ y = -1. \end{cases}$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Алгебра та аналітична геометрія: курс лекцій / уклад. Ю. Є. Бохонов. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 273 с. URL: http://files.znu.edu.ua/files/Bibliobooks/Inshi82/0062269.pdf.
2. Безущак О. О., Ганюшкін О. Г. Лінійна алгебра (векторні простори) : навч. посіб. Київ : Київський університет, 2023. 219 с.
3. Бондаренко Н. В., Отрашевська В. В. Аналітична геометрія : конспект лекцій. Київ : КНУБА, 2022. 84 с. URL: http://files.znu.edu.ua/files/Bibliobooks/Inshi83/0063420.pdf.
4. Коваль О. О., Поліщук О. Б., Стогній В. І. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Диференціальне числення. Конспект лекцій : навч. посіб. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. 196 с. URL: http://files.znu.edu.ua/files/Bibliobooks/Inshi83/0062493.pdf.
5. Вища математика. Аналітична геометрія та лінійна алгебра. Елементи векторної алгебри : конспект лекцій / О. В. Кузьма, О. В. Суліма, Т. О. Рудик [та ін.]. Київ : КПІ ім. І. Сікорського, 2021. 127 с. URL: http://files.znu.edu.ua/files/Bibliobooks/Inshi78/0058283.pdf.
6. Лінійна алгебра: Курс лекцій : навч. посіб. / уклад. Ю. Є. Бохонов. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 214 с. URL: http://files.znu.edu.ua/files/Bibliobooks/Inshi83/0062492.pdf.
7. Спиця О. Г., Зіновєєв І. В., Манько Н. І.-В. Лінійна алгебра та аналітична геометрія : навч. посіб. Запоріжжя : ЗНУ, 2022. 96 с.
8. Шапочка І. В. Лінійна алгебра : навч. посіб. Ужгород : УЖНУ "Говерла", 2023. 224 с. URL: http://files.znu.edu.ua/files/Bibliobooks/Inshi82/0062266.pdf.
9. Abramson J. Algebra and Trigonometry. 2nd ed. Houston : OpenStax, 2021. 1506 p. URL: http://files.znu.edu.ua/files/Bibliobooks/Inshi83/0062390.pdf.
10. Abramson J. College Algebra. 2nd ed. Houston : OpenStax, 2021. 1101 p. URL: http://files.znu.edu.ua/files/Bibliobooks/Inshi83/0062389.pdf.
11. Abramson J., North S. College Algebra with Corequisite Support. 2nd ed. Houston : OpenStax, 2021. 1282 p. URL: http://files.znu.edu.ua/files/Bibliobooks/Inshi83/0062392.pdf.
12. Andrilli S., Hecker D. Elementary Linear Algebra. 6th ed. London : Academic Press, 2023. 522 p. URL: http://files.znu.edu.ua/files/Bibliobooks/Inshi83/0062388/.
13. Austin D. Activity Workbook for Understanding Linear Algebra. Grand Valley State University, 2023. 315 p. URL: http://files.znu.edu.ua/files/Bibliobooks/Inshi77/0057332.pdf.
14. Austin D. Understanding Linear Algebra. Grand Valley State University, 2023. 498 p. URL: http://files.znu.edu.ua/files/Bibliobooks/Inshi77/0057331.pdf.
15. Axler S. Linear Algebra Done Right. 4th ed. Cham : Springer, 2024. 390 p. (Undergraduate Texts in Mathematics). URL: http://files.znu.edu.ua/files/Bibliobooks/Inshi83/0062396.pdf.
16. Bamberg J., Penttila T. Analytic Projective Geometry. Cambridge : Cambridge University Press, 2023. 462 p. URL: http://files.znu.edu.ua/files/Bibliobooks/Inshi83/0062408.pdf.

17. Bronson R., Costa G. B., Saccoman J. T., Gross D. Linear Algebra: Algorithms, Applications, and Techniques. London : Academic Press, 2023. 516 p. URL: http://files.znu.edu.ua/files/Bibliobooks/Inshi80/0060621/.
18. Kuttler K. A First Course in Linear Algebra. 10th ed. Toronto : Vretta-Lyryx, 2023. 526 p. URL: http://files.znu.edu.ua/files/Bibliobooks/Inshi83/0062395.pdf.
19. Nicholson W. K. Linear Algebra with Applications. Toronto : Vretta-Lyryx, 2023. 562 p. URL: http://files.znu.edu.ua/files/Bibliobooks/Inshi83/0062419.pdf.

Навчальне видання
(українською мовою)

Зіновєєв Ігор Валерійович
Манько Наталія Іванівна-Володимирівна

АЛГЕБРА ТА ГЕОМЕТРІЯ

Методичні рекомендації
до практичних занять для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра
спеціальності «Комп'ютерні науки»

Рецензент *А. М. Андрєєв*
Відповідальний за випуск *С. М. Гребенюк*
Коректор *Н. І.-В. Манько*