МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра фундаментальної та прикладної математики

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА

на тему: «**ЗАСТОСУВАННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ СИНГУЛЯРНИХ КРИВОЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ ВІД ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ**»

Виконала: студентка 2 курсу, групи 8.1113-з
напряму підготовки 111 Математика
(шифр і назва напряму підготовки)
освітньої програми Математика
(назва освітньої програми)
В.С.Хрестян
(ініціали та прізвище)
Керівник доцент кафедри фундаментальної та прикладної математики, к.ф.-м.н., доцент, Д'яченко Н.М.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)
Рецензент доцент кафедри загальної математики, к.ф.-м.н., професор, Стєганцева П.Г.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Запоріжжя – 2024

МІНІСТЕРСТВА ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет математичний

Кафедра Фундаментальної та прикладної математики

Рівень вищої освіти магістр

Спеціальність 111 Математика
(шифр і назва)

Освітня програма Математика

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри фундаментальної та прикладної математики, д.т.н., професор

_____ Гребенюк С.М.
(підпис)

“ ____ ” _____ 2024 р.

З А В Д А Н Н Я

НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ (ПРОЕКТ) СТУДЕНТУ

Хрестян Вікторії Сергіївни
(прізвище, ім’я та по-батькові)

1. Тема роботи Застосування властивостей сингулярних криволінійних інтегралів від функцій комплексної змінної

Керівник роботи Д’яченко Наталія Миколаївна, к.ф.-м.н., доцент
(прізвище, ім’я та по-батькові, науковий ступінь, вчене звання)

Затверджені наказом ЗНУ від « 01 » березня 2024 р. № 384-с

2. Строк подання студентом роботи 20.11.2024

3. Вихідні дані до роботи 1. Постановка задачі.
2. Перелік літератури.
3. Перелік задач до розв’язання

4. Зміст роботи(перелік питань, які потрібно розробити) Дослідження властивостей сингулярних криволінійних інтегралів від функцій комплексної змінної та застосування цих властивостей для розв’язання конкретних задач.

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов’язкових креслень)
Презентація

6. Консультанти розділів роботи (проекту)

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		Завдання видав	Завдання прийняв

7. Дата видачі завдання 02.09.2024

К А Л Е Н Д А Р Н И Й П Л А Н

№	Назва етапів кваліфікаційної роботи (проекту)	Строк виконання етапів роботи (проекту)	Примітка
1.	Розробка плану роботи.	Вересень 2024	
2.	Збір вихідних даних.	Вересень 2024	
3.	Обробка методичних та теоретичних	Вересень 2024	
	джерел.		
4.	Розробка першого і другого розділу.	Вересень – жовтень 2024	
5.	Розробка третього і четвертого розділу.	Жовтень - листопад 2024	
6.	Оформлення і нормоконтроль	Листопад - грудень 2024	
	кваліфікаційної роботи.		
7.	Захист кваліфікаційної роботи.	Грудень 2024	

Студент _____ В.С. Хрестян
(підпис) (ініціали та прізвище)

Керівник роботи _____ Н.М. Д’яченко
(підпис) (ініціали та прізвище)

Нормоконтроль пройдено

Нормоконтролер _____ О.Г Спиця
(підпис) (ініціали та прізвище)

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота магістра «Застосування властивостей сингулярних криволінійних інтегралів від функцій комплексної змінної»: 53 с., 6 рис., 20 джерел, 1 додаток.

ГЛАДКИЙ КОНТУР, ЗІМКНЕНИЙ КОНТУР, ІНТЕГРАЛ ТИПУ КОШІ, КУТОВА ТОЧКА, РОЗІМКНЕНИЙ КОНТУР, СИНГУЛЯРНИЙ ІНТЕГРАЛ, ФОРМУЛИ СОХОЦЬКОГО.

Об’єктом дослідження – сингулярний криволінійний інтеграл та його властивості.

Мета роботи: дослідження властивостей сингулярних інтегралів на контурі комплексної площини та застосування цих властивостей для розв’язання конкретних задач.

Метод дослідження – аналітичний.

У роботі досліджено відомі методи точного обчислення сингулярних криволінійних інтегралів на контурах комплексної площини. Найбільшу увагу приділено застосуванню формул Сохоцького для обчислення таких інтегралів вздовж зімкненого контура. Вивчено правила заміни змінної та інтегрування частинами, наведено приклади застосування цих правил. В останньому розділі роботи розглянуто деякі випадки точного обчислення сингулярних інтегралів вздовж розімкненого контура. Також наведено декілька прикладів обчислення інтеграла вздовж контура з кутовими точками.

SUMMARY

Bachelor’s Qualifying Thesis « Application of the properties of singular curvilinear integrals from complex variable functions» 53 pages, 6 figures, 20 references, 1 supplement.

SMOOTH CONTOUR, CLOSED CONTOUR, INTEGRAL OF CAUCHY TYPE, CORNER POINT, OPEN CONTOUR, SINGULAR INTEGRALS, SOKHOTSKI’S FORMULAS.

Object of the study – a singular curvilinear integral and its properties.

Aim of the study: to study the properties of singular integrals in the complex plane contour and to apply these methods to solve some specific problems.

Method of research: analytical.

In this paper the known methods of exact calculation singular curvilinear integrals along contours of a complex plane are studied The greatest attention is given application of Sokhotski’s formulas for calculation of such integrals along the closed contour. The rule of change of variable and the rule partial integration are studied, some examples of application of these rules are resulted. In last section of this paper some cases of exact calculation singular integrals along the opened contour are considered. There are some examples of calculus of integrals along the contour in the corner points in the paper.

ЗМІСТ

Завдання на кваліфікаційну роботу 2
Реферат 4
Summary 5
Вступ 7
1 Інтеграл типу Коші на контурі 8
1.1 Основні теореми щодо інтеграла типу Коші 8
1.2 Приклади обчислення інтеграла типу Коші 9
2 Сингулярний криволінійний інтеграл 18
2.1 Означення сингулярного криволінійного інтеграла та умови його існування 18
2.2 Формули Сохоцького 19
2.3 Приклади обчислення сингулярного криволінійного інтеграла за допомогою формул Сохоцького на зімкненому гладкому контурі 21
2.4 Приклади обчислення сингулярного криволінійного інтеграла за допомогою формул Сохоцького на зімкненому контурі з кутовими точками 29
3 Основні властивості сингулярного криволінійного інтеграла 32
3.1 Правила заміни змінних та інтегрування частинами в сингулярному криволінійному інтегралі 32
3.2 Приклади застосування правила заміни змінних 35
4 Деякі випадки обчислення сингулярного криволінійного інтеграла на розімкненому контурі 43
4.1 Попередні зауваження 43
4.2 Приклади обчислення сингулярного криволінійного інтеграла на розімкнутому контурі 43
Висновки 48
Перелік посилань 50
Додаток А Функції, які задовольняють умові Гельдера 53

ВСТУП

Деякі задачі математичної фізики, аеродинаміки, дифракції хвиль, теорії пружності, контактної механіки, теорії потенціалу, моделюються сингулярними інтегральними рівняннями, сингулярними інтегралами або крайовими задачами теорії аналітичних функцій. Їх розглянули науковці: Зражевський Г. М., Карлеман Т., Козачок О. П., Мартиняк Р. М., Середницька Х. І., Кутень А., Обшта А., Стащук М., Gakhov F. D. [2–7, 13, 14].

Дослідженням методів розв'язання крайових задач теорії аналітичних функцій, сингулярних інтегральних рівнянь, дослідження властивостей сингулярних операторів займались такі вчені: Герус О. Ф., Begehr H., Caixing Gu., Gakhov F. D., Plaksa S.A., Kud'yavina Y., Ramm Alexander G., Wang X., Du J., Chuan L. H., Mau N. V., Tuan N. M., Li P. R, Ren G. B., Nakazi T., Yamamoto T. [1, 10-17].

Зазначені задачі вимагають обчислення сингулярних інтегралів, яким присвячено дану роботу. Розглянемо точні методи обчислення сингулярних інтегралів на контурі комплексної площини. Ці методи розглянуто в роботах [6, 9, 8, 14].

За мету роботи поставлено – дослідити властивості сингулярних інтегралів на контурі комплексної площини та застосування цих методів для розв'язання конкретних задач.

Для досягнення цієї мети в роботі було досліджено відомі методи точного обчислення сингулярних криволінійних інтегралів на контурах комплексної площини. Найбільшу увагу приділено застосуванню формул Сохоцького для обчислення таких інтегралів вздовж зімкненого контура. Вивчено правила заміни змінної та інтегрування частинами, наведено приклади застосування цих правил. В останньому розділі роботи розглянуто деякі випадки точного обчислення сингулярних інтегралів вздовж розімкненого контура. Також наведено декілька прикладів обчислення інтеграла вздовж контура з кутовою точкою.

1 ІНТЕГРАЛ ТИПУ КОШІ НА КОНТУРІ

1.1 Основні теореми щодо інтеграла типу Коші

Наведені нижче теоретичні відомості відповідають роботам [2, 8, 14].

Нехай γ – деякий спрямлюваний зімкнений контур на площині комплексної змінної z. Ту область яка лежить всередині контура γ, будемо називати внутрішньою і позначати D^+, а доповнюючи до $D^+ \cup \gamma$ область, яка містить нескінченно віддалену точку, будемо називати зовнішньою і позначати D^-.

Із [2, 8, 14] відомо наступне, якщо функція $f(z)$ – функція, аналітична в D^+ і неперервна в $D^+ \cup \gamma$, то за формулою Коші

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(\tau)}{\tau - z}\,d\tau = \begin{cases} f(z), & z \in D^+; \\ 0, & z \in D^-. \end{cases} \tag{1.1}$$

Якщо ж $f(z)$ аналітична в області D^- і неперервна в $D^- \cup \gamma$, то

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(\tau)}{\tau - z}\,d\tau = \begin{cases} f(\infty), & z \in D^+; \\ -f(z) + f(\infty), & z \in D^-. \end{cases} \tag{1.2}$$

В формулах (1.1) та (1.2) будемо розглядати контур, що має додатний напрям оббігу (проти ходу годинникової стрілки). Інтеграл в лівій частині формул (1.1), (1.2), називають інтегралом Коші.

Розглянемо спрямлюваний контур γ, який може бути як зімкненим, так і незімкнений, причому він цілком розташований в обмеженій частині площини, а $\varphi(\tau)$ є функцією, яка задана і неперервна на контурі γ. Тоді інтеграл

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau, \qquad (1.3)$$

називається інтегралом типу Коші. Функція $\varphi(\tau)$ називається його щільністю, а $\frac{1}{\tau - z}$ – ядром [2, 14] .

Відомо [2, 8, 14] , що інтеграл типу Коші є аналітичною функцією на всій комплексній площині, за винятком точок контуру γ.

Розглянемо випадок, коли γ – зімкнений контур, тоді $\Phi(z)$ розпадається на дві аналітичні функції:

– $\Phi^{+}(z)$, визначену в області D^{+},

– $\Phi^{-}(z)$, визначену в області D^{-}.

Відомою є властивість: $\Phi^{-}(\infty) = 0$ [2, 8, 14].

1.2 Приклади обчислення інтеграла типу Коші

Приклад 1.1 Нехай $\gamma = \{t \in \mathbb{C}: \ |t| = 1\}$. Обчислити інтеграл типу Коші:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{(\tau^3 + \tau^2 + 1)d\tau}{(9\tau^2 + 1)(\tau - z)}.$$

Розв'язання. Щільністю даного інтеграла є функція $f(\tau) = \frac{\tau^3+\tau^2+1}{9\tau^2+1}$. Подовжимо її на всю комплексну площину

$$f(z) = \frac{z^3 + z^2 + 1}{9z^2 + 1}.$$

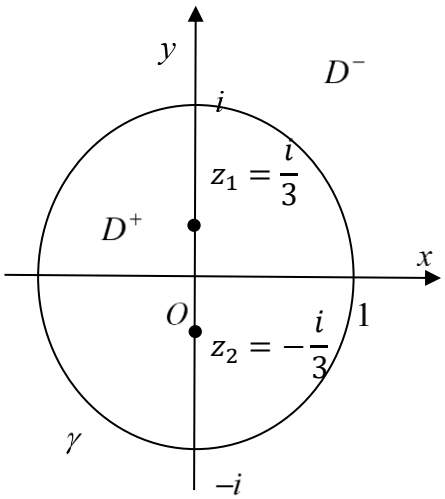


Рисунок 1.1

Особливими точками цієї функції є ті, де знаменник $f(z)$ обертається в нуль, що зображено на рисунку 1.1 , тобто

$$9z^2 + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; z_{1,2} = \pm\frac{i}{3}.$$

Крім того, оскільки $f(\infty) = \infty$, то і нескінченно віддалена точка є особливою. Точки $z_{1,2} = \pm\frac{1}{3}$ належать області D^+, а $z_3 = \infty$ – D^- (рис. 1.1). Виділимо цілу частину із раціонального дробу $\frac{z^3+z^2+1}{9z^2+1}$:

$$\frac{z^3 + z^2 + 1}{9z^2 + 1} = \frac{1}{9}z + \frac{1}{9} + \frac{-z + 8}{9(9z^2 + 1)}.$$

Тоді даний інтеграл допускає подання:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{(\tau^3 + \tau^2 + 1)d\tau}{(9\tau^2 + 1)(\tau - z)} = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{\left(\frac{1}{9}\tau + \frac{1}{9}\right)d\tau}{4(\tau - z)} -$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{(-\tau + 8)d\tau}{9(9\tau^2 + 1)(\tau - z)}.$$

Інтеграл $\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{\left(\frac{1}{9}\tau+\frac{1}{9}\right)d\tau}{4(\tau-z)}$ має функцію щільності $f_1(\tau) = \frac{1}{9}z + \frac{1}{9}$, яка є крайовим значенням функції $f_1(z) = \frac{1}{9}\tau + \frac{1}{9}$. Функція $f_1(z)$ має одну особливу точку $z_3 = \infty$, яка належить області D^-, тому є аналітичною в області D^+. Інтеграл обчислимо за допомогою формули (1.1):

$$\Phi_1(z) = \begin{cases} \frac{1}{9}z + \frac{1}{9}, & z \in D^+; \\ 0 \;\;, & z \in D^-. \end{cases}$$

Інтеграл

$$\Phi_2(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{(-\tau+8)d\tau}{9(9\tau^2+1)(\tau-z)}\ .$$

має функцію щільності $f_2(\tau) = \frac{-\tau+28}{9(9\tau^2+1)}$, яка є крайовим значенням функції $f_2(z) = \frac{-z+8}{9(9z^2+1)}$. Функція $f_2(z)$ має дві особливі точки $z_{1,2} = \pm\frac{i}{3}$, які належать області D^+, тому є аналітичною в області D^-. Інтеграл обчислимо за допомогою формули (1.2), враховуючи, що $f_2(\infty) = 0$:

$$\Phi_2(z) = \begin{cases} 0, & z \in D^+; \\ 0 - \dfrac{-z+8}{9(9z^2+1)}\ , & z \in D^-. \end{cases}$$

Отже, отримаємо:

$$\Phi(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{9}\ z + \dfrac{1}{9}\ , & z \in D^+; \\ \dfrac{-z+8}{9(9z^2+1)}\ , & z \in D^-. \end{cases}$$

Приклад 1.2 Нехай $\gamma = \{t \in \mathbb{C}: \ \ |t| = 1\}$. Обчислити інтеграли типу Коші:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{(2\tau+5)d\tau}{(2\tau+1)(\tau-3)(\tau-z)}.$$

Розв'язання. Для даного інтеграла типу Коші щільністю є функція $f(\tau) = \frac{(2\tau+5)}{(2\tau+1)(\tau-3)}$, з подовженням на всю площину вигляду $f(z) = \frac{(2z+5)}{(2z+1)(z-3)}$. Знайдемо особливі точки функції $f(z)$:

$$(2z+1)(z-3) = 0 \ \Leftrightarrow\ z_1 = -\tfrac{1}{2} \in D^+, \ \ z_2 = 3 \in D^-.$$

Оскільки особливі точки належать як D^+, так і D^-, то подамо функцію $f(z)$ сумою елементарних дробів:

$$f(z) = \frac{(2z+5)}{(2z+1)(z-3)} = -\frac{8}{7}\cdot\frac{1}{2z+1} + \frac{11}{7}\cdot\frac{1}{z-3}.$$

Оскільки функція $f_1(z) = -\frac{8}{7}\cdot\frac{1}{2z+1}$ аналітична в області D^- і $f_1(\infty) = 0$, то за формулою (1.2)

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{-8d\tau}{7(2\tau+1)(\tau-z)} = \begin{cases} 0, & z \in D^+; \\ 0 + \dfrac{8}{7(2z+1)}, & z \in D^-. \end{cases}$$

Функція $f_1(z) = \frac{4}{7}\cdot\frac{1}{z-3}$ аналітична в області D^+, тому застосуємо формулу (1.1)

$$\Phi_2(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{4d\tau}{7(\tau-3)(\tau-z)} = \begin{cases} \dfrac{4}{7(z-3)}, & z \in D^+; \\ 0, & z \in D^-. \end{cases}$$

Отже,

$$\Phi(z) = \begin{cases} \dfrac{4}{7(z-3)}, & z \in D^+; \\ \dfrac{8}{7(2z+1)}, & z \in D^-. \end{cases}$$

Приклад 1.3 Нехай $\gamma = \{t \in \mathbb{C}: \quad |t| = 2\}$. Обчислити інтеграли типу Коші:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{\tau d\tau}{sin\,\tau(\tau-z)}.$$

Розв'язання. Знайдемо особливі точки функції щільності, подовженої на всю площину$f(z) = \frac{z}{\sin z}$:

$$\sin z = 0 \;\Leftrightarrow\; z_0 = 0 \in D^+, \quad z_n = \pi n \in D^-,\; n = \pm 1,\; \pm 2, \ldots.$$

Внаслідок відомої першої істотної границі $\lim\limits_{z\to 0}\left(\frac{\sin z}{z}\right) = 0$, точка $z_0 = 0$ є усувною особливою точкою, а функція $g(z) = \begin{cases} \frac{z}{\sin z}, & z \neq 0; \\ 1, & z = 0, \end{cases}$ є аналітичною в області D^+, то внаслідок (1.1)

$$\Phi(z) = \begin{cases} g(z), & z \in D^+; \\ 0, & z \in D^-; \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{z}{\sin z}, & z \in D^+\{0\}; \\ 1, & z = 0; \\ 0, & z \in D^-. \end{cases}$$

Приклад 1.4 Обчислити інтеграли типу Коші [3]:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \left[\frac{\tau^3 + i\tau^2 + 9\tau - 4i}{\tau^4 - 5\tau^2 - 36} + \frac{ln\frac{\tau-4}{\tau-3}}{\tau^2 - 9} - \frac{e^{\frac{1}{\tau}} + sin\frac{1}{\tau-2}}{\tau^2 + 4}\right]\frac{d\tau}{\tau - z}.$$

де L коло, $L = \left\{t \in \mathbb{C}\colon |t| = \frac{5}{2}\right\}$.

Розв'язання. Позначимо

$$f_1(\tau) = \frac{\tau^3 + i\tau^2 + 9\tau - 4i}{\tau^4 - 5\tau^2 - 36}, \quad f_2(\tau) = \frac{ln\frac{\tau-4}{\tau-3}}{\tau^2 - 9},$$

$$f_3(\tau) = \frac{e^{\frac{1}{\tau}} + sin\frac{1}{\tau-2}}{\tau^2 + 4}.$$

Розглянемо першу з цих функцій $f_1(\tau)$, як щільність інтеграла

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \left[\frac{\tau^3 + i\tau^2 + 9\tau - 4i}{\tau^4 + 5\tau^2 - 36}\right]\frac{d\tau}{\tau - z}.$$

Відповідне до функції $f_1(\tau)$ подовження

$$f_1(z) = \frac{z^3 + iz^2 + 9z - 4i}{z^4 + 5z^2 - 36}.$$

має особливі точки, що є розв'язками рівняння

$$z^4 + 5z^2 - 36 = 0.$$

Це точки $z_{1,2} = \pm 2$, що належать областіD^+, таа $z_{3,4} = \pm 3i$, що належать D^-.

Знайдемо розклад функції $f_1(z)$ в суму елементарних дробів:

$$f_1(z) = \frac{z^3 + iz^2 + 9z - 4i}{z^4 + 5z^2 - 36} = \frac{z(z^2 + 9) + i(z^2 - 4)}{(z^2 - 4)(z^2 + 9)} = \frac{z}{z^2 - 4} + \frac{i}{z^2 + 9}.$$

Позначимо:

$$f_{1,1}(z) = \frac{z}{z^2 - 4},$$

звідси $z_{1,2} = \pm 2 \in D^+$ – особливі точки, з чого випливає, що $f_{11}(z)$ – аналітична в області D^-; для функції

$$f_{1,2}(z) = \frac{i}{z^2 + 9},$$

точки $z_{3,4} = \pm 3i \in D^-$ є особливими, з чого випливає, що $f_{1,2}(z)$ – аналітична в D^+. Отже,

$$\Phi_1(z) = \begin{cases} 0 + \dfrac{i}{z^2+9}, z \in D^+; \\ 0 + \left(-\dfrac{z}{z^2-4}\right), z \in D^-. \end{cases}$$

Розглянемо тепер

$$\Phi_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \left[\frac{ln\dfrac{\tau-4}{\tau-3}}{\tau^2-9} \right] \frac{d\tau}{\tau - z};$$

$$f_2(z) = \frac{ln\dfrac{z-4}{z-3}}{z^2-9}.$$

Знайдемо особливі точки для функції $f_2(z)$: $z = 4, z = 3, z = -3 \in D^-$, тоді $f_2(z)$ – аналітична в D^+. Отже,

$$\Phi_2(z) = \begin{cases} \dfrac{ln\dfrac{z-4}{z-3}}{z^2-9}, & z \in D^+; \\ 0, & z \in D^-. \end{cases}$$

Розглянемо третій інтеграл

$$\Phi_3(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \left[\frac{e^{\frac{1}{\tau}} + sin\dfrac{1}{\tau-2}}{\tau^2+4} \right] \frac{d\tau}{\tau - z},$$

$$f_3(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}} + sin\dfrac{1}{z-2}}{z^2+4} = \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}}{z^2+4} + \frac{\sin\dfrac{1}{z-2}}{z^2+4}.$$

Оскільки функція $f_{3,1}(z)=\frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2+4}$ має особливі точки $z=0, z=\pm 2i$ які лежать в D^+ , а

$$f_{3,1}(\infty)=\lim_{z\to\infty} f_{3,1}(z)=\lim_{z\to\infty} e^{\frac{1}{z}}\cdot\frac{1}{z^2+4}=\lim_{z\to\infty} e^{\frac{1}{z}}\cdot\lim_{z\to\infty}\frac{1}{z^2+4}=1\cdot 0=0,$$

то $f_{3,1}(z)$ – аналітична в D^- . Функція $f_{3,2}(z)=\frac{sin\frac{1}{z-2}}{z^2+4}$ має особливі точки $z=\pm 2i,\ z=2\in D^+$, а

$$f_{3,2}(\infty)=\lim_{z\to\infty} f_{3,2}(z)=\lim_{z\to\infty}\frac{1}{z^2+4}\cdot\lim_{z\to\infty} sin\frac{1}{z-2}=0\cdot 0=0,$$

тому $f_{3,2}(z)$ – аналітична в D^-.

У наслідок формул (1.1), (1.2) маємо

$$\Phi_3(z)=\begin{cases}0, z\in D^+;\\ -\dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2+4}-\dfrac{sin\frac{1}{z-2}}{z^2+4}, z\in D^-.\end{cases}$$

Отже, функція $\Phi(z)$ набуває вигляду

$$\Phi(z)=\begin{cases}\dfrac{i}{z^2+9}+\dfrac{ln\frac{z-4}{z-3}}{z^2-9}, z\in D^+;\\ -\dfrac{z}{z^2-4}-\dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2+4}-\dfrac{sin\frac{1}{z-2}}{z^2+4}.\end{cases}$$

Звідси

$$\Phi^{+}(z) = \frac{i}{z^2+9} + \frac{ln\frac{z-4}{z-3}}{z^2-9},$$

$$\Phi^{-}(z) = -\frac{z}{z^2-4} - \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2+4} - \frac{sin\frac{1}{z-2}}{z^2+4}.$$

2 СИНГУЛЯРНИЙ КРИВОЛІНІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ

2.1 Означення сингулярного криволінійного інтеграла та умови його існування

Матеріал цього підрозділу є викладенням робіт [2, 8, 14].

Нехай $\gamma = \cup\, ab$ – спрямлюваний контур, а t, τ – його точки, причому tне збігається з кінцями a, b контура. Функція щільності $\phi(\tau)$ неперервна на контурі. Розглянемо особливий криволінійний інтеграл [2, 14]

$$\int_{\gamma} \frac{\phi(\tau)}{\tau - t} d\tau. \tag{2.1}$$

Проведемо з точки t контура γ як із центру коло радіуса ρ, і нехай t_1, t_2 – точки перетину цього кола з кривою γ. Будемо вважати, що радіус ρ настільки малий, що побудоване коло не має інших точок перетину з кривою γ. Позначимо частину контура γ, яка вирізається колом, через l і візьмемо інтеграл вздовж дуги,що залишається. Тоді інтеграл $\int_{\frac{\gamma}{l}} \frac{\phi(\tau)}{\tau - z} d\tau$ є вже власним .

Якщо існує границя інтеграла $\int_{\frac{\gamma}{l}} \frac{\phi(\tau)}{\tau - z} d\tau$ при $\rho \to 0$, то вона називається головним значенням за Коші особливого інтеграла (2.1), а сам інтеграл називають сингулярним інтегралом Коші.

Відомо [2, 14], що сингулярний інтеграл Коші існує, якщо функція щільності $\phi(\tau)$ задовольняє умову Гельдера на контурі γ.

Випишемо у цьому підрозділі також відомі [2, 14] формули, які будемо застосовувати в роботі. Розглянемо точку $t \in \gamma$, що не збігається з кінцями $a,\ b$ контура. Значення наступного інтеграла в точці t гладкості :

$$\int_{\gamma} \frac{d\tau}{\tau - t} = ln \frac{b - t}{a - t} + i\pi, \tag{2.2}$$

а в кутовій точці –

$$\int_{\gamma} \frac{d\tau}{\tau - t} = ln \frac{b - t}{a - t} + i\alpha, \tag{2.3}$$

де $\alpha -$ кут між двома дотичними до спрямлюваного зімкненого контура L в кутовій точці t, який обчислюється зліва від контура.

Якщо $a = b$ (контур γ замкнений), то в точках гладкості

$$\oint_{\gamma} \frac{d\tau}{\tau - t} = i\pi, \tag{2.4}$$

а в кутових точках контура γ

$$\oint_{\gamma} \frac{d\tau}{\tau - t} = i\alpha. \tag{2.5}$$

2.2 Формули Сохоцького

Розглянемо зімкнений спрямлюваний контур γ. Розглянемо функції $\Phi^{+}(z)$ та $\Phi^{-}(z)$, що ввідповідають функції-інтегралу типу Коші $\Phi(z)$ в точках z, що лежать в D^{+} та D^{-} відповідно. Означимо граничні значення цих функцій в точці $t \in \gamma$

$$\Phi^{\pm}(t) = \lim_{\substack{z \to t \\ z \in D^{\pm}}} \Phi^{\pm}(z). \tag{2.6}$$

Нехай функція $\phi(\tau)$ задовольняє умову Гельдера, γ – гладкий зімкнений контур. Тоді справедливі формули [2, 14]:

$$\Phi^+(t) = \frac{1}{2}\phi(t) + \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{\phi(\tau)}{\tau - z}\,d\tau; \tag{2.7}$$

$$\Phi^-(t) = -\frac{1}{2}\phi(t) + \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{\phi(\tau)}{\tau - z}\,d\tau; \tag{2.8}$$

Формули (2.7), (2.8) називаються формулами Сохоцького. Цим формулам можна надати інакшого вигляду [14]:

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \phi(t); \tag{2.9}$$

$$\Phi^+(t) + \Phi^-(t) = \frac{1}{\pi i}\cdot\oint_\gamma \frac{\phi(\tau)}{\tau - z}\,d\tau \ \ ; \tag{2.10}$$

Окрім того, формули Сохоцького (2.7)–(2.10) відповідають точкам гладкості контура γ. В кутових точках формули набувають вигляду

$$\Phi^+(t) = \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right)\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau; \tag{2.11}$$

$$\Phi^-(t) = -\frac{\alpha}{2\pi}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau. \tag{2.12}$$

Тут, як і раніше, $\alpha -$ кут між відповідними дотиними.

2.3 Приклади обчислення сингулярного криволінійного інтеграла за допомогою формул Сохоцького на зімкненому гладкому контурі

Приклад 2.1 Обчислити сингулярний криволінійний інтеграл [3]

$$\Phi(t)=\frac{1}{2\pi i}\oint_L\left[\frac{\tau^3+i\tau^2+9\tau-4i}{\tau^4-5\tau^2-36}+\frac{ln\frac{\tau-4}{\tau-3}}{\tau^2-9}-\frac{e^{\frac{1}{\tau}}+sin\frac{1}{\tau-2}}{\tau^2+4}\right]\frac{d\tau}{\tau-t},$$

де L – коло, а $|z|=\frac{5}{2}$.

Розв'язання. Для сингулярного криволінійного інтеграла знайдемо граничні значення інтеграла типу Коші із прикладу 1.4. Користуючись знайденими обчисленнями, маємо

$$\Phi^+(\mathrm{t})=\lim_{\mathrm{z}\to\mathrm{t}}\Phi^+(\mathrm{z})=\lim_{\mathrm{z}\to\mathrm{t}}\frac{i}{z^2+9}+\frac{ln\frac{z-4}{z-3}}{z^2-9},$$

Функція $g_1(z)=\frac{i}{z^2+9}+\frac{ln\frac{z-4}{z-3}}{z^2-9}$, має розриви в точках $z=\pm 3,\ \ z=\pm 3, z=4$. Ці точки не належать контуру L. Функція $\varphi_1(z)=ln\frac{z-4}{z-3}$ визначена своєю певною гілкою (у даному випадку – нульовою гілкою) в комплексній площині з розрізом, що сполучає точки $z=3$ і $z=4$ і не перетинає контур L. Така функція $\varphi_1(z)$, крім того, неперервна на L. Отже, функція $g_1(z)$ неперервна на L,тому при $t\in L$

$$\lim_{z\to t}g_1(z)=g_1(t).$$

Звідси випливає, що

$$\Phi^+(t)=\frac{i}{t^2+9}+\frac{ln\frac{t-4}{t-3}}{t^2-9}.$$

Відповідно до (2.6) знайдемо граничне значення для функції $\Phi^-(z)$:

$$\Phi^-(t) = \lim_{z\to t}\Phi^-(z) = \lim_{z\to t}\left(-\frac{z}{z^2-4} - \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2+4} - \frac{sin\frac{1}{z-2}}{z^2+4}\right).$$

Функція $g_2(z) = -\frac{z}{z^2-4} - \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2+4} - \frac{sin\frac{1}{z-2}}{z^2+4}$ має розриви в точках $z = \pm 2i,\ z = 0,$ $z = \pm 2$, які не належать контуру L, тому $g_2(z)$ неперервна на L. Отже,

$$\lim_{z\to t} g_2(z) = g_2(t).$$

Звідки випливає, що

$$\Phi^-(t) = -\frac{t}{t^2-4} - \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^2+4} - \frac{sin\frac{1}{t-2}}{t^2+4}.$$

Тоді за формулами Сохоцького (2.10):

$$\Phi(t) = \frac{1}{2}(\Phi^+(t) + \Phi^-(t)) = -\frac{t}{2(t^2-4)} + \frac{i}{t^2+9} + \frac{ln\frac{t-2}{t-3}}{2(t^2-9)} - \frac{e^{\frac{1}{t}} + sin\frac{1}{t-2}}{2(t^2+4)}.$$

Приклад 2.2 Нехай $\gamma = \{t \in C:\ |t| = 1\}$. Обчислити сингулярний інтеграл

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{(\tau^3+\tau^2+1)d\tau}{(9\tau^2+1)(\tau-t)}$$

Розв'язання. Інтеграл типу Коші $\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{(\tau^3+\tau^2+1)d\tau}{(9\tau^2+1)(\tau-t)}$ обчислено у прикладі 1.1:

$$\Phi(z)=\begin{cases}\frac{1}{9}\ z+\frac{1}{9}\,, & z\in D^+;\\ \frac{z-8}{9(9z^2+1)}\ , & z\in D^-.\end{cases}$$

За формулами (2.6) знайдемо граничне значення $\Phi^+(t)$ цього інтеграла

$$\Phi^+(\mathrm{t})=\lim_{\mathrm{z}\to\mathrm{t}}\Phi^+(\mathrm{z})=\lim_{\mathrm{z}\to\mathrm{t}}\left(\frac{1}{9}\ z+\frac{1}{9}\right).$$

Застосовано властивість неперервності функції під знаком границі на контурі. Отже,

$$\Phi^+(\mathrm{t})=\frac{1}{9}\ t+\frac{1}{9}.$$

Аналогічно

$$\Phi^-(\mathrm{t})=\lim_{\mathrm{z}\to\mathrm{t}}\Phi^-(\mathrm{z})=\lim_{\mathrm{z}\to\mathrm{t}}\frac{z-8}{9(9z^2+1)}=\frac{t-8}{9(9t^2+1)},$$

внаслідок неперервності функції $\frac{z-8}{9(9z^2+1)}$ на контурі, що пов'язано з тим, що її особливі точки $z=\pm\frac{1}{3}i$ не належать контуру.

За формулою Сохоцького (2.10) матимемо:

$$\Phi(t)=\frac{1}{2}[\Phi^+(t)+\Phi^-(t)]=\frac{1}{18}\ t+\frac{1}{18}+\frac{t-8}{18(9t^2+1)}.$$

Приклад 2.3 Нехай $\gamma = \{t \in \mathbb{C}: \ |t| = 1\}$. Обчислити сингулярний інтеграл

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{(2\tau + 5)d\tau}{(2\tau + 1)(\tau - 3)(\tau - t)}.$$

Розв'язання. Інтеграл типу Коші $\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{(2\tau+5)d\tau}{(2\tau+1)(\tau-3)(\tau-z)}$ обчислено у прикладі 1.2:

$$\Phi(z) = \begin{cases} \dfrac{4}{7(z-3)}, & z \in D^+; \\ \dfrac{8}{7(2z+1)}, & z \in D^-. \end{cases}$$

Застосуємо співвідношення (2.6), щоб отримати граничне значення $\Phi^+(t)$ цього інтеграла дорівнює

$$\Phi^+(t) = \lim_{z \to t} \Phi^+(z) = \lim_{z \to t} \frac{4}{7(z-3)}.$$

Функція $\frac{4}{7(z-3)}$ неперервна на цьому контурі, оскільки має особливу точку $z = 3$, що не лежить на контурі, тож граничне значення дорівнюватиме $\Phi^+(t) = \frac{4}{7(t-3)}$.

Аналогічно

$$\Phi^-(t) = \lim_{z \to t} \Phi^-(z) = \lim_{z \to t} \left(\frac{8}{7(2z+1)} \right) = \frac{8}{7(2t+1)}.$$

Формула Сохоцького (2.10) дає:

$$\Phi(t) = \frac{1}{2}[\Phi^+(t) + \Phi^-(t)] = \frac{4}{14(t-3)} + \frac{8}{14(2t+1)}.$$

Приклад 2.4 Нехай $\gamma = \{t \in \mathbb{C}: \ |t| = 1\}$. Обчислити сингулярний інтеграл

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{\tau d\tau}{\sin\tau(\tau - t)}.$$

Розв'язання. У прикладі 1.3 обчислено інтеграл типу Коші $\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{\tau d\tau}{\sin\tau(\tau - z)}$, де отрмано:

$$\Phi(z) = \begin{cases} g(z), & z \in D^+; \\ 0, & z \in D^-; \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{z}{\sin z}, & z \in D^+\{0\}; \\ 1, & z = 0; \\ 0, & z \in D^-. \end{cases}$$

Тому граничні значення дорівнюють:

$$\Phi^+(t) = \lim_{z\to t}\Phi^+(z) = \lim_{z\to t}\begin{cases} \dfrac{z}{\sin z}, & z \in D^+\{0\}; \\ 1, & z = 0; \end{cases} = \lim_{z\to t}\frac{z}{\sin z}.$$

Оскільки функція $g(z) = \frac{z}{\sin z}$ під знаком границі неперервна на контурі, то $\Phi^+(t) = \frac{t}{\sin t}$. Аналогічно

$$\Phi^-(t) = \lim_{z\to t}\Phi^-(z) = \lim_{z\to t} 0 = 0.$$

За формулою Сохоцького матимемо:

$$\Phi(t) = \frac{1}{2}[\Phi^+(t) + \Phi^-(t)] = \frac{t}{2\sin t}.$$

Приклад 2.5 Обчислити інтеграл

$$\frac{1}{\pi i}\oint_{|\tau|=1} \frac{\tau^2}{\tau^3 - 1}\, d\tau.$$

Розв'язання. Особливі точки функції $f_1(\tau) = \frac{\tau^2}{\tau^3-1}$ знайдемо, розв'язуючи рівняння

$$\tau^3 = 1.$$

Застосуємо формулу Муавра

$$\tau = \sqrt[3]{1}, \quad \tau_k = |1|\left(cos\frac{arg\,1 + 2\pi k}{3} + i\,sin\frac{arg\,1 + 2\pi k}{3}\right).$$

Тоді

$$\tau_0 = 1, \quad \tau_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \tau_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Розкладемо дріб $\frac{\tau^2}{\tau^3-1}$ на прості дроби:

$$\frac{\tau^2}{\tau^3 - 1} = \frac{\tau^2}{(\tau - 1)\left(\tau - \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\left(\tau - \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3}}{\tau - 1} + \frac{\frac{1}{3}}{\tau - \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} + \frac{\frac{1}{3}}{\tau - \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}.$$

Обчислимо інтеграл від кожної із цих функцій. Щоб знайти перший

$$\frac{1}{\pi i}\oint_{|\tau|=1} \frac{\frac{1}{3}}{\tau - 1}\, d\tau,$$

обчислимо спочатку інтеграл типу Коші

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\tau|=1} \frac{\frac{1}{3}}{\tau - z}\, d\tau = \begin{cases} \frac{1}{3}, & z \in D^+; \\ 0\,, & z \in D^-. \end{cases}$$

Тут ми застосували той факт, що функція $f(z) = \frac{1}{3}$ аналітична в D^+, а також формулу (1.1). Граничні значення інтеграла типу Коші дорівнюють

$$\Phi^+(t) = \frac{1}{3}, \quad \Phi^-(t) = 0.$$

Отже, за формулою Сохоцького (2.10)

$$\Phi(t) = \frac{1}{\pi i}\oint_{|\tau|=1} \frac{\frac{1}{3}}{\tau - t}\, d\tau = \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}.$$

Оскільки точка $t = 1$ належать контуру, а значення функції $\Phi(t)$ не залежить від t, то

$$\Phi(t) = \frac{1}{\pi i}\oint_{|\tau|=1} \frac{\frac{1}{3}}{\tau - 1}\, d\tau = \frac{1}{3}.$$

Обчислення сингулярного інтеграла від простого дробу, можна було провести без застосування формули Сохоцького, а з використанням формули (2.4):

$$\frac{1}{\pi i}\oint_{|\tau|=1} \frac{\frac{1}{3}}{\tau - 1}\, d\tau = \frac{1}{\pi i}\cdot\frac{1}{3}\cdot \pi i = \frac{1}{3}.$$

Інтеграли від другої і третьої простих дробів обчислюємо аналогічно з використанням або формули Сохоцького, або формули (2.5). Отримаємо:

$$\oint_{|\tau|=1} \frac{\frac{1}{3}d\tau}{\tau - \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{1}{3}; \qquad \oint_{|\tau|=1} \frac{\frac{1}{3}d\tau}{\tau - \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{1}{3}.$$

Підсумовуючи отримані результати, одержимо:

$$\frac{1}{\pi i}\oint_{|\tau|=1} \frac{\tau^2}{\tau^3 - 1}\, d\tau = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1.$$

Зауваження 2.1 При розв’язанні прикладу 2.5 сингулярні інтеграли можна було обчислювати двома способами: за формулою Сохоцького або за формулою (2.4). В прикладах 2.2 і 2.3 функціями щільності є раціональні функції $R(\tau)$. В цих прикладах ми застосовували формулу Сохоцького. Якщо функції $R(\tau)\cdot\frac{1}{\tau - t}$ подати у вигляді суми цілої частини і правильних дробів, однією з яких є $\frac{1}{\tau - t}$, то інтеграли від отриманих функцій можна обчислити за допомогою формули (2.4).

2.4 Приклади обчислення сингулярного криволінійного інтеграла за допомогою формул Сохоцького на зімкненому контурі з кутовими точками

Для обчислення сингулярних інтегралів в кутових точках можна застосовувати формули (2.5) або формули Сохоцького (2.11) і (2.12), наведені вище. Перепишемо їх тут для зручності:

$$\Phi^+(t) = \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right)\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau; \tag{2.13}$$

$$\Phi^-(t) = -\frac{\alpha}{2\pi}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau. \tag{2.14}$$

Тут α – кут між двома дотичними до спрямлюваного зімкненого контура L в кутовій точці t, який обчислюється зліва від контура.

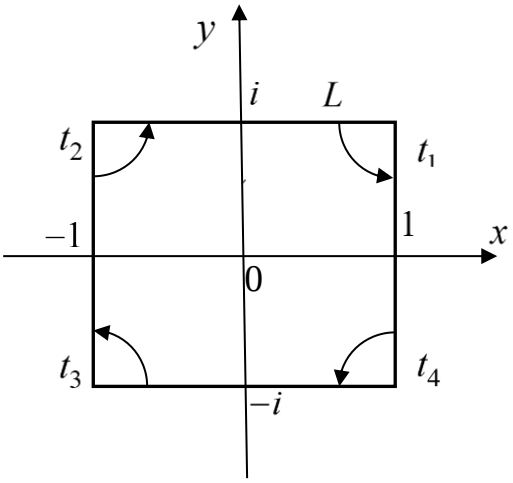


Рисунок 2.1

Приклад 2.5 Нехай контуром L є квадрат, що зображено на рисунку 2.1. Обчислити сингулярний інтеграл

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{4\tau^2}{4\tau^2 + 1}.$$

Розв'язання. Інтеграл типу Коші існує для спрямлюваного контура L Для застосування формул Сохоцького спочатку обчислимо інтеграл типу Коші за формулою (1.1) в припущенні, що $z \notin L$:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{4\tau^2}{4\tau^2 + 1}\cdot\frac{d\tau}{\tau - z} = \begin{cases} 1, & z \in D^+; \\ \dfrac{1}{4z^2 + 1}, & z \in D^-. \end{cases}$$

Граничні значення інтеграла типу Коші дорівнюють:

$$\Phi^+(t) = 1,\ \ \Phi^-(t) = \frac{1}{4t^2+1}.$$

Застосуємо формулу Сохоцького (2.10) в точках гладкості контура L, тобто в точках $t \neq \pm 1 \pm i$:

$$\Phi(t) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{4t^2+1}\right).$$

Розглянемо тепер формули Сохоцького (2.13), (2.14) в кутових точках контура $t_{\text{кут}} = \pm 1 \pm i$:

Додамо формули (2.13) і (2.14), з яких виразимо сингулярний інтеграл:

$$\Phi^+\left(t_{\text{кут}}\right) + \Phi^-\left(t_{\text{кут}}\right) = \left(1 - \frac{\alpha_{\text{кут}}}{\pi}\right)\varphi\left(t_{\text{кут}}\right) + \frac{1}{\pi i}\oint_\gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t_{\text{кут}}}\,d\tau,$$

$$\Phi\left(t_{\text{кут}}\right) = \frac{1}{2}\left[\Phi^+\left(t_{\text{кут}}\right) + \Phi^-\left(t_{\text{кут}}\right) - \left(1 - \frac{\alpha_{\text{кут}}}{\pi}\right)\varphi\left(t_{\text{кут}}\right)\right].$$

У даному випадку відрахування величини кута в кутових точках розглядається при оббігу контура в додатному напряму (проти годинникової стрілки). При цьому область, що обмежує контур залишається зліва, так що, кутові точки дають кут $\frac{\pi}{2}$ (рис. 2.1).

Спочатку розглянемо точку $t_1 = 1 + i$.

$$\Phi(t_1) = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{4(1+i)^2+1} - \left(1 - \frac{1}{2}\right)\frac{4(1+i)^2}{4(1+i)^2+1}\right] = \frac{17-6i}{65}.$$

Аналогічно для точок $t_2 = -1 + i,\ \ t_3 = -1 - i,\ \ t_4 = 1 - i.$

$$\Phi(t_2) = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{4(-1+i)^2+1} - \left(1 - \frac{1}{4}\right)\frac{4(-1+i)^2}{4(-1+i)^2+1}\right] = \frac{17+6i}{65};$$

$$\Phi(t_3)=\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{4(-1-i)^2+1}-\left(1-\frac{1}{4}\right)\frac{4(-1-i)^2}{4(-1-i)^2+1}\right]=\frac{17-6i}{65};$$

$$\Phi(t_4)=\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{4(1-i)^2+1}-\left(1-\frac{1}{4}\right)\frac{4(1-i)^2}{4(1-i)^2+1}\right]=\frac{17+6i}{65}.$$

Відповідь. Значення інтеграла в точках гладкості дорівнює $\Phi(t)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{4t^2+1}\right)$, у кутових точках $\Phi(\pm1\pm i)=\frac{17-6i}{65}$, $\Phi(\mp1\pm i)=\frac{17+6i}{65}$.

3 ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ СИНГУЛЯРНОГО КРИВОЛІНІЙНОГО ІНТЕГРАЛА

3.1 Правила заміни змінних та інтегрування частинами в сингулярному криволінійному інтегралі

Теорема 3.1 (правило заміни змінних) [14] Якщо функція $\tau = \alpha(\zeta)$ має неперервну першу похідну $\alpha'(\zeta)$, ніде не обертаються в нуль, і перетворює контур L взаємно-однозначно в контур L', то

$$\oint_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = \oint_{L'} \frac{\varphi[\alpha(\zeta)]\alpha'(\zeta)}{\alpha(\zeta) - \alpha(\xi)} d\zeta, \tag{3.1}$$

тут $t = \alpha(\xi)$.

Доведення [14]. Виріжемо з контура L' достатньо мале коло з центром в точці ξ дугу l'. Нехай її кінці будуть ξ_1 і ξ_2, а відповідні точки контура $L - t_1$ і t_2. Визначимо головне значення перетвореного інтеграла

$$\oint_L \frac{\varphi[\alpha(\zeta)]\alpha'(\zeta)}{\alpha(\zeta) - \alpha(\xi)} d\zeta = \lim_{\xi_1, \xi_2 \to \xi} \oint_{L' - l'} \frac{\varphi[\alpha(\zeta)]\alpha'(\zeta)}{\alpha(\zeta) - \alpha(\xi)} d\zeta.$$

Зробивши підстановку $\zeta = \beta(\tau)$, де $\beta(\tau)$ – функція, зворотна для $\alpha(\zeta)$ (в силу умови теореми зворотна функція існує і однозначна), переконаємося, що права частина рівності співпадає з

$$\lim_{t_1, t_2 \to t} \oint_{L - l} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau.$$

Точки t_1 і t_2 розташовані на L вже не симетрично відносно точки t, але вони, як ми зараз доведемо, задовольняють умові

$$\lim_{t_1,t_2\to t}\left|\frac{t_2-t}{t_1-t}\right|=1.$$

Розкладаючи функцію $\alpha(\zeta)$ в точці ξ в ряд Тейлора і обмежуючись двома першими членами, отримуємо:

$$t_2=\alpha(\xi_2)=t+[\alpha'(\xi)+\varepsilon_2(\xi_2,\xi)](\xi_2-\xi),$$
$$t_1=\alpha(\xi_1)=t+[\alpha'(\xi)+\varepsilon_1(\xi_1,\xi)](\xi_1-\xi),$$

де в силу припущеної неперервності $\alpha'(\zeta)$, ε_1 і ε_2 прямують до нуля, при $\xi_1,\xi_2\to\xi$. Тоді

$$\left|\frac{t_2-t}{t_1-t}\right|=\left|\frac{\alpha'(\xi)+\varepsilon_2}{\alpha'(\xi)+\varepsilon_1}\right|\left|\frac{\xi_2-\xi}{\xi_1-\xi}\right|.$$

і, отже,

$$\lim_{t_1,t_2\to t}\left|\frac{t_2-t}{t_1-t}\right|=\lim_{\xi_1,\xi_2\to\xi}\left|\frac{\xi_2-\xi}{\xi_1-\xi}\right|=1.$$

У силу зауваження, зробленого на початку пункту, теорема доведена.

Умова взаємної однозначності перетворення істотна, хоча, втім, немає потреби її особливо підкреслювати, так як вона є істотною і для звичайного інтеграла.

Теорема 3.2 (інтегрування частинами) [14] Якщо $\varphi(\tau)$ – неперервно диференційовна функція і точка t не співпадає з кінцями контура L (a і b), то справедлива наступна формула інтегрування частинами:

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = \pm i\pi\varphi(t) + \varphi(b)\, ln(\, b - t) - \varphi(a)\, ln(\, a - t) -$$

$$- \int_L \varphi'(\tau)\, ln(\, \tau - t) d\tau. \qquad (4.2)$$

Доведення [14]. У першого члена беремо знак плюс, якщо розріз, який сполучає точку t з нескінченно віддаленою точкою, за допомогою якого виділяється однозначна гілка $ln(\, \tau - t)$, проведений справа від L, і знак мінус – в іншому випадку.

При доведенні виходимо із інтеграла правої частини

$$\int_L \varphi'(\tau)\, ln(\, \tau - t) d\tau.$$

Останній має сенс як невласний. Для його означення можна вирізати окіл точки t будь-яким способом. Зробимо це так, як при означенні головного значення

$$\int_L \varphi'(\tau)\, ln(\, \tau - t) = \lim_{\rho \to 0} \left[\int_a^{t_1} \varphi'(\tau)\, ln(\, \tau - t) d\tau + \int_{t_2}^{b} \varphi'(\tau)\, ln(\, \tau - t) d\tau \right].$$

Провівши інтегрування частинами в звичайних інтегралах, які стоять в квадратних дужках, будемо мати:

$$\int_a^{t_1} \varphi'(\tau)\, ln(\, \tau - t) d\tau + \int_{t_2}^{b} \varphi'(\tau)\, ln(\, \tau - t) d\tau =$$

$$= \varphi(b)\, ln(\, b - t) - \varphi(a)\, ln(\, a - t) + \varphi(t_1)\, ln(\, t_1 - t) -$$

$$- \varphi(t_2)\, ln(\, t_2 - t) - \int_a^{t_1} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau - \int_{t_2}^{b} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau.$$

Переходячи до границі при $\rho \to 0$, знаходимо, що перші два члена залишаються незмінними; останні два в сумі дають інтеграл

$$-\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau,$$

зрозумілий як головне значення. Для знаходження границі інших доданків зробимо наступне перетворення:

$$\varphi(t_1)\, ln(\, t_1 - t) - \varphi(t_2)\, ln(\, t_2 - t) = \varphi(t)[ln(\, t_1 - t) - ln(\, t_2 - t)] +$$
$$+[\varphi(t_1) - \varphi(t)]\, ln(\, t_1 - t) - [\varphi(t_2 - \varphi(t)]\, ln(\, t_2 - t).$$

Функція $\varphi(t)$, як неперервно диференційовна, задовольняє умову Ліпшиця. Звідси на основі того, що $\lim\limits_{x\to 0} x\, ln\, x = 0$, отримуємо, що границі останніх двох доданків рівності будуть дорівнювати нулю.

Границя $ln(\, t_1 - t) - ln(\, t_2 - t)$ буде дорівнювати $+\mathrm{i}\pi$, якщо розріз йде справа від L, і дорівнюватиме $-\mathrm{i}\pi$ в іншому випадку. Теорема доведена.

Якщо L замкнутий контур $(a = b)$, то формула (3.2) спрощується:

$$\oint_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = +i\pi\varphi(t) - \oint_L \varphi'(\tau)\, ln(\, \tau - t) d\tau. \qquad (3.3)$$

3.2 Приклади застосування правила заміни змінних

Спочатку розглянемо два можливих випадки заміни змінної, яка призводить або до повороту контура, або до його перенесення.

Припустимо, що інтеграл вимагає заміни $\tau = e^{i\lambda}\zeta = \alpha(\zeta)$, де $\lambda \in (0, \pi)$. Ця заміна переводить контур L' в контур L, який є результатом повороту контура

L' на кут λ. Зробимо перетворення множника під знаком інтеграла в правій частині формули (3.1)

$$\frac{\alpha'(\zeta)}{\alpha(\zeta)-\alpha(\xi)}=\frac{e^{i\lambda}}{e^{i\lambda}\zeta-e^{i\lambda}\xi}=\frac{1}{\zeta-\xi}.$$

Тоді за теоремою 3.1

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau=\frac{1}{2\pi i}\oint_{L'}\frac{\varphi[\alpha(\zeta)]\alpha'(\zeta)}{\alpha(\zeta)-\alpha(\xi)}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\oint_{L'}\frac{\varphi[\alpha(\zeta)]d\zeta}{\zeta-\xi}. \qquad (3.4)$$

Застосуємо формулу (3.4) для розв'язання декількох прикладів.

Приклад 3.1 Обчислити криволінійний інтеграл

$$\Phi(\xi)=\frac{1}{2\pi i}\oint_L\frac{\left(e^{3i\lambda}\,\zeta^3+e^{2i\lambda}\,\zeta^2+1\right)d\zeta}{(9e^{2i\lambda}\,\zeta^2+1)(\zeta-\xi)}.$$

де контур $L'=\{\xi\in\mathbb{C}\colon|\xi|=1\}$, а $\lambda\in(0,\pi)$.

Розв'язання. Застосуємо правило заміни змінних (теорема 3.1). Заміна $\tau=e^{i\lambda}\zeta=\alpha(\zeta)$ переводить L' в себе, тобто в $L=\{t\in C\colon|t|=1\}=L'$. Для функції $\varphi(\tau)=\frac{\tau^3+\tau^2+1}{9\tau^2+1}$ маємо $\varphi[\alpha(\zeta)]=\frac{e^{3i\lambda}\zeta^3+e^{2i\lambda}\zeta^2+1}{9e^{2i\lambda}\zeta^2+1}$, тоді за формулою (3.4)

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_L\frac{\tau^3+\tau^2+1}{9\tau^2+1}\cdot\frac{d\tau}{\tau-t}=\frac{1}{2\pi i}\oint_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{L'}\frac{\varphi[\alpha(\zeta)]}{\zeta-\xi}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\oint_{L'}\frac{e^{3i\lambda}\,\zeta^3+e^{2i\lambda}\zeta^2+1}{9e^{2i\lambda}\,\zeta^2+1}\cdot\frac{d\zeta}{\zeta-\xi}.$$

Отже,

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{e^{3i\lambda}\,\zeta^3 + e^{2i\lambda}\,\zeta^2 + 1}{9e^{2i\lambda}\,\zeta^2 + 1}\cdot\frac{d\zeta}{\zeta - \xi} =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{\tau^3 + \tau^2 + 1}{9\tau^2 + 1}\cdot\frac{d\tau}{\tau - t} = \Phi\left(e^{-i\lambda}t\right) = F(t).$$

Обчислення зведено до інтеграла із прикладу 2.2, де було отримано

$$F(t) = \frac{1}{18}\ t + \frac{1}{18} + \frac{-t+8}{18(9t^2+1)}.$$

Оскільки $t = e^{i\lambda}\xi$, то

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{18}\ e^{i\lambda}\xi + \frac{1}{18} + \frac{-e^{i\lambda}\xi + 8}{18(9e^{2i\lambda}\,\xi^2 + 1)}.$$

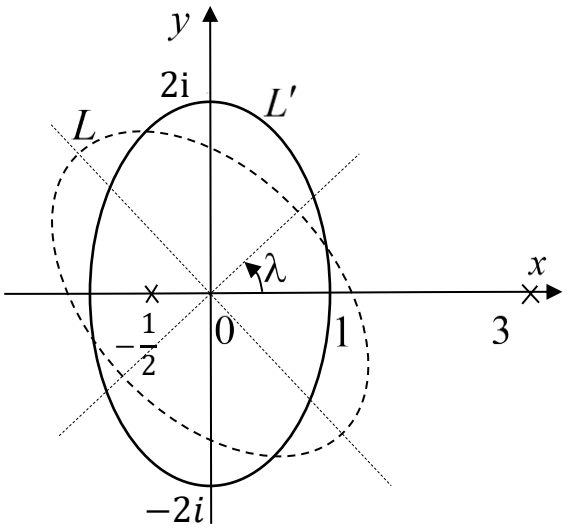


Рисунок 3.1

Приклад 3.2 Обчислити сингулярний інтеграл

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{L'} \frac{2e^{i\lambda}\zeta + 5}{(2e^{i\lambda}\zeta + 1)(e^{i\lambda}\zeta - 3)} \cdot \frac{d\zeta}{\zeta - \xi},$$

де $L' = \left\{t = x + iy : x^2 + \frac{y^2}{4} = 1\right\}$, $\lambda \in (0, \pi)$.

Розв'язання. Застосуємо правило заміни змінних (теорема 3.1). Заміна $\tau = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda}\zeta$ переводить контур L' в контур L, який являє собою еліпс повернутий на кут $\lambda \in (0, \pi)$, в середині якого залишається точка $z_1 = \frac{1}{2}$, а зовні – точка $z_2 = 3$ (рис. 3.1).

Для функції $\varphi(\tau) = \frac{2\tau+5}{(2\tau+1)\,(\tau-3)}$ маємо $\varphi[\alpha(\zeta)] = \frac{2e^{i\lambda}\zeta+5}{(2e^{i\lambda}\zeta+1)(e^{i\lambda}\zeta-3)}$, тому

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{2\tau+5}{(2\tau+1)\ (\tau-3)}\cdot\frac{d\tau}{\tau-t}=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{L'} \frac{\varphi[\alpha(\zeta)]}{\zeta-\xi}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\oint_{L'} \frac{2e^{i\lambda}\zeta+5}{(2e^{i\lambda}\zeta+1)(e^{i\lambda}\zeta-3)}\cdot\frac{d\zeta}{\zeta-\xi}.$$

Отже,

$$\Phi(\xi)=\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{2e^{i\lambda}\zeta+5}{(2e^{i\lambda}\zeta+1)(e^{i\lambda}\zeta-3)}\cdot\frac{d\zeta}{\zeta-\xi}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{2\tau+5}{(2\tau+1)\ (\tau-3)}\cdot\frac{d\tau}{\tau-t}=\Phi\left(e^{-i\lambda}t\right)=F(t).$$

Обчислення зведено до інтеграла із прикладу 2.3, де було отримано

$$F(t)=\frac{4}{14(t-3)}+\frac{8}{14(2t+1)}.$$

Зведемо до спільного знаменника F(t):

$$F(t)=\frac{2}{7}\cdot\frac{4t-5}{(t-3)(2t+1)}.$$

Оскільки $t=e^{i\lambda}\xi$, то

$$\Phi(\xi)=\frac{2}{7}\cdot\frac{4e^{i\lambda}\xi-5}{(e^{i\lambda}\xi-3)(2e^{i\lambda}\xi+1)}.$$

Відповідь:

$$\Phi(\xi)=\frac{2}{7}\cdot\frac{4e^{i\lambda}\xi-5}{(e^{i\lambda}\xi-3)(2e^{i\lambda}\xi+1)}.$$

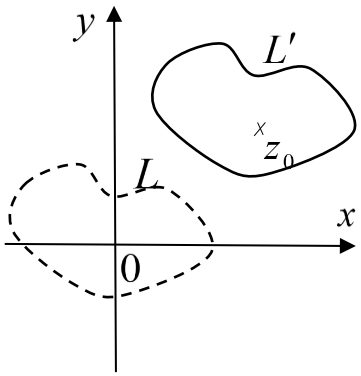


Рисунок 3.2

Тепер розглянемо приклад щодо застосування правила заміни, яка переміщує контур L', що містить всередині себе точку $z = z_0$, в контур L, що містить всередині себе точку $z = 0$. Такою заміною є $\tau = \zeta - z_0 = \alpha(\zeta)$. Тоді

$$\frac{\alpha'(\zeta)}{\alpha(\zeta) - \alpha(\xi)} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (\xi - z_0)} = \frac{1}{\zeta - \xi}.$$

За теоремою 3.1,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau = \frac{1}{2\pi i}\oint_{L'} \frac{\varphi[\alpha(\zeta)]\alpha'(\zeta)}{\alpha(\zeta) - \alpha(\xi)}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\oint_{L'} \frac{\varphi[\zeta - z_0]d\zeta}{\zeta - \xi}. \qquad (3.5)$$

Застосуємо формулу (3.5) для розв’язання наступного прикладу

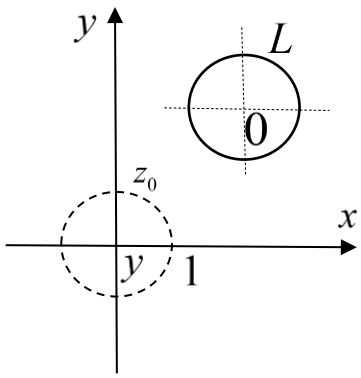


Рисунок 3.3

Приклад 3.3 Обчислити сингулярний криволінійний інтеграл

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{L'} \frac{(\zeta - z_0)d\zeta}{sin(\zeta - z_0)(\zeta - \xi)},$$

де $L' = \{\xi \in \mathbb{C}: |\xi - z_0| = 1\}$.

Розв’язання. Застосуємо правило заміни змінних (теорема 3.1). Заміна $\tau = \zeta - z_0$ переводить контур L' в контур L, що є одиничним колом, тобто $L = \{t \in \mathbb{C}: |t| = 1\}$. Використовуючи формулу (3.5), отримуємо:

$$\Phi(\xi) = \Phi(t - z_0) = F(t) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{\tau}{\sin\tau}\frac{d\tau}{\tau - t}.$$

Обчислення зведено до інтеграла із прикладу 2.4, де було отримано

$$F(t) = \frac{t}{2\sin t}.$$

Оскільки $t = \xi - z_0$, то

$$\Phi(\xi) = \frac{\xi - z_0}{2\,sin(\xi - z_0)}.$$

3.3 Приклади застосування правила інтегрування частинами

Спочатку розглянемо два можливих випадки інтегрування частинами.

Якщо $\varphi(t)$ є граничним значенням на контурі L, аналітичної в D^+ функції $\varphi(z)$, і при цьому $\varphi(z)$ – неперервна на $L \cup D^+$, то

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau = \begin{cases}\varphi(z), & z \in D^+;\\ 0, & z \in D^-,\end{cases}$$

а за формулами Сохоцького

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau = \frac{1}{2}\varphi(t).$$

Тоді за правилом інтегрування частинами (теорема 3.2)

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_L \varphi'(\tau)\,ln(\tau - t)\,d\tau = \frac{1}{2}\varphi(t) - \Phi(t) = \frac{1}{2}\varphi(t) - \frac{1}{2}\varphi(t) = 0. \qquad (3.6)$$

Якщо ж $\varphi(t)$ є граничним значення на контурі L, аналітичної в D^- функції $\varphi(z)$, а $\varphi(z)$ – неперервна на $L \cup D^-$, то

$$\Phi(z) = \begin{cases} \varphi(\infty), & z \in D^+; \\ \varphi(\infty) - \varphi(z), & z \in D^-; \end{cases}$$

$$\Phi(t) = \frac{1}{2}\big(\varphi(\infty) + \varphi(\infty) - \varphi(z)\big) = \varphi(\infty) - \frac{1}{2}\varphi(z).$$

У цьому випадку правило інтегрування частинами приводить до висновку:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_L \varphi'(\tau)\, ln(\tau - t)\, d\tau = \frac{1}{2}\varphi(t) - \Phi(t) = \frac{1}{2}\varphi(t) - \left(\varphi(\infty) - \frac{1}{2}\varphi(t)\right) =$$

$$= \varphi(t) - \varphi(\infty). \qquad (3.7)$$

Розглянемо приклад.

Приклад 3.4 Обчислити інтеграл

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{18\tau}{(9\tau^2 + 1)^2} \cdot ln(\tau - t)\ d\tau,$$

де $L = \{\tau: |\tau| = 1\}$.

Розв'язання. Щоб застосувати правило інтегрування частинами, потрібно обрати $\varphi'(z) = \frac{18z}{(9z^2+1)^2}$. Тоді $\varphi(z) = -\frac{1}{9z^2+1}$. Так як функція $\varphi(z)$ має особливі точки $z = \pm\frac{1}{3} \in D^+$, і $\varphi(\infty) = 1$, то з цього робимо висновок, що функція $\varphi(z)$ аналітична в D^-.

Отже, можна застосувати формулу (3.7). Маємо:

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{8\tau}{(4\tau^2 + 1)^2} \cdot ln(\tau - t)\ d\tau = -\frac{1}{9t^2 + 1} - 0 = -\frac{1}{9t^2 + 1}.$$

Приклад 3.5 Обчислити інтеграл

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{9\tau^4 + 3\tau^3 - 16\tau}{(9\tau^2+1)^2} \cdot ln(\tau - t)\ d\tau,$$

де $L = \{\tau: |\tau| = 1\}$.

Розв'язання. Оскільки $\varphi'(\tau) = \frac{9\tau^4+3\tau^3-16\tau}{(9\tau^2+1)^2}$, то $\varphi(\tau) = \frac{\tau^3+\tau^2+1}{9\tau^2+1}$. Застосуємо формулу (3.3), отримаємо

$$F(t) = \frac{1}{2}\varphi(t) - \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau = \frac{1}{2}\ \frac{t^3+t^2+1}{9t^2+1} - \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{(\tau^3+\tau^2+1)d\tau}{(9\tau^2+1)(\tau - t)}.$$

Обчислення зведено до інтеграла знайденого в прикладі 2.2. Знаючи це, приходимо до висновку

$$F(t) = \frac{1}{2}\cdot\ \frac{t^3+t^2+1}{9t^2+1} - \left(\frac{1}{18}\ t + \frac{1}{18} + \frac{t-8}{18(9t^2+1)}\right) =$$

$$= -\frac{1}{9}\cdot\frac{t-8}{9t^2+1}.$$

4 ДЕЯКІ ВИПАДКИ ОБЧИСЛЕННЯ СИНГУЛЯРНОГО КРИВОЛІНІЙНОГО ІНТЕГРАЛА НА РОЗІМКНЕНОМУ КОНТУРІ

4.1 Попередні зауваження

Будемо розглядати сингулярний криволінійний інтеграл $\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t}$ вздовж розімкненого контура $L = \cup ab, \quad t \neq a,\ b$

Нехай функція щільності $\varphi(\tau)$ сингулярного криволінійного інтеграла є раціональною функцією $R(\tau)$. Виділимо підінтегральну функцію $R(\tau) \cdot \frac{1}{\tau - t}$. Розглянемо випадок, коли підінтегральна функція допускає розклад у вигляді суми цілої частини і правильних дробів , однією з яких є $\frac{1}{\tau - t}$:

$$R(\tau) \cdot \frac{1}{\tau - t} = P(\tau, t) + \frac{A_1(t)}{\tau - a_1} + \frac{A_2(t)}{\tau - a_2} + \cdots + \frac{A_n(t)}{\tau - a_n} + \frac{A_{n+1}(t)}{\tau - t}.$$

Якщо точка a_k лежить на контурі, тоді інтеграл для відповідного правильного дробу можна обчислити за допомогою формул (2.3) або (2.4). Якщо точка a_k не лежить на контурі, то інтеграл від такого правильно дробу, а також інтеграл від цілої частини (многочлена) обчислюється безпосередньо з використанням первісної.

4.2 Приклади обчислення сингулярного криволінійного інтеграла на розімкнутому контурі

Приклад 4.1 Нехай L – ліва частина кола $\{\tau: |\tau| = 1\}$, від точки $a = i$ до точки $b = -i$. Обчислити сингулярний інтеграл

$$\Phi(\tau) = \int_L \frac{\tau^2}{\tau^3 - 1} d\tau.$$

Розв'язання. Аналогічний інтеграл уже було розглянуто у прикладі 2.5 на зімкненому контурі. Зокрема там було отримано розклад підінтегральної функції

$$\frac{\tau^2}{\tau^3 - 1} = \frac{\frac{1}{3}}{\tau - 1} + \frac{\frac{1}{3}}{\tau - \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} + \frac{\frac{1}{3}}{\tau - \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}.$$

Розглянемо інтеграл $\int_L \frac{\frac{1}{3}}{\tau - 1} d\tau$ від першої функції розкладу. Оскільки точка $\tau = 1$ не лежить на контурі, то цей інтеграл обчислюється безпосередньо:

$$\int_L \frac{\frac{1}{3}}{\tau - 1} d\tau = \frac{1}{3} ln(\tau - 1)\Big|_i^{-i} = \frac{1}{3} ln(-i - 1) - \frac{1}{3} ln(i - 1) =$$
$$= \frac{1}{3} ln \frac{-i - 1}{i - 1} = \frac{1}{3} ln\, i = \frac{1}{3}(ln|i| + i\, arg\, i) = \frac{i\pi}{6}.$$

Для інтеграла від другої та третьої функцій розкладу точки $\tau = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$ належать контуру і є його точками гладкості, тому інтеграли $\frac{1}{3}\int_i^{-i} \frac{d\tau}{\tau - \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i}$ обчислимо за формулою (2.3):

$$\int_i^{-i} \frac{d\tau}{\tau - \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)} = ln \frac{-i - \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)}{i - \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)} + i\pi.$$

Тоді

$$\Phi(\tau)=\frac{i\pi}{6}+\frac{1}{3}ln\frac{-i-\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{i-\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}+\frac{1}{3}ln\frac{-i-\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{i-\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}+\frac{2}{3}i\pi=$$

$$=\frac{5\pi}{6}i+\frac{1}{3}ln\left(\frac{-i-\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{i-\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}\ \frac{-i-\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{i-\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}\right)=$$

$$=\frac{5\pi}{6}i+\frac{1}{3}\ln(-1)=\frac{5\pi}{6}i+\frac{1}{3}(\ln|-1|+i\arg(-1))=\frac{5\pi}{6}i+\frac{\pi}{3}i=\frac{7\pi}{6}i.$$

Відповідь.

$$\Phi(\tau)=\int_L\frac{\tau^2}{\tau^3-1}d\tau=\frac{7\pi}{6}i.$$

Приклад 4.2 Обчислити інтеграл

$$\Phi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\tau^3+2\tau}{(\tau-1)(\tau-t)}d\tau,\ \ t\in L,\ \ t\neq\pm i,$$

де L – права частина кола $\{\tau\colon|\tau|=1\}$, від точки $a=-i$ до точки $b=i$.

Розв'язання. Розвинемо підінтегральну функцію в суму цілої частини і правильних дробів:

$$\frac{\tau^3+2\tau}{(\tau-1)(\tau-t)}=\tau+(t+1)+\frac{3}{1-t}\cdot\frac{1}{\tau-1}+\frac{t^3+2t}{t-1}\cdot\frac{1}{\tau-t}.$$

Тоді

$$\Phi(t)=\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{-i}^{i}\tau d\tau+(t+1)\int_{-i}^{i}d\tau+\frac{3}{1-t}\int_{-i}^{i}\frac{d\tau}{\tau-1}+\frac{t^3+2t}{t-1}\int_{-i}^{i}\frac{d\tau}{\tau-t}\right).$$

Перший і другий інтеграли обчислимо безпосередньо за допомогою первісної, а третій і четвертий, що залежать від точок гладкості, за допомогою формули (2.3):

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-i}^{i}\tau d\tau = \frac{1}{2\pi i}\frac{\tau^2}{2}\Big|_{-i}^{i} = \frac{-1}{4\pi i} - \frac{-1}{4\pi i} = 0;$$

$$\frac{1}{2\pi i}(t+1)\int_{-i}^{i} d\tau = \frac{1}{2\pi i}(t+1)\ \tau|_{-i}^{i} = (t+1)\frac{1}{2\pi i}\big(i-(-i)\big) = \frac{t+1}{\pi};$$

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{3}{1-t}\int_{-i}^{i}\frac{d\tau}{\tau-1} = \frac{1}{2\pi i}\frac{3}{1-t}\left(ln\frac{-i-1}{i-1}+i\pi\right) = \frac{1}{2\pi i}\frac{3}{1-t}(ln\, i + i\pi) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\frac{3}{1-t}\left(\frac{i\pi}{2}+i\pi\right) = \frac{1}{4}\frac{9}{1-t};$$

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{t^3+2t}{t-1}\int_{-i}^{i}\frac{d\tau}{\tau-t} = \frac{1}{2\pi i}\frac{t^3+2t}{t-1}\left(ln\frac{i-t}{-i-t}+i\pi\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\frac{t^3+2t}{t-1}\left(ln\frac{t-i}{t+i}+i\pi\right).$$

Отже,

$$\Phi(t) = \frac{t+1}{\pi} + \frac{1}{4}\frac{9}{1-t} + \frac{1}{2\pi i}\frac{t^3+2t}{t-1}\left(ln\frac{t-i}{t+i}+i\pi\right).$$

Приклад 4.3 Обчислити інтеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\tau^2}{\tau-t}d\,\tau.$$

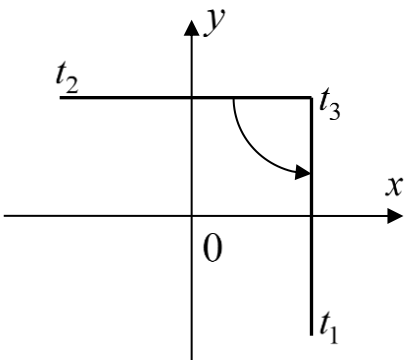


Рисунок 4.1

де L – ламана, зображена на рисунку 4.1.

Розв'язання. З урахуванням формул (2.3) і (2.4), а також значення кута в ~~кутовій~~ точці $\alpha = \frac{\pi}{2}$, отримаємо:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\tau^2}{\tau - t}\,d\,\tau = \frac{1}{2\pi i}\int_{t_1}^{t_3} \tau d\tau + t\frac{1}{2\pi i}\int_{t_3}^{t_2} d\tau + t^2\frac{1}{2\pi i}\int_{t_1}^{t_2} \frac{d\tau}{\tau - t} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{\tau^2}{2}\Big|_{t_1}^{t_3} + t\tau|_{t_3}^{t_2}\right) + \begin{cases} \dfrac{t^2}{2\pi i}\left(ln\dfrac{t_2 - t}{t_1 - t} + i\pi\right), & t \neq t_3, \\ \dfrac{t^2}{2\pi i}\left(ln\dfrac{t_2 - t_3}{t_1 - t_3} + i\dfrac{\pi}{2}\right), & t = t_3. \end{cases} =$$

$$= 0 + \frac{1}{2\pi i}(2i - 2)t + \begin{cases} \dfrac{t^2}{2\pi i} ln\dfrac{t_2 - t}{t_1 - t} + \dfrac{t^2}{2}, & t \neq t_3, \\ \dfrac{t^2}{2\pi i} ln\dfrac{t_2 - t_3}{t_1 - t_3} + \dfrac{t^2}{4}, & t = t_3. \end{cases}$$

Спростимо отримані значення. Для цього розглянемо випадки розташування точки t. Якщо $t \in \cup\, t_1t_3$, то $t = 1 + iy$. Тоді $\frac{t_2 - t}{t_1 - t} = \frac{-2i - 1 + y}{1 + y}$. Якщо ж $t \in \cup\, t_2t_3$, то $t = x + i$. Тоді $\frac{t_2 - t}{t_1 - t} = \frac{1 + x}{-1 + x + 2i}$. Крім того,

$$ln\frac{t_2 - t_3}{t_1 - t_3} = \ln(-i) = \ln|-i| + i\arg(-i) = 0 - \frac{\pi}{2}i.$$

Отже

$$\Phi(t) = \begin{cases} \dfrac{1 + i}{\pi}t + \dfrac{t^2}{2\pi i} ln\dfrac{-2i - 1 + y}{1 + y} + \dfrac{t^2}{2}, & t \in \cup\, t_1t_3; \\ \dfrac{1 + i}{\pi}t + \dfrac{t^2}{2\pi i} ln\dfrac{1 + x}{-1 + x + 2i} + \dfrac{t^2}{2}, & t \in \cup\, t_2t_3; \\ \dfrac{1 + i}{\pi}t - \dfrac{1}{4} + \dfrac{t^2}{4}, & t = t_3. \end{cases}$$

ВИСНОВКИ

Сингулярні інтеграли містяться в сингулярних інтегральних рівняннях. Такими рівняннями моделюється контактна взаємодія в плоскій постановці [5, 7, 13], деякі задачі математичної фізики, аеродинаміки, теорії пружності та дифракції хвиль [4, 14], деякі явища в електричних ланцюгах [6]. Інтеграл типу Коші і сингулярний інтеграл застосовується в теорії потенціалів [14]. Дослідження методів обчислення сингулярних інтегралів і методів розв'язання сингулярних інтегральних рівнянь проводиться наприклад, в роботі [11, 12, 15].

Однією з основних формул, на якій базуються точні методи обчислення сингулярного інтеграла, є формули Сохоцького для зімкненого контура. В роботі наведено приклади обчислення сингулярних інтегралів із застосуванням зазначеної формули.

В роботі також вивчаються властивості сингулярного інтеграла, а саме правила заміни та інтегрування частинами. Наведено приклади щодо застосування цих правил. Правило заміни в сингулярному інтегралі розглянуто в задачах де заміна призводить до повороту контура або його зсуву.

Якщо функція $\varphi(t)$ є граничним значенням деякої аналітичної функції в області D^+ точок, що лежать всередині зімкненого контура γ, і неперервної на множині $D^+ \cup \gamma$. У цьому випадку з використанням формули інтегрування частинами дійшли висновку що $\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \varphi'(\tau)\, ln(\tau - z)d\tau = 0$. Якщо функція $\varphi(t)$ є граничним значенням деякої аналітичної функції в області D^- точок, що лежать ззовні зімкненого контура γ, включаючи нескінченно віддалену точку, і неперервної на множині $D^- \cup \gamma$, тоді $\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \varphi'(\tau)\, ln(\tau - z)d\tau = \varphi(t) - \varphi(\infty)$. Наведено приклади щодо застосування зазначених висновків.

У випадку, коли контур є розімкненим, розглянуто приклади, що зводять обчислення сингулярного інтеграла до застосування формули

$$\oint_{\gamma} \frac{d\tau}{\tau - t} = \begin{cases} ln\dfrac{b-\tau}{a-\tau} + i\pi, & \text{якщо } t \text{ – точка гладкості контура;} \\ ln\dfrac{b-\tau}{a-\tau} + i\alpha, & \text{якщо } t \text{ – кутова точка контура.} \end{cases}$$

Тут t – точка контура, що не збігається з його кінцями.

Для подальшого дослідження може бути запропоновано вивчення методів обчислення сингулярних інтегралів вздовж дійсної осі, а також вздовж розімкненого контура, зокрема, відрізка дійсної осі.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Герус О. Ф. Оцінка модуля неперервності кватерніонного сингулярного інтеграла. Укр. мат. журн. 2010. Т. 62. №10. С.1428–1435. URL : http://dspace.nbuv.gov.ua/bitstream/handle/123456789/166277/13-Gerus.pdf?sequence=1 (дата звернення: 23.09.2024).

2. Гоменюк С. І., Гребенюк С. М., Д’яченко Н. М. Крайові задачі теорії аналітичних функцій : навчальний посібник для здобувачів вищої освіти магістра спеціальності «Математика» освітньо-професійної програми «Математика». Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2024. 107 с. URL : https://dspace.znu.edu.ua/xmlui/handle/12345/24057

3. Зражевський Г. М. Застосування теорії аналітичних функцій в задачах механіки : навчальний посібник. Київ : Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2005. 61 с.

4. Карлеман Т. Математичні задачі кінетичної теорії газів. Москва : Іноземна література, 1960. 125 с.

5. Козачок О. П., Мартиняк Р. М., Слободян Б. С. Взаємодія тіл з регулярним рельєфом за наявності міжконтактного середовища. Львів : Растр-7, 2018. 200 с. URL : http://surl.li/usdeo (дата звернення: 23.09.2024).

6. Кутень А., Обшта А., Стащук М. Деякі способи обчислення сингулярних інтегралів типу Коші, необхідних для діагностики струмопровідних матеріалів. Вимірювальна техніка та метрологія. 2008. № 68. С. 169-174.. URL : https://vlp.com.ua/files/34_23.pdf (дата звернення: 23.09.2024).

7. Мартиняк Р. М., Середницька Х. І. Контактні задачі термопружності для міжфазних тріщин в біматеріальних тілах. Львів : Растр-7, 2017. 168 с. URL : http://surl.li/usdex (дата звернення: 23.09.2024).

8. Сніжко Н. В., Тихоненко М. Я. Методи розв’язання крайових задач теорії аналітичних функцій : навч. посіб. зі спецкурсу "Крайові задачі теорії аналітичних функцій". Запоріжжя : ЗНУ, 2005. 69 с.

9. Халабуда Я. В., Кузнецова О. О., Д’яченко Н. М. Властивості сингулярних криволінійних інтегралів та їх застосування. Збірка тез Восьмої Всеукраїнської п’ятнадцятої регіональної конференції молодих дослідників «Актуальні проблеми математики та інформатики» (Запоріжжя, 27-28 квітня 2017). Запоріжжя, 2017. С.92-94.

10. Begehr H. Boundary value problems in complex analysis. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, Vol. XII, No. 1. 2005. P. 65-85. URL : http://emis.muni.cz/journals/BAMV/conten/vol12/Begehr-I.pdf (дата звернення: 23.09.2024).

11. Caixing Gu. Algebraic Properties of Cauchy Singular Integral Operators on the Unit Circle. *Taiwanese J. Math.* 2016. Vol. 20, No. 1. P. 161–189. URL : https://doi.org/10.11650/tjm.20.2016.6188 (дата звернення: 23.09.2024).

12. Chuan L. H., Mau N. V., Tuan N. M. On a class of singular integral equations with the linear fractional Carleman shift and the degenerate kernel. *Complex Var. Elliptic Equ.* 2008. Vol. 53, No. 2. P. 117-137. URL : https://doi.org/10.1080/17476930701619782 (дата звернення: 23.09.2024).

13. Dugienko O. E., Starovoitov O.V, Dyachenko N. M. Application of the riemann boundary value problems for solving some problems of contact mechanics. *XXX International scientific and practical conference «Actual Problems of Science and Technology – from Theory to Practice»: Collection of abstracts (July 3-5, 2024)* Bern : International Scientific Unity, 2024. P. 70–76. URL : http://surl.li/zmokld (дата звернення: 29.09.2024).

14. Gakhov F. D. Boundary Value Problems. Courier Corporation, 1990. 561 p. URL : http://surl.li/nwuwqg (дата звернення: 23.09.2024)

15. Li P. On solvability of singular integral-differential equations with convolution. Journal of Applied Analysis and Computation. 2019. Vol. 9. No. 3, June 2019. P. 1071–1082. URL : http://www.jaac-online.com/data/article/jaac/preview/pdf/jaac-9-3-1071.pdf (дата звернення: 23.09.2024).

16. Li P. R, Ren G. B. Some classes of equations of discrete type with harmonic singular operator and convolution. *Appl. Math. Comput*. 2016. Vol. 284. P.

185-194. URL : https://doi.org/10.1016/j.amc.2016.03.004 (дата звернення: 23.09.2024).

17. Nakazi T., Yamamoto T. Normal singular integral operators with Cauchy kernel. *Integral Equations Operator Theory*. 2014. Vol. 78. P. 233-248. URL : https://doi.org/10.1007/s00020-013-2104-y (дата звернення: 23.09.2024).

18. Plaksa S.A., Kud'yavina Y. Riemann boundary-value problem on an open rectifiable Jordan curve. II. *Ukr Math J*. 2011, Vol. 62. P. 1925–1940. URL : https://doi.org/10.1007/s11253-011-0480-5 (дата звернення: 23.09.2024).

19. Ramm Alexander G. Boundary values of analytic functions. *Far East Journ. of Appl. Math*. Vol. 116, No 3, 2023. P. 215-227. URL : http://surl.li/usfja (дата звернення: 23.09.2024).

20. Wang X., Du J. Periodic Riemann boundary value problem. *Complex Variables and Elliptic Equations*. 2022. Vol. 68. No. 7. P. 1077–1092. URL : https://doi.org/10.1080/17476933.2022.2035929 (дата звернення: 23.09.2024).

ДОДАТОК А

Функції, які задовольняють умові Гельдера

Наведено тут сідомі теоретичні матеріали, які є допомідним інструментом кваліфікаційної роботи [2, 8, 14]. Нехай γ – деякий спрямлюваний контур і $\phi(t)$ – функція точок контура γ. Говорять, що функція $\phi(t)$ задовольняє на контурі γ умову Гельдера, якщо існує така $K > 0$, і існує $\lambda > 0$, для будь-яких двох точок t_1 і t_2 контура γ виконується нерівність

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leq K|t_1 - t_2|^{\lambda}, \tag{A.1}$$

де K та λ – додатні сталі.

Твердження А.1 [2, 14] Якщо функція $\phi(t)$ на спрямлюваному контурі γ задовольняє умову Гельдера, то вона на контурі γ неперервна.

Твердження А.2 [2, 14] Нехай функція $\phi(t)$ задовольняє умову Гельдера (А.1) на спрямлюваному контурі γ. Якщо показник степеня λ в нерівності (А.1), більший за 1, тоді функція $\phi(t)$ є сталою на цьому контурі .

Твердження А.3 Якщо функції $\varphi(t), \psi(t)$ задовольняють умову Гельдера на спрямлюваному контурі γ з показником λ, то функція $\alpha\varphi(t) + \beta\psi(t)$ також задовольняє умову Гельдера на контурі γ з показником λ.

Отже, множина функцій, що задовольняють умову Гельдера на спрямлюваному контурі γ з показником $\lambda \in (0,1]$ утворює лінійний простір. Його позначають $H_\lambda(\gamma)$.

Твердження А.4 Якщо $\lambda < \lambda_1$ і $\phi(t) \in H_{\lambda_1}(\gamma)$, то $\phi(t) \in H_\lambda(\gamma)$, тобто $H_{\lambda_1}(\gamma) \subset H_\lambda(\gamma)$.

Декларація

академічної доброчесності

здобувача ступеня вищої освіти ЗНУ

Я, Хрестян Вікторія Сергіївна, студентка 2 курсу, заочної форми навчання, математичного факультету, спеціальність 111 Математика, адреса електронної пошти khrestyan2005@gmail.com,

– підтверджую, що написана мною кваліфікаційна робота на тему «Застосування властивостей сингулярних криволінійних інтегралів від функцій комплексної змінної» відповідає вимогам академічної доброчесності та не містить порушень, що визначені у ст. 42 Закону України «Про освіту», зі змістом яких ознайомлена;

– заявляю, що надана мною для перевірки електронна версія роботи є ідентичною її друкованій версії;

– згодна на перевірку моєї роботи на відповідність критеріям академічної доброчесності у будь – який спосіб, у тому числі за допомогою інтернет – системи, а також на архівування моєї роботи в базі даних цієї системи.

Студент

_____	_____	_____
(дата)	(підпис)	(ініціали, прізвище)

Науковий керівник

_____	_____	_____
(дата)	(підпис)	(ініціали, прізвище)